

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCLIDIS
ELEMENTA

GRAECE ET LATINE.

COMMENTARIIS INSTRUCTA

EDIDERUNT

IOANNES GUILIELMUS CAMERER

ET

CAROLUS FRIDERICUS HAUBER.

BEROLINI
SUMTIBUS G. REIMERI
MDCCCXXV.

611h10
EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES

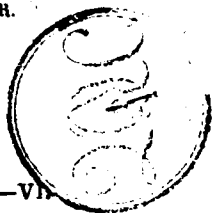
GRAECE ET LATINE

COMMENTARIO E SCRIPTIS VETERUM AC RECEN-
TIORUM MATHEMATICORUM ET PFLEIDERERI
MAXIME ILLUSTRATI.

EDIDIT

IOANNES, GUILIELMUS CAMERER

MONASTII STUTTGARDIANI RECTOR.



LIBR. COMPLECTENS LIBR. IV-VII

CUM VI. TABULIS.

BEROLINI

SUMTIBUS G. REIMERI

MDCCCXXV.



E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
L I B R I S E X P R I O R E S.

Ε Τ Κ Α Ε Ι Δ Ο Τ
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Ο Ρ Ο Ι.

α. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται.

β. Σχήμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

γ. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἀπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας.

δ. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας ¹⁾.

ε. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται ²⁾.

1) Ita rectius omnino cum Cod. a. legit Peyrardus. Prior editiones habebant: ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

2) Si vera sunt, quae e Rob. Simson. ad III. Def. 2. notavimus, hic legendum fuerit ἐφάπτηται.

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.



1. **F**igura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptae figurae angulus tangit unumquodque latus eius, in qua inscribitur.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae tangit unumquemque angulum eius, circa quam circumscribitur.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus circumscriptae tangit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circulum circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figura similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latus eius, in qua inscribitur contingit.

DEFIN.

Obs. Campanus habet tantum duas primas huius libri definitiones. At illae ipsae nusquam adhibentur. Hinc du-

ς. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκείτης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπταιται.

ζ. Εὐθεία εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὐσῇ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ABΓ$, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεία μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἢ $Δ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλον τῇ $Δ$ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἦχθω τοῦ $ABΓ$ κύκλου διάμετρος ἡ $ΒΓ$. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἔστιν ἡ $ΒΓ$ τῇ $Δ$, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν ἐνηρμόσται γὰρ εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλον τῇ

bium videri possit, annon serius adiectae fuerint ad analogiam sequentium.

PROPOSITIO I.

Obs. Quum punctum F in circumferentia pro lubitu sumi queat, patet, innumeris modis problema solvi posse, nisi nova adhuc determinatio accedat. Eiusmodi determinatio ea esse potest, si punctum F datum esse sumere velis. Verum, etiam hoc sumto, duplex tamen, quod et Commandinus monuit, solutio locum habebit: aequae enim ducta recta FZ ad punctum Z , in quo circuli iterum sibi occurrunt, problemati satisfaciet, ac recta FA . Alia determinatio haec esse poterit, ut recta circulo inscribenda vel ipsa, vel producta, per datum punctum transeat, quod non sit in circuli circumferentia; vel ut illa parallela sit rectae positione datae. Et,

6. Circulus autem circa figuram circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius, circa quam circumscribitur, tangit.

7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini eius in circumferentia sunt circuli.

PROPOSITIO I. (Fig. 283.)

In dato circulo datae rectae, quae non maior sit diametro circuli, aequalem rectam aptare.

Sit datus circulus ABF , data autem recta Δ non maior circuli diametro, oportet igitur in circulo ABF rectae Δ aequalem rectam aptare.

Ducatur circuli ABF diameter BF . Si quidem igitur BF aequalis est Δ , factum erit propositum. Aptata est enim in circulo ABF , BF rectae Δ ae-

si quidem illud postuletur, ut recta circulo dato inscribenda per datum punctum transeat, problema unum ex iis est, quae Pappo testante in Praefat. ad libr. VII. Collect. Math. Apollonius in libris *περὶ νεύσεων* tractavit. (Cf. Apollonii Pergaei Inclinat. Libri duo ed. Horsley Oxon. 1770. et: Die Bücher des Apollonius von Perga de Inclinationibus von Diesterweg Berlin. 1823.). Et particulare illud problema facile solvetur sequentem in modum.

Anal. Puta factum, et Fig. 284. recta AB , quae aequalis sit rectae datae Δ diametro non maiori, inscripta sit circulo dato ABZ , eaque ipsa aut producta per datum punctum F transeat, quod non sit in circuli dati circumferentia, Et 1) quidem, si recta data sit aequalis diametro circuli, recta circulo inscribenda erit diameter per datum punctum ducta. Si autem non fuerit diameter, erit ex hyp. minor diametro,

Δ εὐθεία ἴση ἢ $B\Gamma$. Εἰ δὲ οὐ μείζων ἐστὶν ἢ $B\Gamma$ τῆς Δ , καὶ κείσθω ¹⁾ τῇ Δ ἴση ἢ ΓE , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ , διαστήματι δὲ τῷ ΓE κύκλος γεγράφθω ὁ AEZ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓA .

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ AEZ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓA τῇ ΓE . Ἀλλὰ τῇ Δ ἢ ΓE ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓA ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν $AB\Gamma$, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ²⁾, μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓA . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $AB\Gamma$, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ $\Delta E Z$ · δεῖ δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον τῷ $\Delta E Z$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

1) Peyrardus cum Cod. a legit: εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἢ $B\Gamma$ τῆς Δ , κείσθω. Nos restituimus lectionem ed. Oxon.

2) Peyrardus cum Cod. a. omittit verba μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου et eorum loco ponit τῇ Δ : nos ista verba, quae necessariam omnino determinationem continent, restituimus.

adeoque extra centrum E transibit (III. 15.). Demissa igitur in eam e centro perpendicularis $E\Theta$ eam bisecabit (III. 3.), adeoque, ob datam AB , data erit dimidia $A\Theta$, adeoque data erit, vel inveniri poterit in triangulo ad Θ rectangulo $A\Theta E$, in quo etiam EA datur, recta $E\Theta$ (I. 47. Cor. 20.) vel distantia, qua recta AB a centro E abest, vel, ut aliter dicamus, notum erit, in qua distantia a centro E situm esse debeat punctum Θ , nempe in circulo centro E , radio $E\Theta$ descripto. (Quod ipsum brevius e III. 15. Cor. derivari poterat.). Qui circulus si describatur, continget eum recta AB

qualis. Sin minus, maior est BF ipsa Δ , et ponatur ipsi Δ aequalis FE (I. 3.), et centro F , intervallo vero FE , circulus describatur AEZ (Post. 3.), et iungatur FA .

Quoniam igitur punctum F centrum est circuli AEZ , aequalis est FA ipsi FE . Sed FE ipsi Δ est aequalis; et Δ igitur ipsi FA est aequalis.

In dato igitur circulo ABF , datae rectae, quae non maior est diametro circuli, aequalis aptata est FA . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO II. (Fig. 285.)

In dato circulo inscribere triangulum aequiangulum dato triangulo.

Sit datus circulus ABF , datum vero triangulum AEZ ; oportet in circulo ABF triangulo AEZ aequiangulum triangulum inscribere.

in Θ (III. 16.), [adeoque tota extra eum posita erit. Unde, ut recta AB transire possit per punctum datum F , necesse est, ut punctum F non sit intra circulum centro E , radio $E\Theta$, descriptum. Quodsi non fuerit, problema reductum est ad hoc: e puncto dato F , quod non sit intra circulum datum, ducere ad hunc circulum rectam, quae eum contingat, i. e. ad III. 17.

Compositio problematis itaque huc redit. Si recta data Δ aequalis sit diametro circuli dati, ducatur per punctum datum F diameter circuli. (Punctum nempe F a centro E diversum esse sumitur, quodsi non foret, quaevis diameter problemati satisfaceret.). Sin autem recta data minor sit diametro circuli dati, sumatur in circumferentia circuli punctum quodcunque H , et ex IV. 1. circulo inscribatur recta $HK = \Delta$, et, demisso in HK perpendicularo BI , centro E , radio EI , describatur circulus. Quodsi iam punctum datum F sit intra hunc circu-

Ἦχθω τοῦ $ABΓ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ $HΘ$ κατὰ τὸ A , καὶ συνεστώτω πρὸς μὲν τῇ $AΘ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ $ΘΑΓ$ πρὸς δὲ τῇ HA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ HAB , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $BΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ABΓ$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἢ $ΘΑ$, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διήκται εὐθεῖα ἢ $ΑΓ$ ἢ ἄρα ὑπὸ $ΘΑΓ$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλαξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ $ABΓ$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΘΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἴσιν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ $ABΓ$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἴσιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ ἴσιν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΕΖΔ$ ἴσιν ἴση ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλον.

lum, problema solvi nequit. Si autem HK transeat per punctum Γ , factum erit, quod petebatur. Sin minus ex puncto Γ ducatur recta $ΑΓΒ$ circumulum interiorem contingens (III. 17. vel III. 16. Cor.) eritque illa $=HK$ (Obs. 4. ad III. 18.) $=A$. Et patet ex III. 17. duas semper solutiones locum habere, excepto eo casu, quo punctum Γ est in circumferentia circuli interioris, qui non nisi unam solutionem admittit. Notari meretur, ad facillimum hoc et simplicissimum problema facile reduci posse alia magis composita v. c. problema, circulo dato inscribendi triahgulum, cuius duo latera parallela sint duobus rectis positione datis, et cuius tertium latus transeat per datum punctum, vel generalius problema circulo dato inscribendi Polygonum quodcunque, quod imparem laterum numerum habeat, ita, ut eius latera omnia, uno excepto, sint parallela rectis positione datis, reliquum autem latus transeat per punctum datum, vel etiam, ut omni polygoni

Ducatur recta $H\Theta$ contingens circulum ABF in A (III. 17.), et constituatur ad rectam $A\Theta$ et ad punctum in ea angulo ΔEZ aequalis ΘAF (I. 23.); rursus, ad rectam HA et ad punctum in ea A angulo ZAE aequalis HAB , et iungatur BF .

Quoniam igitur circulum ABF contingit aliqua recta ΘA , a contactu autem ad A in circulo ducta est recta AF , angulus ΘAF aequalis est angulo ABF in alterno circuli segmento (III. 32.). Sed angulus ΘAF ipsi ΔEZ est aequalis; angulus igitur ABF ipsi ΔEZ est aequalis. Ex eadem ratione, et angulus AFB ipsi ZAE est aequalis, et reliquis igitur BAF reliquo EZA est aequalis (I. 32.). Triangulum igitur ABF aequiangulum est triangulo ΔEZ , et inscriptum est in circulo ABF .

latera transeant per puncta data, aliaque huius generis plura, quod primum ostendit Annibale Giordano di Ottaviano (Memorie di Fisica e di Math. della Societa Italiana T. IV.), et post eum eodem loco Malfatti. Cf. l'Huilier Elémens d'Analyse Géométrique et d'Analyse Algébrique §. 146. sqq. Klügel. Wörterb. T. III. p. 155. Meier. Hirsch. Samml. geom. Aufg. I. Th. §. 150. sqq. Carnot. Géom. de Position. Transcamus iam ad aliud, de quo ante diximus, problema. Inscribenda nempe sit circulo dato recta AB aequalis rectae datae Δ , quae non maior esse ponitur, quam circuli diameter, ita, ut recta AB simul parallela sit rectae positione datae. Praetermisso eo casu, quo recta data Δ aequalis est diametro, ostendatur, ut in problemate praecedente, rectam AB esse contingentem circuli ex eodem centro cum circulo dato descripti: cuius radii quadratum aequale sit differentiae quadrati radii circuli dati, et quadrati dimidia rectae Δ . Quum itaque

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ
ισογώνιον τρίγωνον ἐγγράφεται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ
ισογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ABΓ$, τὸ δὲ δοθέν τρι-
γωνον τὸ $ΔΕΖ$. δεῖ δὴ περὶ τὸν $ABΓ$ κύκλον τῷ
 $ΔΕΖ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἡ EZ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη κατὰ
τὰ $H, Θ$ σημεία, καὶ εἰλήφθω τοῦ $ABΓ$ κύκλου
κέντρον τὸ K , καὶ διήχθω ὡς ἐτύχεν εὐθεῖα ἡ KB ,
καὶ συνεσταῖτω πρὸς τῇ KB εὐθεῖα καὶ τῷ πρὸς
αὐτῇ σημείῳ τῷ K τῇ μὲν ὑπὸ $ΔΕΗ$ γωνία ἴση ἡ
ὑπὸ BKA , τῇ δὲ ὑπὸ $ΔΖΘ$ ἴση ἡ ὑπὸ $BΚΓ$, καὶ
διὰ τῶν $A, B, Γ$ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι
τοῦ $ABΓ$ κύκλου αἱ $ΑΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ$.

Καὶ ἐπεὶ ἐφαπτόνται τοῦ $ABΓ$ κύκλου αἱ $ΑΜ$,
 $ΜΝ, ΝΑ$ κατὰ τὰ $A, B, Γ$, ἀπὸ δὲ τοῦ K κέντρου
ἐπὶ τὰ $A, B, Γ$ ¹⁾ σημεία ἐπιζευγνύμεναι εἰσιν αἱ
 $KA, KB, ΚΓ$ ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς $A,$

1) Verba: ἀπὸ δὲ τοῦ K κέντρου ἐπὶ τὰ $A, B, Γ$, quae
cum Cod. a. omittit Péryardus, ex antiq. ed. restituimus,
quod magis determinate exprimunt, rectas ex centro ductas
esse.

hic circulus eodem ac ante modo describi possit, problema
redit ad id, de quo Obs. 5. ad III. 17. diximus. Aliam et
faciliorem huius problematis solutionem tradunt Commandi-
nus et ex eo Clavius. Nempe ducta diametro rectae positione
datae parallela, abscindantur in ea e centro ex utraque parte
segmenta aequalia dimidia rectae A , atque ex horum extre-
mitatibus erigantur ad diametrum perpendiculara, quae inter se
comprehendent segmenta circuli, quarum singulae chordae

In dato igitur circulo triangulum dato triangulo aequiangulum descriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO III. (Fig. 286.)

Circā datum circulum dato triangulo aequiangulum triangulum circumscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma$, datum autem triangulum ΔEZ ; oportet circa $AB\Gamma$ circulum triangulo ΔEZ aequiangulum triangulum circumscribere.

Producatur EZ ex utraque parte ad H , Θ puncta, et sumatur centrum K circuli $AB\Gamma$ (III. 1.), et ducatur utcumque recta KB , et constituatur ad KB rectam et ad punctum in ea K angulo ΔEH aequalis BKA , angulo vero $\Delta Z\Theta$ aequalis $BK\Gamma$ (I. 23.) et per puncta A , B , Γ ducantur rectae AM , MBN , NA circulum $AB\Gamma$ contingentes.

Et quoniam contingunt circulum $AB\Gamma$ rectae AM , MN , NA in punctis A , B , Γ , ex centro K autem ad puncta A , B , Γ ductae sunt KA , KB , $K\Gamma$, recti sunt anguli ad puncta A , B , Γ (III. 18.). Et propositum efficient. Caeterum (ope III. 29.) ad hoc problema facile reducitur illud: circulo dato inscribere triangulum, cuius singula latera parallela sint rectis positione datis, quae omnes se intersecant.

PROPOSITIO II.

Obs. In hoc quoque problemate punctum A in circumferentia pro lubitu sumi, aut datum esse, aut nova aliqua alia conditio accedere potest. Praeterea, etiam si punctum A datum sit, triangulum circulo inscribendum sex diversis modis in circulo poni poterit. Nempe angulus $\Theta A\Gamma$ cuilibet angulorum E , A , Z aequalis fieri potest, quo ipso iam tres

B, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ AMBK τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἵπιδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ AMBK, καὶ εἰσιν ὁρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK, KBM γωνίαι λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB, AMB δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι αἱ ἄρα ὑπὸ AKB, AMB ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὥν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ANM τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MAN λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AMN τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιέγραπται περὶ τὸν ABΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἔγγραψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABΓ· δεῖ δὲ εἰς τὸ ABΓ τρίγωνον κύκλον ἔγγραψαι.

modi trianguli constituendi efficiuntur. Deinde, cuicumque angulorum *E, A, Z* angulum *ΘΑΓ* aequalem facias, duo reliqui adhuc anguli locum inter se mutare possunt, quo itaque sex omnino modi prodēunt. Magnitudo tamen laterum trianguli semper eadem est, quamvis variari possit eorum positio. Facile etiam patet, reduci hoc problema posse (ut a Bozellio factum est) ad Prop. III. 34. adeoque etiam ad alteram, quae ibi allata est, solutionem, vel eam quoque, quam tum habuimus, conditionem admittere.

Cor. Nominatim itaque circulo dato triangulum aequi-

quoniam quadrilateri $AMBK$ quatuor anguli quatuor rectis aequales sunt (I. 32.), quippe in duo triangula dividitur $AMBK$, et sunt recti anguli MAK , KBM ; reliqui igitur AKB , AMB duobus rectis aequales sunt, sunt autem et $\angle E H$, $\angle E Z$ duobus rectis aequales (I. 13.); anguli igitur AKB , AMB angulis $\angle E H$, $\angle E Z$ aequales sunt, quorum AKB ipsi $\angle E H$ est aequalis; reliquus igitur AMB reliquo $\angle E Z$ est aequalis. Similiter ostendetur et angulum ANM ipsi $\angle Z E$ esse aequalem; et reliquus igitur MAN reliquo $\angle Z E$ est aequalis. Triangulum igitur AMN aequiangulum est triangulo $\triangle F Z$, et circumscribitur circum ABT circulum.

Circa datum igitur circulum dato triangulo aequiangulum triangulum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IV. (Fig. 287.)

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum AFB ; oportet in triangulo ABT circulum inscribere.

angulum, adeoque (I. 6.) aequilaterum inscribetur ope I. 1. quod ipsum fieri posse in IV. 16. sumitur.

PROPOSITIO III.

Obs. Similes hic observationes locum habent ac in praecedente. Nempe punctum B pro lubitu, *à volonté*, in circumferentia sumi aut etiam datum esse, aut quacunque alia ratione determinari potest. Deinde etiam determinato puncto B sex variis modis trianguli AMN situs variari potest, quamvis magnitudo laterum non varietur. Praeterea iure quidem

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαι διχα ταῖς $ΒΔ$, $ΓΔ$ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ $Δ$ σημεῖον, καὶ ῥηθῶσαν ἀπὸ τοῦ $Δ$ ἐπὶ τὰς AB , $ΒΓ$, $ΓΑ$ εὐθείας κάθετοι αἱ $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ABΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ABΓ$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθή ἡ ὑπὸ $BEΔ$ ὀρθή τῇ ὑπὸ $BZΔ$ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $EBΔ$, $ZBΔ$, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν $ΒΔ$, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν ἴση ἄρα ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΔΖ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΔΗ$ τῇ $ΔΖ$ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Δ$, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ εἰράσεται τῶν AB , $ΒΓ$, $ΓΑ$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E , Z , H σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἐσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρον $Δ$, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$ γραφόμενος

observat Austin., demonstrari oportere, contingentes AM , BN , $ΓΑ$ inter se convenire, quod facillimum est, ducta v. c. recta AB , quae tum, quum anguli KAM , KBN recti sint, summam angulorum MAB , MBN duobus rectis minorem efficiet, unde res consequitur ope 11. axiom. vel I. Post. 5., verum eandem demonstrationem iam dederat Tacquet. Denique notandum Peletarium et Borellium aliam adhuc huius problematis solutionem exhibere, in qua, ope praecedentis propositionis primum circulo triangulum dato aequiangulum inscribitur, et deinde ope problem. in Obs. 5. ad III. 17.

Secentur $AB\Gamma$, $\Gamma B\Delta$ anguli bifariam a rectis $B\Delta$, ΓA (I. 9.), et conveniant inter se in puncto Δ , et ducantur a Δ ad AB , $B\Gamma$, ΓA rectae perpendiculares ΔE , ΔZ , ΔH (I. 12.).

Et quoniam aequalis est angulus $AB\Delta$ angulo $\Delta B\Gamma$, est autem et rectus $BE\Delta$ recto $BZ\Delta$ aequalis; duo igitur sunt trianguia $EB\Delta$, $ZB\Delta$, duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, et utrique commune $B\Delta$, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur ΔE ipsi ΔZ . Ex eadem ratione et ΔH ipsi ΔZ est aequalis. Tres igitur rectae ΔE , ΔZ , ΔH aequales inter se sunt; ergo centro Δ , et intervallo una ipsarum ΔE , ΔZ , ΔH circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB , $B\Gamma$, ΓA rectas, propterea quod recti sunt ad E , Z , H puncta anguli. Si enim secet ipsas, recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta intra ipsum cadet circulum, quod absurdum ostensum est (III. 16.); circulus igitur centro Δ , intervallo autem una ipsarum ΔE , ΔZ , ΔH descriptus non secat rectas AB ,

rectae inscripti huius trianguli lateribus parallelae circulum contingentes ducuntur. Caeterum de simili problemate generaliore vide infra ad IV. 7. Obs. 2.)

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Analysis huius problematis ita institui potest, Quum centrum circuli esse debeat ex III. 17. Obs. 1. in recta, quae angulum $AB\Gamma$ bifariam diidit, dividat eum bifariam recta $B\Delta$, eritque in $B\Delta$ centrum circuli (vel, ut aliter geometricarum more dicamus, erit recta $B\Delta$ locus centri circuli

κύκλος τέμνει τὰς AB , BF , $ΓΑ$ εὐθείας· ἐφάπτεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον. Ἐγγεγράφθω ὡς ZEH 1).

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ κύκλος ἐγγράφεται ὁ EZH . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ε.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράφαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ · δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ κύκλον περιγράφαι.

Τετμήσθωσαν αἱ AB , $ΑΓ$ εὐθείαι διχα κατὰ τὰ $Δ$, $Ε$ σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν $Δ$, $Ε$ σημείων, ταῖς AB , $ΑΓ$ πρὸς ὁρθὰς ἤχθωσαν αἱ $ΔΖ$, $ΖΕ$ · συμπεσοῦνται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς BF εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς BF .

1) Verba: Ἐγγεγράφθω ὡς ZEH , quae in edd. Oxon. te Basil. omissa sunt, recte omnino e Cod. a restituit Peyrardus. Pariter certe in Prop. 5. 9. 13. 14. ad finem similia verba adiecta legimus. Eadem tamen ad finem Prop. 8. desunt.

describendi). Eodem modo, quum id centrum esse debeat in recta, quae angulum $ΑΓΒ$ bifariam dividit, dividat eum bifariam recta $ΓΔ$, eritque in recta $ΓΔ$ centrum circuli. Erit itaque in concursu utriusque rectae. Rectas autem $ΒΔ$, $ΓΔ$ necessario concurrere, facile patet. Quum enim anguli $ABΓ$, $ΑΓΒ$ simul minores sint duobus rectis (I. 17.), multo magis anguli $ABΓ$, $ΔΓΒ$ simul (quippe dimidii priorum) minores erunt duobus rectis, adeoque rectae $ΒΔ$, $ΓΔ$ convenient (Ax. 11. vel I. Post. 5.).

Obs. 2. Cor. 1. Quum etiam rectae $ΑΕ$, $ΑΗ$ circulum contingant, recta quoque $ΑΔ$, quae angulum $ΒΑΓ$ bifariam dividit, in eodem puncto $Α$, centro circuli, conveniet (III. 17. Obs. 1.). Itaque tres rectae, quae angulos trianguli cuius bifariam secant, in eodem intra ipsum puncto convē-

BF , FA ; contingit igitur ipsas, et erit circulus descriptus in triangulo ABF (IV. Def. 5.). Inscribatur ut ZHE .

In dato igitur triangulo ABF circulus inscriptus est EZH . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO V. (Fig. 290.)

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum ABF ; oportet circa datum triangulum ABF circulum circumscribere.

Secentur AB , AF rectae bifariam in A , E punctis (I. 10.), et punctis A , E ipsis AB , AF ad rectos angulos ducantur AZ , ZE (I. 11.). Convenient autem vel intra triangulum ABF , vel in recta BF , vel extra BF .

niunt, Et vice versa: Recta, quae ex puncto A , in quo conveniunt rectae, quae duos angulos B et F trianguli bisecant, ad tertium angulum ducitur, hunc quoque bisecat (Obs. 2. ad I. 26. Cas. 5.). Cf. Pfeiderer., e cuius annotationibus partim manuscriptis, etiam in hoc libro plura hausimus, Schol. in VI. Elem. P. I. §§. 41. 42. Caeterum ipsam propositionem IV. 4. Euclides ex absurde demonstrat, Rob. Simson. paulo brevius directe. Neque vero cum Matthias (Auszug aus Rob. Simsons Uebersetzung) dixerim, verba ei γὰρ τῆς αὐτῆς κ. τ. λ. usque ad finem demonstrationis manifesto otiosum esse additamentum. Ad indirectam demonstrationem omnino necessaria sunt.

Obs. 3. Cor. 2. Et, quae a puncto, in quo tres rectae conveniunt, quae angulos alicuius trianguli bisecant, ad latera eius trianguli demittuntur, sunt inter se aequalia.

Obs. 4. Cor. 3. Et, quum sit $AE=AH$, et $FZ=FH$ (III. 17. Obs. 5.), erit itaque $BZ+BE$, vel, quod eodem redit, $2BE$ excessus, quo summa duorum laterum BA , BF

Συμπιπτεύωσαν οὖν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Z , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ZB , $Z\Gamma$, ZA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AA τῇ BA , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὁρθὰς ἡ AZ βάσει ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓZ τῇ AZ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ $Z\Gamma$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ZA , ZB , $Z\Gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZA , ZB , $Z\Gamma$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. Περιγραφέσθω ὡς ὁ $AB\Gamma$.

Ἀλλὰ δὴ αἱ AZ , EZ συμπιπτεύωσαν ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ εὐθείας κατὰ τὸ Z , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AZ . Ὅμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον περιγεγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ AZ , EZ συμπιπτεύωσαν ἐκτὸς τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου, κατὰ τὸ Z πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ , BZ , ΓZ . Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ AA τῇ AB , κοινὴ

superat tertium AT , quo ipso propius determinatur I. 20. Hanc observationem Clavius ad Ioann. Baptistam Benedictum refert.

Obs. 5. Facile patet, eadem ratione solvi problema generalius, quo iubetur circulus describi, qui contingat tres rectas positione datas, quae non omnes tres inter se sunt parallelae. Erunt enim vel a) (Fig. 288.) duae rectarum positione datarum AB , ΓA parallelae, et secabuntur a tertia AT in punctis A , E , et tum eodem modo ostendetur, si anguli ΓAB , $AT A$ bifariam secantur rectis ΓE , AB , has rectas in puncto aliquo E convenire, et demissa ex E in rectas perpendiculæ EZ , $E\Theta$, EH esse inter se aequalia, adeoque cir-

Convenient igitur primum intus in Z , et iungantur ZB , ZF , ZA . Et quoniam AA aequalis est BA , communis autem et ad rectos angulos AZ ; basis igitur AZ basi ZB est aequalis (I. 4.). Similiter ostendemus et rectam FZ rectae AZ esse aequalem, quare et ZB aequalis est ZF ; tres igitur ZA , ZB , ZF aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z intervallo autem una ipsarum ZA , ZB , ZF descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circulus circumscriptus (IV. Def. 6.) circa ABF triangulum. Circumscribatur ut ABF .

Sed AZ , EZ convenient in recta BF in Z , ut in secunda figura, et iungatur AZ . Similiter ostendemus punctum Z centrum esse circuli circa ABF triangulum circumscripti.

Sed AZ , EZ convenient extra triangulum ABF , rursus in Z , ut in tertia figura, et iungantur AZ , BZ , FZ . Et quoniam rursus AA aequalis est AB , communis autem et ad rectos angulos AZ ; basis igitur

circuli centro E , radio EZ descriptum tres rectas in Z , θ , H contingere: Et eodem modo etiam ex altera rectae AF parte invenietur circulus, qui propositum efficiet. Aliter, ducto ad utramque rectarum parallelarum perpendiculari quocunque ZH , tunc in E bifariam diviso, ac per E ducta recta EH parallela rectis AB , FA , ostendetur, in hac parallela esse centra describendorum circulorum. Vel (Fig. 289.) b) nulla rectarum positione datarum parallela erit alteri. Omnes igitur tres AB , BF , AF inter se convenient, vel triangulum ABF efficient, adeoque problema idem erit, quod nostrum IV. 4. et invenietur centrum A circuli intra triangulum describendi, qui tres rectas AB , BF , AF contingat.

δὲ καὶ πρὸς ὁρθὰς ἢ AZ βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει
τῇ ZB ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ
 $ZΓ$ τῇ ZA ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ $ZΓ$ ἐστὶν
ἴση, ὁ ἄρα πάλιν κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ
τῶν ZA , ZB , $ZΓ$ κύκλος γραφόμενός ἔξει καὶ διὰ
τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐστὶ περιγραφόμενος περὶ
τὸ $ABΓ$ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς $ABΓ$.

Περὶ τὸ δοθέν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγρα-
πται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Καὶ φανερόν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου
πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἢ ὑπὸ $BAΓ$ γωνία,
ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάτ-
των ἐστὶν ὁρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς $BΓ$ εὐθείας τὸ κέν-
τρον πίπτει, ἢ ὑπὸ $BAΓ$ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυ-
γχάνουσα ὁρθὴ ἐστὶν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου
ἐκτὸς τριγώνου πίπτει¹⁾, ἢ ὑπὸ $BAΓ$, ἐν ἐλάττονι

1) Ita sane rectius Peyrardus ex Cod. a habet, quam vul-
gata lectio: ὅταν ἐντὸς τῆς $BΓ$ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει. Cac-
terum iam Gregorius in versione latina veram lectionem ex-
pressit.

Facile autem patet, eodem modo intra spatia $KBΓΘ$, $ABAN$,
 $ΜΓΑΟ$ describi posse circulos, qui rectas AB , $BΓ$, $AΓ$ extra
triangulum $ABΓ$ contingant. Nolumus huic problemati, quod
unum ex iis est, quae Apollonius in libris de Tactionibus
tractavit, plenius evolvendo insistere. Plura scitu digna, quae
ad illud pertinent, et ex hac constructione derivari possunt,
congressit Pfeiderer, ebene Trigonometrie Tüb. 1802. Ita v.

c. facile patet, esse $Ac = Aγ = \frac{AB + AΓ + BΓ}{2}$, pariter ac in

Obs. 4. vidimus esse $AB = \frac{AB + AΓ - BΓ}{2}$, et angulum $ABθ$
esse rectum etc.

tur AZ basi ZB est aequalis (I. 4.). Similiter ostendimus et ZF aequalem esse ZA , quare et ZB aequalis est ZF ; ergo rursus circulus centro Z , intervallo autem una ipsarum ZA , ZB , ZF descriptus transibit per reliqua puncta, et erit circa triangulum ABF circumscriptus. Describatur igitur ut ABF .

Circa datum igitur triangulum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quod si centrum circuli intra triangulum cadit, angulus BAT , in segmento maiore quam semicirculo positus, minor sit recto; si autem centrum in rectam BF cadit, angulus BAT , in semicirculo positus, rectus sit; si vero centrum circuli extra triangulum cadit, angulus BAT , in segmento minore quam semicirculo, maior sit recto.

PROPOSITIO V.

Obs. 1. Rob. Simson. putat, demonstrationem huius propositionis ab aliquo viciatam esse, non enim ostendere, rectas, quae latera trianguli bifariam et ad angulos rectos secant, inter se convenire, et inepte dividere propositionem in tres casus, cum una eademque demonstratio omnibus inseruiat, ut iam Campanus observavit. Et illud quidem, rectas, quae ex A et E ad angulos rectos lateribus ducuntur, inter se convenire, facile, ut est apud Campanum, probatur, ducta recta AE , unde res eodem modo ex Ax. 11. vel I. Post. 5. patet, ac in IV. 3. de rectis circum circumferentibus. Quod autem rectae AZ , EZ nec in unam lineam coincidere possint, inde patet, quod si id fieret, rectae AB , AF forent inter se parallelae (I. 28.), quod est contra hypothesis. Rob. Simson. rectas AZ , EZ convenire inde probat, quod si non conveni-

τιμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὡστε καὶ ὅταν ἐλάττωσιν ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ AZ , EZ . ὅταν δὲ ὀρθῇ, ἐπὶ τῆς $BΓ$ ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ¹⁾.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓΔ$. θεῖ δὴ εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἠχθωσαν τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ καὶ ἐπεξεύχθω αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$.

1) Ἐκτὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ex coniectura, quam iam versiones Campani, Clavii, Gregorii, Rob. Simsonis aliorum, que habent, posuimus pro vulgata omnium editionum (in Paris. ex sphalmate typographico est ἐντὸς pro ἐκτὸς) ἐκτὸς τῆς $BΓ$.

rent parallelæ forent; at si parallelæ forent AZ , EZ , parallelæ quoque forent AB , $ΑΓ$, qui sũ sunt ad angulos rectos. Hanc demonstrationem reprehendit Matthias Auszug aus Rob. Sims. Uebersetzung et Anstin., quod propositio illa, rectæ, quæ perpendicularares sint ad duas parallelas, ipsas etiam parallelas esse, non præcedat. Facillime tamen reã ad I. 28. reducitur. Cæterum poterat quoque Analysis addi simili ratione ac in IV. 4. facile deducenda ex III. 1. Cor. 1.

Obs. 2. Cor. 2. Quum centrum circuli describendi esse debeat (III. 1. Cor. 1.) in recta AZ , quæ rectam AB bifariam et ad angulos rectos secat, pariterque in recta BK , quæ rectam $ΑΓ$ bifariam et ad angulos rectos secat, et denique eodem modo in recta, quæ rectam $BΓ$ bifariam et ad angulos rectos secat, patet, hoc, quod ultimo loco diximus, perpendiculum cum duobus reliquis in uno eodemque puncto convenire debere.

Quare et si datus angulus minor est recto, intra triangulum convenient AZ , EZ ; si autem rectus, in BF ; si vero maior recto, extra triangulum ABF .

PROPOSITIO VI. (Fig. 291.)

In dato circulo quadratum inscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma A$; oportet in circulo $AB\Gamma A$ quadratum inscribere.

Ducantur circuli $AB\Gamma A$ duae diametri AT , BA ad rectos angulos inter se (I. 11.), et iungantur AB , BF , ΓA , AA .

Obs. 3. Cor. 3. Et quae ab hoc communi trium perpendicularum concursu ad angulos trianguli A , B , Γ ducuntur rectae ZA , ZB , $Z\Gamma$ aequales sunt. Casu itaque figurae secundae (Fig. 290. b.) quo angulus $BA\Gamma$ rectus est, centrum Z circuli circumscribendi facillime invenitur, bisecando tantum latus recto angulo oppositum. Cf. III. 31. Cor. 2.

Obs. 4. Eodem modo per tria puncta, quae non in eadem recta sunt, circulus describetur.

Obs. 5. Corollarii 1., quod in graeco textu legitur, pars prior non est apud Campanum, neque omnino ex hac constructione consequitur, sed patet ex III. 31. Pars posterior consequitur ex conversa III. 31. vid. Obs. ad III. 31. In parte posteriore corollarii praeterea, ut Rob. Simson. notat, sermo est de angulo dato, quum tamen propositio nihil habeat, nec habere possit de angulo dato, atque hinc ille corollarium hoc manifeste vitiatum esse concludit. Austin. id omnino ex hoc loco eliminandum esse putat.

PROPOSITIO VI.

Obs. A sexta inde huius libri propositione Euclides non nisi de figuris quibusdam regularibus tractat, et de his iis,

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ ED , κέντρον γὰρ τὸ E , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ EA βάσις ἄρα ἡ AB βάσει τῇ AD ἴση ἐστίν. Διὰ τὸ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν $BΓ$, $ΓΔ$ ἑκατέρα τῶν BA , AD ἴση ἐστίν· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ BD εὐθεὶα διάμετρος ἐστὶ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ BAD ὀρθή ἄρα ἡ ὑπὸ BAD γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκύστη τῶν ὑπὸ $ABΓ$, $BΓΔ$, $ΓΔA$ ὀρθή ἐστίν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον τετράγωνον ἄρα ἐστίν. Καὶ ἐγγεγράφται εἰς τὸν δοθέντα $ABΓΔ$ κύκλον.

Εἰς ἄρα δοθέντα κύκλον τὸν $ABΓΔ$ τετράγωνον ἐγγεγράφται τὸ $ABΓΔ$. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.
Ἐστω δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓΔ$ · δεῖ δὴ περὶ τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

quae Prop. 2—5 generatim de triangulis docuerat, similia proponit. Neque enim poterant ad figuras multilateras quascunque illa omnia applicari. Nonnulla tamen de aliis quoque figuris non regularibus valent. Propositio sexta, ut de hac iam dicamus, de quadrato idem docet, quod Prop. 2. de triangulo dato alicui aequiangulo. Quodvis autem quadratum etiam cuiusvis alii quadrato est aequiangulum. Nec vero generaliter iam proponi poterat problema: in dato circulo inscribere quadrilaterum dato quadrilatero aequiangulum. Vidimus nempe in Obs. 2. ad III. 22., ut quadrilaterum circulo inscribi possit, necesse esse, si quaestio sit de figuris, quae nullos angulos gibbos habent, ut duo anguli oppositi simul summi aequales sint reliquis duobus angulis. Itaque etiam, si circulo dato

Et quoniam BE aequalis est EA , centrum enim E , communis autem et ad rectos angulos EA ; basis igitur AB basi AA aequalis est (I. 4.). Ex eadem ratione et utraque rectarum BT , TA utrique rectarum BA , AA aequalis est; aequilaterum igitur est quadrilaterum $ABTA$. Dico autem et rectangulum. Quoniam enim recta BA diameter est circuli $ABTA$, semicirculus igitur est BAA ; quare angulus BAA rectus est (III. 31.). Ex eadem ratione et unusquisque angulorum ABT , BTA , TAA rectus est; rectangulum igitur est quadrilaterum $ABTA$. Ostensum est autem et aequilaterum; quadratum igitur est. Et inscriptum est in dato circulo $ABTA$.

In dato igitur circulo $ABTA$ quadratum inscriptum est $ABTA$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VII. (Fig. 293.)

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus $ABTA$; oportet circa circulum $ABTA$ quadratum circumscribere.

inscribi debet quadrilaterum dato quadrilatero aequiangulum, in dato quadrilatero eadem conditio obtinere debet. Quod si fuerit, poterit non modo, et quidem ita, ut punctum in circumferentia, per quod unum laterum quadrilateri inscribendi transeat, datum sit, aut pro lubitu sumatur, res fieri, sed innumeris modis fieri poterit, vel, ut aliter dicamus, problema generaliter sumtum erit indeterminatum. Nempe, si propositum sit, dato circulo ABT (Fig. 292.) inscribere quadrilaterum, quod aequiangulum sit dato quadrilatero $EZ\Theta H$, cuius anguli oppositi $\angle ZEH + \angle \Theta H = \angle Z + \angle H = 2$ rectis, ita, ut unum eius latus transeat per punctum datum A in circumferentia circuli, fieri id poterit sequentem in modum. Abscindatur per III. 34. recta AT segmentum $AA'T$, quod ca-

ἤχθωσαν τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$, καὶ διὰ τῶν A , B , $Γ$, $Δ$ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου αἱ ZH , $HΘ$, $ΘK$, KZ .

Ἐπεὶ οὖν ἐφαπύεται ἡ ZH τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ E κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ A ἐπαφήν ἐπέξενται ἡ EA αἱ ἄρα πρὸς τῇ A γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς B , $Γ$, $Δ$

piat angulum aequalem angulo H , ductaque $ΘE$ fiat angulus $ΓΑΔ=ΘEH$, et $ΓΑΒ=ΘEZ$, et iungantur $ΒΓ$, $ΔΓ$, eritque, ut facile ex III. 22. consequitur, quadrilaterum $ABΓΔ$ aequiangulum quadrilatero $EZΘH$. Neque vero solum quadrilaterum $ABΓΔ$ propositum efficiet. Quodsi enim v. g. ducta fuisset recta $ζΘ$ parallela rectae $ZΘ$, iunctaque $ΕΘ$, angulus $ΓΑδ=ΘEH$, et angulus $ΓΑβ=ΘEZ$ constitutus esset, quadrilaterum $ABΓδ$ pariter scopo respondisset, atque ita innumera alia, quae idem praestarent, exhiberi poterant. Nominatim, si circulo dato inscribenda fuerit figura quadrato aequiangula, innumera rectangula problema solvent. At, si figura inscribenda ipsa etiam quadratum esse, et per punctum in circumferentia datum A transire debet, una tantum figura his conditionibus satisfaciet. Si circulo inscribi iubetur figura multilatera aequiangula figurae datae, ante omnia, an res fieri possit, ex observatis ad III. 22. diiudicari debet, et si fieri possit, problema plerumque erit indeterminatum. Caeterum propositioni VI. 6. addi potest hoc

Cor. Circulus quoque (Fig. 291.) diametris $ΑΓ$, $ΒΔ$ in quatuor segmenta aequalia dividitur (III. 26.).

PROPOSITIO VII.

Obs. 1. Rectas circumulum contingentes HZ , $ΘK$ cum contingentibus $HΘ$, ZK convenire, patet ex I. 29. Cor. 3.

Cor. 1. Quodvis quadrati circumscripti latus aequale est diametro circuli, cui circumscribitur (I. 34.).

Ducantur circuli $AB\Gamma A$ duae diametri $A\Gamma$, BA ad rectos angulos inter se (I. 11.), et per puncta A , B , Γ , A ducantur rectae ZH , $H\Theta$, ΘK , KZ circulum $AB\Gamma A$ contingentes (III. 17.).

Quoniam igitur ZH contingit circulum $AB\Gamma A$ centro autem E ad contactum A ducta est EA ; anguli ad A recti sunt (III. 18.). Ex eadem ratione et anguli ad B , Γ , A puncta recti sunt. Et quoniam

Cor. 2. Si ductis rectis AB , $B\Gamma$, ΓA , AA eidem circulo quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum duplum quadrati inscripti, hoc nempe erit aequale duplo quadrati radii (I. 47.), illud autem quadrato diametri Cor. 1.

Cor. 3. Circulus etiam hic diametris $A\Gamma$, BA in quatuor segmenta aequalia dividitur (III. 26.).

Cor. 4. Pariter latera quadrati circumscripti diametris $A\Gamma$, BA bisecantur. Est nempe $HA=BE$ (I. 34.) et $ZA=EA$. At $BE=EA$, itaque et $HA=ZA$.

Obs. 2. Quum quodvis quadratum aequiangulum sit cuiusvis alij, etiam haec propositio conferri potest cum propositione IV. 3. Et facile patet, propositionem IV. 3. longe generalius, et certe ad figuram rectilineam quamcunque, quae angulos gibbos non habet, extendi posse. Factis nempe (Fig. 294.) ut in IV. 3. angulis ad centrum O circuli dati ex ordine aequalibus iis, qui deinceps sunt angulis figurae datae $Z\Theta HKA$, nempe angulo $\alpha O s =$ angulo, qui Z deinceps est $\alpha O \beta$ ei, qui Θ deinceps est etc. ductisque per puncta s , α , β etc. (quorum unum etiam datum esse potest) rectis circulum contingentibus, demonstrabitur, ut in IV. 3. rectarum harum contingentium unamquamque convenire cum duabus ipsi proxime positis, et esse figuram ita enatam aequiangulam datae $Z\Theta HKA$. Nec generaliter omnes ii casus excludentur, quibus figura data angulos gibbos habet: in figura autem datae aequiangula circa circulum circumscripta latera angulos gibbos comprehendentia non ipsa, sed producta tantum intra figuram circulum con-

σημείοις γωνίαι ὁρθαί εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ὁρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB γωνία, ἔστι δὲ ὁρθή καὶ ἡ ὑπὸ EBH παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $HΘ$ τῇ $ΑΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΑΓ$ τῇ ZK ἐστὶ παράλληλος. Ὡς τε καὶ ἡ $HΘ$ τῇ ZK ἐστὶ παράλληλος. Ὁμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν HZ , $ΘΚ$ τῇ $ΒΕΔ$ ἐστὶ παράλληλος. Παράλληλόγραμμα ἐστὶ τὰ HK , $ΗΓ$, AK , ZB , BK . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν HZ τῇ $ΘΚ$, ἡ δὲ $HΘ$ τῇ ZK . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν $ΑΓ$ ἑκατέρα τῶν $HΘ$, ZK , ἡ δὲ

tangent, et anguli quoque ad centrum situm aliquatenus diversum obtinebunt, quae omnia, quum singulis casibus evolvendis haud vacet, hic et in sequentibus praetelimus.

Obs. 3. In figuris circulo alicui circumscriptis (hic quoque praeterimus eas, quae angulos gibbos habent) observari potest circa latera aliquid admodum simile ei, quod in figuris circulo inscriptis circa angulos observavimus Obs. 2. sq. ad III. 22. Nempe, si parem laterum numerum habuerint, et latera, initio facto a quocunque eorum ordine numeris indicentur, erit summa laterum numeris imparibus notatorum aequalis summae laterum numeris paribus notatorum. Sit v. c. talis figura, quae nullos angulos gibbos habet $ABΓΔEZ$ (Fig. 295.), quae circulum contingat in punctis α , β , γ , etc. eritque ex III. 17. Obs. 1.

$$A\alpha = A\zeta$$

$$B\alpha = B\beta$$

$$\Gamma\gamma = \Gamma\delta$$

$$\Delta\gamma = \Delta\delta$$

$$E\epsilon = E\delta$$

$$Z\zeta = Z\epsilon$$

$$\text{unde } (A\alpha + B\alpha) + (\Gamma\gamma + \Delta\gamma) + (E\epsilon + Z\zeta) = (B\beta + \Gamma\delta) + (A\delta + E\delta) + (Z\epsilon + A\zeta)$$

$$\text{i. e. } AB + \Gamma\Delta + EZ = B\Gamma + \Delta E + ZA.$$

Similis demonstratio locum habet in figuris, quae plura ha-

rectus est angulus AEB , rectus autem est et EBH ; $H\Theta$ parallela erit AF (I. 28.) Ex eadem ratione et AF parallela est ZK ; quare et $H\Theta$ parallela est ZK (I. 30.). Similiter ostendemus et utramque ipsarum HZ , ΘK ipsi BEA esse parallelam. Parallelogramma igitur sunt HK , HT , AK , ZB , BK ; aequalis igitur est HZ quidem ipsi ΘK , $H\Theta$ vero ipsi ZK . Et quoniam AF aequalis est BA , sed et AF utrique ipsarum $H\Theta$, ZK , BA vero utrique ipsarum HZ , ΘK est aequalis; et utraque $H\Theta$, ZK utrique HZ ,

bent latera. Hinc consequitur, rectangulum et rhomboidem circulo AE circumscribi non posse.

Obs. 4. Simile quid obtinet in figuris circulo circumscriptis, quae numerum laterum imparem habent. In illis nempe, si unius cuiuscunque lateris v. c. (Fig. 296.) in pentagono $ABFAB$ lateris EA partes As , et tE in quae in puncto contactus dividitur, separatim numeremus, pariter summa laterum numeris imparibus notatorum aequalis erit summae numeris paribus notatorum, quod eodem modo demonstrabitur.

Obs. 5. In quadrilateris propositio, quam Obs. 3. habuimus, valet etiam conversa. Nempe si quod quadrilaterum ita comparatum sit, ut summa duorum laterum oppositorum aequalis sit summae duorum reliquorum laterum oppositorum, poterit illi circulus inscribi. Demonstrari id potest vel directe, vel indirecte. Directa demonstratio haec erit. Sit (Fig. 297.) quadrilaterum $ABFA$, in quo summa laterum $AB+FA$ aequalis est summae laterum $BF+AA$, poterit ei circulus inscribi. Nam ex Obs. 5. ad IV. 4. circulus potest describi, qui tria quaecunque contigua latera v. c. AB , BF , FA contingat in punctis α , β , γ , adeoque erit, si O huius circuli centrum sit, $O\alpha=O\beta$, et $O\alpha^2=O\gamma^2$. Est autem $O\alpha^2=OA^2-A\alpha^2$, et $O\gamma^2=OA^2-A\gamma^2$ (I. 47. Cor. 2.), adeoque erit $OA^2-A\alpha^2=OA^2-A\gamma^2$. Et, quum sit ex hyp. $AB+FA=BF+AA$, et

$ΒΔ$ ἑκατέρα τῶν $ΗΖ$, $ΘΚ$ ἰσὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν $ΗΘ$, $ΖΚ$ ἑκατέρα τῶν $ΗΖ$, $ΘΚ$ ἰσὶν ἴση. Ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΖΗΘΚ$ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ΗΒΕΑ$, καὶ ἐστὶν ὀρθή ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$. ὀρθή ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΗΒ$. Ὀμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς $Θ$, $Κ$, $Ζ$ γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΖΗΘΚ$ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶν. Καὶ περιγεγραπταὶ περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγεγραπταὶ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ἡ.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ $ΑΒΓΔ$. δεῖ δὲ εἰς τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν $ΑΒ$, $ΔΑ$ δίχα κατὰ τὰ $Ζ$, $Ε$ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ $Ε$ ὁποτέρου τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $ΕΘ$, διὰ δὲ τοῦ $Ζ$ ὁποτέρου τῶν $ΑΔ$, $ΒΓ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $ΖΚ$ · παραλληλό-

$Βα=Ββ$, $Γγ=Γδ$ (Obs. 1. ad III. 17.) erit, aequalibus utrimque demtis, $Αα+Δγ=ΔΑ$. Iam eiu. vel $Αα=Δγ$ (Fig. 297. a), vel alterutra earum maior altera (Fig. 297. b.): Utroque casu, demisso ex O in $ΑΔ$ perpendicularulo $Oδ$, dico esse $Oδ=$

$Oγ$. Nam, si 1) $Αα=Δγ$, erit tam $Αα$, quam $Δγ=\frac{ΔΑ}{2}$.

Et, quum $ΟΑ^2-Αα^2=ΟΔ^2-Δγ^2$, erit $ΟΑ_1=ΟΔ^2$, adeoque $ΟΑ=ΟΔ$, unde perpendicularulum $Oδ$ rectam $ΑΔ$ bisecabit in $δ$

(I. 26. Cor. 3.), eritque $Αδ=\frac{ΔΑ}{2}=Δγ$. Est autem $Oδ^2=$

$ΟΔ^2-Δδ^2$ et $Oγ^2=ΟΔ^2-Δγ^2$, itaque $Oδ^2=Oγ^2$, adeoque $Oδ=Oγ$. Sin autem non sit $Αα=Δγ$, sit alterutra earum v. c.

ΘK est aequalis. Aequilaterum igitur est $ZH\Theta K$ quadrilaterum. Dico et rectangulum. Quoniam enim parallelogrammum est $HBEA$, et est rectus angulus AEB ; rectus igitur et AHB . Similiter ostendemus et angulos ad Θ , K , Z rectos esse; rectangulum igitur est quadrilaterum $ZH\Theta K$. Ostensum est autem et aequilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa $AB\Gamma A$ circulum.

Circa datum igitur circulum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 299.)

In dato quadrato circulum inscribere.

Sit datum quadratum $AB\Gamma A$; oportet in quadrato $AB\Gamma A$ circulum inscribere.

Secetur utraque ipsarum AB , AA bifariam in punctis E , Z (I. 10.), et per E alterutri rectarum AB , ΓA parallela ducatur $E\Theta$ (I. 31.); per Z vero alterutri rectarum AA , $B\Gamma$ parallela ducatur ZK (I.

Δy maior altera Aa . Quoniam igitur $OA^2 - Aa^2 = OA'^2 - \Delta y^2$; erit $\Delta y^2 - Aa^2 = OA - OA^2$. At, demisso ex O in rectam AA perpendicularo Od , est $OA^2 - OA'^2 = Ad^2 - A\delta^2$ (I. 47. Cor. 3.), itaque $\Delta y^2 - Aa^2 = Ad^2 - A\delta^2$ i. e. rectangulum $(\Delta y + Aa)(\Delta y - Aa) = \text{rectang. } (Ad + A\delta)(Ad - A\delta)$ (II. 4. Cor. 4.) Quum autem sit $\Delta y + Aa = Ad - A\delta + A\delta$, erit $\Delta y - Aa = Ad - A\delta$ (Obs. 3. ad I. 40.), adeoque erit $Ad + Aa + Ad - Aa = Ad + A\delta + Ad - A\delta$ i. e. $2\Delta y = 2Ad$, vel $\Delta y = Ad^2$, et quum $Od = OA^2 - A\delta^2$ et $Oy^2 = OA^2 - \Delta y^2$, erit $Od = Oy^2$, et $Od = Oy$, adeoque utroque casu circulus radio Oy descriptus etiam per δ transibit, et continget rectam AA in δ (III. 16. Cor. 1.). Hinc consequitur quadrato et rhombo circulum posse inscribi.

γραμμὸν ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν AK , KB , AO , OA , AH , HG , BH , HA , καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσὶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AD τῇ AB , καὶ ἐστὶ τῆς μὲν AD ἡμίσεια ἡ AE , τῆς δὲ AB ἡμίσεια ἡ AZ , ἴση ἄρα καὶ ἡ AE τῇ AZ . ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ZH τῇ HE . Ὅμοιως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν HO , HK ἑκατέρω τῶν ZH , HE ἐστὶν ἴση, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ HE , HZ , HO , HK ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν HE , HZ , HO , HK κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάπεται τῶν AB , BG , GA , AA εὐθειῶν, διὰ τὸ ὁρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E , Z , O , K γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς AB , BG , GA , AA , ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὁρθὰς ἀπὸ ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον εἰδείχθη. Οὐκ ἔρα ὁ κέντρον μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν HE , HZ , HO , HK κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς AB ,

Obs. 6. In figuris autem, quae plura quam quatuor latera habent, propositio, quam Obs. 3. habuimus, pariterque aliter Obs. 4. exhibita converti nequit, quod similiter fere demonstratur ac Obs. 6. ad III. 22. Sit nunc (Fig. 298.) figura $ABΓAEZ$ circulo, cuius centrum est O , radius Oa circumscripta, et contingat ille latera in punctis a , β , γ , δ , ϵ , ζ , iam sumantur duo quaecunque latera contigua v. c. AZ , EZ , et producat utrumque ultra Z usque ad Θ et H eadem quantitate, nempe ita, ut sit $Z\Theta = ZH$, et centro A radio AO , pariterque centro B radio BH describantur circuli, qui se intersciant in puncto aliquo K , ita ut ductis AK , BK sit punctum Z inter AK et BK , orieturque novum polygonum $ABΓAEK$, quod a priore $ABΓAEZ$ tantum quoad latera AK , BK , eorumque positionem discrepabit, caeterum vero,

31.); parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK , KB , AO , OA , AH , HT , BH , HA , et opposita ipsorum latera aequalia sunt (I. 34.). Et quoniam AA aequalis est AB , et ipsius quidem AA dimidia est AE , ipsius vero AB dimidia AZ , aequalis erit et AE ipsi AZ ; quare et opposita aequalia sunt, ergo ZH aequalis HE . Similiter ostendimus et utramque HO , HK utrique ZH , HE esse aequalem. Quatuor igitur HE , HZ , HO , HK aequales inter se sunt. Circulus igitur centro H , intervallo vero aequali uni ipsarum HE , HZ , HO , HK descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget rectas AB , BT , TA , AA , propterea quod recti sunt anguli ad E , Z , O , K anguli; si enim secat circulus rectas AB , BT , TA , AA , quae diametro circuli ad restos angulos ab extremitate ducitur, intra circulum cadet, quod absurdum ostensum est (III. 16.) Circulus igitur centro H , intervallo vero aequali uni ipsarum HE , HZ , HO , HK descriptus non secat rectas quum polygonum $ABTAEE$ circulo circumscriptum sit, erit ex Obs. 3. $AB+TA+EE=BT+AE+ZA$, adeoque, quum $EE=EE+ZH$, et $KA=ZA+ZO$, sumtum autem sit $ZH=ZO$, erit etiam $AB+TA+EK=BT+AE+KA$. Polygonum itaque $ABTAEK$ etiam ita comparatum est, ut numerus laterum alterne numeratorum aequalis sit numero reliquorum laterum, et tamen manifestum est, huic polygono circulum inscribi non posse. Si enim inscribi posset, idem etiam latera AB , BT , TA ex ea parte lateris BT contingere deberet, ex qua sunt reliqua latera. At, qui hoc efficit, unicus circulus est, nempe is, qui centro O radio OA describitur. Is autem, quum latera EZ , AZ contingat, nequit simul latera EK , AK extra illa posita contingere.

$B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ εὐθείας. Ἐφαίνεται ἄρα αὐτῶν καὶ
 εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνόν κύκλος ἐγγράπται.
 Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$ · δεῖ δὴ
 περὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπεξερχθεῖσαι γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ τεμνέτωσαν ἀλ-
 λήλας κατὰ τὸ $Ε$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\Delta\Lambda$ τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ
 $ΑΓ$, δύο δὴ αἱ $\Delta\Lambda$, $ΑΓ$ δυοὶ ταῖς $ΒΑ$, $ΑΓ$ ἴσαι
 εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ $\Delta Γ$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση· γωνία ἄρα
 ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta ΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $Β ΑΓ$ · ἡ ἄρα
 ὑπὸ $\Delta ΑΒ$ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς $ΑΓ$. Ὁμοίως
 δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΓΔ$,
 $\Gamma\Delta\Lambda$ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΔΒ$ εὐθειῶν. Καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta ΑΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$, καὶ
 ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ $\Delta ΑΒ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $Ε ΑΒ$, τῆς
 δὲ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $Ε ΒΑ$ · καὶ ἡ ὑπὸ $Ε ΑΒ$
 ἄρα τῇ ὑπὸ $Ε ΒΑ$ ἐστὶν ἴση ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΕΑ$
 πλευρὰ τῇ $ΕΒ$ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι
 καὶ ἐκατέρω τῶν $ΕΑ$, $ΕΒ$ εὐθειῶν ἐκατέρω τῶν
 $ΕΓ$, $ΕΔ$ ἴση ἐστίν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ $ΕΑ$, $ΕΒ$,

Obs. 7. In figuris circulo circumscriptis, quae nume-
 rum laterum imparem habent, propositio, quam Obs. 4. ha-
 buimus, etiam ita exprimi poterit: erit in illis summa laterum
 primi, tertii, quinti etc. aequalis summae laterum secundi,
 quarti etc. si huic addas duplum segmentum primi lateris,
 quod inter punctum contactus et eum eius terminum iacet, a
 quo numerare coeptum est, v. c. (Fig. 296.) in pentagono

AB , BF , FA , AA . Continget igitur ipsas et erit inscriptus in quadrato $ABFA$.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IX. (Fig. 291.)

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum $ABFA$; oportet circa quadratum $ABFA$ circulum circumscribere.

Iunctae AF , BA sese secant in E .

Et quoniam AA aequalis est AB , communis autem AF , utraque AA , AF duabus BA , AF aequales sunt, et basis AF basi BF aequalis; angulus igitur AAF aequalis est BAF (I. 8.); angulus igitur AAB bifariam sectus est ab AF . Similiter ostendemus et unumquemque angulorum ABF , BFA , FAA bifariam sectum esse a rectis AF , AB . Et quoniam aequalis est angulus AAB angulo ABF , et est ipsius AAB dimidius angulus EAB , et ipsius ABF dimidius angulus EBA ; et EAB igitur angulo EBA erit aequalis. Quare et latus EA lateri EB est aequale (I. 6.). Similiter ostendemus, et utramque rectarum EA , EB utrique EF , EA aequalem esse; quatuor igitur EA , EB , EF , EA aequales inter se

circulo circumscripto, quod supra delineatum fuit, erat, si a puncto A versus B numerare incipias ex Obs. 4. $AB + FA + Be = BF + EA + Ae$ unde si utrimque addas Ae , erit $AB + FA + EA = BF + EA + 2Ae = BF + EA + 2Ae$. Hinc consequitur, si latera figurae circulo circumscriptae, quae numerum laterum imparem habet, omnia data sint, data etiam esse segmenta, in quae illa in puncto contactus dividuntur. Erit nempe $2Ae$

$ΕΓ$, $ΕΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἶναι. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Ε$, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν $ΕΑ$, $ΕΒ$, $ΕΓ$, $ΕΔ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$.

Ἐπεὶ τὸ δοθὲν ἄρι τετράγωνον κύκλος περιγεγράφται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συντήσασθαι, ἔχον ἐκατέραν τῶν πρὸς τῇ βῆσει γωνιῶν διαπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεία ἡ $ΑΒ$, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ $ΓΑ$ τετράγωνῳ· καὶ κέντρον μὲν τῷ $Α$, διαστήματι δὲ τῷ $ΑΒ$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΒΔΕ$, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν $ΒΔΕ$ κύκλον τῇ $ΑΓ$ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὐσῃ τῆς τοῦ $ΒΔΕ$ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθείᾳ ἡ $ΒΔ$ καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$, $ΓΔ$, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον κύκλος ὁ $ΑΓΔ$.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἴση δὲ ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ $ΑΓΔ$ εἰληπται τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ $Β$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Β$ πρὸς τὸν $ΑΓΔ$ κύκλον προσπεπτώκασιν δύο εὐθεῖαι αἱ $ΒΑ$, $ΒΔ$, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσον τῷ ἀπὸ

$= AB + ΓΔ + ΕΑ - ΒΓ - ΔΕ$. Caeterum haec disquisitio a tertia inde observatione instituta primum facta est a Pitot (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris 1725. p. 45.). Cf. Kraft. Geom. Sublim. §. 104.

sunt. Circulus igitur centro E , et intervallo aequali uni rectarum EA , EB , EF , EA descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circa quadratum $ABFA$. Circumscribatur ut $ABFA$.

Circa datum igitur quadratum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 301.)

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum ad basin duplum reliqui.

Ponatur aliqua recta AB , et secetur in puncto Γ , ita ut rectangulum sub AB , $B\Gamma$ contentum aequale sit quadrato ex ΓA (II. 11.); et centro A , et intervallo AB describatur circulus $B\Delta E$ (Post. 3.), et appetatur in circulo $B\Delta E$ rectae $A\Gamma$, quae non maior est diametro circuli $B\Delta\Gamma$, aequalis recta BA (IV. 1.); et iungantur AA , ΓA , et circumscribatur circa triangulum $A\Gamma A$ circulus $A\Gamma A$.

Et quoniam rectangulum sub AB , $B\Gamma$ aequale est quadrato ex $A\Gamma$, $A\Gamma$ autem aequalis BA , rectangulum igitur sub AB , $B\Gamma$ aequale est quadrato ex BA . Et quoniam extra circulum $A\Gamma A$ sumptum est aliquod punctum B , et a B in circulum $A\Gamma A$ cadunt duae rectae BA , $B\Delta$, quarum altera quidem ipsum secat, altera vero in eum incidit; et est rectangulum

PROPOSITIO VIII.

Obs. Si cui rhombo dato $ABFA$ (Fig. 300.) circulus inscribendus est, quod ex Obs. 5. ad praeced. semper fieri potest, centrum quidem circuli inscribendi eadem ratione inveniri potest, ut hic pro quadrato ostensum fuit, ductis nempe

τῆς BA ἢ BD ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $ΑΓΔ$. Καὶ ἐπεὶ
 ἐφάπτεται μὲν ἡ BD , ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ $Δ$ ἐκκεντρικῆς
 διήκται ἡ $ΔΓ$ ἢ ἄρα ὑπὸ $BΔΓ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ
 ἐν τῷ ἐναλλάξ. τοῦ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ
 $ΔΑΓ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BΔΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$,
 κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΓΔΑ$. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $BΔΑ$
 ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$. Ἀλλὰ ταῖς
 ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ἢ
 ἄρα ὑπὸ $BΔΑ$ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $BΓΔ$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ
 $BΔΑ$ τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ $ΔΑ$
 τῇ AB ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΒΑ$ τῇ ὑπὸ $BΓΔ$
 ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔΒΑ$, $BΓΔ$
 ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΔΒΓ$
 γωνία τῇ ὑπὸ $BΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ $ΒΔ$ πλευρᾷ
 τῇ $ΔΓ$. Ἀλλ' ἡ $ΒΔ$ τῇ $ΓΑ$ ὑποκείται ἴση· καὶ ἡ
 $ΑΓ$ ἄρα τῇ $ΓΔ$ ἐστὶν ἴση ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
 $ΓΔΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$ ἐστὶν ἴση αἱ ἄρα ὑπὸ
 $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΔΑΓ$ εἰσι διπλασίους. Ἰση δὲ
 καὶ ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ καὶ ἡ ὑπὸ
 $BΓΔ$ ἄρα τῆς ὑπὸ $ΔΑΓ$ ἐστὶ διπλῇ. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ
 $BΓΔ$ ἐκάτερα τῶν ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔΒΑ$ καὶ ἐκωτέρω ἄρα
 τῶν ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔΒΑ$ τῆς ὑπὸ $BΔΑ$ ἐστὶ διπλῇ.

rectis ZK , $B\theta$ per puncta, quae latera rhombi opposita bifa-
 riam dividunt, eruntque adhuc ut ante $ZH=HK=HE=HO=$
 AA
 2: at circulus inscribendus iam alium radium habebit, qui
 invenitur, demisso ex H ad unum laterum rhombi v. c. AA
 perpendiculo He , quod, ut facile probatur, aequale est per-
 pendiculo cuicunque ex H in reliqua latera demisso v. c. $H\zeta$.
 Est enim in triangulis HEe , $H\zeta Z$, $HE=HZ$, angulus $E=Z$ et
 ad e et ζ sunt anguli recti, unde ex I. 26. est $He=H\zeta$, et
 circulus centro H radio He descriptus etiam, per puncta ζ , θ ,

sub AB , $B\Gamma$ aequale quadrato ex BA , recta BA contingit circulum $A\Gamma A$ (III. 37.). Quoniam igitur BA contingit, a contactu vero ad A ducta est $\Delta\Gamma$; angulus igitur $B\Delta\Gamma$ aequalis est angulo $\Delta\Gamma A$ in alterno circuli segmento (III. 32.). Quoniam igitur aequalis est angulus $B\Delta\Gamma$ angulo $\Delta A\Gamma$, communis addatur $\Gamma A A$. Totus igitur $B\Delta A$ aequalis est duobus $\Gamma A A$, $\Delta A\Gamma$. Sed angulis $\Gamma A A$, $\Delta A\Gamma$ aequalis est exterior $B\Gamma A$ (I. 32.); angulus igitur $B\Delta A$ aequalis est angulo $B\Gamma A$. Sed angulus $B\Delta A$ angulo $\Gamma B A$ est aequalis, quoniam et latus ΔA lateri AB est aequale (I. 5.); quare et $\Delta B A$ ipsi $B\Gamma A$ est aequalis. Tres igitur $B\Delta A$, $\Delta B A$, $B\Gamma A$ aequales inter se sunt. Et quoniam aequalis est angulus $\Delta B\Gamma$ angulo $B\Gamma A$, et latus $B\Delta$ aequale est lateri $\Delta\Gamma$ (I. 6.). Sed $B\Delta$ ipsi ΓA ponitur aequalis; et $\Delta\Gamma$ igitur ipsi ΓA est aequalis, quare et angulus $\Gamma A A$ angulo $\Delta A\Gamma$ est aequalis (I. 5.); anguli igitur $\Gamma A A$, $\Delta A\Gamma$ anguli $\Delta A\Gamma$ sunt dupli. Aequalis autem et $B\Gamma A$ angulis $\Gamma A A$, $\Delta A\Gamma$ (I. 32.); et $B\Gamma A$ igitur anguli $\Delta A\Gamma$ est duplus. Aequalis autem et $B\Gamma A$ utrique angulorum $B\Delta A$, $\Delta B A$, uterque igitur angulorum $B\Delta A$, $\Delta B A$ anguli $B\Delta A$ est duplus.

* transit, et rhombum in his punctis contingit (III. 16. Cor. 1.). Paullo brevius centrum H invenietur, ductis diagonalibus AF , BA , quae pariter in H se intersecant.

PROPOSITIO IX.

Obs. Eadem constructione etiam circa rectangulum non aequilaterum circulus circumscribetur, quod fieri semper posse patet ex Obs. 5. ad III. 22. Demonstratio tantum paulo diversa erit, et absolvetur ope I. 34. Cor. 1. et I. 34. Cor. 17.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ AAB , ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ AB βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Εἰς τὴν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓΔΕ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν $ABΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ZHΘ$, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς $H, Θ$ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Z , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ABΓΔΕ$ κύκλον τῷ $ZHΘ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ $ΑΓΔ$, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Z γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ $ΓΑΔ$, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς $H, Θ$ ἴσην ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ, ΓΔΑ$ καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ, ΓΔΑ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἐστὶ διπλῇ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ, ΓΔΑ$ δίχα ὑπὸ τῶν $ΓΕ, ΔΒ$ εὐθειῶν, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $AB, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ$.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ, ΓΔΑ$ γωνιῶν διπλασίον ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$, καὶ τετμημέναι εἰσὶ

PROPOSITIO X.

Praemitti potest huic problemati sequens analysis. Puta factum, sitque $ABΔ$ triangulum aequicrurum, in quo uterque angulorum ad basin duplus est reliqui. Bisecetur unus angulorum ad basin recta $ΔΓ$ (I. 9.), eritque angulus $ΒΔΓ = ΒΑΔ$, pariterque $ΓΔΑ = ΒΑΔ$, adeoque (I. 5.) $ΔΓ = ΓΑ$. Praeterea, quum in triangulis $ΒΓΔ, ΒΔΑ$ sit $ΒΔΓ = ΒΑΔ$, et angulus B communis, erit etiam reliquus $ΒΓΔ = ΑΔΒ$ (I. 32.). At ex Hyp. $ΑΒΔ = ΑΔΒ$: erit itaque $ΒΓΔ = ΑΒΔ$, adeoque $ΔΓ = ΒΔ$. Praeterea, si triangulo $ΑΓΔ$ circumscribatur circulus

Isosceles igitur triangulum constitutum est AAB habens utrumque angulorum ad AB basin duplum reliqui. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 302.)

In dato circulo pentagonum aequilaterum et aequi-
angulum inscribere.

Sit datus circulus $ABΓAE$; oportet in circulo $ABΓAE$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Ponatur triangulum isosceles $ZHΘ$ duplum habens utrumque angulorum ad $H, Θ$ anguli ad Z (IV. 10.), et inscribatur in circulo $ABΓAE$, triangulo $ZHΘ$ aequiangulum triangulum $ΑΓΔ$ (IV. 2.), ita ut angulo quidem Z aequalis sit angulus $ΓAA$, uterque vero angulorum ad $H, Θ$ aequalis utrique angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$; et uterque igitur angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$ anguli $ΓAA$ est duplus. Secetur autem uterque angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$ bifariam a rectis $ΓE, AB$ (I. 9.) et iungantur $AB, BΓ, ΔE, EA$.

Quoniam igitur uterque angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$ duplus est anguli $ΓAA$; et secti sunt bifariam a re-

(IV. 5.), ob angulum $BΔΓ=BAA$, $BΔ$ hunc circulum continget (Obs. 2. ad III. 32.), adeoque erit $BΔq=AB \times BΓ$ (III. 36.), vel ob $BΔ=ΑΓ=ΑΓ$, $ΑΓq=AB \times BΓ$. Solutio problematis itaque eo redit, ut recta AB ita secetur in $Γ$, ut rectangulum sub tota et segmento $BΓ$ aequale sit quadrato reliqui segmenti $ΑΓ$ i. e. ad II. 11. Quo facto sumenda erit in circulo $BΔE$ recta $BΔ=ΑΓ$, et ducenda AA . Caeterum manifestum est, positionem rectae AB pro lubitu sumi, itaque, si datum sit punctum A , punctum B in circumferentia cir-

δίχα ὑπὸ τῶν $ΓΕ$, $ΔΒ$ εὐθειῶν αἱ πέντε ἄρα γωνίαι
 αἱ ὑπὸ $ΔΑΓ$, $ΑΓΕ$, $ΕΓΔ$, $ΓΔΒ$, $ΒΔΑ$ ἴσαι ἀλλή-
 λαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν
 βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$,
 $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας
 περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα
 εὐθεῖαι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$ ἴσαι ἀλλήλαις
 εἰσίν· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον.
 Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΒ$ περι-
 φέρεια τῇ $ΔΕ$ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινῇ προσκείσθω
 ἡ $ΒΓΔ$ · ὅλη ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ περιφέρεια ὅλη τῇ $ΕΔΓΒ$
 περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. Καὶ βεβήκεν ἐπὶ μὲν τῆς
 $ΑΒΓΔ$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$, ἐπὶ δὲ τῆς
 $ΕΔΓΒ$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ · καὶ ἡ ὑπὸ
 $ΒΑΕ$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$
 γωνιῶν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΑΕ$, $ΑΕΔ$ ἐστὶν ἴση· ἰσο-
 γώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη
 δὲ καὶ ἰσοπλευρον.

culi. $ΒΑΕ$ pro lubitu sumi aut datum esse posse. Compo-
 sitio deinde fiet, ut apud Euclidem.

Cor. 1. Quum $ΑΒΔ = ΑΔΒ = 2ΒΑΔ$, erit $ΒΑΔ =$
 $\frac{ΑΒΔ + ΑΔΒ + ΒΑΔ}{5}$, vel, quum $ΑΒΔ + ΑΔΒ + ΒΑΔ = 2$ rectis

(I. 32.), erit $ΒΑΔ = \frac{2 \text{ Rect.}}{5} = \frac{4 \text{ Rect.}}{10}$, et angulus $ΑΒΔ =$
 $\frac{4 \text{ Rect.}}{5}$.

Cor. 2. Simul cum nostro problemate solutum est etiam
 hoc: Isosceles triangulum constituere, cuius angulus ad ver-
 ticem triplus sit utriusque anguli ad basin. Id nempe est
 triangulum $ΑΓΔ$, quod vidimus esse isosceles, nempe $ΑΓ =$
 $ΓΔ$, et in quo angulus $ΑΓΔ = ΑΒΔ + ΒΔΓ = 3ΒΔΓ = 3ΓΔΑ =$

ctis TE , AB ; quinque igitur anguli $\angle A\Gamma\Gamma$, $\angle A\Gamma E$, $\angle E\Gamma A$, $\angle \Gamma AB$, $\angle BAA$ aequales inter se sunt. Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent (III. 26.); quinque igitur circumferentiae AB , BF , ΓA , AE , EA aequales inter se sunt. Aequales autem circumferentias aequales rectae subtendunt (III. 29.); quinque igitur rectae AB , BF , ΓA , AE , EA aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est $AB\Gamma AE$ pentagonum. Dico et aequiangulum. Quoniam enim circumferentia AB circumferentiae AE est aequalis, communis addatur $B\Gamma A$; tota igitur circumferentia $AB\Gamma A$ toti circumferentiae $E\Gamma B$ est aequalis. Et insistit quidem circumferentiae $AB\Gamma A$ angulus AEA , circumferentiae vero $E\Gamma B$ angulus BAE , et angulus BAE igitur angulo AEA est aequalis (III. 27.) Ex eadem ratione unusquisque angulorum $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAE alterutri angulorum BAE , AEA est aequalis; aequiangulum igitur est pentagonum $AB\Gamma AE$. Ostensum est autem et aequilaterum.

$3\Gamma AA$. Et vice versa, si quis construere sciat triangulum isosceles ΓAA , in quo $\angle \Gamma A = 3\angle \Gamma AA$, construere quoque poterit triangulum isosceles BAA , in quo $BAA = \frac{ABA}{2}$.

Obs. 2. Campanus et Peletarius, ut bene monet Clavius, sine causa se excruciant, ut probent, rectam BA contingere circumulum ΓAA , quum id ex III. 37. manifesto consequatur. Id autem iure observat Campanus, circulos ΓAA , BAE se in puncto A non contingere, sed se iterum secare in puncto aliquo E , ita, ut arcus maioris circuli $AE = BA$, pariterque arcus minoris circuli $AE = \Gamma A$. Quod facile ita probatur. Hi circuli se non contingunt in A , si enim contingerent, recta BA , quae minorem contingit, contingeret etiam maiorem (Obs. 2. ad III. 17.). Eadem autem maiori inscripta est

Εἰς ἅρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσό-
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράφεται. Ὅπερ ἔδει
ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν
τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ
τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν
γωνιῶν σημεῖα, τὰ $A, B, Γ, Δ, E$, ὥστε ἴσας εἶναι
τὰς $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ$ περιφερείας καὶ διὰ
τῶν $A, B, Γ, Δ, E$ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτό-
μεναι αἱ $HΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ$ καὶ εἰληφθῶ
τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ κύκλου κέντρον τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω-
σαν αἱ $ZB, ZK, ZΓ, ZΛ, ZA$.

q. e. a. Secent igitur se in B , eritque, ductis rectis AB ,
 $ΔE$, angulus $ΔΕΔ = ΒΓΔ$ (III. 22. Cor. 1.) $= ΑΒΔ$. Est au-
tem etiam; ob $ΔE = ΑΔ$ (I. Def. 15.) $ΔΔE = ΑΒΔ$ (I. 5.)
 $= ΑΒΔ = ΑΔB$. Itaque (I. 32.) aequiangula sunt trian-
gula $ΔΔE, ΑΔB$, et nominatim angulus $ΔΔE = ΒΑΔ$, unde et ar-
cus maioris circuli $ΔE = ΔB$ (III. 26.) et recta $ΔE = ΒΔ$ (III.
29.) $= ΓΔ$, adeoque et arcus minoris circuli $ΔE = ΓΔ$. Pe-
lletarius addit, rectam $ΓΔ$ vel $ΑΓ$ esse latus pentagoni regu-
laris circulo $ΑΓΔ$ inscripti. Nempe quum, ut vixdam vidi-
mus, sit arcus $ΔE = ΓΔ$, recta autem $ΓΔ = ΑΓ$, erit etiam
arcus $ΑΓ = ΓΔ = ΔB$ (III. 28.). Eodem modo, quum recta
 $ΔE = ΑΔ$, erit arcus $ΔE = ΑΓΔ$ (III. 28.), adeoque, si is
bisariam secetur, circulus $ΑΓΔ$ in quinque arcus aequales di-
visus erit, quorum chordae aequales sunt (III. 29.) et binæ
proximæ angulos aequales comprehendunt (III. 27.).

In dato igitur circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 303.)

Circa datum circumlun pentagonum æquilaterum et æquiangulum circumscribere.

Sit datus circulus $ABΓΔE$; oportet circa circumlun $ABΓΔE$ pentagonum æquilaterum et æquiangulum circumscribere.

Intelligentur inscripti pentagoni angulorum puncta $A, B, Γ, Δ, E$, ita ut æquales sint $AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA$ circumferentiae; et per $A, B, Γ, Δ, E$ ducantur rectae circumlun contingentes $HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH$ (III. 17.); et sumatur circuli $ABΓΔE$ oentrum Z , et iungantur $ZB, ZK, ZΓ, ZΛ, ZA$.

PROPOSITIO XI.

Cor. (Clavil.) Quum ex IV. 10. Cor. 1. angulus $ΓAA$ sit $\frac{2}{3}$ rect. sit autem $BΓI = ΓAA = ΔAB$, sequitur, angulum BAE pentagoni regularis complecti sex quintas unius recti, vel tres quintas duorum rectorum, quod consentit cum I. 32. Cor. 18.; angulus autem $ABE = AEB$ erit (I. 32.) quinta pars duorum rectorum: itaque angulus BAE triplus est anguli ABE . Cf. IV. 10. Cor. 2. Caeterum simpliciore propositionis IV. 11. solutionem dabit XIII. 10.

Obs. Eodem modo, quo hic ostensum fuit, descriptionem pentagoni regularis in dato circulo pendere a constructione trianguli æquicruri, cuius angulus ad basin uterque duplus sit reliqui — dum nempe ope huius trianguli, aliusque illi æquicruri in dato circulo descripti circulus in quinque partes æquales divisus fuit, quo facto res erat facillima — generaliter demonstrabitur, descriptionem polygoni regularis cuius-

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν $ΚΑ$ εὐθεία ἐφάπτεται τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ κύκλου κατὰ τὸ $Γ$, ἀπὸ δὲ τοῦ $Ζ$ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ $Γ$ ἐπαφὴν ἐπέξενται ἡ $ΖΓ$ ἡ $ΖΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΚΑ$ ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ $Γ$ γωνιών. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς $Β$, $Δ$ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΖΚ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΓ$, $ΓΚ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ$, $ΒΚ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΚ$ ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $ΖΓ$, $ΓΚ$ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ$, $ΒΚ$ ἐστὶν ἴσα, ὡν τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$ λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΚ$ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΒΚ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΖΒ$ τῇ $ΖΓ$, καὶ κοινὴ ἡ $ΖΚ$, δύο δὴ αἱ $ΒΖ$, $ΖΚ$ ὁμοίαι ταῖς $ΓΖ$, $ΖΚ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ $ΒΚ$ βάσει τῇ $ΓΚ$ ἐστὶν ἴση γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΖΓ$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΚΖ$ τῇ ὑπὸ $ΖΚΓ$ ἐστὶν ἴση διπλὴ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΚΓ$ τῆς ὑπὸ $ΖΚΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΖΔ$ τῆς $ΓΖΑ$ ἐστὶ διπλὴ ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΑΔ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ περιφέρεια τῇ $ΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΖΔ$. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$ διπλὴ, ἡ δὲ ὑπὸ $ΔΖΓ$ διπλὴ τῆς ὑπὸ $ΑΖΓ$ · ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΚΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΑΖΓ$ · ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΓΑ$ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $ΖΚΓ$, $ΖΑΓ$

cunque, quod numerum laterum imparem $=2n+1$ habeat, pendere a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit n plus reliqui anguli, ita ut v. gr. pro heptagono angulus ad basin triplus esse debeat anguli ad verticem; in enneagono 4 plus etc. vel, quod eodem redit, et pro

Et quoniam recta KA contingit circulum $AB\Gamma\Delta E$ in Γ , a centro autem Z in contactum ad Γ ducta est $Z\Gamma$; erit $Z\Gamma$ perpendicularis ad KA (III. 18.); rectus igitur est uterque angulorum ad Γ . Ex eadem ratione anguli ad puncta B, Δ recti sunt. Et quoniam rectus est angulus $Z\Gamma K$, quadratum ex ZK aequale est quadratis ex $Z\Gamma, \Gamma K$ (I. 47.). Ex eadem ratione et quadratis ex ZB, BK aequale est quadratum ex ZK ; quare quadrata ex $Z\Gamma, \Gamma K$ quadratis ex ZB, BK aequalia sunt, quorum quadratum ex $Z\Gamma$ quadrato ex ZB est aequale; reliquum igitur ex ΓK reliquo ex BK est aequale; aequalis igitur recta ΓK rectae BK . Et quoniam aequalis est ZB ipsi $Z\Gamma$, et communis ZK , duae BZ, ZK duabus $\Gamma Z, ZK$ aequales sunt, et basis BK basi ΓK est aequalis; angulus igitur BZK angulo $KZ\Gamma$ est aequalis (I. 8.), angulus autem BKZ angulo $ZK\Gamma$ est aequalis; duplus igitur angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$, angulus autem $BK\Gamma$ anguli $ZK\Gamma$. Ex eadem ratione et angulus $\Gamma Z\Delta$ anguli $\Gamma Z\Lambda$ est duplus, angulus autem $\Gamma\Lambda\Delta$ anguli $\Gamma\Lambda Z$. Et quoniam aequalis est circumferentia $B\Gamma$ ipsi $\Gamma\Delta$, aequalis est et angulus $BZ\Gamma$ angulo $\Gamma Z\Delta$ (III. 27.). Et est angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$ duplus, angulus autem $\Delta Z\Gamma$ duplus anguli $AZ\Gamma$; aequalis igitur et $KZ\Gamma$ ipsi $AZ\Gamma$; est autem et angulus $Z\Gamma K$ angulo $Z\Gamma\Lambda$ aequalis. Duo itaque triangula sunt $ZK\Gamma, Z\Lambda\Gamma$ duos angulos duobus omnibus polygonis regularibus valet, a divisione circuli in tot partes aequales, quot latera habere debet polygonum describendum. Sin autem polygonum parem laterum numerum $=2n$ habeat, pondebit eius descriptio a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit $(n-1/2)$.

τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μὲν πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν $ZΓ$, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἢ μὲν $ΚΓ$ εὐθεῖα, τῇ $ΓΑ$, ἢ δὲ ὑπὸ $ZΚΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΑΓ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΚΓ$ τῇ $ΓΑ$, διπλῇ ἄρα ἡ $ΚΑ$ τῆς $ΚΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ $ΘΚ$ τῆς $ΒΚ$ διπλῇ. Καὶ ἐστὶν ἡ $ΒΚ$ τῇ $ΚΓ$ ἴση¹⁾ καὶ $ΘΚ$ ἄρα τῇ $ΚΑ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐκάστη τῶν $ΘΗ$, $ΗΜ$, $ΜΑ$ ἐκατέρα τῶν $ΘΚ$, $ΚΑ$ ἴση· ἰσοπλευρὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΗΘΚΑΜ$ πεντάγωνον. Αἶρω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZΚΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΑΓ$, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ $ZΚΓ$ διπλῇ ἢ ὑπὸ $ΘΚΑ$, τῆς δὲ ὑπὸ $ΖΑΓ$ διπλῇ ἢ ὑπὸ $ΚΑΜ$ καὶ ἡ ὑπὸ $ΘΚΑ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΚΑΜ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $ΚΘΗ$, $ΘΗΜ$, $ΗΜΑ$ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $ΘΚΑ$, $ΚΑΜ$ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΗΘΚ$, $ΘΚΑ$, $ΚΑΜ$, $ΑΜΗ$, $ΜΗΘ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΗΘΚΑΜ$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον, καὶ περιγράφεται περὶ τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρὸν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἔγγραψαι.

1) Edd. Oxon. et Basil. habent: καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ $ΒΚ$ τῇ $ΚΓ$, καὶ ἐστὶ διπλῇ ἢ μὲν $ΚΑ$ τῆς $ΚΓ$, ἢ δὲ $ΘΚ$ τῆς $ΒΚ$ καὶ $ΘΚ$ ἄρα τῇ $ΚΑ$ ἐστὶν ἴση: quae verba, quum sint mera repetitio eius, quod modo dictum erat, cum Peyrardo et Cod. a. omisimus.

plus reliqui anguli, ita ut v. c. pro octogono angulus ad ba-

gulis aequales habentia utrumque utrique, et unum latius uni lateri aequale, commune ipsis ZF , et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo (I. 26.); aequalis igitur recta KF rectae FA , angulus vero ZKF angulo ZAF . Et quoniam aequalis est KF ipsi FA , dupla igitur KA ipsius KF . Ex eadem ratio e et OK ipsius IK dupla ostenditur. Et est BK ipsi KF aequalis; et OK igitur ipsi KA est aequalis. Similiter ostenditur et unaquaeque rectarum OH , HM , MA alterutri ipsarum OK , KA aequalis; aequilaterum igitur est pentagonum $HOKAM$. Dico autem et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est angulus ZKF angulo ZAF , et ostensus est anguli ZKF duplus angulus OKA , anguli autem ZAF duplus angulus KAM ; et angulus OKA angulo KAM est aequalis. Similiter et unusquisque angulorum KOH , OHM , HMA ostenditur alterutri angulorum OKA , KAM aequalis; quinque igitur anguli HOK , OKA , KAM , AMH , MHO aequales inter se sunt. Aequiangulum igitur est pentagonum $HOKAM$. Ostensum est autem et aequilaterum, et circumscriptum est circa circulum $ABTAE$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 304.)

In dato pentagono, aequilatero et aequiangulo, circulum inscribere.

sia $(4 - \frac{1}{2})$ plus vel $\frac{7}{2}$ plus anguli ad verticem esse debet. Cf. Tacquet. Euclid. ed. Whiston. Schol. 1. ad V. 11.; Barrow. Euclid. Schol. ad IV. 11.; Clavius. Schol. ad IV. 16.; Boërmannus. Schol. 3. ad IV. 11. abique. Potest etiam haec observatio pro polygonis impari aut pari laterum nu-

$\Gamma\Delta\epsilon$ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, ἢ δὲ $\Gamma\Delta Z$ τῇ ὑπὸ ΓBZ , καὶ ἢ ὑπὸ $\Gamma B A$ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓBZ ἐστὶ διπλῇ ἴσῃ ἄρα ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZB\Gamma$ ἢ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς BZ εὐθείας. Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BAE , $AE\Delta$ δίχα τέμνεται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ZA , ZE εὐθειῶν. Ἠχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Z σημείου ἐπὶ τὰς AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθείας κάθετοι αἱ ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ὑπὸ $\Theta\Gamma Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Gamma Z$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἢ ὑπὸ $Z\Theta\Gamma$ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ $ZK\Gamma$ ἴση, δύο δὴ τριγωνα ἴσιν τὰ $Z\Theta\Gamma$, $ZK\Gamma$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μὲν πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν $Z\Gamma$ ὑποτείνουσιν ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἴση ἄρα ἢ $Z\Theta$ κάθετος τῇ ZK καθέτῳ. Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ZA , ZM , ZH ἑκατέρα τῶν $Z\Theta$, ZK ἴση ἐστὶν. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφαπεται τῶν AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς H , Θ , K , A , M

regulare. Et Clavius quidem ad IV. 11. ita hoc problema solvit. Sit super recta data $\Gamma\Delta$ (Fig. 302.) describendum pentagonum regulare. Fiat triangulum aequicrurum $ZH\Theta$ tale, ut uterque angulus ad basin duplus sit reliqui (IV. 10.). Deinde circa triangulum $AP\Delta$, quod super basi $\Gamma\Delta$ ope I. 23. triangulo $ZH\Theta$ aequiangulum construitur, describatur circulus (IV. 5.), huicque inscribatur ex IV. 11. ope eiusdem trianguli $AP\Delta$ pentagonum regulare. Eodem fere redit constructio

igitur anguli IBZ est duplus; aequalis igitur angulus ABZ angulo ZBF . Ergo angulus ABF bifariam secatur a recta BZ . Similiter ostendetur et utrumque angulorum BAE , AEA bifariam secari ab utraque rectarum ZA , ZE . Ducantur autem a puncto Z ad AB , BF , GA , AE , EA rectae perpendiculares ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM (I. 12.). Et quoniam aequalis est angulus ΘFZ angulo $K FZ$, est autem et rectus $Z\Theta F$ recto ZKF aequalis, duo triangula sunt $Z\Theta F$, ZKF duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, commune scilicet utrique ZF , subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur perpendicularis $Z\Theta$ perpendiculari ZK . Similiter ostendetur et unamquamque rectarum ZA , ZM , ZH , alterutri rectarum $Z\Theta$, ZK aequalem esse; quinque igitur rectae ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z , intervallo vero una ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB , BF , GA , AE , EA rectas; propterea quod recti sunt anguli ad puncta H , Θ , K , A , M . Si enim ipsas non contingit, sed secat, eveniet ut recta diametro circuli ad rectos angulos ab

Peletarii, quam habet ille ad IV. 10. Alia Clavii solutio nititur observatione in Cor. ad IV. 10. et in Cor. ad IV. 11. facta. Nempe, quum in triangulo $ZH\Theta$ (Fig. 302.) uterque angulorum ad basin sit ex IV. 10. Cor. $= \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$, erit angulus ei deinceps, qui basi producta oritur, $= 2 \text{ Rect.} - \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$

(I. 13.) $= \frac{6 \text{ Rect.}}{5}$ i. e. ex Cor. IV. 11. $=$ angulo, quem duo

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον σφνίσταται τὸ AAB , ἔχον
ἐκατέραν τῶν πρὸς τῇ AB βάσει γωνιῶν διπλασίονα
τῆς λοιπῆς. "Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσοπλευρόν
τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓΔΕ$. δεῖ δὴ εἰς
τὸν $ABΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ZHΘ$, διπλα-
σίονα ἔχον ἐκατέραν τῶν πρὸς τοῖς $H, Θ$ γωνιῶν τῆς
πρὸς τῷ Z , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ABΓΔΕ$ κύκλον
τῷ $ZHΘ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ $ΑΓΔ$, ὥστε
τῇ μὲν πρὸς τῷ Z γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ $ΓΑΔ$,
ἐκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς $H, Θ$ ἴσην ἐκατέρα τῶν
ὑπὸ $ΑΓΔ, ΓΔΑ$ καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ$,
 $ΓΔΑ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἐστὶ διπλῇ. Τετμήσθω δὴ ἑκα-
τέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ, ΓΔΑ$ δίχα ὑπὸ τῶν $ΓΕ, ΔΒ$
εὐθειῶν, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $AB, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ$.

Ἐπεὶ οὖν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ, ΓΔΑ$ γωνιῶν
διπλασίον ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$, καὶ τετμημέναι εἰσὶ

PROPOSITIO X.

Praemitti potest huic problemati sequens analysis. Puta
factum, sitque ABA triangulum aequicrurum, in quo uterque
angulorum ad basin duplus est reliqui. Bisecetur unus angu-
lorum ad basin recta AF (I. 9.), eritque angulus $BAG = BAA$,
pariterque $ΓΔΑ = BAA$, adeoque (I. 5.) $AG = GA$. Praeterea,
quum in triangulis BGA, BAA sit $BAG = BAA$, et angulus
 B communis, erit etiam reliquus $BGA = AAB$ (I. 32.). At
ex Hyp. $ABA = AAB$: erit itaque $BGA = ABA$, adeoque $AG =$
 BA . Praeterea, si triangulo AGA circumscribatur circulus

Isosceles igitur triangulum constitutum est AAB habens, utrumque angulorum ad AB basin duplum reliqui. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 302.)

In dato circulo pentagonum aequilaterum et aequi-
angulum inscribere.

Sit datus circulus $ABΓAE$; oportet in circulo $ABΓAE$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Ponatur triangulum isosceles $ZHΘ$ duplum, habens utrumque angulorum ad $H, Θ$ anguli ad Z (IV. 10.), et inscribatur in circulo $ABΓAE$, triangulo $ZHΘ$ aequiangulum triangulum $ΑΓΔ$ (IV. 2.), ita ut angulo quidem Z aequalis sit angulus $ΓAA$, uterque vero angulorum ad $H, Θ$ aequalis utrique angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$; et uterque igitur angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$ anguli $ΓAA$ est duplus. Secetur autem uterque angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$ bifariam a rectis $ΓE, AB$ (I. 9.) et iungantur $AB, BΓ, ΔE, EA$.

Quoniam igitur uterque angulorum $ΑΓΔ, ΓAA$ duplus est anguli $ΓAA$; et secti sunt bifariam a re-

(IV. 5.), ob angulum $BΔΓ = BAA$, $BΔ$ hunc circumulum continget (Obs. 2. ad III. 32.), adeoque erit $BΔ^2 = AB \times BΓ$ (III. 36.), vel ob $BΔ = ΔΓ = ΑΓ$, $ΑΓ^2 = AB \times BΓ$. Solutio problematis itaque eo redit, ut recta AB ita secetur in $Γ$, ut rectangulum sub tota et segmento $BΓ$ aequale sit quadrato reliqui segmenti $ΑΓ$ i. e. ad II. 11. Quo facto sumenda erit in circulo $BΔE$ recta $BΔ = ΑΓ$, et ducenda AA . Caeterum manifestum est, positionem rectae AB pro lubitu sumi, itaque, si datum sit punctum A , punctum B in circumferentia cir-

διχα ὑπὸ τῶν $ΓΕ$, $ΔΒ$ εὐθεῶν αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΔΑΓ$, $ΑΓΕ$, $ΕΓΔ$, $ΓΔΒ$, $ΒΔΑ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΒ$ περιφέρεια τῇ $ΔΕ$ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ $ΒΓΔ$ ὅλη ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ περιφέρεια ὅλη τῇ $ΕΔΓΒ$ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς $ΑΒΓΔ$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$, ἐπὶ δὲ τῆς $ΕΔΓΒ$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ · καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ γωνιῶν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΑΕ$, $ΑΕΔ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον.

culi, $ΒΑΕ$ pro lubitu sumi aut datum esse posse. Compositio deinde fiet, ut apud Euclidem.

Cor. 1. Quum $ΑΒΔ = ΑΔΒ = 2ΒΔΔ$, erit $ΒΔΔ = \frac{ΑΒΔ + ΑΔΒ + ΒΔΔ}{5}$, vel, quum $ΑΒΔ + ΑΔΒ + ΒΔΔ = 2$ rectis

(I. 32.), erit $ΒΔΔ = \frac{2 \text{ Rect.}}{5} = \frac{4 \text{ Rect.}}{10}$, et angulus $ΑΒΔ = \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$.

Cor. 2. Simul cum nostro problemate solutum est etiam hoc: Isosceles triangulum constituere, cuius angulus ad vertexem triplus sit utriusque anguli ad basin. Id nempe est triangulum $ΑΓΔ$, quod vidimus esse isosceles, nempe $ΑΓ = ΓΔ$, et in quo angulus $ΑΓΔ = ΑΒΔ + ΒΔΓ = 3ΒΔΓ = 3ΓΔΔ =$

ctis TE , AB ; quinque igitur anguli ΔAF , AFE , ETA , ΓAB , BAA aequales inter se sunt. Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent (III. 26.); quinque igitur circumferentiae AB , BF , ΓA , ΔE , EA aequales inter se sunt. Aequales autem circumferentias aequales rectae subtendunt (III. 29.); quinque igitur rectae AB , BF , ΓA , ΔE , EA aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum. Dico et aequiangulum. Quoniam enim circumferentia AB circumferentiae ΔE est aequalis, communis addatur $B\Gamma A$; tota igitur circumferentia $AB\Gamma A$ toti circumferentiae $E\Delta\Gamma B$ est aequalis. Et insistit quidem circumferentiae $AB\Gamma A$ angulus AEA , circumferentiae vero $E\Delta\Gamma B$ angulus BAE , et angulus BAE igitur angulo AEA est aequalis (III. 27.) Ex eadem ratione unusquisque angulorum $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, $\Gamma\Delta E$ alterutri angulorum BAE , AEA est aequalis; aequiangulum igitur est pentagonum $AB\Gamma\Delta E$. Ostensum est autem et aequilaterum.

3 ΓAA . Et vice versa, si quis construere sciat triangulum isosceles $\Delta\Gamma A$, in quo $\Delta\Gamma A = 3\Gamma AA$, construere quoque poterit triangulum isosceles BAA , in quo $BAA = \frac{ABA}{2}$.

Obs. 2. Campanus ac Peletarius, ut bene monet Clavius, sine causa se excruciant, ut probent, rectam BA contingere circumulum $\Delta\Gamma A$, quum id ex III. 37. manifesto consequatur. Id autem iure observat Campanus, circulos $\Delta\Gamma A$, $B\Delta E$ se in puncto A non contingere, sed se iterum secare in puncto aliquo E , ita, ut arcus maioris circuli $\Delta E = BA$, pariterque arcus minoris circuli $\Delta E = \Gamma A$. Quod facile ita probatur. Hi circuli se non contingunt in A , si enim contingerent, recta BA , quae minorem contingit, contingeret etiam maiorem (Obs. 2. ad III. 17.). Eadem autem maiori inscripta est

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσό-
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράφεται. Ὅπερ ἔδει
ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν
τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ
τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν
γωνιῶν σημεῖα, τὰ $A, B, Γ, Δ, E$, ὥστε ἴσας εἶναι
τὰς $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ$ περιφερείας καὶ διὰ
τῶν $A, B, Γ, Δ, E$ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτό-
μεναι αἱ $ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ$ καὶ εἰλήφθω
τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ κύκλου κέντρον τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω-
σαν αἱ $ZB, ZK, ZΓ, ZΔ, ZΑ$.

q. e. a. Secent igitur se in E , eritque, ductis rectis $ΑΒ, ΔΕ$, angulus $ΑΕΔ=ΒΓΔ$ (III. 22. Cor. 1.) $=ΑΒΔ$. Est autem etiam; ob $ΑΕ=ΑΔ$ (I. Def. 15.) $ΑΔΕ=ΑΒΔ$ (I. 5.) $=ΑΒΔ=ΑΔΒ$. Itaque (I. 32.) aequiangula sunt triângula $ΑΔΕ, ΑΔΒ$, et nominatim angulus $ΑΔΒ=ΒΑΔ$, unde et arcus maioris circuli $ΔΕ=ΔΒ$ (III. 26.) et recta $ΔΕ=ΒΔ$ (III. 29.) $=ΓΔ$, adeoque et arcus minoris circuli $ΔΕ=ΓΔ$. Póletarius addit, rectam $ΓΔ$ vel $ΑΓ$ esse latus pentagoni regularis circulo $ΑΓΔ$ inscripti. Nempe quum, ut vixdam vidimus, sit arcus $ΔΕ=ΓΔ$, recta autem $ΓΔ=ΑΓ$, erit etiam arcus $ΑΓ=ΓΔ=ΔΕ$ (III. 28.). Eodem modo, quum recta $ΑΕ=ΑΔ$, erit arcus $ΑΒΕ=ΑΓΔ$ (III. 28.), adeoque, si is bifariam secetur, circulus $ΑΓΔ$ in quinque arcus aequales divisus erit, quorum chordae aequales sunt (III. 29.) et binæ proximæ angulos aequales comprehendunt (III. 27.).

In dato igitur circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 303.)

Circa datum circulum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Sit datus circulus $ABΓΔE$; oportet circa circulum $ABΓΔE$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Intelligentur inscripti pentagoni angulorum puncta $A, B, Γ, Δ, E$, ita ut aequales sint $AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA$ circumferentiae; et per $A, B, Γ, Δ, E$ ducantur rectae circulum contingentes $HΘ, ΘK, KA, AM, MH$ (III. 17.); et sumatur circuli $ABΓΔE$ centrum Z , et iungantur $ZB, ZK, ZΓ, ZA, ZE$.

PROPOSITIO XI.

Cor. (Clavii.) Quum ex IV. 10. Cor. 1. angulus $ΓAA$ sit $\frac{2}{3}$ rect. sit autem $BAT = ΓAA = AAB$, sequitur, angulum BAE pentagoni regularis complecti sex quintas unius recti, vel tres quintas duorum rectorum, quod consentit cum I. 32. Cor. 18.; angulus autem $ABE = AEB$ erit (I. 32.) quinta pars duorum rectorum: itaque angulus BAE triplus est anguli ABE . Cf. IV. 10. Cor. 2. Caeterum simpliciore propositiōis IV. 11. solutionem dabit XIII. 10.

Obs. Eodem modo, quo hic ostensum fuit, descriptionem pentagoni regularis in dato circulo pendere a constructione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque duplus sit reliqui — dum nempe ope huius trianguli, aliusque illi aequicruri in dato circulo descripti circulus in quinque partes aequales divisus fuit, quo facto res erat facillima — generaliter demonstrabitur, descriptionem polygoni regularis cuius-

Καὶ ἵπαι ἡ μὲν $ΚΑ$ εὐθεία ἐφαπτεται τοῦ $ΑΒΓΔΕ$
κύκλου κατὰ τὸ $Γ$, ἀπὸ δὲ τοῦ $Ζ$ κέντρου ἐπὶ τὴν
κατὰ τὸ $Γ$ ἐπαφὴν ἐπέξενεται ἡ $ΖΓ$ ἡ $ΖΓ$ ἄρα κά-
θειτός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΚΑ$ ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα
τῶν πρὸς τῷ $Γ$ γωνιών. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ
πρὸς τοῖς $Β$, $Δ$ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἶναι. Καὶ
ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς
 $ΖΚ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΓ$, $ΓΚ$. Διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ$, $ΒΚ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 $ΖΚ$ ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $ΖΓ$, $ΓΚ$ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ$,
 $ΒΚ$ ἐστὶν ἴσα, ὡν τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$
ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$ λοιπὸν τῷ
ἀπὸ τῆς $ΒΚ$ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΒΚ$.
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΖΒ$ τῇ $ΖΓ$, καὶ κοινὴ ἡ $ΖΚ$,
δύο δὴ αἱ $ΒΖ$, $ΖΚ$ δύοι ταῖς $ΓΖ$, $ΖΚ$ ἴσαι εἶναι,
καὶ βάσις ἡ $ΒΚ$ βάσις τῇ $ΓΚ$ ἐστὶν ἴση γωνία ἄρα
ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΖΓ$ ἐστὶν ἴση, ἡ
δὲ ὑπὸ $ΒΚΖ$ τῇ ὑπὸ $ΖΚΓ$ ἐστὶν ἴση διπλὴ ἄρα ἡ
μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΚΓ$ τῆς
ὑπὸ $ΖΚΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΖΔ$
τῆς $ΓΖΔ$ ἐστὶ διπλὴ ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΑΔ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΖ$.
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ περιφέρεια τῇ $ΓΔ$, ἴση
ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΖΔ$. Καὶ ἐστὶν
ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$ διπλὴ, ἡ δὲ ὑπὸ
 $ΑΖΓ$ διπλὴ τῆς ὑπὸ $ΑΖΓ$ ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΚΖΓ$
τῇ ὑπὸ $ΑΖΓ$ ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία τῇ
ὑπὸ $ΖΓΑ$ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $ΖΚΓ$, $ΖΑΓ$

cunque, quod numerum laterum imparem $=2n+1$ habet,
pendere a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad
basin uterque sit n plus reliqui anguli, ita ut v. gr. pro he-
ptagono angulus ad basin triplus esse debeat anguli ad verti-
cem: in enneagono 4 plus etc. vel, quod eodem redit, et pro

Et quoniam recta KA contingit circulum $AB\Gamma\Delta E$ in Γ , a centro autem Z in contactum ad Γ ducta est $Z\Gamma$; erit $Z\Gamma$ perpendicularis ad KA (III. 18.); rectus igitur est uterque angulorum ad Γ . Ex eadem ratione anguli ad puncta B , Δ recti sunt. Et quoniam rectus est angulus $Z\Gamma K$, quadratum ex ZK aequale est quadratis ex $Z\Gamma$, ΓK (I. 47.). Ex eadem ratione et quadratis ex ZB , BK aequale est quadratum ex ZK ; quare quadrata ex $Z\Gamma$, ΓK quadratis ex ZB , BK aequalia sunt, quorum quadratum ex $Z\Gamma$ quadrato ex ZB est aequale; reliquum igitur ex ΓK reliquo ex BK est aequale; aequalis igitur recta ΓK rectae BK . Et quoniam aequalis est ZB ipsi $Z\Gamma$, et communis ZK , duae BZ , ZK duabus ΓZ , ZK aequales sunt, et basi BK basi ΓK est aequalis; angulus igitur BZK angulo $KZ\Gamma$ est aequalis (I. 8.), angulus autem BKZ angulo $ZK\Gamma$ est aequalis; duplus igitur angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$, angulus autem $BK\Gamma$ anguli $ZK\Gamma$. Ex eadem ratione et angulus $\Gamma Z\Delta$ anguli $\Gamma Z A$ est duplus, angulus autem $\Gamma A\Delta$ anguli $\Gamma A Z$. Et quoniam aequalis est circumferentia $B\Gamma$ ipsi $\Gamma\Delta$, aequalis est et angulus $BZ\Gamma$ angulo $\Gamma Z\Delta$ (III. 27.). Et est angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$ duplus, angulus autem $\Delta Z\Gamma$ duplus anguli $AZ\Gamma$; aequalis igitur et $KZ\Gamma$ ipsi $AZ\Gamma$; est autem et angulus $Z\Gamma K$ angulo $Z\Gamma A$ aequalis. Duo itaque triangula sunt $ZK\Gamma$, $ZA\Gamma$ duos angulos duobus omnibus polygonis regularibus valet, a divisione circuli in tot partes aequales, quot latera habere debet polygonum describendum. Sin autem polygonum parem laterum numerum $=2n$ habeat, pondebit eius descriptio a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit. $(n-1/2)$

τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἐκατέ-
 ραν ἐκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην,
 κοινὴν αὐτῶν τὴν $ZΓ$, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς
 ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γω-
 νίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἡ μὲν $ΚΓ$ εὐθεῖα τῇ
 $ΓΑ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΖΚΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΑΓ$. Καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΚΓ$ τῇ $ΓΑ$, διπλὴ ἄρα ἡ $ΚΑ$ τῆς
 $ΚΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, καὶ ἡ $ΘΚ$ τῆς
 $ΒΚ$ διπλὴ. Καὶ ἐστὶν ἡ $ΒΚ$ τῇ $ΚΓ$ ἴση ¹⁾ καὶ $ΘΚ$
 ἄρα τῇ $ΚΑ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δεῖχθήσεται καὶ
 ἐκάστη τῶν $ΘΗ$, $ΗΜ$, $ΜΑ$ ἐκατέρα τῶν $ΘΚ$, $ΚΑ$
 ἴση· ἰσοπλευρὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΗΘΚΑΜ$ πεντάγωνον.
 Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ
 ὑπὸ $ΖΚΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΑΓ$, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν
 ὑπὸ $ΖΚΓ$ διπλὴ ἡ ὑπὸ $ΘΚΑ$, τῆς δὲ ὑπὸ $ΖΑΓ$
 διπλὴ ἡ ὑπὸ $ΚΑΜ$ καὶ ἡ ὑπὸ $ΘΚΑ$ ἄρα τῇ ὑπὸ
 $ΚΑΜ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δεῖχθήσεται καὶ ἐκάστη
 τῶν ὑπὸ $ΚΘΗ$, $ΘΗΜ$, $ΗΜΑ$ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $ΘΚΑ$,
 $ΚΑΜ$ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΗΘΚ$, $ΘΚΑ$,
 $ΚΑΜ$, $ΑΜΗ$, $ΜΗΘ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώ-
 νιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΗΘΚΑΜ$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη
 δὲ καὶ ἰσοπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν $ΑΒΓΔΕ$
 κύκλον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιγ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρὸν τε
 καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

1) Edd. Oxon. et Basil. habent: καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ $ΒΚ$
 τῇ $ΚΓ$, καὶ ἐστὶ διπλὴ ἡ μὲν $ΚΑ$ τῆς $ΚΓ$, ἡ δὲ $ΘΚ$ τῆς $ΒΚ$
 καὶ $ΘΚ$ ἄρα τῇ $ΚΑ$ ἐστὶν ἴση: quae verba, quum sint mera
 repetitio eius, quod modo dictum erat, cum Peyrardo et
 Cod. a. omisimus.

plus reliqui anguli, ita ut v. c. pro octogono angulus ad ba-

gulis aequales habentia utrumque utrique, et unum latius uni lateri aequale, commune ipsis ZF , et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo (I. 26.); aequalis igitur recta KF rectae FA , angulus vero ZKI angulo ZAI . Et quoniam aequalis est KF ipsi FA , dupla igitur KA ipsius KF . Ex eadem ratio e et OK ipsius IK dupla ostendetur. Et est BK ipsi KF aequalis; et OK igitur ipsi KA est aequalis. Similiter ostendetur et unaquaeque rectarum OH , HM , MA alterutri ipsarum OK , KA aequalis; aequilaterum igitur est pentagonum $HOKAM$. Dico autem et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est angulus ZKI angulo ZAI , et ostensus est anguli ZKI duplus angulus OKA , anguli autem ZAI duplus angulus KAM ; et angulus OKA angulo KAM est aequalis. Similiter et unusquisque angulorum KOH , OHM , HMA ostendetur alterutri angulorum OKA , KAM aequalis; quinque igitur anguli HOK , OKA , KAM , AMH , MHO aequales inter se sunt. Aequiangulum igitur est pentagonum $HOKAM$. Ostensum est autem et aequilaterum, et circumscriptum est circa circulum $ABTAE$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 304.)

In dato pentagono, aequilatero et aequiangulo, circulum inscribere.

sin $(4 - \frac{1}{2})$ plus vel $\frac{1}{2}$ plus anguli ad verticem esse debet. Cf. Tacquet. Euclid. ed. Whiston. Schol. 1. ad V. 11.; Barrow. Euclid. Schol. ad IV. 11.; Clavius. Schol. ad IV. 16.; Boërmannus. Schol. 3. ad IV. 11. aliique. Potest etiam haec observatio pro polygonis imparem aut parem laterum nu-

"Εστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ αἰς τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράφαι.

Τετμήσθω γὰρ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἐκατέρας τῶν $ΓΖ$, $ΔΖ$ εὐθειῶν καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ $ΓΖ$, $ΔΖ$ εὐθεῖαι, ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΔ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓΖ$, δύο δὴ αἱ $ΒΓ$, $ΓΖ$ δυοὶ ταῖς $ΔΓ$, $ΓΖ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΓΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΓΖ$ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ $ΒΖ$ τῇ βάσει $ΔΖ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $ΒΖΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΖΓ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΒΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΖ$. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΓΔΕ$ τῆς ὑπὸ $ΓΔΖ$, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ

merum habentibus una regula comprehendendi, nempe, si numerus laterum polygoni describendi sit $=N$, eius descriptio pendebit a descriptione trianguli isoscelis, in quo utervis angulus

ad basin sit $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ plus anguli ad verticem. Tum vero

facile (IV. 10. Cor. 2.) probatur, simul in potestate scribere triangulum isosceles, cuius angulus ad $(N-2)$ plus utriusvis anguli ad basin, et vice autem etiam polygona, quae parem quando is non est formae 2 parem laterum numerum quadrata.

Obs

net, re-

ctis

IV

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum $ABΓΔΕ$; oportet in pentagono $ABΓΔΕ$ circum-
lum inscribere.

Secetur uterque angulorum $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ bifariam
ab utraque rectarum $ΓΖ$, $ΔΖ$ (I. 9.); et a puncto Z ,
in quo conveniunt inter se rectae $ΓΖ$, $ΔΖ$, ducantur
rectae ZB , ZA , ZE . Et quoniam $ΒΓ$ aequalis est
 $ΓΔ$, communis autem $ΓΖ$, duae $ΒΓ$, $ΓΖ$ duabus
 $ΔΓ$, $ΓΖ$ aequales sunt, et angulus $ΒΓΖ$ angulo $ΔΓΖ$
aequalis est; basis igitur BZ basi $ΔΖ$ est aequalis (I.
4.), et triangulum $BΖΓ$ triangulo $ΔΖΓ$ est aequale,
et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, quos
aequalia latera subtendunt; aequalis igitur angulus $ΓΒΖ$
angulo $ΓΔΖ$. Et quoniam duplus est $ΓΔΕ$ anguli
 $ΓΔΖ$, aequalis autem angulus $ΓΔΕ$ angulo ABE ,
angulus vero FAZ angulo $ΓΒΖ$, et angulus $ΓΒΑ$

Obs. 2. Generaliter pariter demonstratur, si ad puncta
circumferentiae, in quae incidunt anguli polygoni regularis
circulo inscripti, ducantur rectae circumulum contingentes, nasci
ex polygonum regulate eundem habens laterum numerum,
circulo circumscriptum. Circumscriptio polygoni regu-
circulum datum itaque pariter pendet a divisione
tot partes aequales, quot polygonum latera habet.
in hoc et praecedente problemate unum punctorum
inferentia v. c. A pro lubitu sumi aut datum esse

PROPOSITIO XIII.

Quis hypothetice sumi possit pentagonum
equilaterum et aequiangulum super aliqua recta
describere, etiamsi modus illud describendi antea
non, multi tamen geometrae hac occasione do-
centur super data recta describi possit pentagonum

$\Gamma Δ Ε$ τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ $\Gamma Δ Ζ$ τῇ ὑπὸ $ΓΒΖ$, καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΒΔ$ ἄρα τῆς ὑπὸ $ΓΒΖ$ ἐστὶ διπλὴ ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΒΓ$. ἡ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία διχα τέμνεται ὑπὸ τῆς $ΒΖ$ εὐθείας. Ὀμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΑΕ$, $ΔΕΔ$ διχα τέμνεται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν $ΖΑ$, $ΖΕ$ εὐθειῶν. Ἠχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου ἐπὶ τὰς $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$ εὐθείας κάθετοι αἱ $ΖΗ$, $ΖΘ$, $ΖΚ$, $ΖΛ$, $ΖΜ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΘΓΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΓΖ$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ΖΘΓ$ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ $ΖΚΓ$ ἴση, δύο δὴ τριγώνων ἐστὶ τὰ $ΖΘΓ$, $ΖΚΓ$ τὰς δύο γωνίας ταῖς ὀρθαῖς γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν $ΖΓ$ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἴση ἄρα ἡ $ΖΘ$ κάθετος τῇ $ΖΚ$ κάθετῳ. Ὀμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν $ΖΛ$, $ΖΜ$, $ΖΗ$ ἑκατέρας τῶν $ΖΘ$, $ΖΚ$ ἴση ἐστὶν. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΖΗ$, $ΖΘ$, $ΖΚ$, $ΖΛ$, $ΖΜ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Ζ$, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ΖΗ$, $ΖΘ$, $ΖΚ$, $ΖΛ$, $ΖΜ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφαπεται τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς $Η$, $Θ$, $Κ$, $Λ$, $Μ$

regulare. Et Clavius quidem ad IV. 11. ita hoc problema solvit. Sit super recta data $\Gamma Δ$ (Fig. 302.) describendum pentagonum regulare. Fiat triangulum aequicurum $ΖΗΘ$ tale, ut uterque angulus ad basin duplus sit reliqui (IV. 10.). Deinde circa triangulum $ΑΓΔ$, quod super basi $\Gamma Δ$ ope I. 23. triangulo $ΖΗΘ$ aequiangulum constructur, describatur circulus (IV. 5.), huicque inscribatur ex IV. 11. ope eiusdem trianguli $ΑΓΔ$ pentagonum regulare. Eodem fere redit constructio

igitur anguli ΓBZ est duplus; aequalis igitur angulus ABZ angulo ZBF . Ergo angulus ABF bifariam secatur a recta BZ . Similiter ostendetur et utrumque angulorum BAE , AEA bifariam secari ab utraque rectarum ZA , ZE . Ducantur autem a puncto Z ad AB , BF , ΓA , ΔE , EA rectae perpendiculares ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM (I. 12.). Et quoniam aequalis est angulus ΘFZ angulo KFZ , est autem et rectus $Z\Theta F$ recto ZKF aequalis, duo triangu-
la sunt $Z\Theta F$, ZKF duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, commune scilicet utrique ZF , subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur perpendicularis $Z\Theta$ perpendiculari ZK . Similiter ostendetur et unamquamque rectarum ZA , ZM , ZH , alterutri rectarum $Z\Theta$, ZK aequalem esse; quinque igitur rectae ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z , intervallo vero una ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB , BF , ΓA , ΔE , EA rectas; propterea quod recti sunt anguli ad puncta H , Θ , K , A , M . Si enim ipsas non contingit, sed secat, eveniet ut recta diametro circuli ad rectos angulos ab

Peletarii, quam habet ille ad IV. 10. Alia Clavii solutio nititur observatione in Cor. ad IV. 10. et in Cor. ad IV. 11. facta. Nempe, quum in triangulo $ZH\Theta$ (Fig. 302.) uterque angulorum ad basin sit ex IV. 10. Cor. $= \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$, erit angulus ei deinceps, qui basi producta oritur, $= 2 \text{ Rect.} - \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$

(I. 13.) $= \frac{6 \text{ Rect.}}{5}$ i. e. ex Cor. IV. 11. = angulo, quem duo

σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπεται αὐτῶν, ἀλλὰ
 τεμεί αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύ-
 κλου πρὸς ὁρθὰς ἀπ' ἑκρας ἀγομένην ἐπὶ τῇ πίπτειν
 τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον εἰδειχθῇ. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον
 τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA ,
 ZM εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεί τὰς AB , $B\Gamma$,
 $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθείας. Ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν. Γε-
 γράφθω ὡς ὁ $H\Theta KAM$.

Εἰς ἄρα τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν
 τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ εἶδει
 ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Περὶ τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν
 τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγράφαι.

latera contigua pentagoni regularis comprehendunt. Sufficiet
 igitur, ad punctum Γ extremum rectae datae ΓA angulum ap-
 plicare, qui aequalis sit ei, qui angulo $ZH\Theta$ deinceps est, et
 rectam sub hoc angulo ductam aequalem facere rectae datae
 ΓA , atque ita per omnem describendi pentagoni ambitum rem
 continuare.

Obs. 2. Simili ratione in polygono regulari quocunque
 circulus inscribetur.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Cor. Quum centrum circuli pentagono regulari
 circumscribendi in IV. 14. prorsus eodem modo inveniatur,
 ac centrum circuli eidem pentagono inscribendi in IV. 13. pa-
 tet, utrumque circulum idem centrum habere.

Obs. 2. Generaliter eodem modo circa datum polygo-
 num regulare quodcunque circulus circumscribetur.

Obs. 3. Hinc etiam (coll. 2. Obs. ad IV. 13.) Cor. in
 Obs. 1. allatum valet generaliter, nempe circulus polygono

extremitate ducta cadat intra circulum, quod absurdum ostensum est (III. 16.). Circulus igitur centro Z , intervallo vero una ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM rectorum descriptus non secabit rectas AB , BT , ΓA , ΔE , EA ; continget igitur ipsas. Describatur ut $H\Theta KAM$.

In dato igitur pentagono, quod est aequilaterum et aequiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 305.)

Circa datum pentagonum, aequilaterum et aequiangulum, circulum circumscribere.

alicui regulari inscriptus idem centrum habebit, quod circulus ei circumscriptus.

Obs. 4. Quodsi e centro circuli polygono alicui regulari inscripto, vel (quod eodem redit Obs. 3.) circumscripto ad singulos polygoni angulos ducantur rectae, dividunt illae polygonum in tot triangula aequalia, quot polygonum latera habet.

Obs. 5. Haec triangula omnia eandem habent altitudinem, quae si circulus polygono inscriptus sit, aequalis est radio circuli inscripti; si circulus polygono circumscriptus sit, aequalis est perpendiculari e centro in unum laterum polygoni demissum. Radius itaque circuli inscripti aequalis est huic perpendiculari, quod et apothema vocatur.

Obs. 6. Summa omnium istorum triangulorum, i. o. integrum polygonum itaque aequale est (I. 38. Cor. 4.) triangulo, cuius basis aequalis est perimetro polygoni, et cuius altitudo aequalis est altitudini unius ex istis triangulis, i. e. si circulus polygono circumscriptus sit, radio circuli polygone

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $ABΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ τὸ $ABΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΙΔ$, $ΓΔΕ$ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν $ΓΖ$, $ΖΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ $Β$, $Α$, $Ε$ σημεία ἐπεξέυχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$. Ὀμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΒΑΕ$, $ΑΕΔ$ γωνιῶν δίχα πέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$ εὐθειῶν.

inscripti, vel si circulus polygono circumscriptus sit, perpendiculari e centro circuli polygono circumscripti in unum laterum demisso.

Obs. 7. Observatio præcedens valet etiam, si polygonum aliquod non regulare circulo alicui sit circumscriptum, quod nempe etiam tum omnia triangula, in quae illud dispesci potest rectis e centro ad singulos angulos polygoni ductis, eandem habent altitudinem nempe radium circuli ipsi inscripti. Tali tamen polygono non semper circulus circumscribi poterit, quod hic obiter notamus.

His observationibus circa polygona regularia addi possunt adhuc sequentia.

Obs. 8. Si quod polygonum regulare (Fig. 306.) v. c. pentagonum circulo inscriptum sit, et bifariam dividantur singuli eius anguli ad centrum, adeoque etiam (III. 26.) singuli arcus, quos subteadunt latera polygoni circulo inscripti, et per puncta, in quibus hi arcus dividuntur, ducantur rectae circulum contingentes, enascetur novum polygonum regulare priori æquilaterum, circulo circumscriptum. Quod simili ratione demonstrabitur ac IV. 12. Et facile patet, singula latera polygoni circumscripti parallela esse singulis lateribus polygoni circulo inscripti. Habet hanc Prop. de pentagono Peletarius ad IV. 12. et generaliter Ambros. Rhodius ad IV. 6.

* Obs. 9. Quævis figura æquilatera circulo inscripta est

Sit datum pentagonum, aequilaterum et aequangulum $AB\Gamma AE$; oportet circa pentagonum $AB\Gamma AE$ circulum circumscribere.

Secetur uterque angulorum $B\Gamma A$, ΓAE bifariam ab utraque rectarum ΓZ , $Z\Lambda$ (I. 9.), et a puncto Z , in quo conveniunt rectae, ad puncta B , A , E ducantur rectae ZB , ZA , ZE . Similiter ut in praecedente ostendetur et unumquemque angulorum ΓBA , BAE , AEA bifariam secari ab una rectarum ZB , AZ , EZ . Et quoniam aequalis est angulus $B\Gamma A$

etiam aequiangula. Latera enim eius abscindunt arcus aequales (III. 28.), adeoque anguli a binis quibusvis polygoni lateribus contiguis comprehensi arcubus aequalibus insistant, adeoque aequales sunt (III. 27.). At non omnis figura aequiangula circulo inscripta necessario quoque aequilatera est, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel, si par est, quando duo latera proxima aequalia sunt, vel dnamodo, duo quaecunque aequalia sint, quorum uno posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, ut quartum, sextum etc. Est haec observatio Clavii. Nempe, si circulo inscripta sit figura aequiangula quaecunque v. c. (Fig. 305.) $AB\Gamma AE$, erit, ob angulum $BAE = \Gamma BA$, etiam arcus $BAE = \Gamma BA$ (III. 26. Cor. 1.), hinc, demto communi AB arcus $AE = \text{arc. } \Gamma E$, adeoque recta $AE = \text{rectae } \Gamma E$ (III. 29.). Eadem ratione erit recta $\Gamma E = AE$, atque ita deinceps, si figura plura habet latera, erit semper tertium quodque latus ei, a quo tertium est, uno relicto in medio, aequale: hoc est, primum (quodvis autem latus constitui primum potest) aequale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo etc., atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita aequalia inter se erunt. Eadem autem ratione omnia latera locorum parium, ut secundum, quartum, sextum etc. aequalia inter se erunt, quum quartum sit a secundo tertium etc. Et haec quidem in omnibus figuris aequiangulis circulo inscriptis locum habebunt.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσό-
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράφεται. Ὅπερ ἔδει
ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν
τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ
τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν
γωνιῶν σημεῖα, τὰ $A, B, Γ, Δ, E$, ὥστε ἴσας εἶναι
τὰς $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ$ περιφερείας· καὶ διὰ
τῶν $A, B, Γ, Δ, E$ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτό-
μεναι αἱ $ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ$ · καὶ εἰληφθῶ
τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ κύκλου κέντρον τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω-
σαν αἱ $ZB, ZK, ZΓ, ZΔ, ZΔ$.

q. e. a. Secent igitur se in B , eritque, ductis rectis AE ,
 $ΔE$, angulus $ΑΕΔ = ΒΓΔ$ (III. 22. Cor. 1.) $= ΑΒΔ$. Est au-
tem etiam, ob $ΔE = ΑΔ$ (I. Def. 15.) $ΔΔE = ΑΒΔ$ (I. 5.)
 $= ΑΒΔ = ΑΔB$. Itaque (I. 32.) aequiangula sunt trian-
gula $ΔΔE, ΑΔB$, et nominatim angulus $ΔΔE = ΒΑΔ$, unde et ar-
cus maioris circuli $ΔE = AB$ (III. 26.) et recta $ΔE = ΒΔ$ (III.
29.) $= ΓΔ$, adeoque et arcus minoris circuli $ΔE = ΓΔ$. Pe-
lletarius addit, rectam $ΓΔ$ vel $ΑΓ$ esse latus pentagoni regu-
laris circulo $ΑΓΔ$ inscripti. Nempe quum, ut vixdam vidi-
mus, sit arcus $ΔE = ΓΔ$, recta autem $ΓΔ = ΑΓ$, erit etiam
arcus $ΑΓ = ΓΔ = AB$ (III. 28.). Eodem modo, quum recta
 $ΔE = ΑΔ$, erit arcus $ΔB = ΑΓΔ$ (III. 28.), adeoque, si is
bifariam secetur, circulus $ΑΓΔ$ in quinque arcus aequales di-
visus erit, quorum chordae aequales sunt (III. 29.) et binae
proximae angulos aequales comprehendunt (III. 27.).

In dato igitur circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 303.)

Circa datum circulum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma\Delta E$; oportet circa circulum $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Intelligentur inscripti pentagoni angulorum puncta A, B, Γ, Δ, E , ita ut aequales sint $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ circumferentiae; et per A, B, Γ, Δ, E ducantur rectae circulum contingentes $H\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda M, MH$ (III. 17.); et sumatur circuli $AB\Gamma\Delta E$ centrum Z , et iungantur $ZB, ZK, Z\Gamma, Z\Lambda, ZA$.

PROPOSITIO XI.

Cor. (Clavil.) Quum ex IV. 10. Cor. 1. angulus $\Gamma A \Delta$ sit $\frac{2}{3}$ rect. sit autem $B\Lambda\Gamma = \Gamma A \Delta = \Delta A E$, sequitur, angulum $B A E$ pentagoni regularis complecti sex quintas unius recti, vel tres quintas duorum rectorum, quod consentit cum I. 32. Cor. 18.; angulus autem $A B E = A E B$ erit (I. 32.) quinta pars duorum rectorum; itaque angulus $B A E$ triplus est anguli $A B E$. Cf. IV. 10. Cor. 2. Caeterum simpliciores propositionis IV. 11. solutionem dabit XIII. 10.

Obs. Eodem modo, quo hic ostensum fuit, descriptionem pentagoni regularis in dato circulo pendere a constructione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque duplus sit reliqui — dum nempe ope huius trianguli, aliusque illi aequicruri in dato circulo descripti circulus in quinque partes aequales divisus fuit, quo facto res erat facillima — generaliter demonstrabitur, descriptionem polygoni regularis cuius-

Καὶ ἵπαι ἡ μὲν $ΚΑ$ εὐθεία ἐφάπτεται τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ κύκλου κατὰ τὸ $Γ$, ἀπὸ δὲ τοῦ $Ζ$ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ $Γ$ ἐπαφὴν ἐπέξενεται ἡ $ΖΓ$. ἡ $ΖΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΚΑ$. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἐκατέρα τῶν πρὸς τῷ $Γ$ γωνιών. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς $Β$, $Δ$ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἶσιν. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΖΚ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΓ$, $ΓΚ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ$, $ΒΚ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΚ$ ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $ΖΓ$, $ΓΚ$ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ$, $ΒΚ$ ἐστὶν ἴσα, ὡν τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$ λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΚ$ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΒΚ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΖΒ$ τῇ $ΖΓ$, καὶ κοινὴ ἡ $ΖΚ$, δύο δὴ αἱ $ΒΖ$, $ΖΚ$ ὁσοὶ ταῖς $ΓΖ$, $ΖΚ$ ἴσαι εἶσι, καὶ βάσις ἡ $ΒΚ$ βάσει τῇ $ΓΚ$ ἐστὶν ἴση γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΖΓ$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΚΖ$ τῇ ὑπὸ $ΖΚΓ$ ἐστὶν ἴση διπλὴ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΚΓ$ τῆς ὑπὸ $ΖΚΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΖΔ$ τῆς $ΓΖΔ$ ἐστὶ διπλὴ ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΑΔ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ περιφέρεια τῇ $ΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΖΔ$. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$ διπλὴ, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΖΓ$ διπλὴ τῆς ὑπὸ $ΑΖΓ$. ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΚΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΑΖΓ$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΓΑ$ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $ΖΚΓ$, $ΖΑΓ$

cunque, quod numerum laterum imparem $=2n+1$ habet, pendere a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit n plus reliqui anguli, ita ut v. gr. pro heptagono angulus ad basin triplus esse debeat anguli ad verticem; in enneagono 4 plus etc. vel, quod eodem redit, et pro

Et quoniam recta KA contingit circulum $ABTAE$ in Γ , a centro autem Z in contactum ad Γ ducta est $Z\Gamma$; erit $Z\Gamma$ perpendicularis ad KA (III. 18.); rectus igitur est uterque angulorum ad Γ . Ex eadem ratione anguli ad puncta B , A recti sunt. Et quoniam rectus est angulus $Z\Gamma K$, quadratum ex ZK aequale est quadratis ex $Z\Gamma$, ΓK (I. 47.). Ex eadem ratione et quadratis ex ZB , BK aequale est quadratum ex ZK ; quare quadrata ex $Z\Gamma$, ΓK quadratis ex ZB , BK aequalia sunt, quorum quadratum ex $Z\Gamma$ quadrato ex ZB est aequale; reliquum igitur ex ΓK reliquo ex BK est aequale; aequalis igitur recta ΓK rectae BK . Et quoniam aequalis est ZB ipsi $Z\Gamma$, et communis ZK , duae BZ , ZK duabus ΓZ , ZK aequales sunt, et basi BK basi ΓK est aequalis; angulus igitur BZK angulo $KZ\Gamma$ est aequalis (I. 8.), angulus autem BKZ angulo $ZK\Gamma$ est aequalis; duplus igitur angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$, angulus autem $BK\Gamma$ anguli $ZK\Gamma$. Ex eadem ratione et angulus ΓZA anguli ΓZA est duplus, angulus autem ΓAA anguli ΓAZ . Et quoniam aequalis est circumferentia $B\Gamma$ ipsi ΓA , aequatis est et angulus $BZ\Gamma$ angulo ΓZA (III. 27.). Et est angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$ duplus, angulus autem $AZ\Gamma$ duplus anguli $AZ\Gamma$; aequalis igitur et $KZ\Gamma$ ipsi $AZ\Gamma$; est autem et angulus $Z\Gamma K$ angulo $Z\Gamma A$ aequalis. Duo itaque triangula sunt $ZK\Gamma$, $ZA\Gamma$ duos angulos duobus omnibus polygonis regularibus valet, a divisione circuli in tot partes aequales, quot latera habere debet polygonum describendum. Sin autem polygonum parem laterum numerum $=2n$ habeat, pondebit eius descriptio a descriptione trianguli aequiveri, cuius angulus ad basin uterque sit $(n-1/2)$.

τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἐκατέ-
 ραν ἐκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην,
 κοινὴν αὐτῶν τὴν $ZΓ$, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς
 ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γω-
 νίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἡ μὲν $ΚΓ$ εὐθεῖα τῇ
 $ΓΑ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ZΚΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΑΓ$. Καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΚΓ$ τῇ $ΓΑ$, διπλῇ ἄρα ἡ $ΚΑ$ τῆς
 $ΚΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, καὶ ἡ $ΘΚ$ τῆς
 BK διπλῇ. Καὶ ἐστὶν ἡ BK τῇ $ΚΓ$ ἴση¹⁾· καὶ $ΘΚ$
 ἄρα τῇ $ΚΑ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δεῖχθήσεται καὶ
 ἐκάστη τῶν $ΘΗ$, $ΗΜ$, $ΜΑ$ ἐκατέρα τῶν $ΘΚ$, $ΚΑ$
 ἴση· ἰσοπλευρὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΗΘΚΑΜ$ πεντάγωνον.
 Αἶγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ
 ὑπὸ $ZΚΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΑΓ$, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν
 ὑπὸ $ZΚΓ$ διπλῇ ἡ ὑπὸ $ΘΚΑ$, τῆς δὲ ὑπὸ $ΖΑΓ$
 διπλῇ ἡ ὑπὸ $ΚΑΜ$ · καὶ ἡ ὑπὸ $ΘΚΑ$ ἄρα τῇ ὑπὸ
 $ΚΑΜ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δεῖχθήσεται καὶ ἐκάστη
 τῶν ὑπὸ $ΚΘΗ$, $ΘΗΜ$, $ΗΜΑ$ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $ΘΚΑ$,
 $ΚΑΜ$ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΗΘΚ$, $ΘΚΑ$,
 $ΚΑΜ$, $ΑΜΗ$, $ΜΗΘ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώ-
 νιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΗΘΚΑΜ$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη
 δὲ καὶ ἰσοπλευρον, καὶ περιγράφεται περὶ τὸν $ΑΒΓΔΕ$
 κύκλον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρὸν τε
 καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

1) Edd. Oxon. et Basil. habent: καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ BK
 τῇ $ΚΓ$, καὶ ἐστὶ διπλῇ ἡ μὲν $ΚΑ$ τῆς $ΚΓ$, ἡ δὲ $ΘΚ$ τῆς BK .
 καὶ $ΘΚ$ ἄρα τῇ $ΚΑ$ ἐστὶν ἴση: quae verba, quum sint mera
 repetitio eius, quod modo dictum erat, cum Peyrardo et
 Cod. a. omisimus.

plus reliqui anguli, ita ut v. c. pro octogono angulus ad ba-

gulis aequales habentia utrumque utrique, et unum latius uni lateri aequale, commune ipsis ZF , et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo (I. 26.); aequalis igitur recta KF rectae FA , angulus vero ZKF angulo ZAF . Et quoniam aequalis est KI ipsi FA , dupla igitur KA ipsius KF . Ex eadem ratio e et OK ipsius IK dupla ostenditur. Et est BK ipsi KF aequalis; et OK igitur ipsi KA est aequalis. Similiter ostendetur et unaquaeque rectarum OH , HM , MA alterutri ipsarum OK , KA aequalis; aequilaterum igitur est pentagonum $HOKAM$. Dico autem et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est angulus ZKF angulo ZAF , et ostensus est anguli ZKF duplus angulus OKA , anguli autem ZAF duplus angulus KAM ; et angulus OKA angulo KAM est aequalis. Similiter et unusquisque angulorum KOH , OHM , HMA ostendetur alterutri angulorum OKA , KAM aequalis; quinque igitur anguli HOK , OKA , KAM , AMH , MHO aequales inter se sunt. Aequiangulum igitur est pentagonum $HOKAM$. Ostensum est autem et aequilaterum, et circumscriptum est circa circulum $ABTAE$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 304.)

In dato pentagono, aequilatero et aequiangulo, circulum inscribere.

sin $(4 - 1/2)$ plus vel $7/2$ plus anguli ad verticem esse debet. Cf. Tacquet. Euclid. ed. Whiston. Schol. 1. ad V. 11.; Barrow. Euclid. Schol. ad IV. 11.; Clavius. Schol. ad IV. 16.; Boërmannus Schol. 3. ad IV. 11. abique. Potest etiam haec observatio pro polygonis imparem aut parem laterum nu-

"Εστω τὸ δοθέν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ εἰς τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν $ΓΖ$, $ΔΖ$ εὐθειῶν καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ $ΓΖ$, $ΔΖ$ εὐθείαι, ἐπεξένχθωσαν αἱ $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$ εὐθείαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΔ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓΖ$, δύο δὴ αἱ $ΒΓ$, $ΓΖ$ δυοὶ ταῖς $ΔΓ$, $ΓΖ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΓΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΓΖ$ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ $ΒΖ$ τῇ βάσει $ΔΖ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $ΒΖΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΖΓ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΒΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΖ$. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΓΔΕ$ τῆς ὑπὸ $ΓΔΖ$, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ

merum habentibus una regula comprehendi, nempe, si numerus laterum polygoni describendi sit $=N$, eius descriptio pendebit a descriptione trianguli isoscelis, in quo utervis angulus ad basin sit $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ plus anguli ad verticem. Tum vero, ut facile (IV. 10. Cor. 2.) probatur, simul in potestate erit describere triangulum isosceles, cuius angulus ad verticem sit $(N-2)$ plus utriusvis anguli ad basin, et vice versa. Possunt autem etiam polygoni, quae parem laterum numerum habeant, quando is non est formae $2n$, reduci ad polygoni, quae impari laterum numerum habent; si autem est formae $2n$, ad quadrata.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Probandum erat ante omnia, quod Austin. monet, rectas $ΘΚ$, $ΚΑ$, $ΑΜ$ etc. inter se convenire, quod, ductis rectis $ΒΓ$, $ΓΔ$ etc. facile eodem modo probatur, ac in IV. 3. vidimus.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum $ABΓΔΕ$; oportet in pentagono $ABΓΔΕ$ circum-
 lum inscribere.

Secetur uterque angulorum $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ bifariam
 ab utraque rectarum $ΓΖ$, $ΔΖ$ (I. 9.); et a puncto Z ,
 in quo conveniunt inter se rectae $ΓΖ$, $ΔΖ$, ducantur
 rectae ZB , ZA , ZE . Et quoniam $ΒΓ$ aequalis est
 $ΓΔ$, communis autem $ΓΖ$, duae $ΒΓ$, $ΓΖ$ duabus
 $ΔΓ$, $ΓΖ$ aequales sunt, et angulus $ΒΓΖ$ angulo $ΔΓΖ$
 aequalis est; basis igitur BZ basi $ΔΖ$ est aequalis (I.
 4.), et triangulum $BΖΓ$ triangulo $ΔΖΓ$ est aequale,
 et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, quos
 aequalia latera subtendunt; aequalis igitur angulus $ΓΒΖ$
 angulo $ΓΔΖ$. Et quoniam duplus est $ΓΔΕ$ anguli
 $ΓΔΖ$, aequalis autem angulus $ΓΔΕ$ angulo $ΑΒΓ$,
 angulus vero $ΓΔΖ$ angulo $ΓΒΖ$, et angulus $ΓΒΑ$

Obs. 2. Generaliter pariter demonstratur, si ad puncta
 circumferentiae, in quae incidunt anguli polygoni regularis
 circulo inscripti, ducantur rectae circumulum contingentes, enasci
 exinde polygonum regulare eundem habens laterum numerum,
 eique circulo circumscriptum. Circumscriptio polygoni regu-
 laris circa circumulum datum itaque pariter pendet a divisione
 circuli in tot partes aequales, quot polygonum latera habet.
 Caeterum in hoc et praecedente problemate unum punctorum
 in circumferentia v. c. A pro lubitu sumi aut datum esse
 potest.

PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Quamvis hypothetice sumi possit pentagonum
 regulare vel aequilaterum et aequiangulum super aliqua recta
 $ΑΔ$ descriptum esse, etiamsi modus illud describendi antea
 ostensus non fuerit, multi tamen geometrae hac occasione do-
 cuerunt, quomodo super data recta describi possit pentagonum

$\Gamma\Delta\epsilon$ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, ἢ δὲ $\Gamma\Delta Z$ τῇ ὑπὸ ΓBZ , καὶ ἢ ὑπὸ $\Gamma B A$ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓBZ ἐστὶ διπλῇ ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZB\Gamma$. ἢ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς BZ εὐθείας. Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BAE , AEA δίχα τέμνεται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ZA , ZE εὐθειῶν. Ἠχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Z σημείου ἐπὶ τὰς AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθείας κάθετοι αἱ ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ὑπὸ $\Theta\Gamma Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Gamma Z$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθῇ ἢ ὑπὸ $Z\Theta\Gamma$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $ZK\Gamma$ ἴση, δύο δὴ τριγωνα ἴσιν τὰ $Z\Theta\Gamma$, $ZK\Gamma$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοῖν γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μὲν πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν $Z\Gamma$ ὑποτείνουσιν ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἴση ἄρα ἢ $Z\Theta$ κάθετος τῇ ZK κάθετῳ. Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ZA , ZM , ZH ἑκατέρα τῶν $Z\Theta$, ZK ἴση ἐστίν. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφαπεται τῶν AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς H , Θ , K , A , M

regulare. Et Clavius quidem ad IV. 11. ita hoc problema solvit. Sit super recta data ΓA (Fig. 302.) describendum pentagonum regulare. Fiat triangulum æquicrurum $ZH\Theta$ tale, ut uterque angulus ad basin duplus sit reliqui (IV. 10.). Deinde circa triangulum $A\Gamma A$, quod super basi ΓA ope I. 23. triangulo $ZH\Theta$ æquiangulum construitur, describatur circulus (IV. 5.), huicque inscribatur ex IV. 11. ope eiusdem trianguli $A\Gamma A$ pentagonum regulare. Eodem fere redit constructio

igitur anguli ΓBZ est duplus; aequalis igitur angulus ABZ angulo ZBF . Ergo angulus ABF bifariam secatur a recta BZ . Similiter ostendetur et utrumque angulorum BAE , AEA bifariam secari ab utraque rectarum ZA , ZE . Ducantur autem a puncto Z ad AB , BF , ΓA , AE , EA rectae perpendiculares ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM (I. 12.). Et quoniam aequalis est angulus ΘFZ angulo $K\Gamma Z$, est autem et rectus $Z\Theta\Gamma$ recto $ZK\Gamma$ aequalis, duo triangula sunt $Z\Theta\Gamma$, ZKT duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, commune scilicet utrique $Z\Gamma$, subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur perpendicularis $Z\Theta$ perpendiculari ZK . Similiter ostendetur et unamquamque rectarum ZA , ZM , ZH , alterutri rectarum $Z\Theta$, ZK aequalem esse; quinque igitur rectae ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z , intervallo vero una ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB , BF , ΓA , AE , EA rectas; propterea quod recti sunt anguli ad puncta H , Θ , K , A , M . Si enim ipsas non contingit, sed secat, eveniet ut recta diametro circuli ad rectos angulos ab

Pelotarii, quam habet ille ad IV. 10. Alia Clavii solutio nititur observations in Cor. ad IV. 10. et in Cor. ad IV. 11. facta. Nempe, quum in triangulo $ZH\Theta$ (Fig. 302.) uterque

angulorum ad basin sit ex IV. 10. Cor. $= \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$, erit angulus

ei deinceps, qui basi producta oritur, $= 2 \text{ Rect.} - \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$

(I. 13.) $= \frac{6 \text{ Rect.}}{5}$ i. e. ex Cor. IV. 11. = angulo, quem duo

σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπτεται αὐτῶν, ἀλλὰ
 τεμεί αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύ-
 κλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἑκρὰς ἀγομένην ἐκείνης πίπτειν
 τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον εἰδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον
 τοῦ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA ,
 ZM εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεί τὰς AB , BF ,
 GA , AE , EA εὐθείας. Ἐφάπτεται ἄρα αὐτῶν. Γε-
 γράφθω ὡς ὁ $H\Theta KAM$.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν
 τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ εἶδει
 ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν
 τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

latera contigua pentagoni regularis comprehendunt. Sufficiet
 igitur, ad punctum F extremum rectae datae GA angulum ap-
 plicare, qui aequalis sit ei, qui angulo $ZH\Theta$ deinceps est, et
 rectam sub hoc angulo ductam aequalem facere rectae datae
 GA , atque ita per omnem describendi pentagoni ambitum rem
 continuare.

Obs. 2. Simili ratione in polygono regulari quocunque
 circulus inscribetur.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Cor. Quam centrum circuli pentagono regulari
 circumscribendi in IV. 11. prorsus eodem modo inveniatur,
 ac centrum circuli eidem pentagono inscribendi in IV. 13. pa-
 tet, utrumque circulum idem centrum habere.

Obs. 2. Generaliter eodem modo circa datum polygo-
 num regulare quodcunque circulus circumscribetur.

Obs. 3. Hinc etiam (coll. 2. Obs. ad IV. 13.) Cor. in
 Obs. 1. allatum valet generaliter, nempe circulus polygono

extremitate ducta cadat intra circulum, quod absurdum ostensum est (III. 16.). Circulus igitur centro Z , intervallo vero una ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM rectorum descriptus non secabit rectas AB , BT , ΓA , ΔE , EA ; continget igitur ipsas. Describatur ut $H\Theta KAM$.

In dato igitur pentagono, quod est aequilaterum et aequiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 305.)

Circa datum pentagonum, aequilaterum et aequiangulum, circulum circumscribere.

alicui regulari inscriptus idem centrum habebit, quod circulus ei circumscriptus.

Obs. 4. Quodsi e centro circuli polygono alicui regulari inscripto, vel (quod eodem redit Obs. 3.) circumscripto ad singulos polygones angulos ducantur rectae, dividunt illae polygonum in tot triangula aequalia, quot polygonum latera habet.

Obs. 5. Haec triangula omnia eandem habent altitudinem, quae si circulus polygono inscriptus sit, aequalis est radio circuli inscripti; si circulus polygono circumscriptus sit, aequalis est perpendiculari e centro in unum laterum polygones demissum. Radius itaque circuli inscripti aequalis est huic perpendiculari, quod et apothema vocatur.

Obs. 6. Summa omnium istorum triangulorum, i. o. integrum polygonum itaque aequale est (I. 38. Cor. 4.) triangulo, cuius basis aequalis est perimetro polygones, et cuius altitudo aequalis est altitudini unius ex istis triangulis, i. e. si circulus polygono circumscriptus sit, radio circuli polygones

Ἐστω τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $ABΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ τὸ $ABΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ γωνιῶν διχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν $ΓΖ$, $ΖΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ $Β$, $Α$, $Ε$ σημεία ἐπεξέχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$. Ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΒΑΕ$, $ΑΕΔ$ γωνιῶν διχα πέτμῃται ὑπὸ ἑκάστης τῶν $ΖΒ$, $ΑΖ$, $ΕΖ$ εὐθειῶν.

inscripti, vel si circulus polygono circumscriptus sit, perpendiculo e centro circuli polygono circumscripti in unum laterum demisso.

Obs. 7. Observatio præcedens valet etiam, si polygonum aliquod non regulare circulo alicui sit circumscriptum, quod nempe etiam tum omnia triangula, in quae illud dispesci potest rectis e centro ad singulos angulos polygoni ductis, eandem habent altitudinem nempe radium circuli ipsi inscripti. Tali tamen polygono non semper circulus circumscribi poterit, quod hic obiter notamus.

His observationibus circa polygona regularia addi possunt adhuc sequentia.

Obs. 8. Si quod polygonum regulare (Fig. 306.) v. c. pentagonum circulo inscriptum sit, et bifariam dividantur singuli eius anguli ad centrum, adeoque etiam (III. 26.) singuli arcus, quos subteadunt latera polygoni circulo inscripti, et per puncta, in quibus hi arcus dividuntur, ducantur rectae circulum contingentes, enascetur novum polygonum regulare priori æquilaterum, circulo circumscriptum. Quod simili ratione demonstrabitur ac IV. 12. Et facile patet, singula latera polygoni circumscripti parallela esse singulis lateribus polygoni circulo inscripti. Habet hanc Prop. de pentagono Peletarius ad IV. 12. et generaliter Ambros. Rhodius ad IV. 6.

* Obs. 9. Quævis figura æquilatera circulo inscripta est

Sit datum pentagonum, aequilaterum et aequiangulum $ABΓAE$; oportet circa pentagonum $ABΓAE$ circulum circumscribere.

Secetur uterque angulorum $BΓA$, $ΓAE$ bifariam ab utraque rectarum $ΓZ$, ZA (I. 9.), et a puncto Z , in quo conveniunt rectae, ad puncta B , A , E ducantur rectae ZB , ZA , ZE . Similiter ut in praecedente ostendetur et unumquemque angulorum $ΓBA$, BAE , AEA bifariam secari ab una rectarum ZB , AZ , EZ . Et quoniam aequalis est angulus $BΓA$

etiam aequiangula. Latera enim eius abscindunt arcus aequales (III. 28.), adeoque anguli a binis quibusvis polygoni lateribus contiguis comprehensi arcubus aequalibus insistant, adeoque aequales sunt (III. 27.). At non omnis figura aequiangula circulo inscripta necessario quoque aequilatera est, nisi quando numerus laterum ipsius est impar vel, si par est, quando duo latera proxima aequalia sunt, vel dummodo, duo quaecunque aequalia sint, quorum uno posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, ut quartum, sextum etc. Est haec observatio Clavii. Nempe, si circulo inscripta sit figura aequiangula quaecunque v. c. (Fig. 305.) $ABΓAE$, erit, ob angulum $BAE = ABΓ$, etiam arcus $BAE = ΓBA$ (III. 26. Cor. 1.), hinc, dempto communi AB arcus $AE = arc. BF$, adeoque recta $AE = rectae BF$ (III. 29.). Eadem ratione erit recta $BF = AE$, atque ita deinceps, si figura plura habet latera, erit semper tertium quodque latus ei, a quo tertium est, uno relicto in medio, aequale: hoc est, primum (quodvis autem latus constitui primum potest) aequale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo etc., atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita aequalia inter se erunt. Eadem autem ratione omnia latera locorum parium, ut secundum, quartum, sextum etc. aequalia inter se erunt, quum quartum sit a secundo tertium etc. Et haec quidem in omnibus figuris aequiangulis circulo inscriptis locum habebunt.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ $BΓΔ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $ΖΓΔ$, τῆς δὲ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$, καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΓΔ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΖΔΓ$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΖΓ$ πλευρᾷ τῇ $ΖΔ$ ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$ ἐκατέρᾳ τῶν $ΖΓ$, $ΖΔ$ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΖΑ$, $ΖΒ$, $ΖΓ$, $ΖΔ$, $ΖΕ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Ζ$, διαστήματι δὲ ἐνὶ πῶν $ΖΑ$, $ΖΒ$, $ΖΓ$, $ΖΔ$, $ΖΕ$ κύκλος γραφόμενος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ $ΑΒΓΔΕ$.

Iam vero, si figura inscripta imparium laterum numerum habeat, inde consequetur, ultimum latus aequale esse primo, cui proximum est, quod nempe et ultimum impari loco erit. Idem ultimum autem etiam aequale erit secundo, quod quippe ab ultimo tertium est. Itaque omnia latera inter se aequalia erunt. Si vero figura inscripta parem laterum numerum habeat, nihil concludi poterit, nisi omnia ea latera, quae impari loco sunt, inter se esse aequalia, et pariter omnia ea, quae pari loco sunt, inter se esse aequalia. Quodai autem unum eorum, quae impari loco sunt, aequale sit uni eorum, quae pari loco sunt, etiam omnia latera inter se erunt aequalia. Caeterum esse posse figuras aequiangulas circulo inscriptas, quae tamen non sint aequilaterae, iam exemplo rectangulorum constat (III, 22. Obs. 5.).

Obs. 10. Simili ratione omnis quidem figura aequiangula circulo circumscripta est etiam aequilatera, at non omnis figura aequilatera circulo circumscripta est etiam necessaria aequiangula, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel, si par est, quando duo proximi anguli aequales sunt, vel dummodo duo quicunque anguli aequales sint, quorum uno posito primo, alter occupet locum parem

angulo ΓAE , et est anguli BIA dimidius angulus ZIA , anguli vero ΓAE dimidius ΓAZ , et ZIA igitur angulo ZAI est aequalis; quare (I. 6.) et latus ZF lateri ZA est aequale. Similiter ostendetur et unamquamque rectarum ZB , ZA , ZE alterutri ZI , ZA esse aequalem; quinque igitur rectae ZA , ZB , ZI , ZA , ZE aequales inter se sunt. Circulus igitur centro Z et intervallo una rectarum ZA , ZB , ZI , ZE descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus. Circumscribatur, et sit $ABI\Delta E$.

quemcumque, ut quartum, sextum etc. (Est et haec observatio Clavii contra Campanum, qui in nota ad IV. 15. putaverat, omnem figuram aequilateram circulo circumscriptam esse aequiangulam.). Nempe si (Fig. 304.) circulo, cuius centrum Z circumscripta sit aliqua figura aequiangula $ABI\Delta E$, ducantur e centro rectae ad angulos figurae ZA , ZB etc., quae omnes hos angulos bisecabunt (III. 17. Obs. 1.), et, quum integri anguli aequales sint, aequales erunt etiam dimidii. Quum igitur in triangulis AZB , BZI commune sit latus BZ , angulus autem $BAZ = BIZ$, et $ABZ = IBZ$, erit et (I. 26.) $AB = BI$, atque ita duo quaecumque latera inter se aequalia erunt. Sin autem figura $ABI\Delta E$ circulo circumscripta sit aequilatera, erit iterum $ABZ = IBZ$, et quum praeterea in triangulis ABZ , IBZ $AB = BI$ et BZ communis, erit (I. 4.)

$BIZ = BAZ$. At, quum $BAZ = \frac{BAE}{2}$, et $BIZ = \frac{BIA}{2}$, erit etiam $BAE = BIA$, i. e. primus quisque angulus aequalis erit tertio, tertius quinto etc. Eademque ratione omnes anguli parium locorum ut secundus, quartus, sextus etc. aequales erunt. Et haec quidem in omnibus figuris aequilateris circulo circumscriptis. Iam, si numerus angulorum impar sit, erit

Περὶ ἅρα τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευ-
ρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγράφεται. Ὃπερ
ἔδει ποιῆσαι.

Ἰ Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε
καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕΖ$. δεῖ δὴ εἰς
τὸν $ΑΒΓΔΕΖ$ κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἦχθω τοῦ $ΑΒΓΔΕΖ$ κύκλου διάμετρος ἡ $ΑΔ$,
καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Η$, καὶ κέντρω
μὲν τῷ $Δ$, διαστήματι δὲ τῷ $ΔΗ$ κύκλος γεγράφθω
ὁ $ΕΗΓΘ$, καὶ ἐπιτευχθεῖσαι αἱ $ΕΗ$, $ΓΗ$ διήχθωσαν

ultimus angulus, quippe impari loco positus, aequalis primo,
qui ei proximus est: at etiam secundo, quippe qui ab ultimo
tertius, est: itaque omnes anguli aequales erunt. Sin autem
figura circumscripta parem angulorum numerum habeat, nihil
concludi poterit, nisi omnes angulos, qui impari loco sunt,
aequales inter se esse, et pariter omnes eos, qui pari loco
sunt. Quodsi autem unus eorum, qui ad secundam classem
pertinent, aequalis sit uni eorum, qui ad primam classem per-
tinent, omnes anguli aequales erunt. — Esse autem posse
figuras aequilateras circulo circumscriptas, quae tamen non
sint aequiangulae, iam exemplo rhombi constat (IV. 7.
Obs. 5.).

Obs. 11. In figuris quoque non regularibus, quibus cir-
culus circumscribi potest, centrum circuli circumscribendi in-
venitur, si duo latera continua bisecentur, et in punctis se-
ctionis perpendiculara ad ea erigantur, quorum sectio centrum
erit, ut in IV. 8. in figuris autem non regularibus, quibus
circulus inscribi potest, centrum circuli inscribendi invenitur,
si duo anguli proximi bisecentur, ubi pariter rectarum istos

Circa datum igitur pentagonum, aequilaterum et aequiangulum, circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XV. (Fig. 307.)

In dato circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma\Delta EZ$; oportet in circulo $AB\Gamma\Delta EZ$ hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Ducatur circuli $AB\Gamma\Delta EZ$ diameter AA , et sumatur centrum circuli H , et centro quidem A , intervallo vero AH circulus describatur $EHI\Theta$ (Post. 3.), et iunctae EH , ΓH producantur ad puncta B , Z , et

angulos bisecantium sectio centrum erit, ut in IV. 9. In figuris regularibus utraque methodus eodem redit, unde in IV. 6. problema circulum dato quadrato inscribendi modo priore, in IV. 9. autem problema circulum dato quadrato circumscribendi modo posteriore traditur.

PROPOSITIO XV.

Obs. 1. Ex hac propositione alia consequitur methodus facilior ea, quam in IV. 2. Cor. habuimus circulo dato triangulum aequilaterum inscribendi, ductis nempe rectis AF , ΓE , EA . Et quoniam $AB\Gamma H$ sit figura aequilatera, patet ex I. 8. eam a recta AF bifariam dividi, unde consequitur, triangulum circulo inscriptum esse hexagoni regularis eidem circulo inscripti dimidium.

Obs. 2. Quoniam angulus $ABH = H\Gamma A = \frac{2 \text{ Rect.}}{3}$, erit angulus $AB\Gamma = \frac{4 \text{ Rect.}}{3}$, et angulus $\Gamma A B = \frac{\text{Rect.}}{3}$. Patet itaque ratio describendi trianguli isoscelis $AB\Gamma$, cuius

ἐπὶ τὰ B, Z σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $AB, BF, ΓΑ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ$ · λέγω ὅτι τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ ἐξάγων-
 ὄν ἰσοπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓΔΕΖ$
 κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ HE τῇ HA . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ
 A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΕΗΓΘ$ κύκλου, ἴση
 ἐστὶν ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΔH$. Ἀλλ' ἡ HE τῇ HA ἐδείχθη
 ἴση, καὶ ἡ HE ἄρα τῇ EA ἴση ἐστὶν· ἰσοπλευρον ἄρα
 ἐστὶ τὸ $ΕΗΔ$ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γω-
 νίαι αἱ ὑπὸ $ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν,
 ἰπιδόητερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει
 γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ
 τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ $ΕΗΔ$
 γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. Ὀμοίως δὲ δειχθή-
 σεται καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΗΓ$ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ
 ἡ $ΓH$ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν EB σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γω-
 νίας τὰς ὑπὸ $ΕΗΓ, ΓHB$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ,
 καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓHB$ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν·
 αἱ ἄρα ὑπὸ $ΕΗΔ, ΔΗΒ, ΓHB$ γωνίαι ἴσαι ἀλλή-
 λαις εἰσὶν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ
 BHA, AHZ, ZHE ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ $ΕΗΔ, ΔΗΓ,$
 $ΓHB$ · αἱ ἐξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓHB,$
 BHA, AHZ, ZHE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Αἱ δὲ
 ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἐξ
 ἄρα περιφέρειαι αἱ $AB, BF, ΓΑ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ$
 ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας
 ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἐξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλ-
 λήλαις εἰσὶν· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ ἐξά-

angulus ad verticem sit quadruplus utriusque anguli ad basin.
 Et generaliter (Cf. etiam Obs. ad V. 11.) facile patet, si de-
 scribi possit polygonum regulare, quod laterum numerum =

inangantur AB, BF, FA, AE, EZ, ZA ; dico hexagonum $ABFAEZ$ aequilaterum esse et aequiangulum.

Quoniam enim punctum H centrum est circuli $ABFAEZ$, HE aequalis est HA . Rursus, quoniam punctum A centrum est circuli $EHG\Theta$, AE aequalis est AH . Sed HE ipsi HA ostensa est aequalis, HE igitur ipsi EA aequalis est; aequilaterum igitur est triangulum EHA , et tres igitur ipsius anguli EHA, HAE, AEH aequales inter se sunt (I. 5.), quia isoscelium triangulorum ad basin anguli aequales inter se sunt. Et sunt tres trianguli anguli duobus rectis aequales (I. 32.); angulus igitur EHA tertia pars est duorum rectorum. Similiter ostendetur et AHG tertia pars duorum rectorum. Et quoniam recta GH super EB insistens angulos deinceps EHG, GHB duobus rectis aequales facit (I. 13.), et reliquus igitur GHB tertia pars est duorum rectorum; anguli igitur EHA, AHG, GHB aequales inter se sunt; quare et anguli ad verticem BHA, AHZ, ZHE aequales sunt ipsis EHA, AHG, GHB (I. 15.); sex igitur anguli $EHA, AHG, GHB, BHA, AHZ, ZHE$ aequales inter se sunt. Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent (III. 26.); sex igitur circumferentiae AB, BF, FA, AE, EZ, ZA aequales inter se sunt. Aequales autem circumferentias aequales rectae subtendunt (III. 29.); sex igitur rectae aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est hexagonum $ABFAEZ$;

N habeat, describi etiam posse triangulum isosceles, cuius angulus ad verticem sit ($N-2$) plus atriisque anguli ad basin, et vice versa.

γωνιών· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ZA περιφέρεια τῇ EA περιφέρειᾳ, κοινῇ προσκείσθω ἡ $ABΓΔ$ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ $ZABΓΔ$, ὅλη τῇ $EAΓΒΑ$ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς $ZABΓΔ$ περιφερείας ἡ ὑπὸ $ΖΕΑ$ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς $EAΓΒΑ$ περιφερείας ἡ ὑπὸ AZE γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΕΑ$. Ὁμοίως δὴ δεῖ-
χθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ $ABΓΔEZ$ ἐξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ AZE , $ΖΕΑ$ γωνιών· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔEZ$ ἐξα-
γωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $ABΓΔEZ$ κύκλον.

Εἰς ἄρα τῶν δοθέντα κύκλον ἐξαγώνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου φανερόν ὅτι ἡ τοῦ ἐξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἐὰν διὰ τῶν $A, B, Γ, Δ, E, Z$ σημείων ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἐξαγώνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ εἴτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου

Obs. 3. Quum recta AG a recta BH bifariam et ad angulos rectos secetur (I. 34. Cor. 1. et 20.), erit quadratum dimidia AG , i. e. quarta pars quadrati ex AG (II. 4. Cor. 2.) aequale excessui quadrati ex AH super quadratum ex dimidia BH vel AH (I. 47. Cor. 2.) i. e. (II. 4. Cor. 2.) = tribus quartis quadrati radii. Quadratum ex AG , latere trianguli aequilateri igitur triplum est quadrati radii eius circuli, in quem inscriptum est. Taquet ad h. l.

dico etiam et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est circumferentia ZA circumferentiae EA , communis addatur $AB\Gamma A$ circumferentia; tota igitur $ZAB\Gamma A$ toti $EA\Gamma BA$ est aequalis, et insistit quidem circumferentiae $ZAB\Gamma A$ angulus $ZE\Delta$, circumferentiae vero $EA\Gamma BA$ angulus AZE . Aequalis igitur angulus AZE angulo $ZE\Delta$. Similiter ostendetur et reliquos angulos hexagoni $AB\Gamma\Delta EZ$ sigillatim aequales esse alterutri angulorum AZE , $ZE\Delta$. Aequiangulum igitur est hexagonum $AB\Gamma\Delta EZ$. Ostensum est autem et aequilaterum, et inscriptum est in circulo $AB\Gamma\Delta EZ$.

In dato igitur circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum hexagoni latus aequale esse circuli semidiametro.

Et si per puncta $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum hexagonum aequilaterum et aequiangulum, congruenter eis, quae de pentagono dicta sunt. Et etiam con-

Obs. 4. Circa circulum quemcunque centre H , radio $= \frac{HA}{2}$ descriptum e punctis $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ describi possunt sex circuli, inter se et primum descripto aequales, quorum quisque tres, nempe eum, qui ex H radio $\frac{HA}{2}$ descriptus est, et duos sibi proximos continget, si nempe radii omnium eorum sumantur aequales $\frac{HA}{2}$ (Obs. 3. ad III. 12.).

ειρημένοις, εἰς τὸ δοθέν ἐξάγωνον ¹⁾ κύκλον ἐγγρά-
φομέν τε καὶ περιγράφομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσό-
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

"Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ *ΑΒΓΔ*. δεῖ δὴ εἰς τὸν
ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

1) Rob. Simson. monet, addendum hic esse ἰσοπλευρόν
τε καὶ ἰσογώνιον. Recte ille quidem. Attamen haec ex prae-
cedentibus facile suppleri posse sine dubio auctor putabat. Et
si omnia ad summum rigorem exigere velis, etiam ad initium
Cor. similiter addendum erat ἰσόπ. καὶ ἰσώγων, ubi nec ipse
Simson. addit.

PROPOSITIO XVI.

Obs. 1. Eodem modo, quo Euclides ostendit, quum
arcus *ΑΓ* sit $1/3 = 5/15$ circuli integri, et arcus *ΑΒ* $= 1/5 =$
 $3/15$ circuli integri, fore arcum *ΒΓ* $= 2/15$, adeoque per III.
30. inveniri posse arcum, qui sit $1/15$ integri circuli, genera-
liter ostendetur, si describi possit in circulo polygonum re-
gulare *m* laterum, aliudque *n* laterum, ubi $m > n$ sumitur, et
si $m - n$ vel $pm - qn$ per continuas bisectiones ad unitatem
reduci possit, vel ut aliter dicamus, si $m - n$ vel $pm - qn$ sit
 $2r$, describi quoque posse in circulo polygonum regulare,
quod habeat $m \cdot n$ latera, ubi *p* et *q* denotare potest numeros
integros quoscunque.

Obs. 2. Ex iis, quae Euclides hoc libro tradidit, con-
sequitur, circulum posse in 3, 6, 12, 24 etc.

— 4, 8, 16, 32...

— 5, 10, 20, 40...

— 15, 30, 60, 120...

partes aequales dividi, et figuras regulares totidem laterum
ipsi posse inscribi et circumscribi. Figuras autem regulares,

gruenter eis, quae de pentagono dicta sunt, in dato hexagono circulum inscribemus et circumscribemus.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 308.)

In dato circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus $ABTA$; oportet in circulo $ABTA$ quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

quorum laterum numerus in istis seriebus haud contineretur, geometricè in circulo describendi ars hactenus ignorabatur. Gaussius, iam apud Göttingenses Matheseos Professor, in Disquisitionibus Arithmetiis 1801. editis, Sect. VII. de aequation. circuli section. definientibus, primus methodo algebraico-trigonometrica demonstravit, circulum non tantum in

$$\binom{2}{20+1} \binom{3}{21+1} \binom{5}{22+1} \text{ verum etiam in } \binom{17}{24+1} \\ \binom{257}{23+1} \binom{65537}{246+1} \text{ etc. generaliter nempe in } 2^m+1 \text{ par-}$$

tes dividi posse, quoties 2^m+1 sit numerus primus. Ope divisionis in 17. partes aequales, collatis iis, quae in Obs. 1. et in Obs. ad IV. 11. diximus, circulus deinde porro in 2×17 , 4×17 , 8×17 etc. praeterea in 3×17 vel 51 partes aequales dividetur, quod nempe $6/17 - 1/3 = 1/15$

$$\text{in } 5 \times 17 \text{ vel } 85, \text{ quia } 1/5 - 3/17 = 2/85$$

$$\text{in } 15 \times 17 \text{ vel } 255, \text{ quia } 1/15 - 1/17 = 2/255$$

et in eas adhuc partes aequales, quae bisectionibus ex praecedentibus consequuntur. Cf. etiam v. Huguenin. mathem. Beiträge Königsb. 1803. p. 272. sq. et Rothe. De Divisione Peripheriae circuli in 17. et 13. partes aequales, Erlangae 1804. qui pro quaestione generali, an polygonon aliquod regulare geometricè circulo inscribi possit, hanc adfert regulam generalem: sit M numerus quicunque integer positivus, atque litera m designetur multitudo numerorum integrorum positivorum $< M$ atque

Ἐγγεγράφω εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἢ $ΑΓ$, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἢ $ΑΒ$ · οἷων ἄρα ἔστιν ὁ $ABΓΔ$ κύκλος ¹⁾ ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἢ μὲν $ΑΒΓ$ περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε· ἢ δὲ $ΑΒ$ περιφέρεια, πεμπτὸν οὔσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἢ $ΒΓ$ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω ἢ $ΒΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Ε$, ἑκάτερα ἄρα τῶν $ΒΕ$, $ΕΓ$ περιφερειῶν πεντεκαίδεκατον ἔσται τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου. Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς $ΒΕ$, $ΕΓ$ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαδεκάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. "Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅμοιως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου ἀγῶμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαδεκάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐπὶ δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ

1) Pro ὁ $ABΓΔ$ κύκλος Rob. Simson. mavult legere: ἢ $ABΓΔ$ περιφέρεια. Quum tamen vox κύκλου etiam postea saepius recurrat, κύκλος hic dictum videtur pro integra circumferentia.

erga M relative primorum. Polygonon regulare M laterum geometricè circulo inscribi poterit, si M potentia est numeri 2 exponentis integri positivì. Si vero hoc non valeat, peripheria etiam in M partes aequales geometricè dividi nequit. Caeterum geometrica quoque solutio ex formulis, quas habent viri supra laudati, deduci omnino potest, et Pflaiderer. pervenit ad geometricam constructionem satis elegantem et pro rei natura concinnam, cuius etiam demonstrationem exhibuit e mere geometricis principiis petitam. Aliam e formulis

Inscribatur in circulo $AB\Gamma\Delta$ trianguli aequilateri in ipso inscripti latus AI (IV. 2.), pentagoni vero aequilateri latus AB (IV. 11.); qualium igitur est circulus $AB\Gamma\Delta$ aequalium segmentorum quindecim, talium circumferentia $AB\Gamma$, quae tertia pars est circuli, erit quinque; AB vero circumferentia, quae quinta est circuli, erit trium; reliqua igitur BI aequalium duarum. Secetur BF bifariam in E (III. 30.), utraque igitur circumferentiarum BE , $E\Gamma$ quintadecima erit circuli $AB\Gamma\Delta$. Si igitur iungentes rectas BE , $E\Gamma$, aequales ipsis in continuum rectas aptemus in circulo $AB\Gamma\Delta$ (IV. 1.), erit in ipso inscriptum quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. Quod oportebat facere.

Congruenter autem eis, quae de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum quindecagonum aequilate-

algebraicis a Rothe. exhibitis deductam constructionem exhibit Müller. (Mathem. kritische Bearbeit. des ersten Buchs der Elemente 1821. im Anhang.). Aliam satis concinnam constructionem vide in Paukers ebene Geometrie 1823. p. 187. sq. Illa tamen hoc loco praetereunda nobis sunt, quum demonstratio ex ipsa problematis natura non possit non esse prolixa, et ex parte haud exigua e libris elementorum sequentibus demum petita. Praeterea plures subinde mathematici methodos tradiderunt vel generales, vel ad singulares figuras spectantes, polygona regularia quaecunque, aut certe plura adhuc, quam Euclides docuerat, circulo dato inscribendi etc., haud quidem, ut probe norant, rigorose veras, at tamen magis minus prope ad veritatem accedentes, atque ita comparatas, ut usui pra-

εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαίδεκάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευ-
τὸν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψομεν τε καὶ πε-
ριγράψομεν.

cūico, ubi saepe summus rigor attingi nequit, inservire posse
videantur. Haec talia autem satis ingeniose nonnunquam ex-
cogitata nihil huc pertinent, nec diiudicatio horum tentami-
num plerumque ex altioribus fontibus repetendorum, vel mere
mechanicorum, huius loci esse potest. Huc tamen haud referri

rum et aequiangulum. Praeterea congruenter eis, quae de pentagono dicta sunt, et in dato quindecagono circulum inscribemus et circumscribemus.

debent eorum conatus, qui aperte falsa de arcu quocunque in aequales, quotquot libuerit, partes dividendo praecepta dedere, qualia v. c. videre est in Hadaly de Hada Toxometria edita Budae 1820.

ΕΤΚΛΕΙΔΟΤ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

ΟΡΟΙ.

α. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἐλάσσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρηῇ τὸ μείζον.

β. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρηῇται ὑπὸ τοῦ ἐλάττωτος.

Isaac. Monachus in scholiis ad hunc librum refert, asserere nonnullos, huius libri doctrinam ab Eudoxo, Platonis præceptore, inventam traditamque esse. Caeterum aliqua in eo corrupta ad nos pervenisse, ex sequentibus patebit.

DEFIN. I.

Pars, ut iam Isaacus Monachus, Campanus, Commandinus, Clavius aliique notant, duplici sensu apud Geometras adhibetur. Aut enim designat quamvis magnitudinem minorem altera eiusdem generis. Ita v. c. Euclides I. 9. Def. ait: omne totam sua parte maius est. Aut sensu strictiore, ut hic, sumitur pro ea magnitudine minore, quæ aliquoties repetita aliam maiorem eiusdem generis efficit aut *mensurat*, unde eius *mensura* vocatur. Priore sensu v. c. 4. erit pars numeri 6, non vero posteriore sensu: 3 autem utroque sensu pars est numeri 6. Diximus, maiorem magnitudinem, cum qua minor

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. **P**ars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando mensurat maiorem.

2. Multiplex autem maior minoris, quando mensuratur a minore.

comparetur, esse debere eiusdem generis ac minorem. Patet enim lineam v. c. non nisi a linea, superficiem a superficie, corpus a corpore, pondus a pndere etc. mensurari posse. Caeterum, quam Euclides vocat hic partem sensu strictiore, alii partem *aliquotam*, aut *submultipulum* maioris vocant, maior contra *multiplum* minoris appellatur, quam exacte aliquoties continet (Def. 2.). Ita 3 erit submultipulum numeri 6, nempe eius pars dimidia, vel subdupla: 2 est numeri 6 pars tertia aut subtripla etc. Pars aliquota igitur aut submultipla prodit, si magnitudo aliqua in quocunque partes aequales dividatur. Talis pars *aliquota* distinguitur ab *aliquantis*, magnitudinem ipsam non metientibus, sed conflatis ex summa aliquot eius partium aliquotatum. Ita 4 erit pars *aliquanta* numeri 6, nempe erit eius pars tertia bis sumta. Euclidis libro VII. et sqq. partes aliquotas et aliquantas ita distinguit, ut priores simpliciter *partem*, posteriores *partes* appellet.

γ. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις ¹⁾).

1) Robert. Simson. persuasus de huius et sequentis octavae definitionis inutilitate, quam et Barrovius fateatur, firmiter se credere ait, eas non Euclidis esse, sed cuiusdam minus periti editoris. Eodem modo iudicat Borellus in Obs. ad axioma VI. L. III. Euclid, restituit.

DEFIN. II

Addi potest, duas magnitudines A, B duarum C, D *aequemultiplas*, aut *aequemultiplices* vocari, si maior A minorem C toties exacte contineat, quoties B continet D, seu, si minor C toties praecise repetenda est, ut efficiat aequalem maiori A, quoties D repeti debet, ut efficiatur aequalis magnitudini B. Eodem casu magnitudines C, D duarum A, B *partes aequaliquotae* vocantur. Ita v. c. quum sit $15 = 3 \cdot 5$ et $20 = 4 \cdot 5$, erunt numeri 15 et 20 numerorum 3 et 4 *aequemultiplices*, et contra numeri 3 et 4 numerorum 15 et 20 *aequaliquotae partes*. *Aequemultiplices* autem partium *aequaliquotarum* quarum magnitudinum vocantur magnitudinum harum *partes aequaliquantae*. Sic 6 et 8 erunt numerorum 15 et 20 partes *aequaliquantae*. Partes *aequaliquotas* duarum magnitudinum Euclides *eandem* illarum *partem*, *aequaliquantas* autem *easdem partes* appellat. Quodsi eadem magnitudo minor C utramque A et B metitur, tum C *communis mensura* magnitudinum A et B vocatur. Cf. Pfeiderer Expositio ac Dilucidatio libri V. Elem. Euclid. Tub. 1782. p. 11. Peletarius vocem *multiplex* aliter intelligi vult, pariter ac vocem *pars* in Def. 1. Nempe multiplicem vocat maiorem minoris, non tantum: quum a minore ipsa, verum etiam, quum a parte aliqua minoris maior exacte mensuratur. Ita ait, 5 esse multiplicem numeri 2, esse nempe eius duplum sesquialterum: ternarium esse binarii, unitatem esse sui ipsius multiplicem. At vulgo hae voces non hoc sensu dicuntur, nec ab Euclide ita sumtae sunt, et multiplex semper *repetitionem* minoris, aut certe po-

3. Ratio est duarum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem (quantuplicitatem) inter se quaedam habitudo.

sitionem *integrae* alterius (quo sensu: *simplum* dicitur), non vero positionem partis tantum minoris involvere videtur. Idem de aequemultiplis dicendum.

DEFIN. III.

„*Λόγος*, ratio, sensu generalissimo indicat modum quocumque ex mutua duarum quantitatum comparatione erutum, magnitudinem unius ex magnitudine alterius determinandi seu inferendi, atque ita necessario ad duas quantitates homogeneas restringitur. Concipi autem possunt infiniti modi diversi, magnitudinem unius duorum quantum ex magnitudine alterius determinandi. Horum simplicissimi sunt, qui quantitates ipsas immediate, absque ulla earam praevia mutatione invicem comparant, magnitudinemque unius ex altera determinant, indicando vel quanto una alteram excedat, aut ab ea deficiat: vel quoties una alteram contineat, aut in eo insit. Posteriori modum quantitates invicem comparandi, magnitudinemque unius ex magnitudine alterius determinandi accuratissime libro V. discutit, atque in sequentibus libris ad obiecta geometriae applicat Euclides, nulla usquam iniecta mentione expressa prioris: unde suspicari licet factum esse, ut eiusmodi rationes *geometricae*; altera autem priores, quae excessu unius magnitudinis super alteram, seu defectu unius ab altera occupantur, et quae primarum arithmetices operationum, simplicium, additionis ac subtractionis obiectum constituunt, arithmeticae vocari consueverint. Caeterum neutra harum rationum ad arithmetica vel ad geometriam seorsim pertinent; verum utraque in numeris pariter et extensis locum habet, et ambae iunctim limites fere figunt matheseos, quam vocant elementarem.“ Cf. Pfeiderer. l. c. p. 6. Definitio itaque haec adstrata, in qua, ut semper apud Euclidem de *geometrica* tantum ratione sermo est, nihil aliud dicere videtur, quam in hac ra-

δ. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

tione disquiri, quanta sit una magnitudo comparata cum alia eiusdem generis i. e. si aliam eiusdem generis pro mensura prioris sumere velis; vel (Wallisii verbis utimur in Tract. de Algebr. Oper. T. II. p. 86.) qualiter se habeat una ad alteram quoad quantuplicitatem (*πληκότητα*) considerata. Putat autem Wallisius, Euclidem dixisse potius *πληκότητα* quam *ποσότητα*, quo facilius etiam quantitates incommensurabiles, nec eae tantum, quarum una multipla est alterius, hac voce comprehenderentur. Atque eo, quo Wallisius vult, sensu vocem *πληκότητα* intelligere, suadet etiam ordo Def. 3. Post. 1. et 2. atque expressio Def. 4. 5. 7., ut observat Pfeiderer. in Promptuario Mathem. Lips. Fascic. 7. p. 259. Idem tamen addit ibidem, Fasc. 8. p. 445. vocem *πληκότης* videri potius significare *quantitatem*, quo sensu occurrat apud Ptolem. Magna Syntax. L. I. p. 8. (Basil. 1538.) *περὶ τῆς πληκότητος τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐνθιστῶν*, et ita vocem interpretatos esse Clavius et Barrovius in Lection. Cantabrig. Observare tamen liceat, chordarum quoque catalogum non absolutam aliquam rectarum circulo inscriptarum quantitatem, sed semper relativam tantum, i. e. comparatam cum aliqua unitate v. c. cum radio circuli continere, ita ut doceat, quot vicibus quaeque earum hanc unitatem aut eius partes contineat, aut *quantupla* illius sit. Denique Barrow. notat L. c. p. 225. verba: *πρὸς ἄλληλα* significare *ἀδιαφορίαν* quandam, quoad situm et ordinem terminorum, ita ut utervis prior, alter autem posterior poni possit. Is autem, qui prior positus est, antecedens vulgo, qui posterior, consequens dici solet. Quod rationis genera attinet, antecedens aut maior est consequente, quae *ratio maioris inaequalitatis* vocatur, vel ei aequalis est — quae *ratio aequalitatis*, vel antecedens minor est consequente, — quae *ratio minoris inaequalitatis* appellatur. Praeterea haec genera in varias denuo species dividunt, quas videre est apud Clavius aut Barrovium p. 240., quibus hic immorari nihil attinet. Antecedens autem consequentis non

4. Rationem inter se magnitudines habere dicuntur, quae multiplicatae sese superare possunt.

tantum aliquod multipulum, sed etiam eius pars aliquota aut pars aliquanta esse potest. „Numerus integer vel fractus, hicque vel spurius vel verus, qui indicat, quoties antecedens contineat consequentem, *exponens rationis* vocatur. Praeterea autem occurrunt magnitudines eiusdem generis, e. g. lineae, quarum maior nec ipsa, nec ullum eius multipulum, minoris cuiuspiam multiplo aequatur. Eiusmodi magnitudines, mensuram quippe communem nullam habentes, *incommensurabiles* vocantur. Ratio igitur istiusmodi duarum magnitudinum assignari numeris nequit, quare etiam *irrationales* vocantur: Limites tamen exponentis huius definiri possunt, qui invicem minus differant, quam dato numero fracto quocunque; seu duo assignari possunt multipla immediata contigua magnitudinis unius, quae sint limites multipli cuiuscunque dati magnitudinis alterius; hoc est, quorum unum dato hoc multiplo minus sit, alterum maius.“ Pfeiderer *Expos. ac Dilucid. L. V. p. 7.* Atque haec quidem causa fuisse videtur Euclidi, cur insequentibus nunquam definitionem V. 3., si modo ea genuina sit, in ulla demonstratione adhiberet, sed quantam insuper adderet. „Nihil forte aliud, Barrovi verba sunt p. 230. in definitione 3. tradenda, Euclidi propositum fuit, quam ut methodi plenioris, aut ornatus qualiscunque causa, praeludens scilicet accuratioribus istis eiusdem, maioris et minoris rationis definitionibus mox subiungendis, *generalem quandam et εῳλαγεσῆ τοῦ λόγου* ideam disceptium insinuaret animis per metaphysicam hanc definitionem, metaphysicam dico, nec enim proprie mathematica est, cum ab ea nihil quicquam dependeat, aut deducatur a mathematicis, nec, ut existimo, deduci possit. Cuiusmodi quoque censi potest posthac tradita definitio analogiae: analogia est rationum similitudo, quae nulli mathematico deserviat usui, nec alio opinor fine proponitur, quam ut per eam generalis quaedam analogiae notio, crassa licet et confusa tyronibus indatur. Definitionibus autem ex-

ε. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τι τοῦ πρῶτου καὶ τρίτου ἰσάκῃς πολλαπλασία, τῶν τῶν δευτέρου καὶ τέταρτου ἰσάκῃς πολλαπλασιῶν, καθ' ὁποιοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ἢ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ζ. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, ἀνάλογον καλεῖσθω.

quisitis, mox ab illo subiunctis tota rationum doctrina, tota res mathematica subnuitur; ad illas igitur potissimum attendi debet, per illas rationum doctrina perfectius elucēscit: haec et consimiles absque notabili matheseos detrimento prorsus omitti possent: sicut in Elem. VII. factum videmus, ubi numerorum analogia definitur et pertractatur, nulla tamen rationis numero competentis exhibitā definitione; quamvis illic aequē necessaria fuit et utilis talis definitio, atque hic est, sed neutro loco magna fuit necessitas." Unde et Rob. Simsonem has definitiones pro spuriis habuisse diximus. Et cum Rob. Simson. consentit Pflēiderer. l. c. p. 9., qui observat, Euclidem hac definitione non solum nusquam in sequentibus uti, verumetiam uti ob vagam, quam offerat, notionem non potuisse.

DEFIN. IV.

Sive genuina sit definitio 3., sive spuria, Euclidi certe ob eas, quas diximus, causas non ex omni parte satisfacere poterat. Hinc definitionem 4. vel priori adiunxisse vel solam dedisse censendus est, qua non tam rationis geometricae rationem ipsam explicare, quam characterem distinctivum magnitudinum; quas vocant, homogenearum, et quas terminos rationis alicuius constituere possunt, assignare volebat: ita tamen, ut simul innueret, quid in illis, quatenus ratio earum geometrica spectatur, praecipue sit considerandum. Accuratorem notionis evolutionem definitionibus identitatis ac diverſitatis rationum reservavit. Cf. Pflēiderer. l. c. p. 8. Caste-

5. In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aequae multiplices, secundae et quartae aequae multiplices, iuxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una aequales sunt, vel una deficiunt inter se comparatae.

6. Magnitudines autem eandem rationem habentes proportionales vocentur.

rum Campanus hanc definitionem non habet, eius loco autem aliam haud satis claram, qua quantitates continue proportionales explicare studet. Quo magis confirmare videtur, quod Barrovius monet, qui p. 277. ita habet: „Non diffiteor, elementi quinti definitiones attentius inspectanti, nonnihil in iis exscriptorum culpa videri transpositum ac immutatum.“

DEFIN. V.

Male omnino hanc definitionem intellexit Campanus, qui eius sensum ita explicat: proportio primae ad secundam est sicut tertiae ad quartam, cum sumtis aequemultiplicibus ad primam et tertiam, itemque aequemultiplicibus ad secundam et quartam, erit proportio multiplicis primae ad multiplex secundae, sicut multiplex tertiae ad multiplex quartae. Hoc enim, ut Campanus ipse ad definitionem praecedentem observat, esset idem per idem defuere, nec illud vitium corrigeretur, si verborum Euclidis, quamvis non aperte idem dicerent, is tamen sensus esset. Falsam hanc Campani interpretationem sequitur etiam Orontius Finaeus. Iure autem id absurdum esse, Clavius ait. Nec melius Euclidis sensum assecutus est Ramus, qui vel eodem modo ac Campanus, rem interpretatur, vel definitionem Euclidis pro falsa haberi posse putat, quoniam v. c. si quatuor numeri sint 4, 3, 5, 4, et sumatur primi et tertii sexuplum 24, 30, secundi et quarti autem nonuplum 27, 36, sit simul $24 < 27$, et $30 < 36$, adeoque putare quis possit, esse $4:3=5:4$, ubi prorsus obli-

ζ' "Όταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τό τε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ περὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

ἦ. Ἀναλογία δὲ ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ταυτότης ¹⁾.

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστὶν ²⁾.

1) Haec definitio in edd. Oxon. et Basil. est οὕτως, atque ita nos restituimus. Praeterea in his edd. loco: ταυτότης legitur: ὁμοιότης. Peyrardus secutum se esse ait Codd. a. et c. i. e. 190. et 1036., et huic definitioni quartum locum assignat. Et apud Campanum etiam est haec definitio 4., pariterque apud Zambertum et Clavium.

2) Ita melius Peyrardus e Cod. a. quam edd. Basil. et Oxon. quae legunt: ἐλαχίστοις. Cf. quae infra ad hanc definitionem monebimus.

citur verborum, quae in Euclidis definitione sunt: καθ' ὅποιον πολλαπλασιασμόν. Quodsi enim v. c. sumtum fuerit in iisdem numeris primi quidem et tertii sexuplum 24, 30, secundi autem et quarti octuplum 24, 32, erit quidem $24 = 24$, at $30 < 32$, unde patet, quatuor numeros 4, 3, 5, 4 non esse proportionales. Nempe tum saltem erit proportio, si in aequemultiplicis quibuscunque locum habet, quod in definitione dicitur, ut iam Candalla respondit ad istam obiectionem. Plura, quae ad hanc definitionem, et ad VI. 57. Def. pertinent, vide in Excursu ad finem huius libri.

DEFIN. VIII.

Barrovius notat l. c. p. 275. melius forte pro ὁμοιότης aut ταυτότης dici posse ἰσότης. Similitudinem enim verbum esse laxius et magis ambiguum, et identitatem haud optime quadrare rebus actu diversis immediate quolibet, et sub diversorum ratione comparatis; praeterea rationum habitudines alias, hyperlogiam nimirum et hypologiam non ex dissi-

7. Quando vero aequè multiplicium, primæ quidem multiplex superat multiplicem secundæ, multiplex vero tertiæ non superat multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

8. Proportio autem est rationum identitas.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis consistit.

similitudine vel diversitate, sed ex inaequalitate denominari maiorem et minorem; denique rationum æqualium denominatores, a quibus rationes habeant, quod ullatenus inter se comparentur, non eosdem, aut similes, sed æquales esse. De latina voce *proportio* idem observat p. 191. æqq. reperiri eam a Cicerone aliquoties usurpatam, quanquam non sensu exacte eodem. Alias enim apud ipsum idem valere videri, quod simplex ratio, nonnunquam vero rationum similitudinem vel analogiam designare, primumque videri illum ipsum eius usum adinvenisse, saltem ad res mathematicas primum applicuisse. Sic in fragmento, quod Timæus inscribitur, eum dicere „græcorum *ἀναλογία* (audendum est enim, quoniam hæc primum a nobis novantur) comparatio, proportionē dici potest.“ Eius autem effingendæ hinc acceptam videri originem vel occasionem: Cum in corrogandis vectigalibus, vel importandis oneribus publicis, pro facultatum modo, secundum æquas leges taxato, sua cuique pars persolvenda cessat, quæ nempe rata cuiusque portio dicta sit; hinc unumquemque solvere dictum pro portione, vel pro rata sua portione: hinc emersisse vocabulum *proportio*, dignum visum Ciceroni, quam græcas litteras suo donare Latio studeret, quod *λόγος* et *ἀναλογία*, obvias Platonem et alios græcos philosophos inspectanti voces, refertet et exprimeret. — Caeterum, uti rationes alias dicunt arithmeticas, alias geometricas ita simili modo proportionem alias vocare solent, arithmeticas, eas

i. Ὄταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ii. Ὄταν δὲ τέσσαρα μεγέθη (συνεχῆς) ¹⁾ ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον καὶ ἀεὶ ἐξῆς ὁμοίως ὡς ²⁾ ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

1) Vocem *συνεχῆς*, quamvis in nullo codice reperitur, addidimus, quod monente Rob. Simson. omnino necessaria est, et in XI. 33. ita citatur.

2) Ita Peyrardus e Cod. a. Edd. Basil. et Oxon. contra: καὶ ἀεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλεῖον, ὥς ἂν, quod nescio an non sit praefendum. Caeterum definitioni 11. Rob. Simson. subiungit aliam praecedentibus analogam, qua ratio composita explicatur. Aliam quidem rationis compositae definitionem vulgo habent in VI. Def. 5. ubi plura videbimus.

nempe, quibus prima magnitudo secundam eodem excedit, quae tertia quartam; alias geometricas, de quibus solis Euclidi tum in omni opere, tum hic potissimum et in V. 3. Def. sermo est. His postea addiderunt, quod verbo indicasse sufficiat proportionibus harmonicas, seu, musicas. Dicunt nempe, tres magnitudines A, B, C esse *harmonice continue* proportionales, si *geometrica* ratio primae ad tertiam aequalis sit *geometricae* rationi excessus ^(secundae super primam) ad excessum ^(tertiæ super secundae) ^(primae super secundam) per secundam) i. e. si sit $A : C = \frac{(B-A) \cdot (C-B)}{(A-B) \cdot (B-C)}$ v. c. in numeris 3, 4, 6, quum sit $3:6=4-3:6-4$. Eodem modo quatuor magnitudines A, B, C, D harmonice proportionales esse dicunt, si fuerit $\frac{(A-B) \cdot (C-D)}{(B-A) \cdot (D-C)} = A : D$. Rationem huius denominationis vide v. c. in Klügels mathem. Wörterb. ad vocem: Harmon. Proportion.

DEFIN. IX.

Haud satis clare patet, quid verba huius definitionis sibi velint, quae edd. Basil. et Oxon. ita proferunt: *Ἀνάλογα ἐν*

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, eius quam habet ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines (deinceps) proportionales sint, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius quam habet ad secundam; et semper deinceps similiter quamvis proportio exstiterit.

εἰς τὸν ὅρον ἐλάττωσιν ἐστιν. Quid enim termini minimi sibi velint, incertum videri possit. Candalla quidem explicat *ἐλάττωσιν* saltim, atque eodem modo Peletarius et Gregorii ponunt: *minimum* vel *ad minimum*, quam ipsam interpretationem habent etiam Ambros. Rhodius, Baermannus, Rob. Simson. alique. Recte illi quidem, quoad sensum, an tamen vox *ἐλάττωσιν* grammaticè id significari possit, valde dubitamus. Hinc præferendam putavimus lectionem Peyrardi: *ἐλάττωσιν*, quæ facilius certe ac illa altera significare posse videtur, proportionem, quum illa minima i. e. minimis terminis expressa sit, vel, ut aliter dicamus, *ad minimum* tres continere terminos. Simplicissimum forte fuerit, in græco quoque ponere: *ἐλάττωσιν*, idque adverbialiter sumere. Quod deinde vocem *ὅρον* attinget, ea ipsa quoque, ut Candalla monet, improprie hic sumpta est. Nempe in omni ratione duo omnino termini, alter antecedens, alter consequens adesse debet, adeoque, quum duæ rationes inter se comparantur, ut sit in analogia, *proprie* quatuor omnino termini aderunt, quamvis, ut sit in proportionem continua, eadem magnitudo, quæ efficit terminum consequentem prioris rationis, efficere simul possit terminum antecedentem posterioris, ubi deinde *improprie* tres saltim terminos dicere possis, quum potius tres magnitudines, quarum secunda bis ponitur, quatuor etiam nunc terminos efficiant. Forte itaque pro *ὅρον* ponendum fuerit *πυλὸν*, quæ voce Euclides etiam alias, ubi de rationibus sermo est, utitur. Et usus illa vocis *ὅρον*, quo terminos rationis significat, forte sequioris saltim sævi fuerit. Cf. Pfeiderer. in

ιβ'. Ὁμολογα μεγέθη λέγεται, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλάξ λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ ἐπόμενον.

Schol. ad libr. VI. Elem. Euclid. §. 132. et, qui ab eo citatur, Isaac. Barrov. (Lection. Cantabrig. habitae 1686. p. 197. sq. et p. 214.). Hinc omnis haec definitio Pfeiderero l. c. suspecta est. Quum tamen sequens definitio 10. se ad eam referre videatur, possis fortasse eam, ita, uti diximus, mutatam aut intellectam retinere.

DEFIN. X. XI.

Post has definitiones locum proprium fuisse definitionis rationis compositae Rob. Simson. recte monet. Caeterum Clavius observat, probe distinguendum esse inter rationem duplicam et duplicatam, triplam et triplicatam etc. Et Euclides quoque semper dicit λόγος διπλασίαν, non, ut de recta aut angulo διπλάσιος aut διπλός. Quodsi igitur fuerint magnitudines A, B, C, D, E etc. continue proportionales i. e. ita, ut $A:B=B:C=C:D=D:E$ etc. ratio A:C duplicata dicitur rationis A:B, quoniam inter A et C duae rationes ponuntur, quae aequales sunt rationi A ad B: eodem modo ratio A:D triplicata dicitur rationis A:B etc. Contra, eodem casu, ratio A:B dicitur subduplicata rationis A:C; eodemque modo ratio A:B subtriplicata dicitur rationis A:D, subquadruplicata rationis A:E etc. Pariter, si fuerit $A:B=B:C$, sitque $M:N=A:C$, etiam $M:N$ dicitur aequalis rationi, quae duplicata est rationis A:B, vel brevitatis causa ratio $M:N$ dicitur duplicata rationis A:B, idemque valebit in ratione triplicata, quadruplicata etc. Eodem modo, si sit $A:B=B:C$ et $P:Q=A:B$, dicitur P:Q ratio, quae eadem est subduplicatae rationis A:C, vel brevius P:Q dicitur subduplicata rationis

12. Homologae magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna (permutata) ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

$A:C$, atque ita in reliquis. Ratio duplicata, triplicata etc. species tantum sunt rationis compositae, in quibus nempe singulae rationes, ex quibus aliae componuntur, inter se aequales sunt. Unde ea omnia, quae ex definitione rationis compositae consequuntur (vide infra in Exc. ad libr. VI.) et applicari possunt ad rationem duplicatam, triplicatam etc. etiam de hac valent. Nominatim, ut hoc non demonstrationis causa, quae in locis citatis infra habetur, sed in antecessum, ut aiunt, dicamus, rationum inter se earundem duplicatae (triplicatae etc.) sunt pariter inter se eadem (Excurs. in libr. VI. §. 9. et infra Cor. ad V. 22.) et vice versa, rationum inter se earundem subduplicatae, subtriplicatae sunt inter se eadem (vid. in Exc. ad Libr. V. Cor. ad Prop. m.). Et si, quando id fieri potest, numeris exprimantur rationes duplicatae, triplicatae etc. erit (Exc. ad Libr. VI. §. 7.) exponens rationis duplicatae (triplicatae) numerus quadratus (cubus) multiplicatione denominatoris rationis simplicis per se ipsum factus, vel ratio duplicata (triplicata) eadem est rationi quadratorum (cuborum) eorum numerorum, qui rationem simplicem exhibent. Porro, si $A:C$ est ratio duplicata (triplicata) rationis $A:B$, inversae erit $C:A$ ratio duplicata (triplicata) rationis $B:A$ (Exc. ad Libr. VI. §. 17.) etc. Caeterum apud ipsum Euclidem nulla rationis duplicatae etc. mentio fit ante VI. 19.

DEFIN. XIII.

Quae hic alterna ratio dicitur, melius forsan alterna *proportio* diceretur. Manifesto enim non de duabus saltem quantitibus, sed de quatuor sermo est. Caeterum patet, ut quan-

ιδ'. *Ανώταλιν λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἐπομένου*
ὡς ἡγούμενου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἐπόμενον.

ιε'. *Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγούμενου μετὰ*
τοῦ ἐπομένου ὡς ἐνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

ις'. *Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λήψις τῆς ὑπεροχῆς,*
ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς αὐτὸ
τὸ ἐπόμενον.

ιζ'. *Ἀναστοφὴ λόγου ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγούμενου*
πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ
ἐπομένου.

ιη'. *Δίττου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν*
καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλήθος, σὺν δύο λαμβανόμενων
καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ἡ ὡς ἐν τοῖς
πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως
ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον.
ἢ ἄλλως. Λήψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν
τῶν μέσων.

ιδ'. *Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ἡ ὡς ἡγούμενον*
πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον,
ἡ δὲ καὶ ὡς ἐπόμενον πρὸς ἄλλό τι οὕτως
ἐπόμενον πρὸς ἄλλό τι ¹⁾.

κ'. *Τεταράγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν*
ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλήθος,

¹⁾ Peyrardus refert, hanc definitionem omitti a Codd. a. c. quod, quum perturbata ratio postea tamen occurrat, mera librarii oscitantia, cuius oculus a *τεταγμένη* in *τεταραγμένη* aberrabat, factum fuisse videtur.

titates ita alterne comparare possint, omnes quatuor eiusdem generis esse debere.

DEFIN. XVI. et XVII.

Manifestum est, sumi in his definitionibus, consequentem

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio autem rationis est sumptio excessus, quo superat antecedens consequentem; ad ipsam consequentem.

17. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat consequentem.

18. Ex (aequo) aequalitate ratio est, quando, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis numero aequalibus, et in eadem ratione binis sumptis, est, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis numero aequaliorem esse antecedente. Quodsi contra consequens maior fuerit antecedente, similis erit argumentatio, si sumatur excessus, quo consequens superat antecedentem.

DEFIN. XVIII—XX.

Monente Rob. Simson. Def. 19. et 20. speciem tantum continent eius proportionis, quae Def. 18. explicatur. Unde forte conicere liceat, in Def. 18. quoque pro λόγος legendum esse ἀναλογία. Erit igitur ex Def. 19. τετραμένη sive διῶον

γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμε-
νον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέ-
θεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώ-
τοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς
δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εὰν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων
τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκεις πολλαπλάσιον,
ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τοσάνταπλά-
σια ἔσται καὶ τὰ παντὰ τῶν πάντων.

"Εστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ AB , $ΓΔ$ ὁποσωνοῦν
μεγεθῶν τῶν E , Z ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκά-
στου ἰσάκεις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι

τεταγμένη ἀναλογία, sive simpliciter διῶον, quando fuerit
(prorsus ut in Def. 18.) prima ad secundam in primis quanti-
tibus, ut in secundis prima ad secundam; ut autem in pri-
mis, secunda ad tertiam, ita in secundis, secunda ad tertiam,
et ita deinceps, et concluditur, ut in Def. 18. dictum est.
Vide V. 22. Ex Def. 20. autem διῶον τεταραγμένη, vel sim-
pliciter τεταραγμένη ἀναλογία est, quando in primis magnitu-
dinibus fuerit ut prima ad secundam, ita in secundis penul-
tima ad ultimam; ut autem in primis secunda ad tertiam, ita
in secundis antepenultima ad penultimam; et ut in primis
tertia ad quartam, ita in secundis quae antepenultimam præ-
cedit ad antepenultimam, et ita deinceps, et concluditur, ut
in Def. 18. Vide V. 23. Ita fere Rob. Simson. rem explicat,

AXIOMATA.

Sequentia præmittit Rob. Simson. et ex eo Playfair.

1. Eiusdem sive æqualium æquemultiplices inter se æ-
quales sunt.
2. Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æ-
quales sunt æque multiplices, et ipsae inter se sunt æquales.

qualibus, fit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis magnitudinibus alia quaequam ad antecedentem.

PROPOSITIO I. (Fig. 309.)

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB , $ΓΔ$ quotcunque magnitudinum E , Z aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, dico quam multiplex est

3. Multiplex maioris maior est aequemultiplici minoris.

4. Magnitudo, cuius multiplex maior est aequemultiplici alterius, maior est altera illa magnitudine.

Quae sane ita perspicua sunt, ut axiomatum loco haberi possint. Demonstravit ea tamen Pflöiderer. in Promptuario Mathem. Lipsiensi Fascic. 7. 1798. p. 263. sqq. §§. 14–19. et in dissertatione de Dimensione circuli P. II. Tub. 1790. p. 5. not. 4. Cf. Hauber. de rationibus inter se diversis Demonstr. Tub. 1793. §. 2. Aliud autem axioma vel postulatum, quod Campanus, Clayius alique complures pariter sumere se posse putarunt, quodque ita habet:

„Quam rationem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quaecumque magnitudo proposita ad aliquam aliam: et eandem habebit quaedam alia magnitudo ad quavis magnitudinem propositam“

merito accuratiores Geometrae respuunt. Vid. Exc. ad hunc librum.

PROPOSITIO I.

Symbolice haec propositio ita effertur potest. Si sit A ...

τὸ AB τοῦ E , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB , $ΓΔ$ τῶν E , Z .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E , καὶ τὸ $ΓΔ$ τοῦ Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη ἴσα τῷ E , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ $ΓΔ$ ἴσα τῷ Z . Διηγήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ AH , HB , τὸ δὲ $ΓΔ$ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ $ΓΘ$, $ΘΔ$ · ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH , HB τῷ πλῆθει τῶν $ΓΘ$, $ΘΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E , τὸ δὲ $ΓΘ$ τῷ Z ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH , $ΓΘ$ τοῖς E , Z . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E , καὶ τὸ $ΘΔ$ τῷ Z ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB , $ΘΔ$ τοῖς E , Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E , τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB , $ΓΔ$ ἴσα τοῖς E , Z ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB , $ΓΔ$ τῶν E , Z . Ἐὰν ἄρα ἡ ὅποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον· δευτέρου ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

$r.L; B=r.M; C=r.N$ etc. r denotante numerum integram quemcunque, erit et $A+B+C$ etc. $=r(L+M+N$ etc.). Cas-
terum propositioni huic vulgaris innititur praxis multiplican-
dum compositum per multiplicatorem simplicem multiplicandi.
Nimirum, ut v. g. numerum 7364 per 8 multiplicemus, seu
ut octuplum efficiamus numeri 7364: octies sumimus primum
4 unitates, tum 6 denarios, dein 3 centenarios, denique 7

AB ipsius E , tam multiplices esse et AB , ΓA ipsarum E , Z .

Quoniam enim AB aequae multiplex est ipsius E ac ΓA ipsius Z ; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi E , tot sunt et in ΓA aequales ipsi Z . Dividatur AB quidem in magnitudines AH , HB aequales ipsi E ; ΓA vero in partes $\Gamma\Theta$, ΘA aequales ipsi Z ; erit igitur multitudo ipsarum AH , HB aequalis multitudini ipsarum $\Gamma\Theta$, ΘA . Et quoniam aequalis est AH quidem ipsi E , $\Gamma\Theta$ vero ipsi Z ; erunt et AH , $\Gamma\Theta$ aequales ipsis E , Z (I. Ax. 2.); ex eadem ratione et HB aequalis est ipsi E , et ΘA ipsi Z ; aequales igitur et HB , ΘA ipsis E , Z ; quot igitur sunt in AB aequales ipsi E , tot sunt et in AB , ΓA aequales ipsis E , Z ; quam multiplex igitur est AB ipsius E , tam multiplices erunt et AB , ΓA ipsarum E , Z . Si igitur quotcumque etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 310.)

Si prima secundae aequae sit multiplex ac tertia quartae, sit autem et quinta secundae aequae multiplex ac sexta quartae; et simul sumptae prima et quinta secundae aequae erunt multiplices ac tertia et sexta quartae.

millenarios, horumque octuplorum conficimus summam. Cf. Pfeiderer. Expos. et Dilucid. Libri V. Elem. p. 2.

PROPOSITIO H.

Symbolice haec propositio generalius ita offertur. Si sit $A=p.L$, $B=g.L$, $C=r.L$ etc. et simul $E=p.M$, $F=g.M$, $G=r.M$ etc. p , g , r denotantibus numeros integros quoscun-

Πρώτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔE τετάρτου τοῦ Z , ἔστω δὲ καὶ πέμπτου τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ $E\Theta$ τετάρτου τοῦ Z . λέγω ὅτι καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ πέμπτου τὸ ΔH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ $\Delta\Theta$ τετάρτου τοῦ Z .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῇ AB μεγέθη ἴσα τῇ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῇ ΔE ἴσα τῇ Z . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῇ BH ἴσα τῇ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῇ $E\Theta$ ἴσα τῇ Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῃ τῇ ΔH ἴσα τῇ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῃ τῇ $\Delta\Theta$ ἴσα τῇ Z ὅσα πλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔH τοῦ Γ , τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ $\Delta\Theta$ τοῦ Z καὶ συντεθέν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτου τὸ ΔH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ $\Delta\Theta$ τετάρτου τοῦ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου καὶ διῶσου τῶν ληφθέντων ἐκά-

que: erunt tam $A+B+C$ etc. $=(p+g+r$ etc.). L, quam $E+F+G$ etc. $=(p+g+r$ etc.). M. Generaliorem hanc enumerationem corollarii loco subiungit Rob. Simson. propositionem ipsam statim ita exprimit Pfeiderer, l. c. p. 5. Huic propositioni immittitur praxis numerum per multiplicatorem compositum multiplicandi. Nempe ut ex gr. numerum 5728 per 631 multiplicemus, primum quater sumimus numerum propositum 5728, tum tricies, dein sexcenties, horumque produ-

Prima enim AB secundae Γ aequae sit multiplex ac tertia AE quartae Z , sit autem et quinta BH secundae Γ aequae multiplex ac sexta $E\Theta$ quartae Z ; illo et simul sumptas primam et quintam AH secundae Γ aequae fore multiplices ac tertiam et sextam $A\Theta$ ipsius Z .

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius Γ ac AE ipsius Z ; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi Γ , tot et in AE erunt aequales ipsi Z . Ex eadem ratione et quot sunt in BH aequales ipsi Γ , tot et in $E\Theta$ erunt aequales ipsi Z ; quot igitur sunt in tota AH aequales ipsi Γ , tot et in tota $A\Theta$ aequales ipsi Z ; quam multiplex igitur est AH ipsius Γ , tam multiplex erit et $A\Theta$ ipsius Z ; et simul sumptae igitur prima et quinta AH secundae Γ aequae erunt multiplices ac tertia et sexta $A\Theta$ quartae Z . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 311.)

Si prima secundae aequae sit multiplex ac tertia quartae, sumantur autem aequae multiplices primae et tertiae; et ex aequo sumptarum utraque ttriusque ae-

ctorum particularium colligimus summam. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 3. 4.

PROPOSITIO III.

Symbolice ita: si sit $A = p \cdot L$, $I = n \cdot A$, et $E = p \cdot M$, $K = n \cdot E$, erit tam $I = (n \cdot p) \cdot L$, quam $E = (n \cdot p) \cdot M$, n et p designantibus numeros integros quoscunque, et $n \cdot p$ designante productum, quod fit ex numero p toties sumto, quot

τερον ἑκατέρου ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ A δευτέρου τοῦ B ἰσάνεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ , καὶ εἰληφθῶ τῶν A, Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ $EZ, H\Theta$. λέγω ὅτι ἰσάνεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ EZ τοῦ B καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ Δ .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ EZ τοῦ A καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ Γ ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῇ EZ ἴσα τῇ A , τοσαῦτα καὶ ἐν τῇ $H\Theta$ ἴσα τῇ Γ . Διηγήσθω τὸ μὲν EZ εἰς τὰ τῇ A μεγέθη ἴσα τὰ EK, KZ , τὸ δὲ $H\Theta$ εἰς τὰ τῇ Γ ἴσα τὰ $HA, A\Theta$ ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν EK, KZ τῇ πλῆθει τῶν $HA, A\Theta$. Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ A τοῦ B καὶ τὸ Γ τοῦ Δ ἴσον δὲ τὸ μὲν EK τῇ A , τὸ δὲ HA τῇ Γ ἰσάνεις ἄρα ἔστι πολλαπλάσιον τὸ EK τοῦ B καὶ τὸ HA τοῦ Δ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάνεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ KZ τοῦ B καὶ τὸ $A\Theta$ τοῦ Δ . Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ EK δευτέρου τοῦ B ἰσάνεις ἔστι πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ HA τετάρτου τοῦ Δ ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ KZ δευτέρου τοῦ B ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ $A\Theta$ τετάρτου τοῦ Δ καὶ συντεθέν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ EZ δευτέρου

alter n continet unitates. Huic propositioni, quod sit nA , seu $n(pL) = (n.p).L$, iunititur praxis multiplicandi numerum integrum per multiplicatorem, qui solis denariis, vel centenariis etc. constat. Nempe, ut v. g. numerum 5728 per 30 vel per 600 multiplicemus, triplo vel sextuplo numeri 5728 unum vel duo zero ad dextram adiungimus, hoc est, triplum numeri 5728 decuplicamus, sextuplum centuplicamus, sicque huius numeri. efficimus trigecuplum, sexcentuplum. Pariter

que erit multiplex, altera quidem secundae, altera vero quartae.

Prima enim A secundae B aequae sit multiplex ac tertia Γ quartae Δ , et sumantur ipsarum A , Γ aequae multiplices EZ , $H\Theta$; dico aequae esse multiplicem EZ ipsius B ac $H\Theta$ ipsius Δ .

Quoniam enim aequae est multiplex EZ ipsius A ac $H\Theta$ ipsius Γ ; quot magnitudines sunt in EZ aequales ipsi A , tot et in $H\Theta$ erunt aequales ipsi Γ . Dividatur EZ quidem in magnitudines ipsi A aequales EK , KZ , $H\Theta$ vero in magnitudines ipsi Γ aequales HA , $A\Theta$; erit aequalis multitudo ipsarum EK , KZ multitudini ipsarum HA , $A\Theta$. Et quoniam A aequae est multiplex ipsius B , ac Γ ipsius Δ ; aequalis autem EK quidem ipsi A , HA vero ipsi Γ ; aequae multiplex est EK ipsius B ac HA ipsius Δ . Ex eadem ratione aequae multiplex est KZ ipsius B ac $A\Theta$ ipsius Δ . Quoniam igitur prima EK secundae B aequae est multiplex ac tertia HA quartae Δ , est autem et quinta KZ secundae B aequae multiplex ac sexta $A\Theta$ quartae Δ ; et composita e prima et quinta nempe EZ secundae B aequae multiplex erit ac composita e

duodecuplum e. g. numeri alicuius efficimus, sumto tripli eius quadruplo, vel quadrupli triplo; Cf. Pfeiderer. l. c. p. 4. Generalius idem theorema ita exprimi et simili ratione demonstrari poterit; si sit $A \equiv mB$, $B \equiv nC$, $C \equiv pD$ etc. pariterque $a \equiv m\beta$, $\beta \equiv ny$, $\gamma \equiv p\delta$ etc. erit tam $A \equiv mnp \dots D$ quam $a \equiv mnp \dots \delta$.

Obs. Ex hac propositione sequitur etiam alia illi similis, quam Nordmark. (Lacunae in Doctr. proportionum Euclidea

τοῦ B ἰσάνις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἔκτον
τὸ $H\Theta$ τετάρτου τοῦ Δ . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ
ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον
καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον καὶ τὰ ἰσάνις πολλαπλάσια
τοῦ τε πρῶτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάνις πολλαπλάσια
τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιονοῦν πολλα-
πλασιουμένων, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληφθέντα κατάλ-
ληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον, τὸ B τὸν αὐ-
τὸν ἔχεν λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ ,
καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν A, Γ ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ
 E, Z , τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνις πολλα-
πλάσια τὰ H, Θ λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ E πρὸς τὸ
 H , οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν E, Z ἰσάνις πολλαπλάσια
τὰ K, A , τῶν δὲ H, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ¹⁾ ἰσάνις
πολλαπλάσια τὰ M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν E τοῦ
 A , τὰ δὲ Z τοῦ Γ , καὶ εἰληται τῶν E, Z ἰσάνις
πολλαπλάσια τὰ K, A ἰσάνις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον
τὸ K τοῦ A καὶ τὸ A τοῦ Γ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσά-

1) Verba ἄλλα ἃ ἔτυχεν non habent edd. Basil. et Oxon.
Ea autem necessaria esse iure censuerat Rob. Simson, in nota
ad hunc locum. Hanc viri doctissimi coniecturam confirmavit
Peyrardus, qui e Cod. a. ea textui inseruit.

animadversae Expletio in Nov. Act. Reg. Societ. Upsal. Vol.
VI. Upsalae 1799.) his verbis exhibet et demonstrat: 'si sint
(Fig. 312.) quotcunque magnitudines AL, B, C , et aliae ipsae

tertia et sexta nempe $H\Theta$ quartae A (V. 2.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 313.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; et aequae multiplices primae et tertiae ad aequae multiplices secundae et quartae, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem inter se comparatae.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , et sumantur ipsarum quidem A , Γ aequae multiplices E , Z , ipsarum vero B , Δ aliae utcunque aequae multiplices H , Θ ; dico esse ut E ad H , ita Z ad Θ .

Sumantur enim ipsarum quidem E , Z aequae multiplices K , Λ , ipsarum vero H , Θ aliae utcunque aequae multiplices M , N .

Et quoniam aequae multiplex est E ipsius A , atque Z ipsius Γ , et sumptae sunt ipsarum E , Z aequae multiplices K , Λ ; aequae igitur multiplex est K ipsius A ac Λ ipsius Γ (V. 3.). Ex eadem ratione aequae

numero aequales D , E , F , quae binae sumantur in eadem multiplicitate, sit autem perturbata earum multiplicitas, h. e. sit AL ipsius B aequae multiplex, atque E ipsius F ; similiter sit B ipsius C totuplex, quotuplex est D ipsius E : erunt ex aequo etiam aequomultiplices, seu quantuplex est AL ipsius C , tantuplex erit D ipsius F . Dem. Ponantur primo tres esse primae magnitudines. Sumatur GP ipsius C aequomultiplex,

κίς ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ M τοῦ B καὶ τὸ N τοῦ A .
 Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς
 τὸ Δ , καὶ εἴληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάνεις πολλαπλά-
 σια τὰ K, Λ , τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάνεις
 πολλαπλάσια τὰ M, N . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ K τοῦ
 M , ὑπερέχει τὸ Λ τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ
 ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν K, Λ τῶν E, Z
 ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν H, Θ
 ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ
 E πρὸς τὸ H , οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ . Εἰ ἄρα
 πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐπεὶ οὖν ἰδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ K τοῦ M ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ
 ἔλασσον, ἔλασσον δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ M τοῦ
 K , ὑπερέχει καὶ τὸ N τοῦ Λ καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ
 εἰ ἔλασσον, ἔλασσον καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ
 H πρὸς τὸ E , οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Z . Ἐκ δὲ τού-
 του φανερόν, ὅτι εἰ ἂν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ,
 καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ε.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάνεις ᾗ πολλαπλάσιον,
 ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοι-
 ποῦ ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ
 ὅλον τοῦ ὅλου.

ae est AL ipsius B, vel E ipsius F, sitque GP divisa in par-
 tes GM, MN, NP singulas ipsi C aequales; et AL in partes
 AH, HK, KL aequales ipsi B: eritque multitudo partium
 GM, MN, NP aequalis multitudini partium AH, HK, KB.

multiplex est M ipsius B ac N ipsius A . Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad A , et sumptae sunt ipsarum quidem A , Γ aequae multiplices K , A , ipsarum vero B , A aliae utcumque aequae multiplices M , N ; si K superat ipsam M , superat et A ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor erit (V. Def. 5.). Et sunt K , A ipsarum E , Z aequae multiplices, M , N vero ipsarum H , Θ aliae utcumque multiplices; est igitur ut E ad H , ita Z ad Θ (V. Def. 5.) Si igitur prima etc.

COROLLARIUM.

Quoniam igitur ostensum est, si superat K ipsam M , superare et A ipsam N ; et si aequalis sit, aequalem; et si minor, minorem esse; manifestum est, et si M superat K , superare et N ipsam A ; et si aequalis sit, aequalem; et si minor, minorem esse; et propterea ut H est ad E , ita erit Θ ad Z . Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sint, et inverse proportionales fore.

PROPOSITIO V. (Fig. 314.)

Si magnitudo magnitudinis aequae sit multiplex ac ablata ablatæ, et reliqua reliquæ aequae multiplex erit ac multiplex est tota totius.

Quum igitur sit $AH=HK=KL=B$, et $GM=MN=NP=C$; erunt AH , HK , KL , B ipsarum GM , MN , NP , C aequae multiplices, adeoque tota AL erit totius GP aequae multiplex atque AH est ipsius GM (V. 1.), vel B ipsius C , vel D

γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Ἐὰν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλήθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάνῃς πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγεθῶν ἐγὼς, τοσάνταπλάσια ἔσται καὶ τὰ παντὰ τῶν πάντων.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ AB , $ΓΔ$ ὅποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E , Z ἴσων τὸ πλήθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάνῃς πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὅσαπλάσιόν ἐστι

τεταγμένη ἀναλογία, sive simpliciter διῶον, quando fuerit (prorsus ut in Def. 18.) prima ad secundam in primis quantitatibus, ut in secundis prima ad secundam; ut autem in primis, secunda ad tertiam, ita in secundis, secunda ad tertiam, et ita deinceps, et concluditur, ut in Def. 18. dictum est. Vide V. 22. Ex Def. 20. autem διῶον τεταραγμένη, vel simpliciter τεταραγμένη ἀναλογία est, quando in primis magnitudinibus fuerit ut prima ad secundam, ita in secundis penultima ad ultimam; ut autem in primis secunda ad tertiam, ita in secundis antepenultima ad penultimam; et ut in primis tertia ad quartam, ita in secundis quae antepenultimam praecedit ad antepenultimam, et ita deinceps, et concluditur, ut in Def. 18. Vide V. 23. Ita sere Rob. Simpson. rem explicat,

AXIOMATA.

Sequentia praemittit Rob. Simpson. et ex eo Playfair.

1. Eiusdem sive aequalium aequemultiplices inter se aequales sunt.
2. Quarum eadem aequae multiplex est, vel quarum aequales sunt aequae multiplices, et ipsae inter se sunt aequales.

qualibus, fit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis magnitudinibus alia quaequam ad antecedentem,

PROPOSITIO I. (Fig. 309.)

Si sint quocunque magnitudines quocunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quocunque magnitudines AB , $ΓΔ$ quocunque magnitudinum E , Z aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, dico quam multiplex est

3. Multiplex maioris maior est aequemultiplici minoris.

4. Magnitudo, cuius multiplex maior est aequemultiplici alterius, maior est altera illa magnitudine.

Quae sane ita perspicua sunt, ut axiomatum loco haberi possint. Demonstravit ea tamen Pfeiderer. in Promptuario Mathem. Lipsiensi Fascic. 7. 1798. p. 263. sqq. §§. 14–19. et in dissertatione de Dimensione circuli P. II. Tub. 1790. p. 5. not. 4. Cf. Hauber. de rationibus inter se diversis Demonstr. Tub. 1793. §. 2. Aliud autem axioma vel postulatam, quod Campanus, Clayus alique complures pariter sumere se posse putarunt, quodque ita habet:

„Quam rationem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quaecvis magnitudo proposita ad aliquam aliam; et eandem habebit quaedam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam“

merito accuratiores Geometrae respuunt. Vid. Exc. ad hunc librum.

PROPOSITIO I.

Symbolice haec propositio ita efferrí potest. Si sit $A =$

τὸ AB τοῦ E , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB , $ΓΔ$ τῶν E , Z .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E , καὶ τὸ $ΓΔ$ τοῦ Z · ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθῃ ἴσα τῷ E , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ $ΓΔ$ ἴσα τῷ Z . Διηγήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθῃ ἴσα τὰ AH , HB , τὸ δὲ $ΓΔ$ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ $ΓΘ$, $ΘΔ$ · ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH , HB τῷ πλῆθει τῶν $ΓΘ$, $ΘΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E , τὸ δὲ $ΓΘ$ τῷ Z · ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH , $ΓΘ$ τοῖς E , Z . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E , καὶ τὸ $ΘΔ$ τῷ Z · ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB , $ΘΔ$ τοῖς E , Z · ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E , τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB , $ΓΔ$ ἴσα τοῖς E , Z · ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB , $ΓΔ$ τῶν E , Z . Ἐὰν ἄρα ἡ ὅποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον· δευτέρου ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

$r.L; B=r.M; C=r.N$ etc. r denotante numerum integram quemcunque, erit et $A+B+C$ etc. $=r(L+M+N$ etc.). Casterum propositioni huic vulgaris innitur praxis multiplicandum compositum per multiplicatorem simplicem multiplicandi. Nimirum, ut v. g. numerum 7364 per 8 multiplicemus, seu ut octuplum efficiamus numeri 7364: octies sumimus primum 4 unitates, tum 6 denarios, dein 3 centenarios, denique 7

AB ipsius E , tam multiplices esse et AB , ΓA ipsarum E , Z .

Quoniam enim AB aequae multiplex est ipsius E ac ΓA ipsius Z ; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi E , tot sunt et in ΓA aequales ipsi Z . Dividatur AB quidem in magnitudines AH , HB aequales ipsi E ; ΓA vero in partes $\Gamma\Theta$, ΘA aequales ipsi Z ; erit igitur multitudo ipsarum AH , HB aequalis multitudini ipsarum $\Gamma\Theta$, ΘA . Et quoniam aequalis est AH quidem ipsi E , $\Gamma\Theta$ vero ipsi Z ; erunt et AH , $\Gamma\Theta$ aequales ipsis E , Z (I. Ax. 2.); ex eadem ratione et HB aequalis est ipsi E , et ΘA ipsi Z ; aequales igitur et HB , ΘA ipsis E , Z ; quot igitur sunt in AB aequales ipsi E , tot sunt et in AB , ΓA aequales ipsis E , Z ; quam multiplex igitur est AB ipsius E , tam multiplices erunt et AB , ΓA ipsarum E , Z . Si igitur quotcumque etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 310.)

Si prima secundae aequae sit multiplex ac tertia quartae, sit autem et quinta secundae aequae multiplex ac sexta quartae; et simul sumptae prima et quinta secundae aequae erunt multiplices ac tertia et sexta quartae.

millenarios, horumque octuplorum conficimus summam. Cf. Pfeiderer. Expos. et Dilucid. Libri V. Elem. p. 2.

PROPOSITIO III.

Symbolice haec propositio generalius ita effertur. Si sit $A = p \cdot L$, $B = g \cdot L$, $C = r \cdot L$ etc. et simul $E = p \cdot M$, $F = g \cdot M$, $G = r \cdot M$ etc. p , g , r denotantibus numeros integros quoscun-

Πρώτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάνεις ἔστω
πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔE τετάρτου τοῦ Z , ἔστω
δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάνεις πολλα-
πλάσιον καὶ ἕκτον τὸ $E\Theta$ τετάρτου τοῦ Z . λέγω ὅτι
καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου
τοῦ Γ ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον
τὸ $\Delta\Theta$ τετάρτου τοῦ Z .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ
 Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθει
ἴσα τῷ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔE ἴσα τῷ Z . Διὰ
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ BH ἴσα τῷ Γ , το-
σαῦτα καὶ ἐν τῷ $E\Theta$ ἴσα τῷ Z . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν
ὅλῳ τῷ AH ἴσα τῷ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ $\Delta\Theta$
ἴσα τῷ Z . ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AH τοῦ Γ , το-
σαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ $\Delta\Theta$ τοῦ Z . καὶ συντεθέν
ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ
ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ
 $\Delta\Theta$ τετάρτου τοῦ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ
τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάνεις πολλαπλάσια τοῦ
πρώτου καὶ τρίτου καὶ δίσου τῶν ληφθέντων ἐκά-

que: erunt tam $A+B+C$ etc. $= (p+g+r$ etc.), L , quam
 $E+F+G$ etc. $= (p+g+r$ etc.), M . Generaliorem hanc enun-
ciationem corollarii loco subiungit Rob. Simson. propositionem
ipsam statim ita exprimit Pfeiderer, l. c. p. 3. Huic propo-
sitioni innititur praxis numerum per multiplicatorem compo-
situm multiplicandi. Nempe ut ex gr. numerum 5728 per
634 multiplicemus, primum quater sumimus numerum propo-
situm 5728, tum tricies, dein sexcenties, horumque produ-

Prima enim AB secundae Γ aequae sit multiplex ac tertia AE quartae Z , sit autem et quinta BH secundae Γ aequae multiplex ac sexta EO quartae Z ; dico et simul sumptas primam et quintam AH secundae Γ aequae fore multiplices ac tertiam et sextam AO ipsius Z .

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius Γ ac AE ipsius Z ; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi Γ , tot et in AE erunt aequales ipsi Z . Ex eadem ratione et quot sunt in BH aequales ipsi Γ , tot et in EO erunt aequales ipsi Z ; quot igitur sunt in tota AH aequales ipsi Γ , tot et in tota AO aequales ipsi Z ; quam multiplex igitur est AH ipsius Γ , tam multiplex erit et AO ipsius Z ; et simul sumptae igitur prima et quinta AH secundae Γ aequae erunt multiplices ac tertia et sexta AO quartae Z . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 311.)

Si prima secundae aequae sit multiplex ac tertia quartae, sumantur autem aequae multiplices primae et tertiae; et ex aequo sumptarum utraque utriusque ac-

torum particularium colligimus summam. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 3. 4.

PROPOSITIO III.

Symbolice ita: si sit $A \equiv p \cdot L$, $I \equiv n \cdot A$, et $E \equiv p \cdot M$, $K \equiv n \cdot E$, erit tam $I \equiv (n \cdot p) \cdot L$, quam $E \equiv (n \cdot p) \cdot M$, n et p designantibus numeros integros quoscunque, et $n \cdot p$ designante productum, quod sit ex numero p toties sumto, quot

τερον ἑκατέρου ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ A δευτέρου τοῦ B ἰσάνεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ , καὶ εἰληφθῶ τῶν A , Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ EZ , $H\Theta$. λέγω ὅτι ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ EZ τοῦ B καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ Δ .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ EZ τοῦ A καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ Γ ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῇ EZ ἴσα τῇ A , τοσαῦτα καὶ ἐν τῇ $H\Theta$ ἴσα τῇ Γ . Διηγρήσθω τὸ μὲν EZ εἰς τὰ τῇ A μεγέθη ἴσα τὰ EK , KZ , τὸ δὲ $H\Theta$ εἰς τὰ τῇ Γ ἴσα τὰ HA , $A\Theta$ ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν EK , KZ τῷ πλῆθει τῶν HA , $A\Theta$. Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ A τοῦ B καὶ τὸ Γ τοῦ Δ ἴσον δὲ τὸ μὲν EK τῇ A , τὸ δὲ HA τῇ Γ ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ EK τοῦ B καὶ τὸ HA τοῦ Δ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ KZ τοῦ B καὶ τὸ $A\Theta$ τοῦ Δ . Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ EK δευτέρου τοῦ B ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ HA τετάρτου τοῦ Δ ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ KZ δευτέρου τοῦ B ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ $A\Theta$ τετάρτου τοῦ Δ καὶ συντεθέν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ EZ δευτέρου

alter n continet unitates. Huic propositioni, quod sit nA , seu $n(pL) \leftarrow (n.p).L$, iunititur praxis multiplicandi numerum integrum per multiplicatorem, qui solis denariis, vel centenariis etc. constat. Nempe, ut v. g. numerum 5728 per 30 vel per 600 multiplicemus, triplo vel sextuplo numeri 5728 unum vel duo zero ad dextram adiungimus; hoc est, triplum numeri 5728 decuplicamus, sextuplum centuplicamus, sicque huius numeri. efficimus trigecuplum, sexcentuplum. Pariter

que erit multiplex, altera quidem secundae, altera vero quartae.

Prima enim A secundae B aequae sit multiplex ac tertia Γ quartae Δ , et sumantur ipsarum A , Γ aequae multiplices EZ , $H\Theta$; dico aequae esse multiplicem EZ ipsius B ac $H\Theta$ ipsius Δ .

Quoniam enim aequae est multiplex EZ ipsius A ac $H\Theta$ ipsius Γ ; quot magnitudines sunt in EZ aequales ipsi A , tot et in $H\Theta$ erunt aequales ipsi Γ . Dividatur EZ quidem in magnitudines ipsi A aequales EK , KZ , $H\Theta$ vero in magnitudines ipsi Γ aequales HA , $A\Theta$; erit aequalis multitudo ipsarum EK , KZ multitudini ipsarum HA , $A\Theta$. Et quoniam A aequae est multiplex ipsius B , ac Γ ipsius Δ ; aequalis autem EK quidem ipsi A , HA vero ipsi Γ ; aequae multiplex est EK ipsius B ac HA ipsius Δ . Ex eadem ratione aequae multiplex est KZ ipsius B ac $A\Theta$ ipsius Δ . Quoniam igitur prima EK secundae B aequae est multiplex ac tertia HA quartae Δ , est autem et quinta KZ secundae B aequae multiplex ac sexta $A\Theta$ quartae Δ ; et composita e prima et quinta nempe EZ secundae B aequae multiplex erit ac composita e

duodecuplum e. g. numeri alicuius efficimus, sumto tripli eius quadruplo, vel quadrupli triplo; Cf. Pfeiderer. l. c. p. 4. Generalius idem theorema ita exprimi et simili ratione demonstrari poterit; si sit $A = mB$, $B = nC$, $C = pD$ etc. pariterque $a = m\beta$, $\beta = ny$, $\gamma = p\delta$ etc. erit tam $A = mnp \dots D$ quam $a = mnp \dots \delta$.

Obs. Ex hac propositione sequitur etiam alia illi similis, quam Nordmark. (Lacunae in Doctr. proportionum Euclidea

τοῦ B ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἔπεται
τὸ $H\Theta$ τετάρτου τοῦ A . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ
ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον
καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον καὶ τὰ ἰσάνεις πολλαπλάσια
τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάνεις πολλαπλάσια
τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιονοῦν πολλα-
πλασιασμοῖον, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληφθέντα κατάλ-
ληλα.

Πρώτων γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον, τὸ B τὸν αὐ-
τὸν ἔχεν λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ ,
καὶ εἰληφθῶ τῶν μὲν A, Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ
 E, Z , τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλα-
πλάσια τὰ H, Θ λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ E πρὸς τὸ
 H , οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ .

Εἰληφθῶ γὰρ τῶν μὲν E, Z ἰσάνεις πολλαπλάσια
τὰ K, A , τῶν δὲ H, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ¹⁾ ἰσάνεις
πολλαπλάσια τὰ M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν E τοῦ
 A , τὸ δὲ Z τοῦ Γ , καὶ ἐληφται τῶν E, Z ἰσάνεις
πολλαπλάσια τὰ K, A ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον
τὸ K τοῦ A καὶ τὸ A τοῦ Γ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσά-

1) Verba ἄλλα ἃ ἔτυχεν non habent edd. Basil. et Oxon.
Ea autem necessaria esse iure censuerat Rob. Simson: in nota
ad hunc locum. Hanc viri doctissimi coniecturam confirmavit
Peyrardus, qui e Cod. a. ea textui inseruit.

animadversae Expletio in Nov. Act. Reg. Societ. Upsal. Vol.
VI. Upsalae 1799.) his verbis exhibet et demonstrat: si sint
(Fig. 312.) quotcunque magnitudines AL, B, C , et aliae ipsais

tertia et sexta nempe $H\Theta$ quartae A (V. 2.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 313.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; et aequae multiplices primae et tertiae ad aequae multiplices secundae et quartae, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem inter se comparatae.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , et sumantur ipsarum quidem A , Γ aequae multiplices E , Z , ipsarum vero B , Δ aliae utcunque aequae multiplices H , Θ ; dico esse ut E ad H , ita Z ad Θ .

Sumantur enim ipsarum quidem E , Z aequae multiplices K , Λ , ipsarum vero H , Θ aliae utcunque aequae multiplices M , N .

Et quoniam aequae multiplex est E ipsius A , atque Z ipsius Γ , et sumptae sunt ipsarum E , Z aequae multiplices K , Λ ; aequae igitur multiplex est K ipsius A ac Λ ipsius Γ (V. 3.). Ex eadem ratione aequae

numero aequales D , E , F , quae binae sumantur in eadem multiplicitate, sit autem perturbata earum multiplicitas, h. e. sit AL ipsius B aequae multiplex, atque E ipsius F ; similiter sit B ipsius C totuplex, quotuplex est D ipsius E ; erunt ex aequo etiam aequemultiplices, seu quantuplex est AL ipsius C , tantuplex erit D ipsius F . Dem. Ponantur primo tres esse quaeque magnitudines. Sumatur GP ipsius C aequemultiplex,

νις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ M τοῦ B καὶ τὸ N τοῦ A .
 Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς
 τὸ Δ , καὶ εἴληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάνις πολλαπλά-
 σια τὰ K, Λ , τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνις
 πολλαπλάσια τὰ M, N . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ K τοῦ
 M , ὑπερέχει τὸ Λ τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ
 ἐλαττον, ἐλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν K, Λ τῶν $E,$
 Z ἰσάνις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν H, Θ
 ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ
 E πρὸς τὸ H , οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ . Ἐὰν ἄρα
 πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ K τοῦ M ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ
 ἐλασσον, ἐλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ M τοῦ
 K , ὑπερέχει καὶ τὸ N τοῦ Λ καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ
 εἰ ἐλασσον, ἐλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ
 H πρὸς τὸ E , οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Z . Ἐκ δὲ τού-
 του φανερόν, ὅτι εἰς τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἢ,
 καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ε.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάνις ἢ πολλαπλάσιον,
 ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοι-
 ποῦ ἰσάνις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ
 ὅλον τοῦ ὅλου.

ac est AL ipsius B, vel E ipsius F, sitque GP divisa in par-
 tes GM, MN, NP singulas ipsi C aequales; et AL in partes
 AH, HK, KL aequales. ipsi B: eritque multitudo partium
 GM, MN, NP aequalis multitudini partium AH, HK, KB.

multiplex est M ipsius B ac N ipsius A . Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ , et sumptæ sunt ipsarum quidem A , Γ aequæ multiplices K , Λ , ipsarum vero B , Δ aliae utcunque aequæ multiplices M , N ; si K superat ipsam M , superat et Λ ipsam N ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor erit (V. Def. 5.). Et sunt K , Λ ipsarum E , Z aequæ multiplices, M , N vero ipsarum H , Θ aliae utcunque multiplices; est igitur ut E ad H , ita Z ad Θ (V. Def. 5.) Si igitur prima etc.

COROLLARIUM.

Quoniam igitur ostensum est, si superat K ipsam M , superare et Λ ipsam N ; et si æqualis sit, æqualem; et si minor, minorem esse; manifestum est, et si M superat K , superare et N ipsam Λ ; et si æqualis sit, æqualem; et si minor, minorem esse; et propterea ut H est ad E , ita erit Θ ad Z . Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sint, et inverse proportionales fore.

PROPOSITIO V. (Fig. 314.)

Si magnitudo magnitudinis æquæ sit multiplex ac ablata ablatae, et reliqua reliquæ æquæ multiplex erit ac multiplex est tota totius.

Quum igitur sit $AH=HK=KL=B$, et $GM=MN=NP=C$; erunt AH , HK , KL , B ipsarum GM , MN , NP , C æquemultiplices, adeoque tota AL erit totius GP æquemultiplex atque AH est ipsius GM (V. 1.), vel B ipsius C , vel D

Μέγεθος γὰρ τὸ AB μεγέθους τοῦ $ΓΑ$ ἰσάνεις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ $ΑΕ$ ἀφαιρέθentos τοῦ $ΓΖ$ · λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ $ΕΒ$ λοιποῦ τοῦ $ΖΔ$ ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλγῳ τὸ $ΑΒ$ ὅλου τοῦ $ΓΑ$.

Ὅσαπλάσιον γὰρ ἐστὶ τὸ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$, τοσαυταπλάσιον γεγόνετω καὶ τὸ $ΕΒ$ τοῦ $ΗΓ$.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$ (καὶ τὸ $ΕΒ$ τοῦ $ΗΓ$ · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$)¹⁾ καὶ τὸ $ΑΒ$ τοῦ $ΗΖ$ · κείναι δὲ ἰσάνεις πολλαπλάσιον τὸ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ $ΑΒ$ τοῦ $ΓΑ$ · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $ΑΒ$ ἑκατέρων τῶν $ΗΖ$, $ΓΑ$ · ἴσον ἄρα τὸ $ΗΖ$ τῷ $ΓΑ$ · κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ $ΓΖ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΗΓ$ λοιπῷ τῷ $ΑΖ$ ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ $ΕΒ$ τοῦ $ΗΓ$, ἴσον δὲ τῷ $ΗΓ$ τὸ $ΑΖ$ · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ $ΕΒ$ τοῦ $ΖΔ$. Ἰσάνεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ $ΑΒ$ τοῦ $ΓΑ$ · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $ΕΒ$ τοῦ $ΖΔ$ καὶ τὸ $ΑΒ$ τοῦ $ΓΑ$.

1) Verba, quae uncis inclusimus, desunt in edd. Basil. et Oxon. Peyrardus ea e Cod. a. addidit. Quamvis autem abesse possint, aliquid tamen ad facilius intelligendam demonstrationem facere videntur.

ipsius E . Habentur igitur tres magnitudines AL , GP , C , atque aliae ipsis numero aequales D , E , F , quarum binarum sunt in eandem multiplicitate, idque ordinate, ita nempe, ut AL et D sint ipsarum GP et E aequemultiplices, similiterque GP et E ipsarum C et F : ergo (V. 3.) erit AL ipsius C aequemultiplex ac D ipsius F . Si quatuor pluresve sint utrimque magnitudines, patet demonstrationis continuatio per iam ostensa. Q.E.D. Symbolice ita: si sit $A=mrB$, $B=rC$, pariterque $D=mrE$, $E=mrF$, erit tam $A=mr.C$, quam $D=mr.F$.

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓA aequae multiplex sit ac ablata AE ablatae ΓZ ; dico et reliquam EB reliquae $Z A$ aequae fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius ΓA .

Quam multiplex enim est AE ipsius ΓZ , tam multiplex fiat et EB ipsius ΓH .

Et quoniam aequae multiplex est AE ipsius ΓZ ac (EB ipsius $H\Gamma$; aequae igitur multiplex est AE ipsius ΓZ ac) AB ipsius HZ (V. 1.); ponitur autem aequae multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius ΓA ; aequae igitur multiplex est AB utriusque ipsarum HZ , ΓA ; aequalis igitur HZ ipsi ΓA . Communis auferatur ΓZ ; reliqua igitur $H\Gamma$ reliquae AZ est aequalis (I. Ax. 3.). Et quoniam aequae multiplex est AE ipsius ΓZ ac EB ipsius $H\Gamma$, AZ autem aequalis ipsi $H\Gamma$; aequae igitur multiplex est AE ipsius FZ ac EB ipsius $Z A$. Aequae autem ponitur multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius ΓA ; aequae igitur multiplex est EB ipsius

PROPOSITIO IV.

Symbolice haec propositio, eiusque demonstratio ita exprimi poterit. Si $A:B=C:D$, erit etiam $pA \cdot qB = pC \cdot qD$; p , q denotantibus numeros integros quosunque, unitate haud exclusa. Nam ob $A:B=C:D$, erit, quoties $npA > < rqB$, etiam $npC > < rqD$ (V. Def. 5.), adeoque ex eadem definitione $pA:qB=pC:qD$. Pfleiderer: l. c. p. 19. De demonstratione huius propositionis ex vulgari proportionalium definitione vide Excursum ad hunc librum.

Corollarium huic propositioni adiectum, ut rite observat Rob. Simson, verum quidem est, at non huc pertinet, nec legitima est, quae ex Prop. V. 4. deducitur, eius demonstratio. Nempe ostensum quidem est, si sit $K > < M$, esse etiam $A > < N$, at non ex eo, quod proportionales sint

καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB λοιποῦ τοῦ ZA ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλου τοῦ $ΓΔ$. Ἐὰν ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἦτοι ἴσα ἔσιν, ἢ ἰσάνεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB , $ΓΔ$ δύο μεγεθῶν τῶν E , Z ἰσάνεις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ AH , $ΓΘ$ τῶν αὐτῶν τῶν E , Z ἰσάνεις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ HB , $ΘΔ$ τοῖς E , Z ἦτοι ἴσα ἔσιν, ἢ ἰσάνεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

E , H , Z , Θ , id enim erat conclusio propositionis, unde in-
eptum est illud ratiocinium: Quoniam ostensum est etc. Po-
terat autem legitime, non adhibita propositione V. 4. propo-
sitio in hoc corollario contenta deduci, ut Rob. Simson. osten-
dit. Nos autem hanc reliquasque a Rob. Simson. huic libro
insertas vel adiectas propositiones exhibebimus infra in Ex-
cursu ad hunc librum, ubi et hanc vide nota B designatam.
Aliam autem propositionem meliore iure corollarii nomine
subiungit Rob. Simson., quod distinctionis causa

COR. 2.

appellabimus, quodque ita habet: si prima ad secundam ean-
dem habet rationem quam tertia ad quartam, et aequè multi-
plices primae et tertiae iuxta quamvis multiplicationem ad se-
cundam et quartam eandem rationem habebunt: et similiter
prima et tertia ad aequè multiplices quasvis secundae et quartae
eandem habebunt rationem. Quod eodem prorsus modo ac
ipsa propositio demonstratur, ut facile etiam patet, posita in
symbolica propositionis expressione, quam supra dedimus, vel
 $p=1$, vel $q=1$. Hoc corollarium ex V. 22. demonstrat Cla-

ZA ac AB ipsius TA ; et reliqua igitur EB reliquae ZA aequae multiplex erit ac multiplex est tota AB totius TA . Si igitur magnitudo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 316.)

Si duae magnitudines duarum magnitudinum, aequae multiplices sint, et ablatae quaedam earundem sint aequae multiplices; et reliquae iisdem vel aequales sunt, vel earum aequae multiplices.

Duae enim magnitudines AB , TA duarum magnitudinum E , Z aequae sint multiplices, et ablatae AH , TH earundem E , Z aequae sint multiplices; dico et reliquas HB , HA ipsis E , Z vel aequales esse, vel aequae multiplices earum.

vius, at non satis accurate. Sumit enim propositionem C (in Excursu ad hunc librum afferendam), quam non ante demonstraverat.

PROPOSITIO V.

Iure observat Rob. Simson., constructionem, quae demonstrationi in textu graeco praemittitur, depravatam videri. Nempe, ut iam Peletarius monuerat, id quod sumitur, ut EB fiat aequemultiplex ipsius TH , ac est AE ipsius TZ , coedit, ut magnitudo EB in partes aequales, quotcumque libuerit, dividatur, quod nec de rectis quidem lineis, nedum de aliis magnitudinibus ante VI. 9. docuerat Euclides. Nec ad excusationem rei sufficit, quod Peletarius observat divisionem hanc rectae EB demonstrationis causa tantum sumi, non ad usum aliquem praesentem adhiberi, quippe etiam demonstrationis causa talia non sumere solet Euclides. Accedit, quod perfacilis est alia demonstratio, quam iam Campani ex arabico facta transductio, caeterum in hac propositione valde vitiosa, innuit, et quam, praecunte Peletario et Clavio, qui tamen etiam vitiosam illam vulgarem demonstrationem habent,

Ἐστω γὰρ πρότερον τὸ HB τῷ E ἴσον λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘA τῷ Z ἴσον ἐστίν. Κείσθω γὰρ τῷ Z ἴσον τὸ ΓK .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AH τοῦ E καὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τοῦ Z , ἴσον δὲ τὸ μὲν HB τῷ E , τὸ δὲ $K\Gamma$ τῷ Z · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E καὶ τὸ $K\Theta$ τοῦ Z . Ἰσάνεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E , καὶ τὸ ΓA τοῦ Z · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $K\Theta$ τοῦ Z , καὶ τὸ ΓA τοῦ Z . Ἐπεὶ οὖν ἐκύτερον τῆς $K\Theta$, ΓA τοῦ Z ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $K\Theta$ τῷ ΓA . Κοινὸν ἀπορρήσθω τὸ $\Gamma\Theta$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $K\Gamma$ λοιπῷ τῷ ΘA ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ Z τὸ $K\Gamma$ ἐστίν ἴσον· καὶ τὸ ΘA ἄρα τῷ Z ἴσον ἐστίν. Ὡστε εἰ τὸ HB τῷ E ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘA ἴσον ἔσται τῷ Z .

Rob. Simson., praemisso propositionis enunciatō his verbis exhibet: Quam multiplex est (Fig. 315.) AE ipsius ΓZ , tam multiplex fiat AH ipsius ZA . (Hoc vero fieri potest, magnitudine ZA sibi ipsi aliquoties addita). Erit igitur (V. 1.) AE aequemultiplex ipsius ΓZ , ac EH ipsius ΓA : ponitur autem AE aequemultiplex ipsius ΓZ , ac AB ipsius ΓA : ac propterea EH ipsi AB aequalis est (V. Ax. 1.). Communis auferatur AE , reliqua igitur AH aequalis est reliquae EB . Itaque, quoniam AE aequemultiplex est ipsius ΓZ , atque AH ipsius ZA , estque AH aequalis EB ; erit AE aequemultiplex ipsius ΓZ , ac EB ipsius ZA . Aequemultiplex autem ponitur AE ipsius ΓZ , ac AB ipsius ΓA : ergo EB ipsius ZA aequemultiplex est ac AB ipsius ΓA . Quare, si etc. Symbolice propositio ita exprimetur: si sint mA' , mB quaecunque aequemultiplica magnitudinum A , B , quarum $A > B$, erit etiam $mA - mB$ idem multipulum magnitudinis $A - B$, nempe erit $mA - mB = m.(A - B)$.

Sit enim primum (Fig. 316. a.) HB ipsi E aequalis; dico et ΘA ipsi Z aequalem esse. Ponatur enim ipsi Z aequalis ΓK .

Et quoniam aequae multiplex est AH ipsius E ac $\Gamma\Theta$ ipsius Z , aequalis autem HB ipsi E , $K\Gamma$ vero ipsi Z ; aequae igitur multiplex est AB ipsius E ac $K\Theta$ ipsius Z . Aequae autem multiplex ponitur AB ipsius E ac ΓA ipsius Z ; aequae igitur multiplex est $K\Theta$ ipsius Z ac ΓA ipsius Z . Et quoniam utraque ipsarum $K\Theta$, ΓA ipsius Z aequae multiplex est; aequalis igitur est $K\Theta$ ipsi ΓA . Communis auferatur $\Gamma\Theta$; reliqua igitur $K\Gamma$ reliquae ΘA aequalis est. Sed $K\Gamma$ ipsi Z est aequalis; et ΘA igitur ipsi Z aequalis est. Quare si HB ipsi E aequalis est, et ΘA aequalis erit ipsi Z .

PROPOSITIO VI.

Rob. Simson. observat, casus posterioris demonstrationem omissam esse in textu graeco, quum tamen in versione Campani ex arab. facta utriusque casus demonstratio habeatur. Id autem eo factum arbitratur, quod in mutilata Theonis editione libri quinti huius casus nulla occurrat applicatio. Eundem tamen casum adhiberi perfectiori V. Prop. 18. demonstrationi, cui soli etiam prior casus et V. 5. inserviat. Unde ipse et huius posterioris casus demonstrationem addidit. Ego autem putaverim, omissam esse in textu graeco, qui caeterum figuram posteriori casui inservientem in omnibus editionibus habet; casus posterioris demonstrationem eo tantum, quod sit demonstrationi casus prioris simillima. Si enim casu posteriore, quam multiplex est HB ipsius E , tam multiplex sumatur $K\Gamma$ ipsius Z , reliqua prorsus eodem modo procedunt ac in casu priore, adhibita V. 2. Caeterum utriusque casus communem demonstrationem hanc tradit Clavius. Quum ex hyp. magnitudines AB , ΓA ipsarum B , Z sint aequemulti-

Ὀμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡν πολλαπλάσιον ἢ τὸ HB τοῦ E , τασανταπλάσιον ἐστὶ καὶ τὸ ΘA τοῦ Z .
 Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἐστω ἴσα μεγέθη τὰ A, B , ἄλλο δέ τι ὃ ἔνυχε μέγεθος τὸ Γ . λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν A, B .

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν A, B ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Δ, E , τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὃ ἔνυχε πολλαπλάσιον τὸ Z .

Ἐπεὶ οὖν ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ A καὶ τὸ E τοῦ B , ἴσον δὲ τὸ A τῷ B ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ E . Ἄλλο δὲ ὃ ἔνυχε τὸ Z τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Z , ὑπερέχει καὶ τὸ E τοῦ Z καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἑλαττον, ἑλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Δ, E τῶν A, B ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Z τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔνυχε πολλαπλάσιον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Γ .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

plices, erunt in AB tot magnitudines aequales ipsi E , quot in ΓA sunt aequales ipsi Z . Unde, si ex numero aequali magnitudinum, quae in $AB, \Gamma A$ continentur, dematur numerus aequalis magnitudinem, quae in $AH, \Gamma \Theta$ sunt; remanebit in HB numerus magnitudinum ipsi E aequalium aequalis numero magnitudinum ipsi Z aequalium, quae in $\Delta \Theta$ conti-

Similiter (Fig. 316. h.) ostendemus et si multiplex est HB ipsius E , aequè multiplicem fore et magnitudinem θA ipsius Z . Si igitur duae etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 317.)

Aequales magnitudines ad eandem eandem habent rationem, et eadem ad aequales.

Sint aequales magnitudines A, B , alia autem quaelibet magnitudo Γ ; dico utramque ipsarum A, B ad Γ habere eandem rationem; et Γ ad utramque ipsarum A, B .

Sumantur enim ipsarum A, B aequè multiplices A, E , ipsius vero Γ alia utcumque multiplex Z .

Quoniam igitur aequè multiplex est A ipsius A ac E ipsius B , aequalis autem A ipsi B ; aequalis igitur et A ipsi E . Alia vero Z ipsius Γ utcumque multiplex est; si igitur superat A ipsam Z , superat et E ipsam Z ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt quidem A, E ipsarum A, B aequè multiplices, ipsa vero Z ipsius Γ alia utcumque multiplex est; est igitur ut A ad Γ , ita B ad Γ (V. Def. 5.).

Dico autem et Γ ad utramque ipsarum A, B eandem habere rationem.

nentur i. e. si $HB=E$, erit etiam $\theta A=Z$; sin autem HB sit multiplex ipsius E , erit etiam θA aequè multiplex ipsius Z . Symbolice propositio haec ita exhibetur: si sit $A=pL$, $B=qL$; et $E=pM$, $F=qM$, p, q denotantibus numeros integros quoscunque, quorum prior p maior altero q : erit tam $A-B=(p-q)L$, quam $E-F=(p-q)M$, specieatim tam $A-B=L$

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δεί-
 ξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ E . ἄλλο δέ τι τὸ Z εἰ-
 ἄρα ὑπερέχει τὸ Z τοῦ Δ , ὑπερέχει καὶ τοῦ E καὶ
 εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὸ
 μὲν Z τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ , E τῶν A ,
 B ἄλλα ἃ ἐνυγεν ἰσάμει πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς
 τὸ Γ πρὸς τὸ A , οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ B . Τὰ ἴσα
 ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς ¹⁾).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ
 μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἔλαττον καὶ τὸ αὐτὸ
 πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὸ
 μείζον.

Ἐστω ἄμσα μεγέθη τὰ AB , Γ , καὶ ἔστω μείζον
 τὸ AB , ἄλλο δὲ ὃ ἐνυχε τὸ Δ · λέγω ὅτι τὸ AB πρὸς
 τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ , καὶ
 τὸ Δ πρὸς τὰ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὸ
 AB .

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ AB τοῦ Γ , κείσθω τῷ
 Γ ἴσον τὸ BE , τὸ δὴ ἔλασσον τῶν AE , EB πολ-
 λαπλασιαζόμενον ἐστὶ ποτὲ τοῦ Δ μείζον. Ἐστω
 πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB , καὶ πεπολλαπλα-
 σιάσθω τὸ AE , καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ZH
 μείζον ὃν τοῦ Δ , καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ ZH τοῦ

1) Codex a. hic addit: Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν,
 ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναπάλιν ἀνάλογον ἐστὶ.
 Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. At hoc Corollarium, quod idem dicit,
 quod Rob. Simsonis Prop. B. V. minime ex praecedente pro-
 positione consequitur: indicare tamen hanc lectionem volui-
 mus.

quam $E-F=M$, si fuerit $p-q=1$, seu $p=q+1$. Cf. Pfei-
 derer. l. c. p. 4. 5. Post hanc propositionem Rob. Simson.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, aequalem esse Δ ipsi E ; alia vero quaedam est Z ; si igitur superat Z ipsam Δ , superat Z et ipsam E ; et si aequalis, aequalis; et si minor minor. Et est Z quidem ipsius Γ multiplex; ipsae autem Δ , E ipsarum A , B aliae utcumque aequae multiplices; est igitur ut Γ ad A , ita Γ ad B (V. Def. 5.). Aequales igitur etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 318. a. b.)

Inaequalium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet quam minor; et eadem ad minorem maiorem rationem habet quam ad maiorem.

Sint inaequales magnitudines AB , Γ , et sit maior AB , alia vero utcumque Δ ; dico AB ad Δ maiorem rationem habere quam Γ ad Δ , et Δ ad Γ maiorem rationem habere quam ad AB .

Quoniam enim maior est AB ipsa Γ , ponatur ipsi Γ aequalis BE (I. 3.), minor ipsarum AE , EB multiplicata erit aliquando ipsa Δ maior (V. Def. 4.). Sit primum AE minor ipsa EB , et multiplicetur AE , et sit ipsius multiplex ZH maior ipsa Δ , et quam multiplex est ZH ipsius AE , tam multiplex fiat et addit propositiones A , B , C , D , quas vide in Excursu ad hunc librum.

PROPOSITIO VII.

Cor. Eodem modo ostenditur, aequalia ad aequalia eandem rationem habere.

AE , τοσαυταπλάσιον γεγονέντω καὶ τὸ μὲν $H\Theta$ τοῦ EB , τὸ δὲ K τοῦ Γ καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Δ , τριπλάσιον δὲ τὸ M , καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείον, ἕως οὐ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ , πρώτως δὲ μείζον τοῦ K . Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ N τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ , πρώτως δὲ μείζον τοῦ K .

Ἐπεὶ οὖν τὸ K τοῦ N πρώτως ἐστὶν ἑλαττον, τὸ K ἄρα τοῦ M οὐκ ἐστὶν ἑλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάνικς ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ EB , ἰσάνικς ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ $Z\Theta$ τοῦ AB . Ἰσάνικς δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ K τοῦ Γ . Ἰσάνικς ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $Z\Theta$ τοῦ AB , καὶ τὸ K τοῦ Γ τὸ $Z\Theta$, K ἄρα τῶν AB , Γ ἰσάνικς ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάνικς ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ EB καὶ τὸ K τοῦ Γ , ἴσον δὲ τὸ EB τῷ Γ ἴσον ἄρα καὶ τὸ K τῷ $H\Theta$. Τὸ δὲ K τοῦ M οὐκ ἐστὶν ἑλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ $H\Theta$ τοῦ M ἑλατιόν ἐστιν. Μείζον δὲ τὸ ZH τοῦ Δ ὅλον ἄρα τὸ $Z\Theta$ συναμφοτέρων τῶν Δ , M μείζον ἐστὶν. Ἀλλὰ συναμφοτέρα τὰ Δ , M τῷ N ἐστὶν ἴσα· (ἐπειδὴ περ τὸ M τοῦ Δ τριπλάσιον ἐστὶ, συναμφοτέρα δὲ τὰ Δ , M τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ N τοῦ Δ τετραπλάσιον συναμφοτέρα ἄρα τὰ M , Δ τῷ N ἴσα ἐστὶν. Ἀλλὰ τὸ $Z\Theta$ τῶν Δ , M μείζον ἐστὶν 1)· τὸ $Z\Theta$ ἄρα τοῦ N .

1) Quae uncis inclusimus e Cod. a. Peyrardus addidit. Poterant tamen egregie abesse, aut certe saltem usque ad vocem τετραπλάσιον illustrationis causa adfici.

PROPOSITIO VIII.

Rob. Simson. in nota ad hanc propositionem primo ex-

$H\Theta$ ipsius EB , ipsa vero K ipsius Γ ; et sumatur ipsius Δ dupla quidem Δ , tripla vero M , et deinceps una maior, quoad sumpta multiplex fiat ipsius Δ et primo maior ipsa K . Sumatur, et si N quadrupla ipsius Δ , et primo maior ipsa K .

Quoniam igitur K primo minor est quam N , non erit K ipsa M minor. Et quoniam aequae multiplex est ZH ipsius AE ac $H\Theta$ ipsius EB , aequae igitur multiplex est ZH ipsius AE ac $Z\Theta$ ipsius AB (V. 1.). Aequae autem multiplex est ZH ipsius AE ac K ipsius Γ ; aequae igitur multiplex est $Z\Theta$ ipsius AB ac K ipsius Γ ; ipsae $Z\Theta$, K igitur ipsarum AB , Γ aequae multiplices sunt. Rursus, quoniam aequae est multiplex $H\Theta$ ipsius EB ac K ipsius Γ , EB autem aequalis Γ ; aequalis igitur et K ipsi $H\Theta$. Sed K ipsa M non est minor; non igitur est $H\Theta$ minor quam M . Maior autem ZH ipsa Δ ; tota igitur $Z\Theta$ utraque simul Δ , M maior est. Sed utraeque simul Δ , M ipsi N sunt aequales, (quandoquidem M ipsius Δ est tripla, utraeque autem simul Δ , M ipsius Δ sunt quadruplae, est vero et N ipsius Δ quadrupla, utraeque simul igitur M , Δ ipsi N aequales sunt. Sed $Z\Theta$ ipsis Δ , M maior est); $Z\Theta$ igitur ipsam N superat. K vero ipsam N non superat. Et sunt $Z\Theta$,

plicat, cur demonstratio in textu graeco obvia non eadem constructione pro utroque casu, quem habet, uti potuerit; iure deinde illud potissimum ineptum esse dicit, quod utroque casu magnitudo K demonstrationi inserta sit, quae nulli alii rei inserviat, nisi ut demonstratio prolixior fiat. Denique ad-

ὑπερέχει, τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὰ μὲν $Z\Theta$, K τῶν AB , Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ N τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἐντυχὲ πολλαπλάσιον· τὸ AB ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι τὸ μὲν N τοῦ K ὑπερέχει, τὸ δὲ N τοῦ $Z\Theta$ οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὸ μὲν N τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ $Z\Theta$, K τῶν AB , Γ ἄλλα ἃ ἐντυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB .

Ἀλλὰ δὴ τὸ AE τοῦ EB μείζον ἐγὼ τὸ δὴ ἐλάττω τὸ EB πολλαπλασιαζόμενον ἐστὶ πρὸς τοῦ Δ μείζον. Πεπολλαπλασιάσθω· καὶ ἐστω τὸ $H\Theta$ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ EB , μείζον δὲ τοῦ Δ καὶ ὅσα πλάσιόν ἐστι τὸ $H\Theta$ τοῦ EB , τοσαυτεπλάσιον γεγόνετω καὶ τὸ μὲν ZH τοῦ AE , τὸ δὲ K τοῦ Γ . Ὅμοιως δὴ δεῖξομεν ὅτι τὰ $Z\Theta$, K τῶν AB , Γ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ N πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ , πρῶτως δὲ μείζον τοῦ ZH · ὥστε πάλιν τὸ ZH τοῦ M μὴ ἐλάττω εἶναι, μείζον δὲ τὸ $H\Theta$ τοῦ Δ ὅλον ἄρα τὸ $Z\Theta$ τῶν Δ , M τοῦτέστι τοῦ N ὑπερέχει, τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει.

dit, esse etiam tertium casum specialem, cuius mentio non facta sit in demonstratione, nempe si AE in primo, aut EB in secundo casu maior sit quam Δ , in quo sumendae sint quaecumque ipsius AE et EB aequemultiplices, v. c. duplae ipsarum. (Quia deest etiam alius adhuc casus generalis. Casus enim, quos graecus textus habet, sunt 1) si $AE < EB$ 2) si $AB > EB$. At potest etiam esse 3) $AE = EB$.) Ex his omnibus Simson. concludit, Theorem aut alium geometriae non

K ipsarum AB , Γ aequae multiplices, N vero ipsius A alia utcumque multiplex; AB igitur ad A maiorem rationem habet quam Γ ad A (V. Def. 7.).

Dico autem et A ad Γ maiorem rationem habere, quam A ad AB .

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus; N superare K , ipsam vero $Z\Theta$ non superare. Et est N quidem ipsius A multiplex, et $Z\Theta$, K ipsarum AB , Γ aliae utcumque aequae multiplices; A igitur ad Γ maiorem rationem habet quam A ad AB (V. Def. 7.).

Sed sit AE maior ipsa EB ; minor EB multiplicata, erit aliquando ipsa A maior. Multiplicetur, et sit $H\Theta$ multiplex ipsius EB , maior vero ipsa A ; et quam multiplex est $H\Theta$ ipsius EB , tam multiplex fiat ZH ipsius AE et K ipsius Γ . Similiter ostendemus $Z\Theta$, K ipsarum AB , Γ aequae multiplices esse. Et sumatur similiter N multiplex ipsius A , primo autem maior ipsa ZH ; quare rursus ZH ipsa N non minor erit, maior autem $H\Theta$ ipsa A ; tota igitur $Z\Theta$ ipsas A , M , hoc est N superat, K vero ipsam N non superat, quandoquidem ZH quae maior est ipsa $H\Theta$, hoc est ipsa K , non superat N . Et

satis peritum propositionem hanc vitiasse. Quamvis autem haec Simsonis reprehensio salis iusta esse videatur, et facile esset, superfluum illam magnitudinem K e demonstratione eliminare, noluius tamen e mera coniectura textum corrigere. Caeterum Rob. Simsonis demonstratio simplicior omnino est, et omnes casus simul complectitur. Ea symbolice expressa ita habet: si $A > B$, erit $A:C > B:C$, et $C:B > C:A$. Nempe, si magnitudinum $(A-B)$, B , ea: quae non maior est altera,

ἐπειδήπερ καὶ τὸ ZH μείζον ὃν τοῦ $H\Theta$, τουτέστι τὸ K , τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαινομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ᾧ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἐκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B .

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἐκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B .

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B .

sit $\overline{=}$ C, sumantur $2(A-B)$, et $2B$, vel generaliter $m(A-B)$,

mB : sin autem magnitudinum $(A-B)$, B ea, quae non maior est altera, sit $< C$, sive ea sit $(A-B)$, sive B ; erit aliquando aliquod eius multipulum m maius quam C , nempe vel $m(A-B) > C$, vel $mB > C$. Et quum multipulum m eius, quae non maior est altera, ponamus $> C$, erit idem multipulum alterius tanto magis pariter $> C$, i. e. erit semper tam $m(A-B) > C$, quam $mB > C$. Sit deinde omnibus casibus nC illud multipulum magnitudinis C , quod primo maius est quam mB ,

nempe sit $nC > mB$, at $(n-1)C \overline{=}$ mB , vel $mB \overline{=}$ $(n-1)C$, erit, ob $m(A-B) > C$, $m(A-B) + mB > nC$ i. e. $mA > nC$. Quum itaque $mA > nC$, at $mB < nC$, erit ex V. Def. 7. $A:C > B:C$, et $C:B > C:A$.

similiter ut in iis, quae ante diximus, absolvemus demonstrationem. Ergo inaequalium etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 319.)

Quae ad eandem eandem habent rationem, aequales inter se sunt; et ad quas eadem eandem habet rationem, illae aequales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum A, B ad Γ eandem rationem, dico aequalem esse A ipsi B .

Si enim non, non utraque ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem (V. 8.), habet autem; aequalis igitur est A ipsi B .

Habeat autem rursus Γ ad utramque A, B eandem rationem; dico aequalem esse A ipsi B .

PROPOSITIO IX.

Magis explicite hanc propositionem Rob. Simson., et ad eius exemplum Playfair. ita fere demonstrat. 1) Si $A:C=B:C$, erit $A=B$. Si enim non fuerit $A=B$, erit alterutra earum maior altera v. e. $A>B$. At tum, ut in propositione praecedente, duo numeri m, n possunt inveniri, ita ut $mA > nC$, at $mB < nC$. Quum vero ponatur $A:C=B:C$, erit (V. Def. 5.), quoties $mA > nC$, etiam $mB > nC$. Erit itaque simul $mB > nC$, et $mB < nC$, quod fieri nequit. Nequit itaque esse $A>B$, et similiter nec $B>A$, itaque $A=B$. Pariter si $C:A=C:B$, vel simili ratione immediate demonstrabitur, ut Nr. 1. esse $A=B$, quod Rob. Simson. fecit, vel, ut Playfair. docuit, ope inversionis ex Prop. B (vid. Exc. ad hunc librum) concludetur $A:C=B:C$, unde res redit ad Nr. 1.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν A , B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B . Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἐστίν. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἐστιν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ A πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἥπερ τὸ B πρὸς τὸ Γ · λέγω ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ B .

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B , ἢ ἑλαττόν. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ A τῷ B , ἐκάτερον γὰρ ἂν τῶν A , B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B . Οὐδὲ μὴν ἑλαττόν ἐστὶ τὸ A τοῦ B , τὸ A γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλαττόνα εἶχε λόγον ἥπερ τὸ B πρὸς τὸ Γ . Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἑλαττόν ἐστὶ τὸ A τοῦ B . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ A τοῦ B .

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ A · λέγω ὅτι ἑλαττόν ἐστὶ τὸ B τοῦ A .

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴσον ἐστίν, ἢ μείζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ B τῷ A , τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἐκάτερον τῶν A , B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B . Οὐδὲ μὴν μείζον ἐστὶ τὸ B τοῦ A , τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ B ἐλαττόνα

PROPOSITIO X.

Rob. Simson. ad hanc propositionem observat: „Ea, quae huius propositionis demonstratio exhibetur, in editionibus graecis et latinis aliisque, legitima non est. Verba enim:

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum A , B eandem haberet rationem (V. 8.); habet autem; aequalis igitur est A ipsi B . Quae igitur ad eandem etc. ,

PROPOSITIO X. (Fig. 320.)

Magnitudinum ad eandem rationem habentium, quae maiorem rationem habet, maior est; ad quam autem eadem maiorem rationem habet, minor est.

Habeat enim A ad Γ maiorem rationem, quam B ad Γ ; dico maiorem esse A ipsa B .

Si enim non, vel aequalis est A ipsi B , vel minor. Aequalis autem non est A ipsi B , utraque enim ipsarum A , B ad Γ eandem haberet rationem (V. 7.). Non habet vero; non igitur aequalis est A ipsi B . Sed neque minor est A ipsa B , nam A ad Γ minorem haberet rationem quam B ad Γ (V. 8.). Non habet autem, non igitur minor est A ipsa B . Ostensa autem est neque aequalis, maior igitur est A ipsa B .

Habeat autem rursus Γ ad B maiorem rationem quam Γ ad A ; dico minorem esse B ipsa A .

Si enim non, vel aequalis est, vel maior. Aequalis quidem non est B ipsi A , nam Γ ad utramque ipsarum A , B eandem haberet rationem (V. 7.). Non habet vero, non igitur aequalis est A ipsi B . Sed neque maior est B ipsa A , nam Γ ad B minorem ra-

maior eadem sive aequalis, minor de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur, ut ex Def. 5. et 7. huius libri patet. Ope igitur harum examinemus demonstrationem propositionis decimae, in qua vis ratiocinii haec est: si

λόγον εἶχεν ἥπερ πρὸς τὸ A . Οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα
μειζόν ἐστι τὸ B τοῦ A . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον,
ἐλαττόν ἄρα ἐστὶ τὸ B τοῦ A . Τῶν ἄρα πρὸς τὸ
αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἶσιν
οἱ αὐτοί.

Ἐστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ
 Γ πρὸς τὸ Δ , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E
πρὸς τὸ Z . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὐ-
τως τὸ E πρὸς τὸ Z .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A, Γ, E ἰσάνεις πολλα-
πλάσια τὰ H, Θ, K , τῶν B, Δ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν
ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ
πρὸς τὸ Δ , καὶ εἴληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάνεις πολ-
λαπλάσια τὰ H, Θ , τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσά-
νεις πολλαπλάσια τὰ M, N εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ H
τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον
καὶ εἰ ἐλαττόν, ἐλαττόν. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ
πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , καὶ εἴληπται τῶν
μὲν Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Θ, K , τῶν δὲ $\Delta,$

fuerit $A=B$, foret $A:\Gamma=B:\Gamma$, unde sumtis ipsarum A, B
quibuscunque aequemultiplicibus, et sumta quavis multiplici
ipsius Γ , si multiplex ipsius A maior fuerit multiplici ipsius
 Γ , erit (V. Def. 5.) multiplex ipsius B maior eadem multi-
plici ipsius Γ . Sed, quoniam ex hypothesis $A:\Gamma > B:\Gamma$,
erunt ex V. Def. 7. quaedam ipsarum A, B aequemultiplices,
et quaedam multiplex ipsius Γ tales, ut multiplex ipsius A
maior sit multiplici ipsius Γ , at multiplex ipsius B non maior
sit multiplici ipsius Γ : haec autem propositio directe repugnat

tionem haberet quam ad A (V. 8.). Non habet vero, non igitur maior est B ipsa A . Ostensa autem est neque aequalis, minor igitur est B ipsa A . Ipsarum igitur ad eandem etc.

PROPOSITIO XI. (Fig. 321.)

Quae eidem eadem sunt rationes, et inter se sunt eadem.

Sint enim ut A ad B ita Γ ad Δ , ut vero Γ ad Δ , ita E ad Z ; dico esse ut A ad B ita E ad Z .

Sumantur enim ipsarum A , Γ , E aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcumque aequae multiplices M , N .

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ , et sumptae sunt ipsarum A , Γ aequae multiplices H , Θ , ipsarum vero B , Δ aliae utcumque aequae multiplices M , N ; si H superat ipsam M , superat et Θ ipsam N ; et si aequalis, aequalis, et si minor, minor (V. Def. 5.). Rursus, quoniam est ut Γ ad Δ ita E ad Z , et sumptae sunt ipsarum Γ , E aequae multiplices Θ , K , ipsarum vero Δ , Z aliae utcumque aequae multiplices M ,

praecedenti, quare A non est aequalis B . Pergit demonstratio „sed neque minor est A quam B , haberet enim A ad Γ minorem rationem, quam B : atqui non habet minorem, non igitur A minor est quam B .“ Hic dicitur: haberet A ad Γ minorem rationem quam B ad Γ , sive, quod idem est, haberet B ad Γ maiorem rationem quam A ad Γ , hoc est (V. Def. 7.) forent quaedam ipsarum B , A aequae multiplices, et quaedam ipsius Γ multiplex talis, ut multiplex ipsius B maior sit multiplici ipsius Γ , at multiplex ipsius A non maior sit

Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ M , N · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ A · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ A , ὑπερέχει καὶ τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν H , K τῶν A , E ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ A , N τῶν B , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z . Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐὰν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Ἐστωσαν ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ A , B , Γ , Δ , E , Z , ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ E πρὸς τὸ Z · λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὰ A , Γ , E πρὸς τὰ B , Δ , Z .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A , Γ , E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H , Θ , K , τῶν δὲ B , Δ , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ , M , N .

multiplici ipsius Γ , et ostendendum fuit, hoc nunquam contingere posse, si sit $A:\Gamma > B:\Gamma$; demonstrandum igitur fuit, in hoc casu, multiplicem ipsius A semper superare multiplicem ipsius Γ , si aequimultiplex ipsius B eandem superet; hoc enim ostenso, manifestum esset, non posse esse $B:\Gamma > A:\Gamma$, h. e. non posse esse $A:\Gamma < B:\Gamma$. Minime autem hoc ostensum est in demonstratione propositionis decimae, sed, si decima demonstrata esset, immediate ex ea deduci posset, verum sine eius ope non facile idem ostendetur, ut demonstrationem ten-

N ; si superat Θ ipsam M , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Sed si superat Θ ipsam M , superat et H ipsam A ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor; quare et si superat H ipsam A , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt H , K ipsarum A , E aequae multiplices, A , N vero ipsarum B , Z aliae utcunque aequae multiplices; est igitur ut A ad B ita E ad Z (V. Def. 5.). Ergo eadem etc.

PROPOSITIO XII. (Fig. 322.)

Si sint quocunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quocunque magnitudines proportionales A , B , Γ , Δ , E , Z , ut A ad B ita Γ ad Δ , et E ad Z ; dico esse ut A ad B ita A , Γ , E ad ipsas B , Δ , Z .

Sumantur enim ipsarum A , Γ , E aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcunque aequae multiplices A , M , N .

tanti patebit. Quare demonstratio decimae legitima non est. Videtur autem is, qui demonstrationem decimae, quae iam habetur, posuit vice eius, quam Euclides vel Eudoxus dederat, deceptus fuisse transferendo id, quod manifestum est magnitudinibus ad rationes, magnitudinem sc. quamvis non posse simul maiorem et minorem esse alia. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur, Euclides autem eo non utitur ad ostendendum, rationes, quae eidem rationi sunt eadem, inter

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ E πρὸς τὸ Z , καὶ εἰληπται τῶν μὲν A, Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K , τῶν δὲ B, Δ, Z ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ , ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ M , καὶ τὸ K τοῦ N . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάσσον, ἐλάσσον. "Ωστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ , ὑπερέχει καὶ τὰ H, Θ, K τῶν Λ, M, N καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἐλάσσον, ἐλάσσονα. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν H καὶ τὰ H, Θ, K τοῦ A καὶ τῶν A, Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἐπειδὴ περ ἂν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάνεις πολλαπλάσια, ὁσαπλάσιόν ἐστι ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσανταπλάσια ἐστὶ καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ A καὶ τὰ Λ, M, N τοῦ B καὶ τῶν B, Δ, Z ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως τὰ A, Γ, E πρὸς τὰ B, Δ, Z . Ἐὰν ἄρα ἡ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ περ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ περ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ , τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Λ μείζονα λό-

se eadem esse, sed hoc explicite demonstrat in V. 11." Hinc Simson. aliam Prop. V. 10. demonstrationem dedit, quam

Et quoniam est A ad B ita F ad Δ et E ad Z , et sumptae sunt ipsarum A , F , E aequae multiplices H , Θ , K ; ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcunque aequae multiplices M , N ; si H superat ipsam A , superat et Θ ipsam M , et K ipsam N (V. Def. 5.); et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Quare et si superat H ipsam A , superant et H , Θ , K ipsas A , M , N ; et si aequalis, aequales; et si minor, minores. Et est H quidem et H , Θ , K ipsius A et ipsarum A , F , E aequae multiplices; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Ex eadem ratione et A et A , M , N ipsius B et ipsarum B , Δ , Z aequae sunt multiplices; est igitur ut A ad B , ita A , F , E ad B , Δ , Z (V. Def. 5.). Si igitur sint quotcunque etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 323.).

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia F ad quartam Δ , tertia vero F ad quartam Δ maiorem rationem habeat quam quinta E

eandem esse cum ea, quam Euclides vel Eudoxus dederat, nullus dubitat, quum ex ipsa definitione maioris rationis V.

γον ἔχεται ἥπερ πέμπτον τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z . λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B μείζονα λόγον ἔξει ἥπερ πέμπτον τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z . Ἐπεὶ γάρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ E πρὸς τὸ Z ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ , E ἰσάνις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ , Z ἄλλα ἃ ἔνυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ E πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Z πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ , E ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ H , Θ , τῶν δὲ Δ , Z ἄλλα ἃ ἔνυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ K , Λ , ὥστε τὸ μὲν H τοῦ K ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὅσαπλάσιον μὲν ἔστι τὸ H τοῦ Γ , τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ M τοῦ A · ὅσαπλάσιον δὲ τὸ K τοῦ Δ , τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ N τοῦ B .

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ , καὶ εἰληφται τῶν μὲν A , Γ ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ M , H , τῶν δὲ B , Δ ἄλλα ἃ ἔνυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ N , K · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ M τοῦ N , ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ K · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ H τοῦ K .

T. breviter et directe ostendatur. Ita autem habet: si $A : \Gamma > B : \Gamma$, est $A > B$ pariterque si $\Gamma : B > \Gamma : A$, erit $B < A$. Sit enim 1) $A : \Gamma > B : \Gamma$: eruntque (V. Def. 7.) quaedam ipsarum A , B aequemultiples, et ipsius Γ quaedam multiplex, ita ut multiplex quidem ipsius A superet multiplicem ipsius Γ , multiplex vero B non superet eandem. Sumantur, et sint ipsarum A , B aequemultiples mA , mB , ipsius vero Γ multiplex sit $n\Gamma$, ita ut $mA > n\Gamma$, at $mB < n\Gamma$. Est igitur $mA > mB$, adeoque $A > B$ (V. Ax. 4.). Sit 2) $\Gamma : B > \Gamma : A$,

ad sextam Z ; dico et primam A ad secundam B maiorem rationem habituram esse quam quintam E ad sextam Z .

Quoniam enim Γ ad Δ maiorem rationem habet quam E ad Z , sunt quaedam ipsarum Γ , E multiplices, ipsarum vero Δ , Z aliae utcumque aequae multiplices; ita ut ipsius Γ multiplex ipsius Δ multiplicem superet, ipsius vero E multiplex ipsius Z multiplicem non superet. Sumantur, et sint ipsarum Γ , E aequae multiplices H , Θ ; ipsarum vero Δ , Z aliae utcumque aequae multiplices K , Λ ; ita ut H quidem ipsam K superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex est H ipsius Γ , tam multiplex sit et M ipsius A ; quam vero multiplex K ipsius Δ , tam multiplex sit et N ipsius B .

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ , et sumptae sunt ipsarum A , Γ aequae multiplices M , H , ipsarum vero B , Δ aliae utcumque aequae multiplices N , K ; si superat M ipsam N , superat et H ipsam K ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Superat autem H ipsam K , superat igitur et M ipsam

erit $B < A$. Erunt enim (V. Def. 7.) quaedam $n\Gamma$, mB , $m\Lambda$ talia, ut $n\Gamma > mB$, at $n\Gamma < m\Lambda$; adeoque erit $mB < m\Lambda$, et $B < A$ (V. Ax. 4.). Atque iam, demonstrata V. 10., ut porro observat Rob. Simson., facile demonstrabitur ea propositio, quae in vulgari eius demonstratione tacite supponitur. Nempe, si $A:\Gamma > B:\Gamma$, et sumantur utcumque $m\Lambda$, mB , $n\Gamma$, sitque $mB > n\Gamma$, erit etiam $m\Lambda > n\Gamma$. Nam ob $A:\Gamma > B:\Gamma$, erit (ex V. 10.) $A > B$, adeoque $m\Lambda > mB$, unde, si $mB > n\Gamma$, tanto magis erit $m\Lambda > n\Gamma$.

ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ M τοῦ N . Τὸ δὲ Θ τοῦ A οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἐστὶ τὰ μὲν M , Θ τῶν A , E ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ N , A τῶν B , Z ἄλλα ἃ ἔνυθεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ E πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλασσον, ἑλασσον.

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ , μείζον δὲ ἔστω τὸ A τοῦ Γ . λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μείζον ἔστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ A τοῦ Γ , ἄλλο δὲ ὃ ἔνυθε μίγεσθαι τὸ B · τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Ὡς δὲ τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ · καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἑλαττόν ἐστιν· ἑλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ B · ὥστε μείζον ἔστι τὸ B τοῦ Δ .

PROPOSITIO XII.

Patet, hanc propositionem tum saltim locum habere, si magnitudines, de quibus sermo est, omnes sint eiusdem generis.

PROPOSITIO XIII.

Obs. In versione latina, monente Rob. Simson, non posuimus, ut in graeco textu est: „et multiplex F superat

N. Ipsa vero Θ ipsam A non superat; et sunt M , Θ ipsarum A , E aequae multiplices, ipsae vero N , A ipsarum B , Z aliae utcunque aequae multiplices; ergo A ad B maiorem rationem habet quam E ad Z (V. Def. 7.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 324.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia maior sit, et secunda tertia maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , maior autem sit A ipsa Γ ; dico et B ipsa Δ maiorem esse.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ , alia autem utcunque magnitudo B ; ergo A ad B maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 8.). Ut autem A ad B , ita Γ ad Δ ; et T igitur ad Δ maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 13.). Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est (V. 10.); minor igitur Δ ipsa B ; quare maior est B ipsa Δ .

multiplicem ipsius Δ etc. sed ad rem accommodatius: ita, ut *superet* etc. Caeterum Simson hoc addit

Cor. Et si prima ad secundam maiorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad sextam; similiter ostendetur, primam ad secundam maiorem rationem habere quam quintam ad sextam. (Ad hoc corollarium facile illud reducit, quod Clavius hic habet: si $A:B=C:D$, et $C:D<E:F$,

Ὅμοιως δὴ δεῖξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ B τῷ Δ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ A τοῦ Γ ; ἔλαττον ἔσται, καὶ τὸ B τοῦ Δ . Ἐὰν ἄρα πρῶτον καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάνεις πολλαπλασίον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλασίον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη ἴσα τῷ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔE ἴσα τῷ Z . Διηγήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ AH , $H\Theta$, ΘB , τὸ δὲ ΔE εἰς τὰ τῷ Z ἴσα, τὰ ΔK , $K\Lambda$, ΛE . ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH , $H\Theta$, ΘB τῷ πλῆθει τῶν ΔK , $K\Lambda$, ΛE . Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ AH , $H\Theta$, ΘB ἀλλήλοις, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΔK , $K\Lambda$, ΛE ἴσα ἀλλήλοις· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔK οὕτως τὸ $H\Theta$ πρὸς τὸ $K\Lambda$, καὶ τὸ ΘB πρὸς τὸ ΛE . ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔK οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE . Ἰσον δὲ τὸ μὲν AH

erit et $A:B < E:F$. Aliud autem, quod Clavius addit, corollarium non huc pertinet. Habetur illud infra in appendice Prop. 6.)

PROPOSITIO XIV.

Casus duos posteriores expressis verbis ita demonstrat Rob. Simson. Si $A:B = \Gamma\Delta$, sitque $\Delta = \Gamma$, erit $A:B = A:\Delta$ (V.

Similiter ostendemus et si aequalis sit A ipsi Γ , aequalem fore et B ipsi Δ ; et si minor sit A ipsa Γ , minorem fore et B ipsa Δ . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 325.)

Partes inter se comparatae eandem habent rationem quam earum aequae multiplices.

Sit enim aequae multiplex AB ipsius Γ ac AE ipsius Z ; dico esse ut Γ ad Z ita AB ad AE .

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius Γ ac AE ipsius Z ; quot in AB sunt magnitudines aequales ipsi Γ , tot sunt et in AE aequales ipsi Z . Dividatur AB in magnitudines ipsi Γ aequales AH , $H\Theta$, ΘB , AE vero in AK , KA , AE ipsi Z aequales; erit aequalis multitudo ipsarum AH , $H\Theta$, ΘB multitudini ipsarum AK , KA , AE . Et quoniam aequales sunt AH , $H\Theta$, ΘB inter se, sunt autem et AK , KA , AE aequales inter se; est igitur ut AH ad AK ita $H\Theta$ ad KA , et ΘB ad AE (V. 7.); erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes (V. 12.); est igitur ut AH ad AK ita AB ad AE . Aequalis

7.), adeoque $B=A$ (V. 9.). Sit porro $A:B=\Gamma:\Delta$, et sit $A<\Gamma$, erit $\Gamma>A$, et, quoniam $\Gamma:\Delta=A:B$, erit $\Delta>B$ per casum primum, qui est in textu graeco.

Cot. Clavius hoc addit corollarium: si $A:B=\Gamma:\Delta$, sitque $B>A$, erit et $\Delta>\Gamma$. Quod breviter ita demonstrari potest. Si $A:B=\Gamma:\Delta$, erit et inverte (Prop. B. in

πρὸς τὸ Z · καὶ ὡς ἄρα τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἢ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ E τοῦ H , ὑπερέχει καὶ τὸ Z τοῦ Θ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν E , Z τῶν A , B ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ H , Θ τῶν Γ , Δ ἄλλα ἃ ἐτύχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Δ . Ἐὰν ἄρα τέσσαρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ἢ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ AB , BE , $\Gamma\Delta$, ΔZ , ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ΔZ · λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓZ πρὸς τὸ ZA .

Εἰληφθῶ γὰρ τῶν μὲν AE , EB , ΓZ , ZA ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ $H\Theta$, ΘK , ΛM , MN · τῶν δὲ EB , ZA ἄλλα ἃ ἐτύχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ $K\Xi$, NI .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ ΘK τοῦ EB · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ HK τοῦ AB . Ἰσάνεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ ΛM

pes quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. De corollario ei vulgo, adiecto vide ad Prop. A. in Excursu ad hunc librum.

PROPOSITIO XVII.

Aliter haec propositio ita offerri potest: si quatuor magnitudines proportionales sint, et prima earum maior est, quam

portionales sint, prima autem maior sit tertia, et secunda maior erit quarta; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. 14.). Si igitur superat E ipsam H , superat et Z ipsam Θ ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt E, Z ipsarum A, B aequae multiplices, H, Θ vero ipsarum Γ, Δ aliae utcumque aequae multiplices; est igitur ut A ad Γ ita B ad Δ (V. Def. 5.). Si igitur quatuor etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 327.)

Si compositae magnitudines proportionales sint, et divisae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales $AB, BE, \Gamma\Delta, \Delta Z$, ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad ΔZ ; dico et divisae proportionales fore, ut AE ad EB ita ΓZ ad ZA .

Sumantur enim ipsarum $AE, EB, \Gamma Z, ZA$ aequae multiplices $H\Theta, \Theta K, AM, MN$; ipsarum vero EB, ZA aliae utcumque aequae multiplices KZ, NI .

Et quoniam aequae multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac ΘK ipsius EB ; aequae igitur multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac HK ipsius AB (V. 1.). Aequae autem multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac AM ipsius ΓZ ; aequae secunda, adeoque etiam (Prop. A. in Excursu ad hunc librum) tertia maior quam quarta: erit etiam excessus primae super secundam ad secundam, ut excessus tertiae super quartam ad quartam. Cf. Pfeleiderer. l. c. p. 21.

Cor. 1. Si quatuor magnitudinum A, B, C, D , binae fuerint in eadem ratione, et prima A minor quam secunda

Z ἄλλα ᾧ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ M , N · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ A · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ A , ὑπερέχει καὶ τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἴσται τὰ μὲν H , K τῶν A , E ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ A , N τῶν B , Z ἄλλα ᾧ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z . Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐὰν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Ἐστῶσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ A , B , Γ , Δ , E , Z , ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ E πρὸς τὸ Z · λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὰ A , Γ , E πρὸς τὰ B , Δ , Z .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A , Γ , E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H , Θ , K , τῶν δὲ B , Δ , Z ἄλλα ᾧ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ , M , N .

multiplici ipsius Γ , et ostendendum fuit, hoc nunquam contingere posse, si sit $A:\Gamma > B:\Gamma$; demonstrandum igitur fuit, in hoc casu, multiplicem ipsius A semper superare multiplicem ipsius Γ , si aequimultiplex ipsius B eandem superet; hoc enim ostenso, manifestum esset, non posse esse $B:\Gamma > A:\Gamma$, h. e. non posse esse $A:\Gamma < B:\Gamma$. Minime autem hoc ostensum est in demonstratione propositionis decimae, sed, si decima demonstrata esset, immediate ex ea deduci posset, verum sine eius ope non facile idem ostendetur, ut demonstrationem ten-

N ; si superat Θ ipsam M , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Sed si superat Θ ipsam M , superat et H ipsam A ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor; quare et si superat H ipsam A , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt H , K ipsarum A , E aequae multiplices, A , N vero ipsarum B , Z aliae utcunque aequae multiplices; est igitur ut A ad B ita E ad Z (V. Def. 5.). Ergo eadem etc.

PROPOSITIO XII. (Fig. 322.)

Si sint quocunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quocunque magnitudines proportionales A , B , Γ , Δ , E , Z , ut A ad B ita Γ ad Δ , et E ad Z ; dico esse ut A ad B ita A , Γ , E ad ipsas B , Δ , Z .

Sumantur enim ipsarum A , Γ , E aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcunque aequae multiplices A , M , N .

tanti patebit. Quare demonstratio decimae legitima non est. Videtur autem is, qui demonstrationem decimae, quae iam habetur, posuit vice eius, quam Euclides vel Eudoxus dederat, deceptus fuisse transferendo id, quod manifestum est magnitudinibus ad rationes, magnitudinem sc. quamvis non posse simul maiorem et minorem esse alia. Quae eadem aequalia, et inter se sunt aequalia, axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur, Euclides autem eo non utitur ad ostendendum, rationes, quae eadem rationi sunt eadem, inter

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ E πρὸς τὸ Z , καὶ εἵληπται τῶν μὲν A, Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K , τῶν δὲ B, Δ, Z ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ , ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ M , καὶ τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὡστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ , ὑπερέχει καὶ τὰ H, Θ, K τῶν Λ, M, N καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν H καὶ τὰ H, Θ, K τοῦ A καὶ τῶν Λ, Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἐπειδὴ περ ἂν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλήθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάνεις πολλαπλάσια, ὁσαπλάσιόν ἐστι ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσανταπλάσια ἐστὶ καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ A καὶ τὰ Λ, M, N τοῦ B καὶ τῶν B, Δ, Z ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως τὰ A, Γ, E πρὸς τὰ B, Δ, Z . Ἐὰν ἄρα ἡ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεῦτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ περ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεῦτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ περ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ A πρὸς δεῦτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ , τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λό-

se easdem esse, sed hoc explicite demonstrat in V. 11." Hinc Simson, aliam Prop. V. 10. demonstrationem dedit, quam

Et quoniam est A ad B ita Γ ad Δ et E ad Z , et sumptae sunt ipsarum A , Γ , E aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcunque aequae multiplices M , N ; si H superat ipsam A , superat et Θ ipsam M , et K ipsam N (V. Def. 5.); et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Quare et si superat H ipsam A , superant et H , Θ , K ipsas A , M , N ; et si aequalis, aequales; et si minor, minores. Et est H quidem et H , Θ , K ipsius A et ipsarum A , Γ , E aequae multiplices; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Ex eadem ratione et A et A , M , N ipsius B et ipsarum B , Δ , Z aequae sunt multiplices; est igitur ut A ad B , ita A , Γ , E ad B , Δ , Z (V. Def. 5.). Si igitur sint quotcunque etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 323.).

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , tertia vero Γ ad quartam Δ maiorem rationem habeat quam quinta E

eandem esse cum ea, quam Euclides vel Eudoxus dederat, nullus dubitat, quum ex ipsa definitione maioris rationis V.

γον ἔχτω ἥπερ πέμπτον τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z . λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B μείζονα λόγον ἔξει ἥπερ πέμπτον τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z .

Ἐπεὶ γάρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ E πρὸς τὸ Z · ἔστι τινα τῶν μὲν Γ , E ἰσάνεις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ E πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Z πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ , E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H , Θ , τῶν δὲ Δ , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ K , Λ , ὥστε τὸ μὲν H τοῦ K ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μὲν ἔστι τὸ H τοῦ Γ , τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ M τοῦ A · ὁσαπλάσιον δὲ τὸ K τοῦ Δ , τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ N τοῦ B .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ , καὶ εἰληπται τῶν μὲν A , Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ M , H , τῶν δὲ B , Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ N , K · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ M τοῦ N , ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ K · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ H τοῦ K .

T. breviter et directe ostendatur. Ita autem habet: si $A : \Gamma > B : \Delta$, est $A > B$ pariterque si $\Gamma : B > \Delta : A$, erit $B < A$. Sit enim 1) $A : \Gamma > B : \Delta$: eruntque (V. Def. 7.) quaedam ipsarum A , B aequemultiples, et ipsius Γ quaedam multiplex, ita ut multiplex quidem ipsius A superet multiplicem ipsius Γ , multiplex vero B non superet eandem. Sumantur, et sint ipsarum A , B aequemultiples mA , mB , ipsius vero Γ multiplex sit $n\Gamma$, ita ut $mA > n\Gamma$, at $mB < n\Gamma$. Est igitur $mA > mB$, adeoque $A > B$ (V. Ax. 4.). Sit 2) $\Gamma : B > \Delta : A$,

ad sextam Z ; dico et primam A ad secundam B maiorem rationem habituram esse quam quintam E ad sextam Z .

Quoniam enim Γ ad A maiorem rationem habet quam E ad Z , sunt quaedam ipsarum Γ , E multiples, ipsarum vero A , Z aliae utcumque aequae multiples; ita ut ipsius Γ multiplex ipsius A multiplicem superet, ipsius vero E multiplex ipsius Z multiplicem non superet. Sumantur, et sint ipsarum Γ , E aequae multiples H , Θ ; ipsarum vero A , Z aliae utcumque aequae multiples K , Λ ; ita ut H quidem ipsam K superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex est H ipsius Γ , tam multiplex sit et M ipsius A ; quam vero multiplex K ipsius A , tam multiplex sit et N ipsius B .

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad A , et sumptae sunt ipsarum A , Γ aequae multiples M , H , ipsarum vero B , A aliae utcumque aequae multiples N , K ; si superat M ipsam N , superat et H ipsam K ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Superat autem H ipsam K , superat igitur et M ipsam

erit $B < A$. Erunt enim (V. Def. 7.) quaedam $n\Gamma$, mB , mA talia, ut $n\Gamma > mB$, at $n\Gamma < mA$, adeoque erit $mB < mA$, et $B < A$ (V. Ax. 4.). Atque iam, demonstrata V. 10., ut porro observat Rob. Simson., facile demonstrabitur ea propositio, quae in vulgari eius demonstratione tacite supponitur. Nempe, si $A : \Gamma > B : \Gamma$, et sumantur utcumque mA , mB , $n\Gamma$, sitque $mB > n\Gamma$, erit etiam $mA > n\Gamma$. Nam ob $A : \Gamma > B : \Gamma$, erit (ex V. 10.) $A > B$, adeoque $mA > mB$, unde, si $mB > n\Gamma$, tanto magis erit $mA > n\Gamma$.

ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ M τοῦ N . Τὸ δὲ Θ τοῦ A οὐχ ὑπερέχει καὶ ἐστὶ τὰ μὲν M , Θ τῶν A , E ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ N , A τῶν B , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ E πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ , μείζον δὲ ἔστω τὸ A τοῦ Γ . λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μείζον ἔστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ Γ , ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχεν μέγεθος τὸ B · τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Ὡς δὲ τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ · καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἔλαττον ἐστίν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ B · ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ B τοῦ Δ .

PROPOSITIO XII.

Patet, hanc propositionem tum saltim locum habere, si magnitudines, de quibus sermo est, omnes sint eiusdem generis.

PROPOSITIO XIII.

Obs. In versione latina, monente Rob. Simson., non posuimus, ut in graeco textu est: „et multiplex Γ superat

N. Ipsa vero Θ ipsam A non superat; et sunt M , Θ ipsarum A , E aequae multiplices, ipsae vero N , A ipsarum B , Z aliae utcunque aequae multiplices; ergo A ad B maiorem rationem habet quam E ad Z (V. Def. 7.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 324.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia maior sit, et secunda tertia maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , maior autem sit A ipsa Γ ; dico et B ipsa Δ maiorem esse.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ , alia autem utcumque magnitudo B ; ergo A ad B maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 8.). Ut autem A ad B , ita Γ ad Δ ; et Γ igitur ad Δ maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 13.). Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est (V. 10.); minor igitur Δ ipsa B ; quare maior est B ipsa Δ .

multiplicem ipsius Δ etc. sed ad rem accommodatius: ita, ut superet etc. Caeterum Simson hoc addit

Cor. Et si prima ad secundam maiorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad sextam; similiter ostendetur, primam ad secundam maiorem rationem habere quam quintam ad sextam. (Ad hoc corollarium facile illud reducit, quod Clavius hic habet: si $A:B=C:D$, et $C:D < E:F$,

Ὅμοιως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾗ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ B τῷ Δ κἂν ἑλασσόν ᾗ τὸ A τοῦ Γ ; ἑλασσόν ἔσται, καὶ τὸ B τοῦ Δ . Ἐὰν ἄρα πρώτον καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάκεις πολλαπλασίον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλασίον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z · ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη ἴσα τῷ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔE ἴσα τῷ Z . Διηγήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ AH , $H\Theta$, ΘB , τὸ δὲ ΔE εἰς τὰ τῷ Z ἴσα, τὰ ΔK , $K\Lambda$, ΛE · ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH , $H\Theta$, ΘB τῷ πλῆθει τῶν ΔK , $K\Lambda$, ΛE . Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ AH , $H\Theta$, ΘB ἀλλήλοις, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΔK , $K\Lambda$, ΛE ἴσα ἀλλήλοις· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔK οὕτως τὸ $H\Theta$ πρὸς τὸ $K\Lambda$, καὶ τὸ ΘB πρὸς τὸ ΛE · ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔK οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE . Ἰσον δὲ τὸ μὲν AH

erit et $A:B < E:F$. Aliud autem, quod Clavius addit, corollarium non huc pertinet. Habetur illud infra in appendice Prop. 6.)

PROPOSITIO XIV.

Casus duos posteriores expressis verbis ita demonstrat Rob. Simson. Si $A:B = \Gamma\Delta$, sitque $A = \Gamma$, erit $A:B = A:\Delta$ (V.

Similiter ostendemus et si aequalis sit A ipsi Γ , aequalem fore et B ipsi Δ ; et si minor sit A ipsa Γ , minorem fore et B ipsa Δ . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 325.)

Partes inter se comparatae eandem habent rationem quam earum aequae multiplices.

Sit enim aequae multiplex AB ipsius Γ ac ΔE ipsius Z ; dico esse ut Γ ad Z ita AB ad ΔE .

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius Γ ac ΔE ipsius Z ; quot in AB sunt magnitudines aequales ipsi Γ , tot sunt et in ΔE aequales ipsi Z . Dividatur AB in magnitudines ipsi Γ aequales AH , $H\Theta$, ΘB , ΔE vero in ΔK , $K\Lambda$, ΔE ipsi Z aequales; erit aequalis multitudo ipsarum AH , $H\Theta$, ΘB multitudini ipsarum ΔK , $K\Lambda$, ΔE . Et quoniam aequales sunt AH , $H\Theta$, ΘB inter se, sunt autem et ΔK , $K\Lambda$, ΔE aequales inter se; est igitur ut AH ad ΔK ita $H\Theta$ ad $K\Lambda$, et ΘB ad ΔE (V. 7.); erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes (V. 12.); est igitur ut AH ad ΔK ita AB ad ΔE . Aequalis

7.), adeoque $B=A$ (V. 9.). Sit porro $A:B=\Gamma:\Delta$, et sit $A<\Gamma$, erit $\Gamma>A$, et, quoniam $\Gamma:\Delta=A:B$, erit $\Delta>B$ per casum primum, qui est in textu graeco.

Cor. Clavius hoc addit corollarium: si $A:B=\Gamma:\Delta$, sitque $B>A$, erit et $\Delta>\Gamma$. Quod breviter ita demonstrari potest. Si $A:B=\Gamma:\Delta$, erit et inverse (Prop. B. in

τῷ Γ , τὸ δὲ ΔK τῷ Z · ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE . Τὰ ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ᾖ.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ A, B, Γ, Δ , ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ · λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔστιν, ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Δ .

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν A, B ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ E, Z , τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ E τοῦ A καὶ τὸ Z τοῦ B , τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τῶν αὐτῶν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z . Ὡς δὲ τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ · καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z . Πάλιν, ἐπεὶ τὰ H, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E

Excursu ad hunc librum) $B : A = \Delta : \Gamma$, unde ex V. 14. constat propositum.

PROPOSITIO XV.

Obs. Per partes in hac propositione intelliguntur partes aliquotae (cf. dicta ad V. Def. 2.). Asserit itaque haec propositio, esse $A : B = pA : pB$, vel $\frac{1}{p} A : \frac{1}{p} B = A : B$. Addi autem potest, quod habet Pflaiderer. (Exposit. et Dilucid. libri V.

autem AH ipsi Γ , AK vero ipsi Z ; est igitur ut Γ ad Z ita AB ad AE . Ergo partes etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 326.)

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ , ut A ad B ita Γ ad Δ ; dico et alterne proportionales esse, ut A ad Γ ita B ad Δ .

Sumantur enim ipsarum A, B aequae multiplices E, Z , ipsarum vero Γ, Δ aliae utcunque aequae multiplices H, Θ .

Et quoniam aequae multiplex est E ipsius A ac Z ipsius B ; partes autem inter se comparatae eandem habent rationem, quam earum aequae multiplices (V. 15.); ergo ut A ad B ita E ad Z . Ut autem A ad B ita Γ ad Δ ; ergo ut Γ ad Δ ita E ad Z (V. 11.). Rursum, quoniam H, Θ ipsarum Γ, Δ aequae multiplices sunt; est igitur ut Γ ad Δ ita H ad Θ (V. 15.). Ut autem Γ ad Δ ita E ad Z ; ergo ut E ad Z ita H ad Θ (V. 11.). Si autem quatuor magnitudines pro-

§. 45.), etiam partes aequaliquantas eandem rationem habere, quam magnitudines ipsas. Sit nempe $p.R=A$, $p.S=B$, seu $R=\frac{1}{p}A$, $S=\frac{1}{p}B$, erit (ex V. 15.) $R:S=pR:pS$, vel $R:S=A:B$; pariterque (ex V. 15.) $R:S=mR:mS$, seu $R:S=\frac{m}{p}A:\frac{m}{p}B$, unde (V. 11.) $\frac{m}{p}A:\frac{m}{p}B=A:B$.

PROPOSITIO XVI.

Obs. Applicari potest haec propositio tantum, ubi om-

πρὸς τὸ Z καὶ ὡς ἄρα τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἢ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ E τοῦ H , ὑπερέχει καὶ τὸ Z τοῦ Θ καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν E, Z τῶν A, B ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ H, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἃ ἐτύχευ ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Δ . Ἐὰν ἄρα τέσσαρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ἢ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ $AB, BE, \Gamma A, \Delta Z$, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ ΓA πρὸς τὸ ΔZ · λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓZ πρὸς τὸ ZA .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν $AE, EB, \Gamma Z, ZA$ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ $H\Theta, \Theta K, \Lambda M, MN$ · τῶν δὲ EB, ZA ἄλλα ἃ ἐτύχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ $K\Xi, \Pi\Pi$.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ ΘK τοῦ EB · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ HK τοῦ AB . Ἰσάνεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ ΛM

nes quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. De corollario ei vulgo adiecto vide ad Prop. A. in Excursu ad hunc librum.

PROPOSITIO XVII.

Aliter haec propositio ita efferni potest: si quatuor magnitudines proportionales sint, et prima earum maior est, quam

portionales sint, prima autem maior sit tertia, et secunda maior erit quarta; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. 14.). Si igitur superat E ipsam H , superat et Z ipsam Θ ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt E, Z ipsarum A, B aequae multiplices, H, Θ vero ipsarum Γ, Δ aliae utcumque aequae multiplices; est igitur ut A ad Γ ita B ad Δ (V. Def. 5.). Si igitur quatuor etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 327.)

Si compositae magnitudines proportionales sint, et divisae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales $AB, BE, \Gamma\Delta, \Lambda Z$, ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad ΛZ ; dico et divisae proportionales fore, ut AE ad EB ita ΓZ ad ZA .

Sumantur enim ipsarum $AE, EB, \Gamma Z, ZA$ aequae multiplices $H\Theta, \Theta K, \Lambda M, MN$; ipsarum vero EB, ZA aliae utcumque aequae multiplices $KZ, N\Gamma$.

Et quoniam aequae multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac ΘK ipsius EB ; aequae igitur multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac HK ipsius AB (V. 1.). Aequae autem multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac ΛM ipsius ΓZ ; aequae secunda, adeoque etiam (Prop. A. in Excursu ad hunc librum) tertia maior quam quarta: erit etiam excessus primae super secundam ad secundam, ut excessus tertiae super quartam ad quartam. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 21.

Cor. 1. Si quatuor magnitudinum A, B, C, D , binae fuerint in eadem ratione, et prima A minor quam secunda

τοῦ ΓΖ· ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ
 ΑΒ, καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ
 πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ,
 ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ
 ΑΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάνεις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ
 τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλα-
 πλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ· τὰ
 ΗΚ, ΑΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια.
 Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ
 ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ
 ΕΒ ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ
 συντεθέν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον
 καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς
 τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἰληπται τῶν
 μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΑΝ,
 τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλά-
 σια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ
 εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερέχεται δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ,
 καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ
 τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἄλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΑΝ
 τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει
 καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΘΗ τοῦ
 ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὴ δεί-
 ξομεν ὅτι καὶν ἴσον ἢ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ
 τὸ ΑΜ τῷ ΝΠ· καὶν ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ

B, adeoque etiam (Prop. A in Excursu) tertia C minor quam
 quarta D: erit etiam inverse (Prop. B in Excursu) $B:A=D:C$,
 ubi iam $B>A$, et $D>C$, adeoque $B-A:A=D-C:C$.
 Cf. Pflciderer. l. c. p. 23.

igitur multiplex est HK ipsius AB ac AM ipsius IZ (V. 11.). Rursus, quoniam aequae multiplex est AM ipsius IZ ac MN ipsius ZA ; aequae igitur multiplex est AM ipsius IZ ac AN ipsius IA (V. 1.). Aequae autem multiplex erat AM ipsius IZ ac HK ipsius AB ; aequae igitur est multiplex HK ipsius AB ac AN ipsius IA (V. 11.); ipsae HK , AN igitur ipsarum AB , IA aequae sunt multiplices. Rursus, quoniam aequae multiplex est OK ipsius EB ac MN ipsius ZA ; est autem et KE ipsius EB aequae multiplex ac NH ipsius ZA ; et composita OE ipsius EB aequae est multiplex ac MH ipsius ZA (V. 2.). Et quoniam est ut AB ad BE ita IA ad AZ , et sumptae sunt ipsarum AB , IA aequae multiplices HK , AN , ipsarum vero EB , ZA aliae utcumque aequae multiplices OE , MH ; si superat HK ipsam OE , superat et AN ipsam MH ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Superet autem HK ipsam OE , et communi ablata OK , superat igitur et HO ipsam KE . Sed si superat HK ipsam OE , superat et AN ipsam MH ; superat igitur et AN ipsam MH ; et communi MN ablata, superat et AM ipsam NH ; quare si superat HO ipsam KE , superat et AM ipsam NH . Similiter ostendemus et si aequalis sit HO ipsi KE , aequalem fore et AM ipsi NH ; et si minor, minorem. Et sunt HO , AM ipsarum AE , IZ aequae multiplices, KE , NH vero ipsarum EB , ZA aliae utcumque

Cor. 2. Generatim igitur, si duae magnitudines inaequales A et B eandem mutuo habeant rationem, quam aliae duae inaequales C et D : differentia quoque duarum priorum erit ad earundem minorem, uti differentia duarum posteriorum

μὲν $HΘ$, $ΛΜ$ τῶν $ΑΕ$, $ΓΖ$ ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ $ΚΞ$, $ΝΠ$ τῶν $ΕΒ$, $ΖΔ$ ἄλλα ᾧ ἐτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$ οὕτως τὸ $ΓΖ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΓΖ$, $ΖΔ$, ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$ οὕτως τὸ $ΓΖ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$. λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$.

Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$, ἔσται ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$, ἤτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $ΔΖ$, ἢ πρὸς μείζον.

Ἐστω πρότερον πρὸς ἑλασσόν τὸ $ΔΗ$. Καὶ ἐπαί ἔστιν ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΔΗ$, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἔστιν ὥστε καὶ διακριθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$, οὕτως τὸ $ΓΗ$ πρὸς τὸ $ΗΔ$. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$ οὕτως τὸ $ΓΖ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$, καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΓΗ$ πρὸς τὸ $ΗΔ$ οὕτως τὸ

rum ad ipsam minorem; vel etiam inverse (Prop. B in Ex-
cursu), minor duarum priorum erit ad ipsarum differentiam,
uti minor duarum posteriorum ad earundem differentiam. Bre-
viter, si $A : B = C : D$, erit etiam *dividendo*

vel *divisim* $A - B : B = C - D : D$, seu $B : A - B = D : C - D$

vel $B - A : A = D - C : C$, seu $A : B - A = C : D - C$.

Cf. Pfleiderer. l. c.

aeque multiplices; est igitur ut AE ad EB ita FZ ad ZA (V. Def. 5.). Si igitur compositae etc.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 238.)

Si divisae magnitudines proportionales sint, et compositae proportionales erunt.

Sint divisae magnitudines proportionales AE , EB , FZ , ZA ut AE ad EB ita FZ ad ZA ; dico et compositas proportionales fore, ut AB ad BE ita FA ad ZA .

Si enim non est ut AB ad BE ita FA ad ZA ; erit ut AB ad BE ita FA , vel ad minorem ipsa AZ , vel ad maiorem.

Sit primum ad minorem AH . Et quoniam est ut AB ad BE ita FA ad AH , compositae magnitudines proportionales sunt; quare et divisae proportionales erunt (V. 17.); est igitur ut AE ad EB ita FH ad HA . Ponitur autem et ut AE ad EB ita FZ ad ZA ; ut igitur FH ad HA ita FZ ad ZA (V. 11.). Maior autem prima FH tertia FZ ; maior igitur et secunda

PROPOSITIO XVIII.

Obs. Ita sane satis breviter demonstraretur V. 18. dummodo sumere liceat propositis tribus magnitudinibus, quarum duae saltem sint eiusdem generis, quartam semper existere ipsis proportionalem. Verum enim vero, quamvis Clavius id pro axioma sumi posse censeret, dudum tamen Saccherius in Euclide ab omni naevo vindicato p. 111. sq. indecorum huic assumpto naevum inesse confessus est, cui quidem moderi ille,

ΓZ πρὸς τὸ $Z\Delta$. Μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓH τοῦ τρίτου τοῦ ΓZ · μείζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ $H\Delta$ τοῦ τετάρτου τοῦ $Z\Delta$. Ἀλλὰ καὶ ἑλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς ἑλασσον τοῦ $Z\Delta$. Ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διηρημένα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Ἐὰν ἡ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ AE πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓZ · λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ EB πρὸς λοιπὸν τὸ $Z\Delta$ ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ · καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ BA πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸ ΓZ . Καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ BE πρὸς τὸ EA οὕτως τὸ ΔZ πρὸς τὸ $Z\Gamma$, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ BE πρὸς τὸ ΔZ οὕτως

at ex Rob. Simsonis et Pfsleidereri iudicio irrito prorsus con-
pato tentavit. In eo autem cum Saccherio consentit Rob.
Simson., haud legitimam esse, et a genio Euclidis abhorrere,
quae vulgo in Elementis habetur, propositionis huius demon-
strationem. Nunquam enim Euclidem aliquid in demonstra-
tione propositionis sumere, quod non prius ostenderit, saltim
quod existere posse non perspicuum sit; ope enim proposi-
tionis incertae conclusionem certam elici non posse. Aliam
itaque demonstrationem substituit Simson., quam, quamvis
proximiorē, legitimam et Euclidis genio magis conformem
esse inde maxime concludit, quod, pariter ac Prop. 17. de-

HA quarta *ZA*. (V. 14.). Sed, et minor, quod fieri nequit; non igitur est ut *AB* ad *BE* ita *ΓΔ* ad minorem ipsa *ZA*. Similiter utique ostendemus neque ad maiorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisae etc.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 329.)

Si sit ut, tota ad totam ist ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota *AB* ad totam *ΓΔ* ita ablata *AE* ad ablatam *ΓZ*; dico et reliquam *EB* ad reliquam *ZA* fore ut tota *AB* ad totam *ΓΔ*.

Quoniam enim est ut *AB* ad *ΓΔ* ita *AE* ad *ΓZ*; et alterne erit ut *BA* ad *AE* ita *ΔΓ* ad *ΓZ* (V. 16.). Et quoniam compositae magnitudines proportionales sunt, et divisae proportionales erunt (V. 17.); ut igitur *BE* ad *EA* ita *ΔZ* ad *ZΓ*; et alterne (V. 16.), ut *BE* ad *ΔZ* ita *EA* ad *ZΓ*. Ut autem *AE* ad monstratur ope Prop. 1. et 2. huius libri, ita in sua hac demonstratione Propositionis 18. tum Prop. 5. tum uterque casus V. Prop. 6. adhibeantur, quae quidem propositionis conversae sint primae et secundae, neque ulli propositioni huius libri, ut eum nunc habemus, demonstrandae inserviant, quin nulli praeterquam huic 18. inservire possint. Simsonis demonstratio, quam brevitatis causa symbolice expressam hic sistimus, haec est. Si fuerit $A:B=C:D$, erit etiam componendo $A+B:B=C+D:D$. Sumantur enim aequae multipla quaecunque magnitudinum *B*, *D*, pariterque magnitudinum ($A+B$), ($C+D$), v. c. mB , mD , $m(A+B)$, $m(C+D)$, pariterque aliae quae-

τὸ EA πρὸς τὸ $ZΓ$. Ὡς δὲ τὸ AE πρὸς τὸ $ΓΖ$ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $ΓΔ$ · καὶ λοιπὸν, ἄρα τὸ EB πρὸς λοιπὸν AZ ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $ΓΔ$. Ἐὰν ἄρα ἦ καὶ τὰ ἐξῆς·

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $ΓΔ$ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ $ZΔ$ · καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ZΔ$ · συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ $ΔΓ$ πρὸς τὸ $ΓΖ$, καὶ ἐστὶν ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται ¹⁾. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1) Ita hunc locum habent edd. Oxon. et Basil., cum quibus teste Peyrardo consentit Cod. a. Peyrardus ex ingenio, ut videtur, locum ex Gregorii quoque sententia corruptissimum nec ope veterum exemplarium restituendum ita mutavit: καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $ΓΔ$ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ $ΓΖ$ · καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΓΖ$ · συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ $ΔΓ$ πρὸς τὸ $ZΔ$, καὶ ἐστὶν ἀναστρέψαντι κ. τ. λ. Quamvis autem fateamur, lectionem receptam vitiosam esse et omnino corollarium hoc non huc pertinere, nec eius demonstrationem, qua ad V. 16. recurritur legitimam esse, quoniam ita contra, ac res est, haec propositio tantum ad quatuor magnitudines eiusdem generis pertinere videretur (Cf. Clavius, Rob. Simson., Pfeleiderer. ad hunc locum) nolimus tamen Peyrardi lectiones, nulla mssptorum auctoritate nixas, in textum recipere, praesertim quum vitia vulgaris lectionis hac ratione non tollantur. Caeterum Edit. Basileensis aliud adhuc hic additamentum habet, quod, cum prorsus non huc pertineat, nec omnino ullius momenti sit, cum edd. Oxon. et Paris. omisimus.

cunque aequemultiplices magnitudinum B, D v. c. rB, rD , eritque vel $r > m$, vel $r = m$, vel $r < m$. Sit 1) $r < m$, adeo-

ΓZ ita posita est tota AB ad totam ΓA ; et reliqua igitur EB ad reliquam AZ erit ut tota AB ad totam ΓA (V. 11.). Si igitur sit etc.

COROLLARIUM.

Et quoniam ostensum est ut AB ad ΓA ita EB ad AZ ; et alterne (V. 16.) ut AB ad BE ita ΓA ad AZ ; compositae igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est, ut AB ad AE ita ΓA ad ΓZ , et est per conversionem. Ex hoc manifestum est, si compositae magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

que $rB \lessdot mB$, et $rD \lessdot mD$. Quum igitur $m(A+B) > mB$ (V. Ax. 3.), erit etiam, vel tanto magis $m(A+B) > rB$, eodemque modo $m(C+D) > rD$, adeoque $A+B : B = C+D : D$ (V. Def. 5.). Sit autem 2) $r > m$, adeoque $rB > mB$, $rD > mD$, et, si ab aequomultiplis magnitudinum $A+B$, $C+D$, nempe a $m(A+B)$, $m(C+D)$ auferantur aequomultipla magnitudinum B , D , nempe mB , mD , relinquentur aequomultipla mA , mC magnitudinum A , B (V. 5.). Si autem a rB auferatur mB , pariterque a rD auferatur mD , relinquentur $(r-m)B$, $(r-m)D$, eritque vel $(r-m)B = B$, et simul $(r-m)D = D$; vel $(r-m)B = nB$, et simul $(r-m)D = nD$ (V. 6.). Sit a) $(r-m)B = B$, et $(r-m)D = D$. Quoniam igitur $A : B = C : D$, erit etiam V. 4. Cor. a. $mA : B = mC : D$ i. e. $mA : (r-m)B = mC : (r-m)D$. Hinc, si $mA > (r-m)B$, erit etiam $mC > (r-m)D$ (Prop. A. in Excursu ad hunc librum.) Sit autem b) $(r-m)B = nB$, adeoque etiam $(r-m)D = nD$. Quoniam igitur $A : B = C : D$, erit, quoties $mA > nB$, etiam $mC > nD$ i. e. iunctim iam sumtis casibus a et b, quoties

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ἡ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, διῶσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἔκτου μείζον ἔσται καὶ ἂν ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , διῶσου δὲ μείζον ἔστω τὸ A τοῦ Γ · λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μείζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ Γ , ἄλλο δὲ τι τὸ B , τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἔλαττον· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ E καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ E μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Z πρὸς τὸ E . Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον μείζον ἐστὶ μείζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Z . Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z · κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα ἢ καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἡ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ

$mA > (r-m)B$, etiam $mC > (r-m)D$, adeoque quoties $mA + mB > rB$, etiam $mC + mD > rD$, vel, quo-

PROPOSITIO XX. (Fig. 330.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione, ex aequo autem prima tertia maior sit, et quarta sexta maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, Γ , et aliae ipsis aequales multitudine A, E, Z , binae sumptae in eadem ratione, ut A ad B ita A ad E , ut vero B ad Γ ita E ad Z , ex aequo autem maior sit A ipsa Γ ; dico et A ipsa Z maiorem fore; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ , alia autem quaedam B , maior vero ad eandem maiorem rationem habet quam minor (V. 8.); habebit A ad B maiorem rationem quam Γ ad B . Sed ut A ad B ita A ad E , ut vero Γ ad B per inversionem ita Z ad E et A igitur ad E maiorem habet rationem quam Z ad E (V. 13.). Ad eandem autem rationem habentium, maiorem rationem habens maior est (V. 10.); maior igitur est A ipsa Z . Similiter ostendemus, et si A aequalis sit ipsi Γ , aequalem fore et A ipsi Z ; et si minor, minorem. Si igitur sint etc.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 331.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae et in eadem ratione, sit

tiēs $m(A+B) > < rB$, erit etiam $m(C+D) > < rD$, adeoque etiam casu 2. erit $A+B : B = D+D : D$. Eodem modo de-

τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, διῶσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτου μείζον ἔσται κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πληθὺς τὰ Δ, E, Z σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , διῶσου δὲ τὸ A τοῦ Γ μείζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μείζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ Γ , ἄλλο δὲ τι τὸ B · τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B ἀνάπαλιν οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ E ἄρα πρὸς τὸ Z μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ E πρὸς τὸ Δ . Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο· ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Z τοῦ Δ · μείζον ἐστὶ ἄρα τὸ Δ τοῦ Z . Ὀμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z · κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ἢ τρία καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Ἐὰν ἢ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πληθὺς σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διῶσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

1) Rectius ita e Cod. a. legit Peyrardus, quum in edd. Oxon. et Basil. habeatur: ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον, ἴσον· δηλονότι κἂν ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z .

monstratur, esse etiam $A+B:A=C+D:C$, unde V. Prop. 13. generalius ita enunciari potest: si quatuor magnitudines

autem perturbata earum proportio, ex aequo autem prima tertia maior sit, et quarta sexta maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A , B , Γ , et aliae ipsis aequales multitudine Δ , E , Z , binae sumptae et in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut A ad B ita E ad Z , ut vero B ad Γ ita Δ ad E , ex aequo autem A ipsa Γ maior sit; dico et Δ ipsa Z maiorem fore; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ , alia vero quaedam B ; A ad B maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 8.). Sed in A ad B ita E ad Z , ut vero Γ ad B per inversionem ita E ad Δ (Prop. B.); quare et E ad Z maiorem rationem habet quam E ad Δ (V. 13.). Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est (V. 10.); minor igitur est Z ipsa Δ ; maior est igitur Δ ipsa Z . Similiter ostendimus et si aequalis sit A ipsi Γ , aequalem fore et Δ ipsi Z ; et si minor, minorem. Si igitur tres etc.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 332.)

Si sint quotcunque magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione; et ex aequo in eadem ratione erunt.

fuerint proportionales; summa quoque duarum priorum erit ad alterutram earum, uti summa duarum posteriorum erit ad eam harum, quae priori in proportionis assumptae ordine responderet. Cf. Pfeleiderer. l. c. p. 26.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z · λέγω ὅτι καὶ δίσοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z .

Εἰληφθῶ γὰρ τῶν μὲν A, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ , τῶν δὲ B, E ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ , καὶ ἔτι τῶν Γ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , καὶ εἰληπται τῶν μὲν A, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ , τῶν δὲ B, E ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ · ἔστιν ἄρα ὡς τὸ H πρὸς τὸ K οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ . Διὰ τὰ αὐτὰ θὴ καὶ ὡς τὸ K πρὸς τὸ M οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ N . Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ H, K, M , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, N σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δίσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον,

PROPOSITIO XIX.

Symbolice ita: si $A:B=A-C:B-D$, erit etiam $A:B=C:D$, ubi patet, eiusdem generis esse magnitudines A, B, C, D . Addit hic Rob. Simson. sequens Cor. a. Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: erit et reliqua ad reliquam ut ablata ad ablatam, hoc enim in ipsa demonstratione ostensum est. Illud autem Corollarium, quod vulgo huic propositioni adiungitur, quodque, ne quid textui deesse videretur, et nos in textu posuimus, non huc pertinere, iam in variantibus lectionibus diximus. Legitime autem illud demonstratum est infra in Excursu ad hunc librum Prop. E.

Sint quotcunque magnitudines A, B, Γ , et aliae ipsis aequales multitudine Δ, E, Z , binae sumptae in eadem ratione, ut A ad B ita Δ ad E , ut B vero ad Γ ita E ad Z ; dico et ex aequo in eadem ratione fore, ut A ad Γ ita Δ ad Z .

Sumantur enim ipsarum A, Δ aequae multiplices H, Θ , ipsarum vero B, E aliae utcunque aequae multiplices K, Λ , et insuper ipsarum Γ, Z aliae utcunque aequae multiplices M, N .

Et quoniam est ut A ad B ita Δ ad E , et sumptae sunt ipsarum A, Δ aequae multiplices H, Θ , ipsarum vero B, E aliae utcunque aequae multiplices K, Λ ; est igitur ut H ad K ita Θ ad Λ (V. 4.). Ex eadem ratione et ut K ad M ita Λ ad N . Et quoniam tres magnitudines sunt H, K, M , et aliae ipsis aequales multitudine Θ, Λ, N binae sumptae in eadem ratione; ex aequo igitur si superat H ipsam M , superat et Θ ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. 20.). Et sunt H, Θ ipsarum A ,

PROPOSITIO XX.

Propositionis huius demonstrationem magis explicitam dedit Rob. Simson, quae ita habet: si sit $A:B=D:E$, et $B:C=E:F$, sit autem $A>C$, erit ex aequo $D>F$. Sit enim 1) $A>C$, eritque $A:B>C:B$ (V. 8.), adeoque, ob $A:B=D:E$, erit etiam $D:E>C:B$ (V. 13.). At $F:E=C:B$ (Prop. B.), adeoque etiam $D:E>F:E$ (V. 13.), unde $D>F$ (V. 10.). Sit 2) $A=C$, erit et $D=F$. Nam ob $A=C$, erit $A:B=C:B$ (V. 7.). Est autem $A:B=D:E$, et $C:B=F:E$ (Prop. B.), unde $D:E=F:E$ (V. 11.), adeoque $D=F$ (V. 9.). Sit 3) $A<C$, erit et $D<F$. Nam ob $A<C$,

ἴσον, καὶ εἰ ἑλάττωον, ἑλάττωον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν H, Θ τῶν A, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν Γ, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς Δ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z . Ἐάν ἄρα ἢ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐάν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τετραραγμένη αὐτῶν ἢ ἀναλογία καὶ δίτσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐστὶν.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, E, Z , ἔστω δὲ τετραραγμένη αὐτῶν ἢ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z .

Εἰλήφθω τῶν μὲν A, B, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K , τῶν δὲ Γ, E, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ H, Θ τῶν A, B , τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N καὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z καὶ ὡς ἄρα

erit $C > A$. Iam vero (Prop. B.) est $C : B = F : E$, et $B : = E : D$, unde, ob $C > A$, erit $F > D$ (Cas. 1.) vel $D < F$. Ea dem fere ratione rem Clavius demonstrat, nisi quod casum

Δ aequè multiplices, et M , N ipsarum Γ , Z aliae utcunque aequè multiplices; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z (V. Def. 5.). Si igitur quocunque etc.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 333.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex aequo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A , B , Γ , et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione Δ , E , Z , sit autem perturbata earum proportio, ut A ad B ita E ad Z , et ut B ad Γ ita Δ ad E ; dico esse ut A ad Γ ita Δ ad Z .

Sumantur ipsarum A , B , Δ aequè multiplices H , Θ , K , ipsarum vero Γ , E , Z aliae utcunque aequè multiplices M , N .

Et quoniam aequè multiplices sunt H , Θ ipsarum A , B , partes vero eandem habent rationem quam earum aequè multiplices (V. 15.); erit ut A ad B ita H ad Θ . Ex eadem ratione ut E ad Z ita M ad N ; et est ut A ad B ita E ad Z ; itaque ut H ad Θ ita M ad N (V. 11.). Et quoniam est ut B ad Γ ita Δ

tertium non ad primum reducit, sed pariter immediate adstruit.

τὸ H πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N . Καὶ ἐπεὶ
 ἔστιν ὡς τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E ,
 καὶ ¹⁾ εἴληπται τῶν μὲν B, Δ ἰσάνεις, πολλαπλάσια
 τὰ Θ, K , τῶν δὲ Γ, E ἄλλα, ἃ ἐνυχεῖν ἰσάνεις πολ-
 λαπλάσια τὰ A, M . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ A ,
 οὕτως τὸ K πρὸς τὸ M . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ H
 πρὸς τὸ Θ , οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N . ἐπεὶ οὖν τρία
 μεγέθη ἔστι, τὰ H, Θ, A , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ
 πλῆθος, τὰ K, M, N , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ
 αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀνάλογια·
 οἷσιν ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ A , ὑπερέχει καὶ
 τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλατ-
 τόν. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν H, K τῶν A, Δ ἰσάνεις πολ-
 λαπλάσια, τὰ δὲ A, N τῶν Γ, Z ἄλλα, ἃ ἐνυχεῖν,
 ἰσάνεις πολλαπλάσια ²⁾· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ
 οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα ἡ τρία, καὶ τὰ
 ἑξῆς.

1) Loco eorum, quae hic habentur, Peyrardus e Codd. a. c. d. longe prolixius et manifesto erronee demonstrat esse, ut Θ ad A , ita K ad M . Nempe ex eo, quod $B : \Gamma = \Delta : E$ concludit, esse alterne $B : \Delta = \Gamma : E$ (V. 16.). At $B : A = \Theta : K$ (V. 15.); adeoque $\Gamma : B = \Theta : K$ (V. 11.); et $A : M = \Gamma : E$ (V. 15.), adeoque $\Theta : K = A : M$ (V. 11.) et iterum alterne $\Theta : A = K : M$. Ita vero propositio locum tantum habere videretur, si magnitudines A, B, Γ , et reliquae Δ, E, Z fuerint omnes eiusdem generis, quod longe secus est. Restitutus itaque locus, ut est in ed. Oxoniensi, Ed. Basileensis in loco, de quo disputamus, cum Oxoniensi consentit. Postea autem absurde eadem addit, quae vix e Peyrardo attulimus.

2) Ἄλλα, ἃ ἐνυχεῖν, ἰσάνεις πολλαπλάσια. Haec verba, quae monente Rob. Simson. omnino necessaria sunt, etiam sine Codd. auctoritate addidimus.

PROPOSITIO XXI.

Huius quoque propositionis demonstrationem magis explicitam dedere Clavius et Rob. Simson., similem prorsus ei,

ad E , et sumptae sunt ipsarum B , A aequemultiplices Θ , K ; ipsarum Γ , E autem aliae utcunque aequemultiplices A , M ; erit, ut Θ ad A , ita K ad M (V. 4.). Ostensum autem est, et, ut H ad Θ , ita esse M ad N ; quoniam igitur tres magnitudines sunt H , Θ , A , et aliae ipsis aequales multitudine K , M , N , binae sumptae in eadem ratione, et est earum perturbata proportio; ex aequo (V. 21.) si H superat A , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt H , K ipsarum A , A aequemultiplices, A , N vero ipsarum Γ , Z ; alia utcunque aequemultiplicia; est igitur ut A ad Γ ita A ad Z (V. Def. 5.). Si igitur sint tres etc.

quam in propositione praecedente vidimus, unde facile illa derivabitur.

PROPOSITIO XXII.

Expressis quidem verbis in textu graeco haec propositio demonstrata tantum est eo casu, quo sunt tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales. Eandem autem valere generaliter, ut in enunciato propositionis asseritur, eadem ratione demonstrari potest, ut monuerunt Campanus, Clavius, Rob. Simson. aliique. Nempe si sint quatuor magnitudines A , B , C , D , aliaeque ipsis numero aequales E , F , G , H , sitque $A:B=E:F$, $B:C=F:G$, $C:D=G:H$, erit $A:D=E:H$. Quum enim pro tribus magnitudinibus iam demonstratum sit, esse $A:C=E:G$, et iam denuo sit $C:D=G:H$, res pariter redit ad tres magnitudines A , C , D , et totidem alias E , G , H . Atque ita semper, si res demonstrata fuerit pro m magnitudinibus, inde demonstrabitur pro $(m+1)$ magnitudinibus, adeoque demonstratio est generalis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ.

Ἐάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γάρ τὸ AB πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ AE πρὸς τέταρτον τὸ Z · ἔχεται δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ $E\Theta$ πρὸς τέταρτον τὸ Z · λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ $A\Theta$ πρὸς τέταρτον τὸ Z .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ $E\Theta$ πρὸς τὸ Z · ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ $E\Theta$. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ $E\Theta$ · διῶσον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ $E\Theta$. Καὶ ἐπεὶ διηρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς

Cor. Sponte inde fluit, rationum aequalium duplicatas, triplicatas etc. etiam aequales esse (Baermann.). Nempe, si $A:B=B:C$, et $P:Q=Q:R$, sitque $A:B=P:Q$, erit et (V. 11.) $B:C=Q:R$, unde $A:C=P:R$, et similiter de triplicata ratione etc. res demonstrabitur. (Conversam huius vide in Excursu ad Prop. m.)

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ XXIII.

Hanc quoque propositionem valere de quocunque magnitudinibus, quavis in textu graeco non tam generaliter enun-

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 334.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam; et simul sumptae prima et quinta ad secundam eandem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam Γ eandem habeat rationem quam tertia AE ad quartam Z ; habeat vero et quinta BH ad secundam Γ eandem rationem quam sexta EO ad quartam Z ; dico et simul sumptas primam et quintam AH ad secundam Γ eandem habituras esse rationem quam tertia et sexta AO ad quartam Z .

Quoniam enim est ut BH ad Γ ita EO ad Z ; per inversionem erit (Prop. B.) ut Γ ad BH ita Z ad EO . Et quoniam est ut AB ad Γ ita AE ad Z , ut autem Γ ad BH ita Z ad EO ; ex aequo igitur est ut AB ad BH ita AE ad EO (V. 22.). Et quoniam divisae magnitudines proportionales sunt, et compositae proportionales erunt (V. 18.); ut igitur AH ad BH ita AO ad OE . Est autem et ut BH ad Γ ita

ciata sit, similique ac praecedentem ratione demonstrari, monuerunt Campanus, Clavius, Rob. Simson. alique.

PROPOSITIO XXIV.

Huic propositioni Rob. Simson. sequentia addit corollaria:

Cor. 1. Manente hypothesis propositionis, erit excessus primae et quintae ad secundam, ut excessus tertiae et sextae ad quartam. Demonstratio eadem est cum demonstratione propositionis, dummodo vice componendo utamur dividendo.

τὸ BH οὕτως τὸ $\Delta\Theta$ πρὸς τὸ ΘE . Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ $E\Theta$ πρὸς τὸ Z . διῶσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ $\Delta\Theta$ πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ AB , ΓA , E , Z , ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓA οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ AB , ἐλάχιστον δὲ τὸ Z . λέγω ὅτι τὰ AB , Z τῶν ΓA , E μείζονά ἐστιν.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν E ἴσον τὸ AH , τῷ δὲ Z ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓA οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ἴσον δὲ τῷ μὲν E τὸ AH , τῷ δὲ Z τὸ $\Gamma\Theta$ ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓA οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ $\Gamma\Theta$. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓA οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ AH πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ $\Gamma\Theta$ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ HB πρὸς λοιπὸν τὸ ΘA ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓA . Μείζον, δὲ τὸ AB τοῦ ΓA μείζον ἄρα καὶ τὸ HB τοῦ ΘA . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E , τὸ δὲ $\Gamma\Theta$ τῷ Z τὰ ἄρα AH , Z ἴσα ἐστὶ τοῖς $\Gamma\Theta$, E . Καὶ ἐπεὶ εἰς ἀνίσους ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἀνίστα

Cor. 2. Ipsa autem propositio vera est de quocunque magnitudinibus, quarum priores ad communem secundam eandem habent rationes, quas habent reliquae ad communem quartam, singulae sc. priorum ad secundam, eandem, quam singulae reliquarum ad quartam; ut patet. (Nempe, si $A:M=F:N$, $B:M=G:N$, $C:M=H:N$, $D:M=I:N$ etc. erit

$E\Theta$ ad Z ; ex aequo igitur est (V. 22.) ut AH ad Γ ita $A\Theta$ ad Z . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 335.)

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis maiores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales $AB, \Gamma A, E, Z$, ut AB ad ΓA ita E ad Z ; sit autem maxima quidem ipsarum AB , minima vero Z ; dico AB, Z ipsis $\Gamma A, E$ maiores esse.

Ponatur enim ipsi E aequalis AH ipsi vero Z aequalis $\Gamma\Theta$.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓA ita E ad Z , aequalis autem E ipsi AH , Z vero ipsi $\Gamma\Theta$; est igitur ut AB ad ΓA ita AH ad $\Gamma\Theta$. Et quoniam est ut tota AB ad totam ΓA ita ablata AH ad ablatam $\Gamma\Theta$; et reliqua HB ad reliquam ΘA erit ut tota AB ad totam ΓA (V. 19.). Maior autem AB ipsa ΓA ; maior igitur et HB ipsa ΘA (Prop. A.). Et quoniam aequalis est AH ipsi E , $\Gamma\Theta$ vero ipsi Z ; erunt AH, Z aequales ipsis $\Gamma\Theta, E$. Et quoniam si inaequalibus aequalia addantur, tota inaequalia sunt (I. Ax. 4.); cum igitur $HB, \Theta A$ inaequalia sint, sitque maior

etiam $A+B+C+D$ etc. : $M=F+G+H+I$ etc. : N , vel etiam excessus quarundam priorum super reliquas priores ad secundam, ut similis excessus reliquarum ad quartam v. c. $A+B+C-D : M=F+G+H-I : N$, vel $A+B-C-D : M=F+G-H-I : N$ etc.)

ἔστιν, ἐὰν ἄρα τῶν HB , $ΘΔ$ ἀρίστων ὄντων, καὶ μεί-
ζονος τοῦ HB , τῷ μὲν HB προστεθῇ τὰ AH , Z ,
τῷ δὲ $ΘΔ$ προστεθῇ τὰ $ΓΘ$, E , συνάγεται τὰ AB ,
 Z μείζονα τῶν $ΓΔ$, E . Ἐὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ
ἑξῆς.

PROPOSITIO XXV.

Observante Rob. Simsone, si sumitur, primam quatuor
magnitudinum proportionalium maximam esse omnium, sponte
inde fuit ope Prop. A. et V, 14, quartam esse omnium mi-

HB, cui addantur *AH*, *Z*, ipsi vero *GA* addantur *IG*, *E*, fient *AB*, *Z* maiores ipsis *GA*, *E*. Si igitur quatuor etc.

nimam. Caeterum sub finem huius libri Rob. Simson. quatuor adhuc addit propositiones *F*, *G*, *H*, *K*, quas nos exhibemus in Excursu ad librum VI. §§. 9. 10. 15.

Ε Τ Κ Λ Ε Ι Δ Ο Τ
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Ε Κ Τ Ο Ν.

Ο Ρ Ο Ι.

α. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τεγωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β. Ἀντιπεπονητότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐκὰς τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἐπόμενοι λόγων¹⁾ ᾧσιν.

1) Editio Basil. et cum ea plures Elementorum editiones, quae textum graecum definitionem et enunciatorum propositionum habent, nominatim Orontii Fineii, Ioach. Camerarii, Scheubelii, Peletarii, Dasypodii habent λόγῳ. Eadem lectio est etiam in excerptis ex τῶν τοῦ Ἡρωνος περὶ τῶν τῆς γεωμετρίας ὀνομάτων a Dasypodio editis Argent. 1570. Ed. Oxon. legit ὅροι, quam vocem etiam Petr. Ramus ponendam putaverat. Conferantur tamen, quae ad V. Defin. 9. de seriore usu vocis ὅροι dicta sunt. Candalla iam suspicatus erat, legendum esse λόγων, quam lectionem Peyrardus e Cod. a. eruit, et in ed. Paris. posuit. Quod ex Candallae sententia ita interpretandum erit, utramque figuram binarum rationum antecedens et consequens comprehendere: scilicet antecedens primae et consequens secundae ad priorem, consequens vero primae et antecedens secundae rationis ad posteriorem figuram pertinere debent. Pfeiderer. Schol. in L. VI. Elem. §. 127—132. Forte legenda fuerit utraque vox: λόγων ὅροι, aut potius: ἡγούμενά τε καὶ ἐπόμενα λόγων.

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

L I B E R S E X T U S.

D E F I N I T I O N E S.

1. Similes figurae rectilineae sunt, quae et singulos angulos singulis aequales habent, et circa aequales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocae autem figurae sunt, quando in utraque figurarum antecedentes et consequentes rationum sunt.

D E F I N. I.

Austin, contra hanc definitionem monet, non statim patere, an simul consistere possit in duabus figuris rectilineis mutua aequalitas angulorum, et proportionalitas laterum circa aequales angulos. Atque ita haec definitio ponenda aut saltem explicanda foret demum post VI. 4. At, quum in figuris regularibus, quas liber quartus describere docet, mutua illa aequalitas angulorum, et proportionalitas laterum locum habeat, si figurae istae eundem numerum laterum habeant, exemplum certe eiusmodi figurarum prostat, nec quisquam generaliter asserere poterit, esse ista *adverata*. Et, quod Pfeiderer observat, (Schol. ad Libr. VI. Elem. Euclid. Tub. 1800. sqq. §. 297. Ista nempe scholia non integra, sed saltem ad §. 238.

γ. Ἀκροῦ καὶ μέσου λόγον εὐθεία τετμηθῆναι λέγεται, ὅταν ἢ ὥς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἐλάσσον.

δ. Ὅμοιοι εἰσὶ πάντες σχήματος ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

lucem publicam viderunt, integra tamen in scriniis suis elaborata habuit beatus auctor et benevole mecum communicavit, unde, ipso permittente, nonnulla in nostrum usum convertimus) Euclidea rectilineorum similitum definitio ipsam communem similitudinis notionem (quae lineamentorum similem situm ad proportionalitatem requirit) ad illa adplicatam et accurate determinatam sistit. Et Euclides, eodem momento, denominationem similitum triangulis in VI. 8. demum applicat, postquam in VI. 4—7. aequalitatem angulorum ac proportionalitatem laterum circa angulos aequales non solum generaliter coexistere posse, sed sub quibus conditionibus reapse coexistant, ostenderat: tum rectilinea universim, quae iuxta suam definitionem similia dici possint, in VI. 18. describere docet, antequam ad proprietates eorum discutiendas progrediatur. Cf. Phil. mathem. Abhandl. von Kästner und Klügel. HaHe 1807. p. 16. sqq. Ipse Austin, contra similia triangula ea esse dicit, in quibus anguli unius aequales sunt respective angulis alterius. Similes autem rectilineas figuras plurium quam trium laterum eas esse dicit, quae dividi possint in aequalem numerum triangulorum similitum, similiter positorum. Circa has Austinii definitiones Pflaiderer. l. c. observat, definitionem triangulorum similitum communem figurarum similitum notionem non exhaustire, et demum adiecta propositione VI. 4. eam exhaustiri. Caeterorum vero rectilineorum definitionem Austinianam, cum et multifariam ea possint in triangula dividi, et, quid similis triangulorum situs involvat, ab auctore non declaretur, vagam et ambiguum esse. Praeter necessitatem igitur, nec sine incommodo, uni definitioni duas substitui.

DEFIN. II.

Rob. Simson. observat, definitionem 2. non videri Eucli-

3. Secundum extremam et mediam rationem recta secta esse dicitur, quando est ut tota ad maius segmentum ita maius ad minus.

2. Altitudo est omnis figurae a vertice ad basin perpendicularis ducta.

dis esse, sed cuiusdam imperiti, quum nulla figuratum reciprocarum mentio fiat ab Euclide, nec a quoquam alio geometra, et definitio praeterea obscure enunciata sit. Ipse autem Simson. clarius eam ita exhibuit: „reciprocae figurae, triangula sc. et parallelogramma sunt, quando circa duos angulos latera ita sunt proportionalia, ut latus primae sit ad latus secundae, ut reliquum secundae latus ad latus reliquum primae.“ In adiectis deinde notis aliam generaliorem vice eius posuit, nempe „duae magnitudines dicuntur reciproce proportionales duobus aliis, quando altera priorum est ad altetam posteriorum, ut reliqua posterioram ad reliquam priorum.“ Simsonis iudicium de Def. 2. confirmat Pflaiderer. Schol. ad Libr. VI. Elem. §. 132., dum observat, Prop. VI. 14., VI. 15., XI. 34. etc. non dicere, ἀντιπεπόνθῃτα parallelogramma, triangula etc. sed : ὅτι ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ κ. τ. λ., quarum formularum sensus praeterea in singularum propositionum enunciatione VI. 14., VI. 15. etc. diserte indicetur. Caeterum Pflaiderer. monet, Rob. Simsonis definitionem, per se ad quatuor homogeneas magnitudines restrictam, ad solas libri VI. propositiones quadrare.

DEFIN. IV.

Pflaiderer. in Schol. §. 1. observat, hanc definitionem non genuinam esse videri, cum in parallelogramma, parallelepipeda, prismata, cylindros, quorum altitudines in elementis commemoreatur, non quadret. Praeterea eam deesse in versione Campani, nec Proclum ad I. 38. eius rationem habere. Nempe altitudo in figura rectilinea non absolute dicitur, sed semper refertur ad aliquod figurae latus, quod pro basi sumitur, et significat maximum perpendicularum, quod a puncto

ἐ. (Λόγος ἐκ λόγων συγκείσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσιν τινά ¹⁾).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἀλλήλα ἔστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστω τρίγωνα μὲν τὰ $ABΓ$, $ΑΓΔ$, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ $ΕΓ$, $ΓΖ$, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ $Α$ ἐπὶ τὴν $ΒΔ$ κάθετον ἀγομένην· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ $ΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν οὕτως τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον, καὶ τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $ΒΔ$ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ $Θ$, $Λ$ σημεία, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν $ΒΓ$ βάσει ἴσαι, ὡσαυδηποτοῦν αἱ $ΒΗ$, $ΗΘ$, τῇ δὲ $ΓΔ$ βάσει ἴσαι ὡσαυδηποτοῦν αἱ $ΔΚ$, $ΚΛ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΗ$, $ΑΘ$, $ΑΚ$, $ΑΛ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ $ΓΒ$, $ΒΗ$, $ΗΘ$ ἀλλήλαις, ἴσα ἔστι, καὶ τὰ $ΑΘΗ$, $ΑΗΒ$, $ΑΒΓ$ τρίγωνα ἀλλή-

1) Hanc definitionem quintam, quae apud Peyrardum deest, at ipso teste in omnibus codicibus (quanquam in Cod. a. tantum in margine) reperitur (nisi quod pro τινά legunt τινάς) ex ed. Oxon. huc reposuimus, non quod ipsam genuinam esse putaremus, sed quo melius ea, quae viri docti de VI. 5. Def. disputant, intelligi possint. Campanus hanc definitionem non habet. Ed. Basil. pro τινά, quod Oxon. habet, legit τινάς. Vide caeterum Excurs. ad finem huius libri.

aliquo figurae in hoc latus demitti potest. Iam vero vel unum aliquod figurae punctum ab hac basi magis distat, quam reliqua figurae puncta quaecunque, et tam perpendicularum ab hoc puncto in basin demissum altitudo figurae, quatenus ad hanc basin refertur, vocatur: vel plura figurae puncta unam can-

(5. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatae illius faciunt quantitatem.)

PROPOSITIO I. (Fig. 373.)

Triangula et parallelogramma, quae eandem altitudinem habent, inter se sunt ut bases.

Sint triangula $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta$, parallelogramma vero EF , ΓZ , quae eandem altitudinem habent, nempe perpendicularem ab A ad $B\Delta$ ductam; dico, esse ut basis $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ basin ita triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $\Gamma\Delta$, et parallelogrammum EF ad parallelogrammum ΓZ .

Producatur enim $B\Delta$ ex utraque parte ad puncta Θ , Λ , et ponantur basi $B\Gamma$ aequales quottuncque BH , $H\Theta$, basi vero $\Gamma\Delta$ aequales quottuncque ΔK , $K\Lambda$, et iungantur AH , $A\Theta$, AK , $A\Lambda$.

Et quoniam aequales sunt ΓB , BH , $H\Theta$ inter se, aequalia sunt et $A\Theta H$, AHB , $AB\Gamma$ triangula inter demque inter se a basi distantiam habent, adeoque I. 34. Cor. 4. in recta basi parallela sita sunt, ea ipsa distantia a basi autem maior est quovis perpendicule ex alio quocunque figurae puncto in hanc basin demisso, tum iterum communis illa punctorum a basi distantia vel perpendiculum maius quovis alio a reliquis figurae punctis non in recta ista basi parallela sitis demisso altitudo figurae ad hanc basin relata vocatur. Itaque in triangulo quidem perpendiculum a vertice in oppositam basin demissum, in parallelogrammo autem perpendiculum e puncto quocunque rectae basi parallelae in basin demissum est altitudo figurae, quatenus ea ad hanc basin refertur. Quum igitur duae figurae inter easdem parallelas constitutae sint,

λοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῆς $B\Gamma$ βάσεως, τοσάνταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ $\Lambda\Theta\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ $\Gamma\Lambda$ βάσις τῆς $\Gamma\Delta$ βάσεως, τοσάνταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ $\Lambda\Lambda\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $\Lambda\Gamma\Delta$ τριγώνου καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῇ $\Gamma\Lambda$ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ $\Lambda\Theta\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Lambda\Lambda\Gamma$ τριγώνῳ καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῆς $\Gamma\Lambda$ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ $\Lambda\Theta\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $\Lambda\Lambda\Gamma$ τριγώνου καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, δύο δὲ τριγώνων τῶν $AB\Gamma$, $\Lambda\Gamma\Delta$, εἴληπται ἰσάνεις πολλαπλάσια τῆς μὲν $B\Gamma$ βάσεως καὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου, ἥτε $\Theta\Gamma$ βάσις καὶ τὸ $\Lambda\Theta\Gamma$ τρίγωνον τῆς δὲ $\Gamma\Delta$ βάσεως καὶ τοῦ $\Lambda\Gamma\Delta$ τριγώνου ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια ἥτε $\Gamma\Lambda$ βάσις καὶ τὸ $\Lambda\Lambda\Gamma$ τρίγωνον καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῆς $\Gamma\Lambda$ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ $\Lambda\Theta\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $\Lambda\Lambda\Gamma$ τριγώνου καὶ εἰ ἴση, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $B\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν οὕτως τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma\Delta$ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν $AB\Gamma$ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ $E\Gamma$ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ $\Lambda\Gamma\Delta$ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ $Z\Gamma$ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ

eandem altitudinem habent, et vice versa Cor. 3. et I. 34. Cor. 4.

DEFIN. V.

De hac definitione vide Excursum sub finem huius libri.

PROPOSITIO I.

Obs. 1. Demonstratio partis prioris supponit corollarium ex I. 38. deductum simile corollario 2. ex Prop. 36. deducto:

se (I. 38.), quam multiplex igitur est basis $\Theta\Gamma$ ipsius $B\Gamma$ basis, tam multiplex est et triangulum $\Lambda\Theta\Gamma$ ipsius $AB\Gamma$ trianguli. Ex eadem ratione quam multiplex est basis $\Gamma\Lambda$ ipsius $\Gamma\Lambda$ basis, tam multiplex est et triangulum $\Lambda\Lambda\Gamma$ ipsius $\Lambda\Gamma\Lambda$ trianguli; et (I. 38.) si aequalis est basis $\Theta\Gamma$ ipsi basi $\Gamma\Lambda$, aequale est et triangulum $\Lambda\Theta\Gamma$ ipsi triangulo $\Lambda\Lambda\Gamma$; et si superat basis $\Theta\Gamma$ ipsam basin $\Gamma\Lambda$, superat et triangulum $\Lambda\Theta\Gamma$ ipsum triangulum $\Lambda\Lambda\Gamma$; et si minor, minus. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem basibus $B\Gamma$, $\Gamma\Lambda$, duobus vero triangulis $AB\Gamma$, $\Lambda\Gamma\Lambda$, sumpta sunt aequae multiplicia basis $B\Gamma$ et trianguli $AB\Gamma$, ipsa basis $\Theta\Gamma$ et triangulum $\Lambda\Theta\Gamma$; basis vero $\Gamma\Lambda$ et trianguli $\Lambda\Gamma\Lambda$ alia utcumque aequae multiplicia, basis $\Gamma\Lambda$ et triangulum $\Lambda\Lambda\Gamma$. Et ostensum est si superat basis $\Theta\Gamma$ ipsam $\Gamma\Lambda$ basin, superare et triangulum $\Lambda\Theta\Gamma$ ipsum triangulum $\Lambda\Lambda\Gamma$; et si aequalis, aequale, et si minor, minus; est igitur (V. Def. 5.) ut basis $B\Gamma$ ad basin $\Gamma\Lambda$ ita triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $\Lambda\Gamma\Lambda$.

Et quoniam trianguli $AB\Gamma$ duplum est parallelogrammum EF (I. 41.), ipsius vero trianguli $\Lambda\Gamma\Lambda$ duplum est parallelogrammum ZT , partes autem eandem

quod pariter locum habere diximus ad I. 38., nempe triangula in iisdem parallelis constituta, sed super basibus inaequalibus, inaequalia esse, maius nempe illud, cuius basis maior sit. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 4.

Obs. 2. Quamvis autem enunciatum propositionis et expositio supponat triangula et parallelogramma invicem contigua, super basibus in directum iacentibus constituta, et quidem in adiecto schemate ad oppositas partes lateris communis

μέτρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΖΓ$ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν $ΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΖΓ$ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν οὕτως τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΖΓ$ παραλληλόγραμμον. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ᾄσθῃ τις εὐθεΐα ¹⁾, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγμένη εὐθεΐα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

1) Edd. Basil. et Oxon. hic et sub finem propositionis addunt *παράλληλος*, quam vocem, quum in *παρὰ* iam continetur, ex fide Cod. a. cum Peyrardo omisimus.

delineata, demonstratio tamen aequè pertinet ad triangula et parallelogramma aequalium altitudinum: quibus ita dispositis, ut bases illorum sint in eadem recta linea, et figurae ipsae ad easdem huius rectae partes recta per vertices triangulorum ducta ei, in qua bases sunt, sit parallela (I. 28. I. 33.); parallelogrammorum vero latera basibus opposita in eandem, incidunt rectam, ei, in qua bases sunt, parallelam (I. 28. I. 33.). Quare triangula etiam et parallelogramma aequæalta sunt uti bases. (Pfleiderer. l. c. §§. 5—8. Rob. Simson, Cor. ad VI. 1. Cf. demonstratio et figura Clavii, et expositio Procli ad I. 38., qui ita habet: τὸ αὐτὸ ὕψος οὐδὲν διαφέρει ἢ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. Πάντα γάρ τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα

habent rationem quam earum, aequae multiplices (V. 15.); est igitur ut triangulum ABF ad triangulum AFD ita parallelogrammum EF ad parallelogrammum ZF . Quoniam igitur ostensum est, ut basis BF ad basin FD ita triangulum ABF ad triangulum AFD ; ut autem triangulum ABF ad triangulum AFD ita parallelogrammum EF ad parallelogrammum ZF ; igitur (V. 11.) basis BF ad basin FD ita parallelogrammum EF ad parallelogrammum ZF . Ergo triacula etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 338.)

Si uni laterum trianguli parallela ducatur quaedam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, recta sectiones coniungens reliquo trianguli lateri parallela erit.

παρὰλλήλοις ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἔστιν ὕψος, καὶ ἀναπάλιν. "Τὺπος γὰρ ἔστιν ἡ ἀπὸ τῆς ἐτέρας παρὰλλήλου κἀθετος ἐπὶ τὴν λοιπὴν.

Obs. 3. Propositiones I. 35—38, theoremate VI. 1. quidem comprehenduntur, sed, cum huius demonstratio illis nitatur, non simul cum hoc una stabiliri demonstratione dici possunt, quamvis Proclus l. c. contrarium asserat. Pfeiderer. l. c. §. 10.

Obs. 4. Parallelogramma et triacula rectangula, quae unum latus circa angulum rectum commune, vel aequale habent, esse ut altera ipsorum latera circa angulum rectum, asserto generali VI. 1. et Obs. 2. continetur. Hinc parallelogramma et triacula, primum rectangula, tum (I. 35. I. 37.) quaelibet super eadem vel aequalibus basibus constituta, sunt uti altitudines. Quod ipsum Clavius simili modo infert. Commandinus p. olitius, nec legitima deducit. Pfeiderer. l. c. §§. 11. 12.

Τριγώνου γὰρ τοῦ $ABΓ$ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ $ΒΓ$ ἤχθω ἡ $ΔΕ$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΒΕ$, $ΓΔ$.

Ἰσὸν δὴ ἐστὶ τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον τῷ $ΓΔΕ$ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς $ΔΕ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΔΕ$, $ΒΓ$. Ἀλλὸ δέ τι τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΓΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ οὕτως ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ ὑπὸ γὰρ

Obs. 5. Ea, quae Obs. 4. ad initium dicta sunt, complectuntur Lemmata Elem. libro X. vulgo inserta, nempe ante X. 23. X. 32. Lemm. 2. ante X. 34. et Lemm. 3. ante X. 34. Pfeiderer I, c. §. 13.

Obs. 6. Per deductionem ad impossibile similem ei, quae demonstrandis I. 39. I. 40. adhibetur, facile demonstrantur VI Prop. 1. et Obs. 2. et Obs. 4. conversae: nempe triangula et parallelogramma, quae sunt inter se, ut bases, aequales habere altitudines, vel eandem; et quae sunt inter se, ut altitudines, aequales habere bases, si unam et eandem non habeant. Cf. Pfeiderer. I. c. §. 14. Clavius, aliique.

PROPOSITIO II.

Obs. 1. In Prop. 2. sumitur, rectam, quae basi trianguli parallela ducitur, necessario convenire cum reliquis trianguli lateribus ipsis aut productis, quod quidem necessario fieri patet ex I. 29. Cor. 3. Cf. Pfeiderer. I. c. §. 15.

Obs. 2. Ex VI. Prop. 2. quod nempe sit $ΒΔ:ΔΑ=ΓΕ:ΕΑ$, sequitur etiam, esse inverse $ΔΑ:ΒΔ=ΕΑ:ΓΕ$ (Prop. B in Excursu ad Libr. V. Elem.) et componendo (V. 18.) $AB: (\frac{ΔΔ}{ΒΔ}) = ΑΓ: (\frac{ΑΕ}{ΕΓ})$, et alterne (VI. 16.) $ΒΔ:ΓΕ=ΔΑ:ΕΑ$,

Trianguli enim $AB\Gamma$ uni laterum $B\Gamma$ parallela ducatur ΔE ; dico esse ut BA ad AA ita ΓE ad EA .

Iungantur enim BE , ΓA .

Aequale igitur est triangulum $B\Delta E$ triangulo $\Gamma\Delta E$ (I. 37.), in eadem enim basi sunt ΔE et intra easdem parallelas ΔE , $B\Gamma$. Aliud autem quoddam triangulum est $A\Delta E$; aequalia vero ad idem eandem habent rationem (V. 7.); est igitur ut triangulum $B\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$, ita triangulum $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$. Sed ut triangulum $B\Delta E$ ad $A\Delta E$ ita BA ad AA ; nam cum sub eadem altitudine sint, nempe sub et $AB: A\Gamma = AA: AE = BA: \Gamma E$. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 16. 17. 22.

Obs. 3. Pariter earum propositionum omnium, quae Obs. 2. continentur, conversae eodem modo locum habent, ac in parte altera VI. Prop. 2. Conversa partis prioris demonstratur. Nempe ex suppositionibus $AB: \left(\frac{AA}{AB}\right) = A\Gamma: \left(\frac{AE}{\Gamma E}\right)$ dividendo (V. 17.), pariterque ex suppositione $BA: \Gamma E = AA: EA$ alterne (V. 16.) consequitur, esse $BA: AA = \Gamma E: EA$, unde ex parte altera V. Prop. 2. consequitur, omnibus his casibus esse rectam ΔE parallelam basi. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 20. 21. 22.

Obs. 4. Quae in VI. Prop. 2. similiterque ea, quae in Obs. 2. et 3. continentur, pariter locum habent, si recta ΔE ita ducatur (Fig. 339. 340.), ut non ipsis trianguli $AB\Gamma$ lateribus, sed saltem iis vel ultra verticem A , vel ultra basin $B\Gamma$ productis occurrat, quod facile eodem modo probatur. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 23. 24. Unde et Rob. Simson. et Playfair. rem ita enunciant: si uni laterum trianguli parallela quaedam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit reliqua trianguli latera, vel latera producta, et, si latera trianguli vel latera producta proportionaliter secta fuerint, quae sectiones

τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὴν AB κείμενον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἶσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ $\Gamma Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$ καὶ ὡς ἄρα ἡ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$.

Ἀλλὰ δὴ καὶ τοῦ $Α Β Γ$ τριγώνου πλευραὶ αἱ $Α Β$, $Α Γ$ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ $Δ$, $Ε$ σημεία, ὡς ἢ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ $Δ Ε$ · λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἢ $Δ Ε$ τῇ $Β Γ$.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$, ἀλλ' ὡς μὲν ἢ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως τὸ $Β Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον, ὡς δὲ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$ οὕτως τὸ $\Gamma Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον καὶ ὡς ἄρα τὸ $Β Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον οὕτως τὸ $\Gamma Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον. Ἐκατέρον ἄρα τῶν $Β Δ Ε$, $\Gamma Δ Ε$ τριγώνων πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $Β Δ Ε$ τρίγωνον τῷ $\Gamma Δ Ε$ τριγώνῳ καὶ

coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Omnia, etiam ea, quae in observationibus 2—4 dicta sunt, sic etiam licet complecti: quae ab cruribus eiusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum per duas rectas parallelas tam verticem inter et alteram earum, quam ipsas inter patallelas abscinduntur segmenta, sic proportionalia sunt, ut, quam rationem mutuo habent duo segmenta unius cruris, eandem invicem habeant duo segmenta homologa, seu similiter sita cruris alterius; et ut singula unius cruris segmenta ad segmenta homologa cruris alterius sint in eadem ratione. Viciissim parallelae sunt rectae, quae ab cruribus eiusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum, seg-

perpendiculari ab E ad AB ducta, inter se sunt ut bases (VI. 1.). Ex eadem ratione ut triangulum ΓAE ad $A AE$ ita ΓE ad EA ; ut igitur BA ad AA ita ΓE ad EA (V. 11.).

Sed trianguli $AB\Gamma$ latera AB , $A\Gamma$ proportionaliter secta sint in punctis A , E , ut BA ad AA ita ΓE ad EA , et iungantur AE ; dico parallelam esse AE ipsi BF .

Isdem enim constructis, quoniam est ut BA ad AA ita ΓE ad EA , sed ut BA ad AA ita triangulum BAE ad triangulum $A AE$, ut ΓE vero ad EA ita triangulum ΓAE ad triangulum $A AE$ (VI. 1.); erit (V. 11.) ut triangulum BAE ad triangulum $A AE$ ita triangulum ΓAE ad triangulum $A AE$. Utrumque igitur triangulorum BAE , ΓAE ad triangulum $A AE$ eandem habet rationem. Aequale igitur est (V. 9.) triangulum BAE triangulo ΓAE ; et sunt super eadem basi AE . Aequalia autem triangula super eadem basi

menta alterutro ordine indicato proportionalia abscindunt. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 25. Denique observari potest, similes proportionales locum habere, si non duae tantum, sed plures rectae parallelae a cruribus anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum segmenta abscindant, et vice versa. Cf. Tacquet. VI. 2. Cor. 1.

Obs. 5. Pariter duas rectas non contiguas, duabus interceptas parallelis, pariter ab tertia his parallela proportionaliter secari, et vicissim, facile probatur, et ad segmenta etiam pluribus, quam tribus rectis inter se parallelis abscissa extendi potest. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 29. 30. 31. et, quae ibi citantur, demonstrationes Euclidis in VI. 10. et XI. 17. adhibitae.

εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔE . Τὰ δὲ ἴσα τρί-
 γωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
 παραλλήλοις ἐστὶν. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῇ
 $B\Gamma$. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα
 τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνη καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βά-
 σεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ
 τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα
 τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευ-
 ραῖς, ἡ ὑπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυ-
 μένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO III.

Propositio haec valet de triangulis aequicruris pariter ac
 non aequicruris. Et de aequicruris quidem pars prior propo-
 sitionis iam ex I. 4. pars posterior ex I. 8: patet. Cf. I. 26.
 Cor. 1. 2 Quod triangula non aequicrura attinet, illud ante
 omnia facile ostendetur, rectam, quae angulum ad verticem
 bifariam secat, basin ad angulos obliquos (in aequicruris an-
 guli sunt recti) et in partes inaequales secare, sic, ut minus
 segmentum adiaceat cruri minori, atque is angulus acutus sit,
 qui cruri minori opponitur. Nempe, si (Fig. 342.) $AI > AB$,
 et AD angulum BAI bifariam dividit, ob angulum $B > I$
 (I. 18.), sunt anguli $B + \angle ADB > I + \angle AID$, ideoque (I. 32.)
 $ADI > ADB$. Et, ab AI abscissa $AE = AB$, et iuncta recta
 DE , sunt (I. 4.) $DE = DB$, et ang. $DEA = ABD$. Quare, pro-
 ducta AB versus Z , est ang. $ABZ = DEI$ (I. 13.). At ABZ
 $> I$ (I. 16.), ergo $DEI > I$, ideoque $AI > DE$ (I. 19.) i. e.
 $AI > DB$. Pflsiderer. l. c. §§. 32. 33.

Obs. 2. Quae igitur trianguli non aequicruri basin BI
 bifariam secat ex vertice trianguli A ducta recta AH in huius
 segmentum AI incidit, proinde in inaequales dividit angulum
 ad verticem BAI , sic, ut maior sit angulus BAH , qui mi-

constituta et intra easdem parallelas sunt (I. 39.). Parallela igitur est AE ipsi BF . Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 341.).

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basin; segmenta basis eandem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si segmenta basis eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, recta a vertice ad sectionem ducta bifariam secat trianguli angulum.

nori cruri AB adiacet: eademque AH obliqua est basi, ob angulum $AHF >$ obtuso AAG , et $AHB <$ acuto AAB (I. 16.), quae posterior pars etiam ex I. 25. consequitur. Cf. Pflaiderer. I. c. §§. 34. 35.

Obs. 3. In demonstratione VI. Prop. 3., quae complet ea, quae Obs. 1. 2. dicta sunt, ostendendum est ante omnia, rectam FE (Fig. 341.) convenire cum producta BE , quod facile ope I. 29. Cor. 3. fiet, vel simili modo, quo in demonstratione VI. 4. res ad I. Ax. 11. vel I. Post. 5. reducitur. Poterat autem constructio etiam ita absolvi, ut a producta BA abscinderetur segmentum $AE=AG$, ubi tum facile ex parte posteriore VI. Prop. 2. ostenderetur, iunctam FE parallelam esse rectae AE . Et forte haec ipsa applicatio partis posterioris VI. 2. indicaverit, hanc constructionem, et, quae inde fluit, demonstrationem genuinam potius esse, quam quae nunc in elementis exstant, quae, nisi suppleantur, quae initio huius observationis diximus, quodammodo manca videri possit. Cf. Pflaiderer. I. c. §§. 37—40.

Obs. 4. Rectae AZ , BH , FE (Fig. 343.) bifariam secantes angulos cuiuslibet trianguli, et ad latera usque opposita productae, ita se mutuo in puncto sectionis communi

Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς AA εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AF .

Ἦχθω γάρ διὰ τοῦ Γ τῇ AA παράλληλος ἡ GE , καὶ διαχθεῖσα ἡ BA συμπίπτει αὐτῇ κατὰ τὸ E .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AA , EF εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ AG , ἡ ἄρα ὑπὸ AGE γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ GAA . Ἄλλ' ἡ ὑπὸ GAA τῇ ὑπὸ BAA ὑπὸκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BAA ἄρα τῇ ὑπὸ AGE ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AA , EF εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ BAE , ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ BAA ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς, τῇ ὑπὸ $AE\Gamma$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

(Obs. 2. ad IV. 4. Cf. Pflaiderer. §§. 41. 42.) dividunt, ut cuiuslibet segmentum adiacens angulo trianguli sit ad eius segmentum adiacens lateri opposito trianguli, ut summa laterum trianguli comprehendentium illum angulum est ad latus hoc ei oppositum; tota autem recta sit ad segmentum ipsius adiacens (angulo lateri) trianguli, uti perimeter trianguli est ad (summam laterum circa hunc angulum). Nempe ex VI. 3.

$$\text{erit } AA:AZ = \left(\frac{AB:DZ, \text{ ob ang. } ABA=ZBA}{AF:FZ, \text{ ob ang. } AFA=ZFA} \right) \\ = AB+AF:BF \text{ (V. 12.)}$$

$$\text{et hinc } AZ:\left(\frac{AA}{AZ}\right) = AB+AF+BF:\left(\frac{AB+AF}{BF}\right) \text{ (V. 18.).}$$

Eodemque modo ostenditur, esse

$$BH:BA:AH = AB+BF+AF:AB+BF:AF$$

$$GE:GA:AE = AF+BF+AB:AF+BF:AB.$$

Nominatim itaque in triangulo aequilatero sunt

$$\left. \begin{array}{l} AZ:AA:AZ \\ BH:BA:AH \\ GE:GA:AE \end{array} \right\} = 3:2:1.$$

Pflaiderer. l. c. §§. 43. 44.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et secetur angulus $BA\Gamma$ bifariam ab ipsa AA recta; dico esse ut BA ad $A\Gamma$ ita BA ad $A\Gamma$.

Ducatur enim per Γ ipsi AA parallela TE (I. 31.), et producta BA conveniat cum ipsa in E .

Et quoniam in parallelas AA , ET recta incidit $A\Gamma$; ergo angulus ATE aequalis est angulo ΓAA (I. 29.). Sed ΓAA ipsi BAA ponitur aequalis; ergo et BAA ipsi ATE est aequalis. Rursus, quoniam in parallelas AA , ET recta incidit BAE , angulus exterior BAA aequalis est interiori $AE\Gamma$ (I. 29.). Ostensus autem est et ATE ipsi BAA aequalis; ergo angulus ATE

Obs. 5. Viciissim, si recta AZ trianguli perimetro terminata, et aliquem eius angulum bifariam dividens ita secatur in puncto A , ut sit $AA:AZ=AB+\Gamma\Gamma:BF$; caeterae etiam rectae per punctum huius sectionis A ex verticibus angulorum trianguli ductae bifariam hos angulos dividunt. Non enim bifariam dividant angulos B , Γ rectae BA , ΓA , sed $B\theta$, $\Gamma\theta$ (Obs. 2. ad IV. 4.): itaque foret (Obs. 4.) $A\theta:\theta Z=BA+\Gamma\Gamma:BF$ (Obs. 4.): ideoque $A\theta:\theta Z=AA:AZ$ (V. 11.), $AZ:\theta Z=AZ$ (I. 18.) et $\theta Z=AZ$ (V. 9.) contra I. Ax. 9. Simili modo enunciantur, et vel immediate similiter demonstrantur, vel ad proxime praecedentem casum ope V. 17. reducuntur conversae reliquarum partium Obs. 4. Pfeiderer. I. c. §§. 45. 46.

Obs. 6. Quodsi iam recta ducatur, quae bifariam dividat angulum exteriorem ad verticem trianguli, recta ita ducta 1) in triangulo aequicruro $AB\Gamma$ (Fig. 344.) parallela erit basi BF . Nam, quum ex supp. angulus $ZA\theta=\theta AB=\frac{ZAB}{2}=\frac{B+\Gamma}{2}$ (I. 32.) $=B=F$ (I. 5.), adeoque θA parallela rectae BF (I. 27.). Et conversa quoque, nempe, si θA parallela sit rectae BF , fore angulum ZAB ad θA bisectum, ope I. 29. et I. 5. facile ostendetur. 2) In triangulo autem non aequicruro

ὑπὸ AGE τῇ ὑπὸ BAD ἴσῃ, καὶ ἡ ὑπὸ AFE ἄρα
γωνία τῇ ὑπὸ AEG ἐστὶν ἴση ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ
 AE πλευρὰ τῇ AG ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου
τοῦ BGE παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν EG ἤκται ἡ
 AD ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕ-
τως ἡ BA πρὸς τὴν AE . Ἰση δὲ ἡ AE τῇ AG .
ὡς ἄρα ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν
 AG .

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ
 BA πρὸς τὴν AG , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AD λέγω ὅτι
διχα τέμνεται ἡ ὑπὸ BAG γωνία ὑπὸ τῆς AD εὐ-
θείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς
ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AG ,
ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἐστὶν ἡ BA
πρὸς τὴν AE τριγώνου γὰρ τοῦ BGE παρὰ μίαν
τῶν πλευρῶν τὴν EG ἤκται ἡ AD καὶ ὡς ἄρα ἡ BA

(Fig. 345.), si angulus exterior ZAB bisecetur recta $A\theta$, haec
ipsa recta cum basi $B\Gamma$ producta ad eam partem, ad quam est
eius minus AB , concurret in puncto aliquo H . Nam, quum
angulus $ZAB = \Gamma + AB\Gamma$ (I. 32.), at $AB\Gamma > \Gamma$ (I. 18.) erit
 $ZAB < 2AB\Gamma$, adeoque $\theta AB = \frac{ZAB}{2} < AB\Gamma$, et $\theta AB + ABH$
 $< AB\Gamma + ABH < 2$ rect. (I. 13.) unde θA , BH ex hac parte
concurrent (I. Post. 5.). Pfeiderer. §§. 47. 48.

Obs. 7. Recta $A\theta$, quae angulum externum ZAB trian-
guli non aequicruri bisecat, cum basi ad partem cruris mino-
ris productam concurret (Obs. 6.) et ita quidem, ut segmenta
in ipsa inter punctum hoc concursus et terminos basis abscissa
 BH , TH eandem habeant rationem, quam trianguli crura BA ,
 TA quibus adjacent. Abscindatur enim ab AG recta $AB = AB$,
et iungatur BE , eritque angulus $ZAB = ABE + AEB$ (I. 32.)

ipsi AEF est aequalis; quare et latus AE lateri AF est aequale (I. 6.). Et quoniam uni latrum trianguli BFE nempe EF parallela ducta est AA ; erit (VI. 2.) ut BA ad AF ita BA ad AE . Aequalis autem est AE ipsi AF ; ut igitur BA ad AF ita BA ad AF .

Sed sit ut BA ad AF ita BA ad AF ; et iungatur AA ; dico bifariam sectum esse angulum BAF ab AA recta.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut BA ad AF ita BA ad AF , sed et ut BA ad AF ita est BA ad AE (VI. 2.); trianguli enim BFE uni lateri EF parallela ducta est AA ; erit igitur BA ad AF ita BA ad AE ; aequalis igitur AF ipsi AE (V. 9.); quare

$=2ABE$ (I. 5.), adeoque $\angle ABE = \left(\frac{\angle ZAB}{2}\right) ABE$, et AH parallela rectae BE (I. 27.), adeoque $BH:GH=AE:AF$ (Obs. 2. ad VI. 2.) $=AB:AF$ (V. 11.). Vicissim, si $BH:GH=AB:AF$, iuncta AH angulum ZAB bisecabit. Rursus enim, facta $AE=AB$, iunctaque BE , erit $BH:GH=AE:AF$ (V. 11.), adeoque rectae AH, BE parallelae (VI. 2. Obs. 3.), proinde angulus $\angle ABE = \angle ABE$ (I. 29.), et $\angle ZAB = \angle ABE$ (I. 29.), adeoque, ob $\angle ABE = \angle ABE$ (I. 5.), etiam $\angle ABE = \angle ZAB = \angle ZAB$.

2. Cf. Pfeiderer. I. c. §. 48.

Obs. 8. Poterat autem inberi, ut recta BE rectae AO parallela agatur, et demonstratio eodem modo absolvi ac in textu elementorum VI. 3., atque hac ratione rem efficiunt Rob. Simson. in Præp. A. post VI. 3. inserta, quae idem enunciat, quod præcedens Obs. 7., ac Playfair. Et Simson. qui-

πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἢ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$. ἴση ἄρα ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΕ$, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΓΕ$ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ $ΒΑΔ$ ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία διχα τέμνεται ὑπὸ τῆς $ΑΔ$ εὐθείας. Ἐκὼν ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλόγον εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

dem monet: „casus secundus, qui habetur in Prop. A, pariter utilis ac primus, tertiae propositioni additus est, videlicet is, quo angulus trianguli exterior bifariam secatur recta linea. Demonstratio eius simillima est demonstrationi primi casus, et ob hanc fortiam causam tum ea, tum enunciatio casus, ommissa est ab imperito quodam editore. Pappus certe hac tanquam propositione elementari (simul cum ipsa VI. 3.) utitur in VII. Prop. 39. Collect. Mathem.“ Utramque etiam propositionem, nempe VI. 3. et alteram ei similem Obs. 7. allatam uno enunciato complecti licet, quod et Playfair. notat. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 49. 50.

Obs. 9. Quodsi simul angulus trianguli non aequicruri $ΒΑΓ$ (Fig. 346.) recta $ΑΔ$, et anguli externi $ΒΑΖ$ recta $ΒΘ$ bisecetur, angulus $ΑΑΘ$, quem rectae $ΑΔ$, $ΑΘ$ efficiunt, rectus erit. Nam, quum $ΒΑΖ + ΒΑΓ = 2$ Rect. (I. 13. erit $ΘΑΔ = \left(\frac{ΒΑΖ}{2} + \frac{ΒΑΓ}{2} \right)$ Recto. Quodsi super eadem basi $ΒΓ$ aliud triangulum $αΒΓ$ constitutum sit, cuius crura eandem inter se rationem habent, quam crura trianguli $ΑΒΓ$, ita, ut sit $αΒ : αΓ = ΑΒ : ΑΓ$, et bisecetur etiam huius trianguli angulus ad verticem $ΒαΓ$, et qui ei deinceps est, $ζαΒ$, rectae hos angulos bisecant-

et angulus AET angulo ATE est aequalis (I. 5.) Sed AET exteriori BAA aequalis (I. 29.); ATE vero alterno FAA est aequalis; angulus BAA igitur angulo FAA est aequalis. Itaque angulus BAT bifariam sectus est ab AA recta. Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 347.)

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera circa aequales angulos; et homologa, quae aequales angulos subtendunt, latera.

tes ad eadem puncta A , H bases ipsius et productae vergent, ad quae rectae AA , AH , quae angulos BAT , ZAA bifariam secant. Si enim fieri potest, recta v. c., quae angulum BAT bifariam secat, secet basin in puncto K , quod a A diversum sit, eritque ex VI. 3. $BK:TK=Ba:Ta=BA:TA$ (supp.) $=BA:TA$ (VI. 3.), adeoque erit $BT:TK=BT:TA$ (V. 18.), et $TK=TA$ (V. 9.), quod est absurdum. Et eodem modo res de recta, quae angulum ZAB bifariam secat, probatur.

Obs. 10. Quum rectae Ha , Aa pariter inter se rectum angulum efficiant, idemque obtineat in omnibus triangulis non aequicruris super eadem basi BF constitutis, quorum crura eandem inter se rationem habent, vertices omnium eiusmodi triangulorum erunt in semicirculo super HA descripto, sive iste semicirculus erit locus geometricus verticum omnium triangulorum, quorum basis est BF , et quorum crura eandem inter se rationem habent, quam habet AB ad AT (III. 31. Cor. 2.). Cf. Apollon. Loc. Plan. II. Loc. 2. De triangulis aequicruris vide I. 26. Cor. 6.

Obs. 11. Quum sit (Obs. 7.) $BH:TH=AB:AT$ vel $BH:TH=\left(\frac{BA}{HA-BH}\right):\left(\frac{TA}{TH-HA}\right)$ rectae HB , HA , HF

Ἐστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΙΕ$ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ $ΑΒΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$. λέγω ὅτι τῶν $ΑΒΓ$, $ΔΓΕ$ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΕ$. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΓ$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἶναι αἱ $ΒΑ$, $ΕΔ$ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπληρώσωσαν κατὰ τὸ $Ζ$.

erunt harmonice continue proportionales. Cf. dicta ad Libr. V. Defin. 8. Et conversa quoque facile demonstrabitur, nempe, si sit $HB:HI=BA:GA$, fore etiam $AB:AI=BA:GA=HB:HI$, et rectam AA angulum BAI pariterque rectam AH angulum ZAH bisecare.

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Triangula, qualia in hac propositione occurrunt, vel (I. 32. Cor. 3.) quorum duo saltem anguli unius duobus alterius, singuli singulis aequales sunt, iuxta VI. Def. 1. similia dicuntur. Propositiones itaque IV. 2. et IV. 3. docent circulo dato inscribere et circumscribere triangulum simile dato. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 54. 59. Quum autem in triangulis in hac propositione occurrentibus latera, quae angulos aequales subtendunt, homologa dicuntur, id ex V. Def. 12. dicere vult, esse $AB:BG=AG:GE$, et $BΓ:ΑΓ=ΓΕ:ΔΕ$, et $AB:ΑΓ=ΑΓ:ΔΕ$, unde et alterne sequitur, $AB:ΑΓ=ΒΓ:ΓΕ=ΑΓ:ΔΕ$, vel, quam rationem habeant duo duorum triangulorum aequiangulorum latera, aequalibus angulis op-

Sint aequiangula triangula ABF , AIE , aequalem habentia angulum BAF angulo FAE , angulum vero AFB angulo AIE , et praeterea angulum ABF angulo AIE ; dico triangulorum ABF , AIE proportionalia esse latera circa aequales angulos; et homologa, quae aequales angulos subtendunt, latera.

Ponatur enim BF in directum ipsi IE . Et quoniam anguli ABF , AFB duobus rectis minores sunt (I. 17.), aequalis autem AFB ipsi AIE , anguli igitur ABF , AIE duobus rectis minores sunt; rectae igitur BA , EA productae convenient (I. Post. 5.). Producantur, et convenient in Z .

posita, eandem habere bina illorum reliqua latera aequalibus angulis opposita, et. (V. 12.) perimetros utriusque trianguli, Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 51. 52.

Obs. 2. Recta, quae in triangulo parallela ducitur uni eius lateri, abscindit (I. 29.) triangulum simile toti (Pfeiderer. l. c. §. 60. Clavius VI. Cor. 4. alii.). Recta haec se habet ad latus trianguli, cui est parallela, uti segmentum alterutrius reliquorum trianguli laterum ipsam inter et verticem anguli oppositi comprehensum est ad hoc latus (Pfeiderer. l. c. §. 61.). Eadem per rectas ex vertice trianguli opposito ductas in eadem ratione secatur, ac basis trianguli, seu latus eius, cui est parallela (Pfeiderer. l. c. §. 62. Clavius in Schol. ad IV. 4. Theor. 2.). Quod idem valet, si recta trianguli lateri parallela secat eius reliqua latera producta (Pfeiderer. l. c. §. 63. sq.). Denique, si trianguli alicuius lateri plures rectae parallelae ducuntur, quae cum reliquis lateribus trianguli conveniunt, erunt hae omnes inter se, ut homologa crura triangulorum a parallelis his abscissorum.

Obs. 3. Praemissa IV. 4. Prop., quae non pendet a VI. 3. facile etiam VI. 3. et quae ei adiecta fuit similis propositio VI. 3.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta Γ Ε$ γωνία τῇ ὑπὸ $Α Β Γ$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $Β Ζ$ τῇ $Γ Δ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Α Γ Β$ τῇ ὑπὸ $Δ Ε Γ$, παράλληλος ἐστὶν ἡ $Α Γ$ τῇ $Ζ Ε$ παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $Ζ Α Γ Δ$ ἴση ἄρα ἡ μὲν $Ζ Δ$ τῇ $Δ Γ$, ἡ δὲ $Α Γ$ τῇ $Ζ Δ$. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $Ζ Β Ε$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $Ζ Ε$ ἤκται ἡ $Α Γ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $Β Α$ πρὸς τὴν $Α Ζ$ οὕτως ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$. Ἰση δὲ ἡ $Α Ζ$ τῇ $Γ Δ$ ὡς ἄρα ἡ $Β Α$ πρὸς τὴν $Γ Δ$ οὕτως ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ $Α Β$ πρὸς τὴν $Β Γ$ οὕτως ἡ $Δ Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ $Γ Δ$ τῇ $Β Ζ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$ οὕτως ἡ $Ζ Δ$ πρὸς τὴν $Δ Ε$. Ἰση δὲ ἡ $Ζ Δ$ τῇ $Α Γ$ ὡς ἄρα ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$ οὕτως ἡ $Α Γ$ πρὸς τὴν $Ε Δ$, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Δ$ οὕτως ἡ

Obs. 7. ita probari potest. Si recta $Α Δ$ (Fig. 348.) bifariam dividat angulum $Β Α Γ$ trianguli non aequicruri $Α Β Γ$, erit $Α Β : Α Γ = Β Δ : Γ Δ$. Demittantur enim ex $Β, Γ$ in $Α Δ$ perpendiculara $Β Δ, Γ Θ$, eruntque triangula $Β Α Δ, Γ Θ Δ$ aequiangula, pariterque triangula $Β Α Α, Γ Θ Α$, unde erit $Β Α : Α Γ = Β Δ : Γ Θ = Β Δ : Γ Δ$ (VI. 4.). Ita rem demonstrat Thom. Simpson. (Elem. of Geom. IV. 18.). Et similiter res de recta, quae angulum externum bifariam secat, demonstratur.

Obs. 4. Si (Fig. 349.) latera $Β Γ, Α Γ$ trianguli $Α Β Γ$ bifariam secantur per rectas $Α Δ, Β Ε$ ex verticibus angulorum oppositorum $Α, Β$ ductas; recta quoque $Γ Ζ$ ex tertii anguli $Γ$ vertice ducta per punctum sectionis $Θ$ duarum $Α Δ, Β Ε$ bifariam secat tertium trianguli latus $Α Β$. Quippe ob $Β Δ = Α Γ, Ε Α = Ε Γ$, utrumque triangulum $Α Β Δ, Β Α Ε$ dimidium est trianguli $Β Α Γ$ (τ. 38. vel VI. 1.): igitur triang. $Α Β Δ =$ triang. $Β Α Ε$, demtoque communi triang. $Α Β Θ$, erit triang. $Β Α Θ =$ triang. $Α Θ Ε$, pariterque 2 triang. $Β Α Θ = 2$ triang. $Α Θ Ε$, h. e. ob $Β Δ = Α Γ$, et $Α Ε = Ε Γ$, triang. $Γ Β Θ =$ triang. $Γ Θ Α$ (I. 38. vel VI. 1.).

Et quoniam aequalis est angulus $\angle FE$ angulo $\angle ABF$, parallela igitur est BZ ipsi FA (I. 28.). Rursus, quoniam aequalis est $\angle FB$ ipsi $\angle EFG$, parallela est AF ipsi ZE ; parallelogrammum igitur est $ZAFG$; aequalis igitur ZA ipsi FG (I. 34.), AF vero ipsi ZG . Et quoniam uni laterum trianguli ZBE nempe ZE ducta est parallela AF , est ut BA ad AZ ita BF ad FE . (VI. 2.). Aequalis autem AZ ipsi FG ; ut igitur BA ad FA ita BF ad FE (V. 7.), et alterne (V. 16.) ut AB ad BF ita AF ad FE . Rursus, quoniam parallela est FA ipsi BZ , est igitur ut BF ad FE ita ZA ad AE (VI. 2.). Aequalis autem ZA ipsi FG ; ut igitur BF ad FE ita AF ad EA (V. 7.), alterne igitur (V. 16.) ut BF ad FA ita FE ad EA . Et quoniam ostensum est, ut AB quidem ad

Atqui tam triang. $FB\theta$:triang. FBZ)= FB : FZ (VI. 1.). Ergo
quam triang. $F\theta A$:triang. FAL)= $F\theta$: FZ (VI. 1.). Ergo
(V. 11.) triang. $FB\theta$:triang. FBZ = triang. $F\theta A$:triang. FAL ,
et hinc (V. 14.) triang. FBZ = triang. FAL , ac (I. 38. conv.)
 $BZ=AL$. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 66.

Obs. 5. Tres rectae, quae ex singulorum trianguli cuiusque ABF angulorum verticibus A , B , F (Fig. 350.) ducuntur ad puncta A , E , Z laterum oppositorum, ubi haec bifariam dividuntur, in eodem intra triangulum puncto se secant. Duas enim AA , BE , quae se in puncto θ secant, trahat, si fieri potest, tertia FZ in punctis K , H . Per puncta F , θ agatur recta $F\theta A$. Cum haec bifariam secet latus AB in puncto A , ubi ei occurrit (Obs. 4.), atque hoc non coincidere possit cum puncto Z (I. Post. 6.): foret AB bifariam secta in duobus punctis Z , A , quod fieri nequit (I. 9. I. 7. Ax.). Cf. Pfeiderer. l. c. §. 67.

Obs. 6. Eadem tres rectae (Fig. 349.) ita se in puncto communi θ secant, ut segmentum cuiuslibet adiacens lateri trianguli, eiusdemque segmentum adiacens vertici anguli op-

$ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$, ὡς δὲ ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ καὶ διόλου ἄρα οἷς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΕ$. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ εἰ.

Εἰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, ὡς δὲ τὴν $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως τὴν $ΕΖ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$, καὶ ἐτι ὡς τὴν $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ,

positi, ne tota recta sint uti 1:2:3; triangulum vero in sex triacula aequalia dividunt; ad punctum autem sectionis communis usque tantum ductae triangulum dividunt in tria aequalia. Nempe 1) ob $BA:ΔΓ=AB:EF=BZ:AZ$ (supp. et V. 5. Def.), sunt $ΔB$ et AB , AZ et $ΑΓ$ parallelae (VI. 2.). Quare (I. 15. et I. 20.) triacula $ΔΘΕ$ et $ΑΘΒ$, $ΔΘΖ$ et $ΑΘΓ$ sunt aequiangula, adeoque $ΔΘ:ΘΑ=$

$$\left(\begin{array}{l} ΘΕ:ΘΒ=ΔΕ:ΑΒ \text{ (VI. 4.)} \\ ΘΖ:ΘΓ=ΔΖ:ΑΓ \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} =ΑΓ:ΒΓ \\ =ΒΑ:ΒΓ \end{array} \right) \text{ (VI. 4. 2. Obs.)} =$$

$$1:2 \text{ et } ΔΘ:ΘΑ:ΑΑ=ΘΕ:ΘΒ:ΒΕ=ΘΖ:ΘΓ:ΖΓ=1:2:3 \text{ (V. 18.).}$$

$$2) \triangle ΘΒΑ \sim \triangle ΑΘΕ \text{ (Obs. 2. Dem.)} = \triangle ΑΓ = \triangle ΕΓ \text{ (I. 38.) et triang. } \left(\begin{array}{l} ΘΖΒ:ΘΓΒ \\ ΘΖΑ:ΘΓΑ \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} =ΘΖ:ΘΓ \text{ (VI. 1.)} \\ =1:2 \text{ (nr. 1.)} \end{array} \right)$$

$$\text{itaque } \begin{array}{l} 2ΘΖΒ = ΘΓΒ = 2ΘΑΒ \\ 2ΘΖΑ = ΘΓΑ = 2ΘΑΕ \end{array} \text{ et pariter } \begin{array}{l} ΘΖΒ = ΘΑΒ \\ ΘΖΑ = ΘΑΕ \end{array}$$

$$3) \triangle ΘΒΓ = \triangle ΑΓ \text{ (Obs. 4. Dem.) et } \triangle ΘΑΒ = \left(\begin{array}{l} 2ΘΖΒ \\ 2ΘΖΑ \end{array} \right)$$

$$\text{(I. 38.)} = \left(\begin{array}{l} ΘΓΒ \\ ΘΓΑ \end{array} \right) \text{ (nr. 2.): Cf. Pfleiderer. l. c. §. 68.}$$

BF ita AF ad FE ; ut vero BF ad FA ita FE ad EA ; et ex aequo igitur (V. 22.) ut BA ad AF ita FA ad AE . Aequiangulorum igitur etc.

PROPOSITIO V. (Fig. 351.)

Si duo. triangu- la latera proportionalia habeant, aequiangula erunt triangu- la; et aequales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangu- la ABF , AEZ latera proportionalia habentia, sitque ut AB quidem ad BF ita AE ad EZ , ut BF vero ad FA ita EZ ad ZA ; et adhuc ut BA ad AF ita EA ad AZ ; dico aequiangulum esse triangulum ABF triangulo AEZ , et aequales habere angulos, quos homologa latera subtendunt.

Obs. 7. Cum in triangulis aequilateris rectae bifariam dividentes angulos bifariam quoque secant latera opposita, et vicissim (I. 4. I. 8.); liquet identitas conclusionum (Obs. 4. ad VI. 3. et VI. 4. Obs. 6.) ad ipsa applicatarum. Eademque per rectas AA , BE , FZ in sex, per rectas $A\theta$, $B\theta$, $F\theta$ intra triangu- la similia et aequalia dividuntur. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 69.

Obs. 8. Vicissim, si recta AA ab vertice aliquo triangu- li ad punctum bisectionis lateris oppositi A ducta ita secatur in θ , ut segmentum ipsius $A\theta$ adiacens vertici triangu- li duplum sit alterius segmenti $A\theta$ adjacentis lateri opposito triangu- li; ceterae etiam rectae per punctum θ huius sectionis ex verticibus triangu- li ductae bifariam latera iis opposita secant.

Ductis nempe rectis $B\theta E$, AE , erunt triangu- la $\frac{BA\theta}{EA\theta} = \frac{2BA\theta}{2EA\theta}$ (VI. 1.) igitur $\triangle BAE = 2\triangle BAE$. Sed ob $BF = 2BA$ (supp.) etiam $\triangle BFE = 2\triangle BAE$ (VI. 1.). Quare $\triangle BAE = \triangle BFE$.

καὶ ἴσας ἔξουσιν τὰς γωνίας, ὅφ' αὖ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, τὴν δὲ ὑπὸ $BΓA$ τῇ ὑπὸ $EZΔ$, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ $BAΓ$ τῇ ὑπὸ $EΔZ$.

Συνεστιάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E, Z , τῇ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ZEH , τῇ δὲ ὑπὸ $BΓA$ ἴση ἡ ὑπὸ EZH . λοιπὴ ἔρεσθαι ἡ ὑπὸ $BAΓ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ EHZ ἔστιν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ EHZ τριγώνῳ· τῶν ἄρα $ABΓ, EHZ$ τριγώνων ἀνάλογον εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἔσονται ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ . Ἀλλ' ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως ὑπόκειται ἡ $ΔE$ πρὸς τὴν EZ ὡς ἄρα ἡ $ΔE$ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ · ἐκάτερα ἄρα τῶν $ΔE, HE$ πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔE$ τῇ HE . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $ΔZ$

et hinc (I. 38. conv.) $ΔE = HE$. Similiterque ostenditur, vel nunc ex Obs. 4. infertur, ducta $ΓΘZ$ recta fieri etiam $ΔZ = EZ$. Cf. Pfeiderer, l. c. §. 70.

Obs. 9. Pariter, si tres rectae $ΘA, ΘB, ΘΓ$ ab puncto $Θ$ intra triangulum ad vertices angulorum eius ductae triangulum in tria aequalia dividunt; rectae haec ad latera usque trianguli opposita continuatae bifariam ea dividunt. Est enim (VI. 1.) $ΔAΘB : ΔΘΔB = AΘ : ΘΔ = AΘΓ : ΔΘΓ$. Quare, ob $ΔAΘB = ΔAΘΓ$ (supp.), etiam $ΔΘΔB = ΔΘΓ$ (V. 14.) et hinc (I. 38. conv.) $BΔ = ΓΔ$. Et similiter in reliquis. Cf. Pfeiderer, l. c. §. 71.

PROP. V. VI.

Obs. 1. Propositiones haec conversae sunt praecedentis quartae, atque uti haec propositioni I. 26. ita illae propositio-

dunt, angulum quidem $AB\Gamma$ angulo ΔEZ , angulum vero $B\Gamma A$ angulo EZA ; et insuper angulum $B\Gamma A$ angulo EAZ .

Constituatur enim (I. 23.) ad rectam EZ , et ad puncta in ea E , Z , angulo quidem $AB\Gamma$ aequalis ZEH , angulo vero $B\Gamma A$ aequalis angulus EZH ; reliquus (I. 32.) igitur $BA\Gamma$ reliquo EHZ est aequalis.

Aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo EHZ ; triangulorum igitur $AB\Gamma$, EHZ proportionalia sunt latera (VI. 4.), circum aequales angulos, et homologa latera aequales angulos subtendunt; est igitur ut AB ad $B\Gamma$ ita HE ad EZ . Sed ut AB ad $B\Gamma$ ita ponitur ΔE ad EZ ; ut igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ (V. 11.); utraque igitur ipsarum ΔE , HE ad EZ eandem habet rationem; aequalis igitur est ΔE ipsi HE (V. 9.). Ex eadem ratione et ΔZ ipsi HZ aequalis est. Et quoniam aequalis est ΔE

nibus I. 8. I. 4. respondent, ad quas earum demonstrationes reducuntur, et. sub quarum conditionibus triangu-
la similia et aequalia sunt. Cf. Pfeiderer, l. c. §. 72.

Obs. 2. Sub quintae conditionibus similia esse triangu-
la propositio haec aequae immediate ac quarta efficit: positis au-
tem sextae conditionibus, mediante quarta demum proportio-
nalitas reliquorum circa angulos aequales laterum, ad triangu-
lorum similitudinem per VI. 4. Def. requisita, colligitur. Cf.
Pfeiderer, l. c. §. 73.

Obs. 3. Ope sextae demonstrantur conversae nonnulla-
rum propositionum, quae Obs. 2. ad VI. 4. comprehenduntur,
nempe quod, sumtis (Fig. 338. 339.) in eadem recta tribus
punctis A , B , Δ , et per duo eorum B , Δ ductis duabus pa-
rallelis $B\Gamma$, ΔE ad easdem (vel oppositas) rectae illius partes,

τῇ HZ ἔστιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ AE τῇ EH , κοινὴ δὲ ἡ EZ , δύο δὲ αἱ AE , EZ ὅσαι ταῖς HE , EZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ZA βάσει τῇ ZH ἔστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AEZ γωνία τῇ ὑπὸ HEZ ἔστιν ἴση. Καὶ τὸ AEZ τρίγωνον τῷ HEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ HZE , ἡ δὲ ὑπὸ EAZ τῇ ὑπὸ EHZ . Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ZEA τῇ ὑπὸ ZEH ἔστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ HEZ τῇ ὑπὸ ABF ἔστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ABF ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ AEZ ἔστιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ABF τῇ ὑπὸ AZE ἔστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ABF τρίγωνον τῷ AEZ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν καὶ γωνία ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον

propterea puncta B , Δ in ea iacent ad eandem (vel oppositas) partes puncti A , sic, ut sit $B\Gamma : AE = AB : AA$, puncta A , F , E pariter iaceant in directum. Iunctis enim AF , AE rectoris, ob angulum $AB\Gamma = AAE$ (I. 29.) et $B\Gamma : AE = AB : AA$ (app.) est angulus $BAG = AAE$ (VI. 6.), ideoque priori casu rectorum AF , AE una in alteram incidit (Conv. I. 8. Ax.); posteriori eadem rectorae in directum sibi invicem sunt (Conv. I. 15.). Clavius posterius eodem modo, prius indirecte demonstrat. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 76.

Obs. 4. Sint (Fig. 353.) AB , GA parallelae, et O , Π rectorae quaecunque inaequales. Utrumque a punctis E , Z in parallelis ubicunque sumtis, abscindantur in priore $ZH = Z\eta = O$, in posteriore $E\theta = E\vartheta = \Pi$, ita ut puncta H , θ sint ex una rectorae EZ parte, η , ϑ ex altera: tres rectorae EZ , θH , $\vartheta \eta$ in

ipsi EH , communis autem EZ ; duae AE , EZ duabus HE , EZ aequales sunt, et basis ZA basi ZH est aequalis; angulus igitur AEZ angulo HEZ est aequalis (I. 8.). Et triangulum AEZ triangulo HEZ aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur est et angulus quidem AZE ipsi HZE , angulus vero EAZ ipsi EHZ . Et quoniam angulus quidem ZEA ipsi ZEH est aequalis, sed HEZ ipsi ABF est aequalis, et ABF igitur angulus ipsi AEZ est aequalis (I. Ax. 1.). Ex eadem ratione angulus ABF ipsi AZE est aequalis, et insuper angulus ad A ipsi ad A ; aequiangulum igitur est triangulum ABF triangulo AEZ . Si igitur duo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 352.)

Si duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa aequales autem angulos latera pro eodem extra parallelas puncto K concurrent: et, si duo segmenta ZN , EM ad easdem rectas EZ partes ab parallelis AB , GA abscissae sunt, ita ut sit $ZN:EM=O:H$, recta quoque NM , altera eorum extrema N , M iungens per punctum K transibit. Quippe rectis EZ , GH se in puncto K secantibus (parallelae enim esse nequeunt, quodsi enim parallelae essent, foret $ZH=E\theta$ (I. 34.) i. e. $O=H$ contra supposit.) est (Obs. 2. ad VI. 4.) $ZH:E\theta=KZ:KE$. Sed ob $Z\eta=ZH$, $E\theta=E\theta$, est (V. 7. Cor.) $Z\eta:E\theta=ZH:E\theta$, ac (hyp. et V. 7. V. 11.) est $ZN:EM=O:H=ZH:E\theta$, ideoque (V. 11.) tam $Z\eta:E\theta=KZ:KE$, quam $ZN:EM=KZ:KE$, et hinc (Obs. 3.) tam puncta η , θ , K , quam puncta N , M , K iacent in directum. Iisdem porro, quae supra, sumtis et factis (nisi quod rectae O , H nunc etiam possunt esse aequales): tres rectae EZ , $H\theta$,

ισογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ μιᾶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ $ΔΖ$ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς $Δ$, $Ζ$, ὁποῦντα μὲν τῶν ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ ἴση ἡ ὑπὸ $ΖΔΗ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἡ ὑπὸ $ΔΖΗ$.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Β$ γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ $Η$ ἴση ἔστί· ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΗΖ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΗΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. Τυπόμεται δὲ καὶ ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ οὕτως ἡ $ΗΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ · ἴση ἄρα ἡ $ΕΔ$ τῇ $ΔΗ$, καὶ κοινὴ ἡ $ΔΖ$ · δύο δὴ αἱ $ΕΔ$, $ΔΖ$ δυοῖς ταῖς $ΗΔ$, $ΔΖ$ ἴσαι

et se in eodem intra parallelas puncto * secabunt, et, si segmenta $Z\theta$, $E\mu$ ad alternas rectae EZ partes ab parallelis AB , ΓA abscissa sunt, ut O ad Δ , recta etiam $\nu\mu$ altera eorum extrema iungens per punctum * transibit, quod eodem modo demonstratur. Cf. Pfleiderer. I. c. §§. 77. 78.

Obs. 5. Quae in Obs. 4. vidimus, inserviunt solvendo problemati, quod in Loc. 1. et 2. Libri I. Apollonii de Sectione rationis habetur. Praeterea inde patet, in quadrilateris, quorum duo latera sunt parallela, rectam, quae haec latera bifariam dividit, et diagonales figurae in eodem intra quadrilaterum puncto se secare; et si altera duo latera parallela non

portionalia; aequiangula erunt triangu-
la, et aequales
habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangu-
la $AB\Gamma$, ΔEZ , unum angulum
 $B\Gamma$ uni angulo $E\Delta Z$ aequalem habentia, circa ae-
quales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad
 $A\Gamma$ ita EA ad ΔZ ; dico aequiangulum esse triangu-
lum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ , et aequalem habiturum
esse angulum $AB\Gamma$ quidem angulo ΔEZ , angulum
vero $A\Gamma B$ ipsi ΔZE .

Constituatur enim (I. 23.) ad rectam ΔZ , et ad
puncta in ipsa Δ , Z , alterutri angulorum $B\Gamma$, $E\Delta Z$
aequalis angulus $Z\Delta H$, angulo vero $A\Gamma B$ aequalis
ipse ΔZH .

Reliquus igitur angulus ad B reliquo ad H aequa-
lis est (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum
 $AB\Gamma$ triangulo ΔHZ ; proportionaliter igitur est (VI.
4.) ut BA ad $A\Gamma$ ita HA ad ΔZ . Ponitur autem et
ut BA ad $A\Gamma$ ita EA ad ΔZ ; ut igitur (V. 11.) EA
ad ΔZ ita HA ad ΔZ ; aequalis igitur (V. 9.) EA ipsi
 ΔH , et communis ΔZ ; duae igitur EA , ΔZ duabus
 HA , ΔZ aequales sunt, et angulus $E\Delta Z$ angulo $H\Delta Z$

sint, haec, atque rectam bifariam latera parallela dividenter
in eodem extra figuram puncto concurrere; in parallelogram-
mis igitur diagonales, et rectas bina latera opposita bifariam
dividentes eodem in puncto se secare: quod ita fieri alio modo
ostenditur in demonstratione XI. 39. Cf. Pfeiderer. l. c. §§.
79—82.

Obs. 6. Perpendicularia e tribus angulis trianguli alicuius
in latera opposita demissa in eodem puncto se intersecant. Sit
(Fig. 354.) $AB\Gamma$ triangulum, in quo duo perpendicularia ex op-
positis angulis in latera $A\Gamma$, AB demissa se intersecant in
puncto Z , iungatur AZ , et producat, si opus est, usquedum

αἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAZ γωνία τῇ ὑπὸ HJZ ἴση·
 ῥύσις ἄρα ἡ EZ βάσει τῇ ZH ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $\triangle EZZ$
 τρίγωνον τῷ $\triangle HZ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ
 γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρω
 τέρα ¹⁾ ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα
 ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $\triangle ZH$ τῇ ὑπὸ $\triangle ZE$, ἡ δὲ ὑπὸ $\triangle HZ$
 τῇ ὑπὸ $\triangle EZ$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\triangle ZH$ τῇ ὑπὸ $\triangle GB$ ἐστὶν
 ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $\triangle GB$ ἄρα τῇ ὑπὸ $\triangle ZE$ ἐστὶν ἴση.
 Ὑποκείται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\triangle BG$ τῇ ὑπὸ $\triangle EZ$ ἴση, καὶ
 λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ B λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ E ἴση
 ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle GB$ τρίγωνον τῷ $\triangle EZ$
 τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην
 ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον,
 τῶν δὲ λοιπῶν ἐκατέραν ἄμω ἦτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ-
 ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσονται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας
 ἔξει τὰς γωνίας, περὶ ἧς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ.

1) Verba ἐκατέρω ἐκατέρω, quae Peyrardus consentiente
 Cod. a. omittit, ex add. Oxon. et Basil. restituimus, quum
 alias etiam Euclidi solemus sit, verba propositionum autece-
 dentium exacte citare, et in I. 4: haec verba expressa sint.

rectae BP occurrat in Θ , erit $A\Theta$ perpendicularis ad BP . In-
 gatur enim AB , et circa triangulum AEZ describatur circulus
 (IV. 5.); eritque, ob angulum rectum AEZ , AZ diameter cir-
 culi (Obs. 1. ad III. 31.). Eodem modo ostendetur, AZ esse
 diametrum circuli circa triangulum AZA circumscripti: itaque
 puncta A , E , Z , A in circumferentia eiusdem circuli posita
 erunt. At ob angulum $BZB = AZ\Gamma$ (I. 15.) et angulum BEZ
 $= \Gamma AZ$ (uterque enim rectus est), triangula BEZ , ΓAZ sunt
 aequiangula, adeoque $BZ : EZ = \Gamma Z : AZ$ (VI. 4.), aut alternis

aequalis; basis igitur (I. 4.) EZ basi ZH est aequalis, et triangulum AEZ triangulo AHZ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur est AZH quidem ipsi AZE , angulus vero AHZ ipsi AEZ . Sed ipse AZH ipsi ACB est aequalis (constr.), et ACB igitur ipsi AZE est aequalis. Ponitur autem et BAF ipsi EAZ aequalis; et reliquus igitur ad B reliquo ad E aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum ABF triangulo AEZ . Si igitur duo triangu-
la etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 355.)

Si duo triangu-
la unum angulum uni angulo aequa-
lem habeant, circa alios autem angulos latera propor-
tionalia, reliquorum vero utrumque simul vel mino-
rem, vel non minorem recto; aequiangula erunt trian-
gula, et aequales habebunt angulos, circa quos pro-
portionalia sunt latera.

$BZ:IZ=EZ:AZ$ (V. 16.). Quoniam igitur latera circa an-
gulos aequales BZI , EZA sunt proportionalia, triangu-
la BZI , AZE sunt aequiangula (VI. 6.), adeoque angulus $ZIB=EAZ$.
At $EAZ=EAZ$ (III. 21.): itaque $EAZ=ZIB=ZIG$. Prae-
terea autem et $EZA=ZGI$ (I. 15.): itaque etiam $AEZ=ZGI$
(I. 32.), adeoque, quum AEZ rectus sit, rectus erit etiam
 ZGI , vel IG perpendicularis erit ad BI . (Playfair. VI. Prop.
H.). — Paulo brevius ita demonstratur, esse angulum ZIB
 $=EAZ$. Quum BEI sit rectus aeque ac BAT , ex Cor. 2. ad
III. 21. semicirculus super diametro BI descriptus per E et
 A transibit, unde erit $ZIB=EAZ$ (III. 21.). Vid. Kügels
Wörterb. I. Th. p. 925, et, qui ibi p. 926. laudatur, Eulerus
in Nov. Commentar. Petrop. Tom. XI. a. 1765. — Addi po-
t. Euclid. Element. P. II.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$, μίαν γωνίαν μία γωνία ἰσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ $ABΓ$, $ΔEZ$, τὰς πλεονεκές ἀνέλογον, ὥς τὴν AB πρὸς τὴν $ΒΓ$ εὐκείας τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς $Γ$, $Ζ$ πρότερον ἐκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὁρῶντες λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔEZ$ τρίγωνῳ, καὶ ἰση ἐστὶ ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, καὶ λοιπὴ δὲ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ $Γ$ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ $Ζ$ ἰση.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ $ABΓ$ καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B , τῇ ὑπὸ $ΔEZ$ γωνίᾳ ἰση ἡ ὑπὸ ABH .

Καὶ ἐπεὶ ἰση ἐστίν ἡ μὲν A γωνία τῇ $Δ$, ἡ δὲ ὑπὸ ABH γωνία τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AHB λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΔZE$ ἐστίν ἰση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ $ΔEZ$ τρίγωνῳ· ἐστίν ἄρα ὥς ἡ AB πρὸς τὴν BH οὕτως ἡ $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. Ὡς δὲ ἡ $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, οὕτως ὑπόκειται ἡ AB πρὸς τὴν BE · καὶ ὥς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν BE , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν

terat et vice versa, si AG perpendicularis est ad BE , transire debet per Z . Si enim non transeat, alia recta per A et Z ducta ex demonstratione pariter erit ad BE perpendicularis, quod fieri nequit (I. 17. Cor. 4.).

PROPOSITIO VII.

Obs. 1. Rob. Simpson, duobus hac propositione enumeratis casibus, tertium addit „omissum, et in demonstrationibus non raro occurrentem“ quo reliquarum angulorum alter sit rectus. Demonstratio autem huius casus eadem fere est, quae

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ , unum angulum uni angulo aequalem habentia, angulum nempe $B\Delta\Gamma$ angulo $E\Delta Z$, circa alios autem angulos $AB\Gamma$, ΔEZ , latera proportionalia, ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ , reliquorum vero ad Γ , Z primo utrumque simul minorem recto; dico aequiangulum esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ , et aequalem fore angulum $AB\Gamma$ angulo ΔEZ , et reliquum nempe angulum ad Γ reliquo ad Z aequalem.

Si enim inaequalis est angulus $AB\Gamma$ angulo ΔEZ , unus ipsorum maior est. Sit maior $AB\Gamma$; et constituatur (I. 23.) ad rectam AB et ad punctum in ea B , angulo ΔEZ aequalis angulus ABH .

Et quoniam aequalis est angulus quidem A angulo Δ , angulus vero ABH ipsi ΔEZ , reliquus igitur AHB reliquo ΔZE est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum ABH triangulo ΔEZ ; est igitur (VI. 4.) ut AB ad BH ita ΔE ad EZ . Ut autem ΔE ad EZ ita ponitur AB ad $B\Gamma$; ut igitur AB ad $B\Gamma$ ita AB ad BH (V. 11.), recta igitur AB ad utramque ipsarum $B\Gamma$, BH eandem habet rationem; aequalis

casus secundus, nec omnino necesse videtur, tertium hunc casum nominatim afferre, quia expressio „non minor recto“ eum etiam casum, quo angulus rectus est, comprehendat.

Obs. 2. Patet, hanc propositionem respondere etiam quoad I. 26. Obs. 2. ut casum quintum, quo duo triangula aequalia esse possunt, notavimus. Et hoc triangulorum aequalium casu praemisso potest nostra haec propositio eodem modo, quo praecedentes duae demonstrari. Cf. Theodoret. I. c. P. II. §. 86.

BH , ἢ AB ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν $BΓ$, BH τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $BΓ$ τῇ BH . ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ $Γ$ γωνία τῇ ὑπὸ BHF ἐστὶν ἴση. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ $Γ$, ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ BHF , ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ AHB μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Z , καὶ ἡ πρὸς τῷ Z ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Τίθεται δὲ ἐλάττων ὀρθῆς, ὅπερ ἀτόπιον οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῇ πρὸς τῷ $Δ$, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Γ$ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστὶν ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τρίγωνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν υποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς $Γ$, Z μὴ ἐλάττων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τρίγωνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $BΓ$ τῇ BH ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ $Γ$ τῇ ὑπὸ BHF ἴση ἐστὶν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ $Γ$, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ BHF . Τριγώνου δὴ τοῦ BHF αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδυνάτον οὐκ ἄρα πάλιν ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ $Δ$ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Γ$ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστὶν ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τρίγωνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἐξῆς.

Obs. 3. Triangula sub conditionibus VI. 7. similia esse, uti ex VI. 6. (vid. ad VI..6. Obs. 2.) infertur. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 87.

igitur est BF ipsi BH (V. 9.); quare et angulus ad F angulo BHF est aequalis (I. 5.). Minor autem recto ponitur angulus ad F ; minor igitur est recto angulus BHF , quare (I. 13.) qui ei deinceps est angulus AHB maior est recto. Et ostensus est aequalis esse angulo ad Z , et ipse angulus ad Z igitur maior est recto. Ponitur autem minor recto, quod est absurdum; non igitur inaequalis est angulus ABF angulo AEZ , aequalis igitur. Est autem et angulus ad A aequalis angulo ad A , et reliquus igitur (I. 32.) ad F reliquo ad Z aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum ABF triangulo AEZ .

Sed et rursus ponatur uterque angulorum ad F , Z non minor recto; dico rursus et sic aequiangulum esse triangulum ABF triangulo AEZ .

Isdem enim constructis, similiter ostendemus aequalem esse BF ipsi BH ; quare et angulus ad F ipsi BHF aequalis est. Non minor autem recto est angulus ad F ; non est igitur minor recto BHF . Trianguli igitur BHF duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod fieri nequit (I. 17.); rursus igitur non inaequalis est angulus ABF angulo AEZ ; aequalis igitur. Est autem et angulus ad A angulo ad A aequalis, reliquus igitur (I. 32.) ad F reliquo ad Z aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum ABF ipsi triangulo AEZ . Si igitur duo triangula etc.

Obs. 4. Notari etiam potest, casum primum, quo nempe angulorum ad F , Z uterque minor est recto, semper existere, si latera AB , AE adjacentia angulis (supp.) aequalibus A , A

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

Εάν ἐν ὀρθογώνιῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ δὲ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστὶ τριγώνον ὀρθογώνιον τὸ $ABΓ$, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ $BAΓ$ γωνίαν, καὶ ἤχθῃ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $BΓ$ κάθετος ἡ AD . λέγω ὅτι ὅμοιον ἐστὶν ἐκαστερον τῶν $ABΔ$, $ADΓ$ τριγώνων ὅλῳ τῷ $ABΓ$ καὶ ἐπὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BAΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $AΔB$, ὀρθῇ γὰρ ἐκαστέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε $ABΓ$ καὶ τοῦ $ABΔ$ ἡ πρὸς τῷ B λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AGB λοιπὴ τῇ ὑπὸ $BAΔ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τριγώνον τῷ $ABΔ$ τριγώνῳ.

Ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $BΓ$ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ $ABΓ$ τριγώνου πρὸς τὴν BA ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ $ABΔ$ τριγώνου, οὕτως αὐτῇ ἡ AB ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ $Γ$ γωνίαν τοῦ $ABΓ$ τριγώνου πρὸς τὴν BA ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ $Γ$, τὴν ὑπὸ BAA τοῦ $ABΔ$ τριγώνου καὶ ἐπὶ ἡ AG πρὸς τὴν AD ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων τὸ $ABΓ$ ἄρα τριγώνον τῷ $ABΔ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τριγώ-

minora sint alteris BE , EZ (I. 18. et I. 17. Cor. 3. Cf. Pfeiderer. I. c. §. 88.

Obs. 5. Necessitas tertiae conditionis propositioni VI. 7. adiunctae simili fere ratione evidetur, ac in Obs. 2. ad I. 26. vidimus, duo triangula, in quibus duo latera cum angulo uni eorum opposito utrimque aequalia sint, non semper aequalia esse, et nova ad hanc aequalitatem determinatione opus esse. Cf. Pfeiderer: I. c. §§. 89. 90.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 356.)

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basin perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem sunt triacula similia et toti et inter se.

Sit triangulum rectangulum $AB\Gamma$, rectum habens angulum $B\Lambda\Gamma$, et ducatur ab A ad $B\Gamma$ perpendicularis AA ; dico simile esse utrumque triangulorum ABA , $AA\Gamma$ toti $AB\Gamma$ et inter se.

Quoniam enim aequalis est angulus $B\Lambda\Gamma$ angulo $A\Lambda B$, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis $AB\Gamma$ et ABA angulus ad B ; reliquus igitur $A\Gamma B$ reliquo $BA\Lambda$ est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ABA . Est igitur (VI. 4.) ut $B\Gamma$ subtendens angulum rectum trianguli $AB\Gamma$ ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABA , ita eadem AB subtendens angulum ad Γ trianguli $AB\Gamma$ ad BA subtendentem angulum aequalem angulo ad Γ , nempe $BA\Lambda$ ipsius trianguli ABA ; et etiam $A\Gamma$ ad AA subtendentem angulum ad B , communem duobus triangulis; triangulum igitur $AB\Gamma$ triangulo ABA aequiangulum est, et latera circa aequales angulos proportionalia habet; simile igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ABA . Similiter ostend-

PROPOSITIO VIII.

Obs. 1. Robert. Simson. monet: „manifestum est, aliquem mutasse demonstrationem, quam Euclides huius propositionis dederat. Etenim auctor eius postquam demonstraverat triacula esse inter se aequiangula, particulatim ostendit, latera eorum circa aequales angulos proportionalia esse, quas hoc non factum fuisset in propositione quarta huius libri. Haec autem superflua non inveniuntur in versione (Campani)

νον τῷ $AB\Delta$ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ $AA\Gamma$ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τριγώνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν $AB\Delta$, $AA\Gamma$ τριγώνων ὁμοίον ἐστὶ ὅλῳ τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ $AB\Delta$, $AA\Gamma$ τριγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ BAA ὀρθὴ τῇ ὑπὸ $AA\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ BAA τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ B λοιπὴ τῇ ὑπὸ $AA\Gamma$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τριγώνον τῷ $AA\Gamma$ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA τοῦ $AB\Delta$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ BAA , πρὸς τὴν AA τοῦ $AA\Gamma$ τριγώνου, ὑποτείνουσάν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ BAA , οὕτως αὐτὴ ἡ AA τοῦ $AB\Delta$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, πρὸς τὴν AG ὑποτείνουσάν τὴν ὑπὸ $AA\Gamma$ τοῦ $AA\Gamma$ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ B · καὶ ἐτι ἡ BA ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ $AA\Gamma$, πρὸς τὴν AG ὑποτείνουσάν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ $AA\Gamma$ · ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τριγώνον τῷ $AA\Gamma$ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογώνῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κἀθετός

ex lingua arabica et nunc (a Simsone) ommissa sunt. "Ostensa nempe angulorum aequalitate, inferat Rob. Simson: „aequiangula igitur sunt triangula, quare latera circa aequales angulos proportionalia habent (VI. 4.); et propterea inter se similia sunt" (VI. 1. Def.). Est eadem fere est demonstratio Campani.

demus, et triangulo AAF simile esse triangulum ABF ; utrumque igitur triangulorum ABA , AAF simile est toti triangulo ABF .

Dico etiam et inter se esse similia triangula ABA , AAF .

Quoniam enim rectus BAA recto AAF est aequalis, sed et BAA angulo ad F ostensus est aequalis, et reliquus igitur (I. 32.) ad B reliquo AAF est aequalis; aequiangulum igitur est triangulum ABA triangulo AAF . Est igitur (VI. 4.) ut BA trianguli ABA , subtendens angulum BAA , ad AA trianguli AAF subtendentem angulum ad F , aequalem ipsi BAA , ita eadem AA ipsius trianguli ABA , subtendens angulum ad B , ad AF subtendentem angulum AAF trianguli AAF , aequalem angulo ad B , et etiam BA subtendens rectum AAB , ad AF subtendentem rectum AAF ; simile igitur est triangulum ABA triangulo AAF . Si igitur in rectangulo, etc.

COROLLARIUM.

Ex hoc evidens est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basin perpendicularis ducta fuerit,

Obs. 2. Austin. p. 68. corollarium etiam propositioni adiunctum reprobat. Pfeiderer, l. c. §. 93. circa hanc rem observat: „priori huius corollarii parte, ipsis eius verbis promore relatis, demonstrationes nituntur VI. 13. partis tertiae Lemm. 1. ante X. 34. ac Lemm. post XIII. 13. Contra eundem pars altera in demonstrationibus partis primae Lemm. 1. ante X. 34.; partis tertiae XIII. 13.; Lemm. post eam; partis

ἄχθῃ, ἢ ἀχθείσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογον· ἔστιν· καὶ ἐτι τῆς βάσεως καὶ ἐπὶς ὁποτέρου τῶν τμημάτων ἢ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογον ἔστιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα ἡ AB · δεῖ δὲ τῆς AB τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὲ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ A ἡ AG , γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς AB τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς AG τοῦ A , καὶ κείσθωσαν τῇ AG ἴσαι αἱ AE , EG · καὶ ἐπεξεύχθω ἡ BG , καὶ διὰ τοῦ A παράλληλος αὐτῇ ᾗθω ἡ AZ .

ultimae XIII. 18. ac III. 6. Collect. mathem. Pappi Propositionibus VI. 8. et VI. 4. deducta traditur: serius itaque, usus illius frequentis causa, tum locis citatis, tum alibi, ut in demonstrationibus XIII. 14. XIII. 15. XIII. 16. addita (forsan restituta) est censenda. Addit deinde Pflleiderer., praeter duas proportionales corollarie hoc enunciatis notari mereri adhuc sequentes: 1) latus, quod trianguli rectanguli angulum rectum subtendit, est ad alterum eius latus circa angulum rectum, uti reliquum ipsius latus circa angulum rectum est ad perpendicularum ex vertice anguli recti in hypotenusam demissum, et alterne (IV. 4). 2) Unum trianguli rectanguli latus circa angulum rectum est ad alterum: uti, quod priori adiacet, segmentum hypotenusae, perpendicularo in eam ex vertice anguli recti demisso abscissum, est ad ipsum hoc perpendicularum; vel uti hoc perpendicularum est ad segmentum hypotenusae adiacens lateri posteriori (IV. 4.).

ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basin et utrumlibet segmentorum, huic segmento adiacens latus, medium proportionale esse.

PROPOSITIO IX. (Fig. 357.)

Ab data recta imperatam partem auferre.

Sit data recta AB ; oportet ab ipsa AB imperatam partem auferre.

Imperetur pars tertia; et ducatur quaedam recta AI ab A , quemlibet angulum continens cum ipsa AB ; et sumatur quodlibet punctum I in AI , et ponantur ipsi AI aequales AE , EF (I. 3.); et iungatur BT , et per A parallela huic ducatur AZ (I. 31.).

Obs. 3. Cum anguli in semicirculo sint recti (III. 31.); perpendicularis ab quocunque peripheriae circuli puncto ad aliquam eius diametrum ducta est media proportionalis inter segmenta diametri huius ab perpendicularo illo facta: et quolibet circuli chorda per centrum non transiens media proportionalis est inter diametri per alterutrum eius extremum ductae segmentum ipsi adiacens, quod perpendicularum ab altero chordae extremo in diametrum hanc demissum ab ea abscindit, ipsamque diametrum (VI. 8. Cor.). Cf. Pfeiderer. l. c. §. 94.

PROPOSITIO IX.

Obs. 1. Rob. Simson. monet demonstratio huius facta est in casu particulari, in quo scilicet pars tertia abscindenda est a data recta (contra tenorem, ut Pfeiderer. addit, tam propositionis, quam expositionis, et absque ulla mentione applicationis solutionis exhibitae particularis ad ceteros casus).

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ $ABΓ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΒΓ$ ἔχται ἡ $ΖΑ$ ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ $ΒΖ$ πρὸς τὴν $ΖΑ$. Διπλὴ δὲ ἡ $ΓΔ$ τῆς $ΔΑ$ διπλὴ ἄρα καὶ ἡ $ΒΖ$ τῆς $ΖΑ$ τριπλὴ ἄρα ἡ $ΒΑ$ τῆς $ΑΖ$.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς AB τὸ ἐπιταχθέν τρίτον μέρος ἀφ' ἧται τὸ AZ . "Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Η Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ι.

Τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν ἀτμήτον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένην ὁμοίως τεμεῖν.

"Ἐστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἀτμήτος ἢ AB , ἡ δὲ τετμημένη ἡ $ΑΓ$ (δεῖ δὴ τὴν AB ἀτμήτον καὶ $ΑΓ$ τετμημένην ὁμοίως τεμεῖν. "Ἐστω τετμημένη ἡ $ΑΓ$ ¹⁾, κατὰ τὰ $Δ, Ε$ σημεία, καὶ κείσθωσαν ὡς ἔστι γωνίαν τιχούσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΓΒ$, καὶ διὰ τῶν $Δ, Ε$ τῇ $ΒΓ$ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $AZ, ΕΗ$, διὰ δὲ τοῦ $Α$ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $ΑΘΚ$.

1) Quae uncis inclusa sunt, desunt in ed. Parisiensi et Codd. a. c. d. Quum tamen in expositione apud Euclidem, ea quae in problemate fieri iubentur, expresse repeti soleant, genuina illa omnino esse videntur, et librarii tantum incuria in Mss. omissa. Itaque illa restituiimus ex edd. Oxon. et Basil.

„quaræ minime videtur Euclidis esse. Praeterea in quatuor magnitudinibus proportionalibus concludit auctor, tertiam aequemultiplicem esse quartae, atque prima est secundae; quod quidem in libro V. ut eum nunc habemus, nullibi ostensum est. (Vld. Prop. D. in Exc. ad L. V.). Sed hoc, ut alia, assumit editor ex confusanea apud vulgus recepta proportionalium notione.“ Generalem deinde Simson. addit demonstrationem, dum nempe iubet rectam $ΑΓ$ tam multiplicem

Itaque quoniam uni lateri BF trianguli ABF parallela ducta est recta ZA ; erit (VI. 2.) ut TA ad AA ita BZ ad ZA . Dupla autem FA ipsius AA ; dupla igitur et BZ ipsius ZA ; tripla igitur BA ipsius AZ .

Ab ipsa igitur data recta AB imperata tertia pars ablata est AZ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 358.)

Datam rectam insectam similiter secare, ut data recta secta est.

Sit data quidem recta insecta AB ; secta vero AF ; oportet insectam rectam AB similiter secare, ut AF secta est. Sit AF secta in punctis A , E , et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et iungatur FB , et (I. 31.) per A , E ipsi BF parallelæ ducantur AZ , EH , per A autem ipsi AB parallela ducatur AK .

sumi rectae AA pro lubitu sumtae; quam multiplex esse debet AB partis abscindendae, et reliquis peractis, ut in textu graeco, concludit, esse (VI. 2.) $TA:AA=BZ:AZ$, et (V. 18.) componendo $AF:AA=AB:AZ$, unde (V. Prop. D.) AB tam multiplex est rectae AZ , quam multiplex sumta fuit AF rectae AA adeoque AZ eadem pars erit rectae AB , quae pars est AA rectae AF i. e. AZ erit pars a recta AB abscindenda. Eadem demonstratio, notante Pfeiderer. l. & §. 96. ita etiam absque subsidio Prop. D. absolvi potest, ut a Baermanno in scholio adiuncto factum est. Ob parallelas BT , ZA est $AF:AA=AB:AZ$ (VII. 2. Obs. 2.) vel alternis (V. 16.) $AF:AB=AA:AZ=n.AA:n.AZ$ (V. 11. V. 15.) denotante n numerum integrum, iuxta quem data AB multiplex esse debet partis abscindendae. Quare cum sit $AF=n \times AA$ (constr.); pariter est $AB=n \times AZ$ (V. 14.).

Παράλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $ZΘ$, $ΘΒ$. Ἰση ἄρα ἡ μὲν $ΔΘ$ τῇ ZH , ἡ δὲ $ΘΚ$ τῇ HB . Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΔΚΓ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΚΓ$ εὐθεῖα ἤκται ἡ $ΘΕ$ · ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ $ΚΘ$ πρὸς τὴν $ΘΔ$. Ἰση δὲ ἡ μὲν $ΚΘ$ τῇ BH , ἡ δὲ $ΘΔ$ τῇ HZ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ . Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΑΗΕ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΕΗ$ ἤκται ἡ $ΖΔ$ · ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν $ΖΑ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ · ἐστὶν ἄρα ὡς μὲν ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ , ὡς δὲ ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν $ΖΑ$.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμήτος ἡ $ΑΒ$ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη τῇ $ΑΓ$ ὁμοίως τέτμηται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Δύο δοθεῖσων εὐθεῶν, τρετὴν ἀνάλογον προσευρεῖν.

Obs. 2. Eadem ratione ab data recta AB abscindatur segmentum, quod ad totam habeat rationem datam rectae minoris M ad maiorem $M+N$; vel quod ad segmentum residuum habeat rationem datam rectae M ad datam N ; seu data recta AB secabitur in data ratione, rectae nimirum datae M ad datam N , abscissa nampe $AA=M$, $AN=N$, reliquisque ut in VI. 9. peractis (Vid. Pappi ad Libros de Sect. rationis Lemm. I. Collect. Mathem. Halley p. XVIII. XLV. Clavius, Tacquet, Pfeiderer. l. c. §. 99. Similique ratione datae rectae AB alia ab puncto inde A in directum adicietur, quae ad ipsam habeat datam rationem, datae nimirum rectae M ad datam N ;

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum ZO , OB ; aequalis igitur (I. 34.) AO ipsi ZH , OK vero ipsi HB . Et quoniam uni lateri trianguli AKT ipsi nempe KT parallela ducta est recta OE ; est (VI. 2.) ut FE ad EA ita KO ad OA . Aequalis autem est KO quidem ipsi BH , OA verò ipsi HZ ; est igitur ut FE ad EA ita BH ad HZ . Rursus, quoniam uni laterum trianguli AHE ipsi nempe EH parallela ducta est ZA ; est (VI. 2.) ut EA ad AA ita HZ ad ZA . Demonstratum autem est et ut FE ad EA ita BH ad HZ ; est igitur ut FE quidem ad EA ita BH ad HZ , ut vero EA ad AA ita HZ ad ZA .

Data igitur recta insecta AB datae rectae sectae AT similiter secta est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 359.)

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem invenire.

vel etiam ita, ut composita ex data AB , eique ab extremo inde A versus oppositas partes adiecta habeat ad datam (vel ad adiectam) rationem datae maioris M ad datam minorem N (Pfleiderer I. c. §§. 100. 101.). Cacterum apud Campanum propositio nostra 9. est VI. 11.

PROPOSITIO X.

Obs. 1. Demonstratio huius propositionis (quae apud Campanum est VI. 12.) expeditior redditur, praemissa propositione in Obs. 5. ad VI. 2. contenta. Cf. Pfeleiderer I. c. §. 102.

"Εστῶσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ γ AB , AG , καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν· δεῖ δὴ τῶν AB , AG τρίτην ἀνάλογον προσεῦρεῖν.

Εκβεβλήσθωσαν γάρ αἱ AB , AG ἐπὶ τὰ A , E σημεία, καὶ κείσθω τῇ AG ἴση ἡ BD , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BG , καὶ διὰ τοῦ A παράλληλος αὐτῇ ἡχθω ἡ AE .

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ABE , παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AE ἤκται ἡ BG , ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BD οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE . Ἰση δὲ ἡ BD τῇ AG , ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE .

Ἄρα ἀρα δοθεῶν εὐθειῶν τῶν AB , AG , τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεῦρεται ἡ GE . Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τριῶν δοθεῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσεῦρεῖν.

"Εστῶσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A , B , Γ · δεῖ δὴ τῶν A , B , Γ τετάρτην ἀνάλογον προσεῦρεῖν.

Εκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ AE , AZ , γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν τὴν ὑπὸ EAZ · καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ $ΔΗ$, τῇ δὲ B ἴση ἡ HE , καὶ ἐκ τῇ Γ ἴση ἡ $ΔΘ$ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς $HΘ$, παράλληλος αὐτῇ ἡχθω διὰ τοῦ E ἡ EZ .

1) Verba: δύο εὐθεῖαι, quae Peyrardus, codicem a secutus, omittit, ex edd. Basil. et Oxon. restituitur ex more Euclidi in enunciatione solenni.

Obs. 2. Si aequalia fuerint unius trianguli lateris AG segmenta, alterius etiam lateris AB segmenta, rectis tertio lateri $B\Gamma$ parallelis facta erunt aequalia (V. Prop. A.). Recta itaque AG in partes quocunque aequales secabitur simili

Sint datae duae rectae AB , AF , et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant; oportet ipsis AB , AF tertiam proportionalem invenire.

Producantur AB , AF ad puncta Δ , E , et ponatur ipsi AF aequalis $B\Delta$, et iungatur $B\Gamma$, et per Δ parallela huic ducatur ΔE (I. 31.).

Quoniam igitur uni laterum trianguli ΔAE , nempe ipsi ΔE parallela ducta est $B\Gamma$, est (VI. 2.) ut AB ad $B\Delta$ ita AF ad ΓE . Aequalis autem $B\Delta$ ipsi AF , est igitur ut AB ad AF ita AF ad ΓE .

Duabus igitur datis rectis AB , AF , tertia proportionalis inventa est ΓE . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 360.)

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae A , B , Γ ; oportet ipsis A , B , Γ quartam proportionalem invenire.

Exponantur duae rectae ΔE , ΔZ , angulum continentes quemlibet $E\Delta Z$; et ponatur ipsi quidem A aequalis ΔH , ipsi vero B aequalis HE , et insuper ipsi Γ aequalis $\Delta\Theta$; et iuncta $H\Theta$, parallela illi ducatur per E ipsa EZ (I. 31.).

modo, quo propositum VI. 9. fiebat (Pfleiderer l. c. §§. 103. 104. Clavius; Tacquet., alii). Cf. I. 34. Cor. 23.

Obs. 3. Hac propositione nituntur solutiones variorum problematum, figuras rectilineas datas vario modo in partes quocunque aequales, seu etiam ita secandi, ut partes datas invicem habeant rationes. Talia problemata habentur in Eu-

Euclid. Element. P. II.

O.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἤκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. Ἰση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσέυρεται ἡ ΘΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστῶσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ θῆ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

clidis, ut quidam arbitrantur, vel, ut alii volunt, in Machometi Bagdedini de Divisionibus libro; apud Wilke neue und erleichterte Methode den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden; in I. T. Mayers practisch. Geom. T. III.; apud Pfeiderer. l. c. §. 108—118.

PROPOSITIO XI.

Obs. Tertiac proportionali duabus rectis datis inveniendae inservit quoque VI. 8. Cor. Sumta nempe (Fig. 356.) recta ΒΔ aequali primae rectarum datarum, et ducta ad eam per Δ perpendiculari ΑΔ aequali secundae, iungatur ΒΔ. Ducta deinde in Α ad ΒΔ perpendiculari ΑΓ, quae productae ΒΔ occurret in Γ, erit ΒΔ:ΑΔ=ΑΔ:ΑΓ (VI. 8. Cor.). (Clavius ad hanc Prop. Pfeiderer. l. c. §. 125.). Aliter idem fiet per

Et quoniam uni laterum trianguli ΔEZ , nempe ipsi EZ parallela ducta est $H\Theta$, est igitur ut ΔH ad HE ita $\Delta\Theta$ ad ΘZ (VI. 2.). Aequalis autem ΔH quidem ipsi A , HE vero ipsi B , $\Delta\Theta$ autem ipsi Γ ; est igitur ut A ad B ita Γ ad ΘZ .

Tribus igitur datis rectis A , B , Γ , quarta proportionalis inventa est ΘZ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 361.)

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae AB , $B\Gamma$; oportet ipsis AB , $B\Gamma$ mediam proportionalem invenire.

Ponantur in directum, et describatur super AT semicirculus $AAT\Gamma$, et ducatur a B puncto ipsi AT rectae ad rectos BA (I. 11.), et iungantur AA , $\Delta\Gamma$.

partem alteram eiusdem VI. 8. Cor. Nempe, si prima recta data maior est, quam secunda, fiat $B\Gamma$ aequalis primae, et, descripto super eam circulo, ex altero eius extremo B aptetur BA aequalis secundae, et ex altero huius extremo A demittatur in $B\Gamma$ perpendicularis AA , eritque $B\Gamma : BA = BA : BA$ (VI. 8. Cor.). Sin autem prima recta data minor est, quam secunda: super illa v. c. BA tanquam catheto triangulum consituitur rectangulum AAB , cuius hypotenusa AB aequalis sit secundae (ut in II. 14. III. 17.). Tum ad hanc BA in puncto eius extremo ductum perpendicularum AT productae BA occurrerit in Γ (I. Post. 5.), eritque $BA : AB = AB : B\Gamma$ (VI. 8. Cor.) Phejderer l. c. §. 124. Pappus Collect. Mathem. III. 7. et III. 8. (Nostra Prop. M. apud Campanum est VI. 10.) Caeterum, si ratio duarum magnitudinum expressa sit per datas rectas,

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$, ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ $ΑΔΓ$ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἵκται ἡ $ΔΒ$. ἡ $ΔΒ$ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, μέση ἀνάλογον προσεύρεται ἡ $ΒΔ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων ¹⁾ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

Ἐστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ $ΑΒ$, $ΒΓ$, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ $Β$ γωνίας, καὶ καίθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ $ΔΒ$, $ΒΕ$, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ $ΖΒ$, $ΒΗ$. λέγω ὅτι τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΕ$ οὕτως ἡ $ΗΒ$ πρὸς τὴν $ΒΖ$.

1) Loco ἰσογωνίων, quae vox omnino sufficit, hic et in sequentibus edd. Basil. et Oxon. habent: *μίαν μὲν ἴσην ἔχοντων γωνίαν*. Utraque lectio ex I. 29. I. 34. eodem redit. Caeterum etiam infra in demonstratione VI. 16., ubi nostra haec propositio adhibetur, vox ἰσογωνίων ponitur.

docet haec propositio modum inveniendi rationem duplicatam rationis datae.

PROPOSITIO XII.

Obs. Facile patet, e tribus rectis datis, quibus quarta proportionalis invenienda est, secundam, quae in figura textus graeci primae $ΔΗ$ in directum adjecta est, posse etiam ex $Η$

Et quoniam in semicirculo angulus est $\angle A\Gamma$, rectus est (III. 31.). Et quoniam in rectangulo triangulo $\angle A\Gamma$ a recto angulo ad basin perpendicularis ducta est AB ; ipsa AB inter basis segmenta AB , BF media proportionalis est (VI. 8. Cor.).

Duabus igitur datis rectis AB , BF , media proportionalis inventa est BA . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 362.)

Parallelogrammorum aequalium et aequiangulorum reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt; et quorum aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia.

Sint aequalia et aequiangula parallelogramma AB , BF , aequales habentia angulos ad B , et ponantur in directum AB , BE , in directum igitur sunt (I. 14.) et ZB , BH : dico ipsorum AB , BF reciproca esse latera circa aequales angulos, hoc est, esse ut AB ad BE ita HB ad BZ .

versus HA , vel etiam (coll. Obs. 2. ad VI. 2.) e vertice A ex eadem parte, ad quam est recta AH , vel in crure AH anguli HAE ad partes oppositas ultra A producto sumi, et tum reliqua in cruribus anguli assumti, vel ad verticem ei oppositi simili ratione ac in textu graeco peragi. Praeterea etiam secunda et tertia alterne inter se permutari possunt, ita ut iam non, ut ante prima et secunda in uno anguli assumti crure, tertia et quarta in altero, verum prima et tertia in uno, secunda et quarta in altero sint. Pfleiderer l. c. §. 119. 120. Si quis vero disideret, ut prima et quarta in uno, secunda et tertia in altero crure anguli sint, hoc quoque fieri poterit, si

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ZE παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ $BΓ$ παραλληλόγραμμῳ, ἄλλο δὲ τι τὸ ZE ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ ZE . Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BE , ὡς δὲ τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ ZE οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ · καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ . Τῶν AB , $BΓ$ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ $BΓ$ παραλληλόγραμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως τὸ AB παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HB πρὸς τὴν BZ οὕτως τὸ $BΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ ZE ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ $BΓ$ παραλληλόγραμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας

ex vertice anguli propositi prima in uno crure, secunda in altero sumatur, et altera harum rectarum puncta extrema recta aliqua iungantur, deinde in eodem crure, in quo sumta est secunda, a vertice abscindatur tertia, atque ab altero eius ex-

Compleatur enim parallelogrammum ZE .

Et quoniam aequale est parallelogrammum AB parallelogrammo BT ; est autem aliud quoddam ZE ; est igitur (V. 7.) ut AB ad ZE ita BT ad ZE . Sed (VI. 1.) ut AB quidem ad ZE ita AB ad BE , ut vero BT ad ZE ita HB ad BZ ; erit igitur (V. 11.) AB ad BE ita HB ad BZ . Parallelogrammorum igitur AB , BT reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt.

Sint autem reciproca latera circa aequales angulos, et sit ut AB ad BE ita HB ad BZ ; dico aequale esse parallelogrammum AB parallelogrammo BT .

Quoniam enim est ut AB ad BE ita HB ad BZ , sed ut AB quidem ad BE ita (VI. 1.) parallelogrammum AB ad parallelogrammum ZE , ut HB vero ad BZ ita parallelogrammum BT ad parallelogrammum ZE ; erit igitur (V. 11.) AB ad ZE ita BT ad ZE ; aequale igitur est (V. 9.) parallelogrammum AB parallelogrammo BT . Ergo aequalium etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 363.)

Aequalium et unum angulum uni aequalem habentium triangulorum reciproca sunt latera, quae circa

itemo ducatur ad illud crux, in quo prima sumta fuit, recta, quae sit, ut vocant, antiparallela ei, quae primae et secundae extrema iungit i. e. ita ducatur, ut cum cruce uno eundem angulum efficiat, quem illa, cui antiparallela esse debet, cum

γωνίας, καὶ ὧν, μίαν μὲν ἴσην ἔχόντων γωνίαν αντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἔσιν ἐκεῖνα.

* Ἐστὶ ἴσα τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΔΕ$, μίαν μὲν ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΔΕ$. λέγω ὅτι τῶν $ABΓ$, $ΔΔΕ$ τριγώνων αντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΔΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$.

Καί ποτε γὰρ ὥστε ἐπὶ εὐθείας εἶναι τὴν $ΓΑ$ τῇ $ΔΔ$ ἐπὶ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΕΑ$ τῇ $ΑΒ$. Καὶ ἐπεὶ εὐχθῶ ἡ $ΒΔ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΔΕ$ τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ $ΑΒΔ$ ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΓΑΒ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΔΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$, ὡς δὲ τὸ $ΕΑΔ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ τῶν $ABΓ$, $ΔΔΕ$ ἄρα τριγώνων αντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

altera, et vice versa. Hic quoque situs secundae et tertiae inter se permutari possunt. Cf. Pfeiderer l. c. §. 121. Apud Campanum Prop. nostra VI. 12. non separatim numeratur, sed praecedenti VI. 11. (apud Campanum VI. 10.) tantum subiungitur.

PROPOSITIO XIII.

Obs. Pars posterior Obs. 3. ad VI. 8. etiam adhuc huius problematis solutionem exhibet, facile inveniendam. Pfeiderer l. c. §. 126. Caeterum VI. 13. Prop. est apud Campanum VI. 9. Docet illa aliis verbis „si ratio duarum magni-

aequales angulos sunt; et quorum triangulorum unum angulum uni aequalem habentium reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia.

Sint aequalia triacula $AB\Gamma$, $A\Delta E$, unum angulum uni aequalem habentia, scilicet angulum BAT angulo ΔAE ; dico triangulorum $AB\Gamma$, $A\Delta E$ reciproca esse latera, quae circa aequales angulos sunt, hoc est, esse ut ΓA ad ΔA ita EA ad AB .

Ponantur enim ita ut in directum sit ΓA ipsi ΔA ; in directum igitur est (I. 14.) et EA ipsi AB . Et iungatur BA .

Et quoniam aequale est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $A\Delta E$, est autem aliud triangulum ABA ; est igitur (V. 7.) ut triangulum ΓAB ad triangulum BAA ita triangulum $A\Delta E$ ad triangulum BAA . Sed ut ΓAB quidem ad BAA ita (VI. 1.) ΓA ad ΔA , ut EAA vero ad BAA ita EA ad AB ; erit igitur (V. 11.) ΓA ad ΔA ita EA ad AB ; triangulorum igitur $AB\Gamma$, $A\Delta E$ reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt.

tudinum expressa sit per datas rectas invenire rationem subduplicatam rationis datae.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Exemplum huiusmodi parallelogrammorum praebent, quae in I. 43. vocantur parallelogrammorum circa diagonalem complementa. Cf. Pfeiderer l. c. §. 134.

Obs. 2. Demonstratio, qua ex aequalitate angulorum ad B ope I. 14. inferitur, si AB , BE sint in directum, fore et ZB , BH in directum, praeter morem praecipue videtur, et rectius deduci posse videtur ex ea conversa I. 15. Prop. quam

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθένεισαν αἱ πλευραὶ τῶν $ABΓ$, $ΑΔΕ$ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΔΕ$ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς $ΒΔ$, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ οὕτως τὸ $ΕΑΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον. ὡς ἄρα τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως τὸ $ΕΑΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$. ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΑΒΓ$, $ΑΔΕ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΕΑΔ$ τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾿ωσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν

iam. Proclus desideravit, et nos ex eo supra attulimus. Cf. Pfeiderer l. c. §. 136.

PROPOSITIO XV.

Obs. 1. Propositiones 14. et 15. uno enunciato, pariter ac duas propositionis VI. 1. partes comprehendere, atque etiam ope I. 34. unam ex altera inferre licet. Coniunctae autem, quam seinctae cur facilius intelligerentur, quod Austin. vult, laud apparet. Cf. Pfeiderer l. c. §§. 139. 140.

Obs. 2. Propositiones 14. 15. parallelogrammi vel trianguli dati transformationem in aliud dati lateris, circa eundem vel aequalem angulum reducunt ad problemma VI. 12. Iuxta eas scilicet quarta proportionalis lateri dato, et duobus parallelogrammi, triangulive dati circa angulum designatum lateribus,

Sint autem reciproca latera triangulorum ABF , $A\Delta E$, et sit ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB ; dico aequale esse triangulum ABF triangulo $A\Delta E$.

Iuncta enim rursus BA , quoniam est ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB , sed ut ΓA quidem ad $A\Delta$ ita (VI. 1.) triangulum ABF ad triangulum BAA , ut EA vero ad AB ita triangulum EAA ad triangulum BAA : erit igitur (V. 11.), ut triangulum ABF ad BAA ita triangulum EAA ad BAA ; utrumque igitur ipsorum ABF , $A\Delta E$ ad BAA eandem habet rationem; aequale igitur est (V. 9.) triangulum ABF triangulo EAA . Aequalium igitur etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 364.)

Si quatuor rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est rectangulo sub mediis contento; et si rectangulum sub extremis contentum exhibet alterum circa hunc angulum latus parallelogrammi triangulive construendi. Nominatim ope Prop. 14. in compendiam redigitur solutio problematis I. 44. Cf. Pfeiderer l. c. §§. 141. 142.

Obs. 3. Facile etiam Prop. 15. extendi potest ad triangula, quorum unus angulus unius, et unus angulus alterius simul sumti sunt duobus rectis aequales. Cf. infra ad VI. 23. Obs. 9.

PROP. XVI. XVII.

Obs. 1. Prop. 16. ut Corollarium 14. et Prop. 17. ut Cor. 16. sisti, vel etiam utraque immediate demonstrari potest iisdem modis, quibus 14. Ambae etiam sic enunciari possunt: parallelogrammorum rectangulorum aequalium bases sunt altitudinibus reciproce proportionales; ac vicissim aequalia sunt

ἀκρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν
μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθείαι
ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστῶσαν αἱ τέσσαρες εὐθείαι ἀνάλογον αἱ AB ,
 $ΓΔ$, E , Z ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ E πρὸς
τὴν Z · λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB , Z περιεχόμενον
ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, περιεχομένῳ
ὀρθογωνίῳ.

Ἠχθῶσαν γὰρ ἀπὸ τῆς A , T σημειῶν ταῖς AB ,
 $ΓΔ$ εὐθείαις πρὸς ὁρθὰς αἱ AH , $ΓΘ$, καὶ κείσθω
τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH , τῇ δὲ E ἴση ἡ $ΓΘ$, καὶ συμ-
πεπληρώσθωσαν τὰ BH , $ΔΘ$ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ E
πρὸς τὴν Z , ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ $ΓΘ$, ἡ δὲ Z τῇ
 AH · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ $ΓΘ$
πρὸς τὴν AH · τῶν BH , $ΔΘ$ ἄρα παραλληλογράμμων

parallelogramma rectangula, quorum bases sunt altitudinibus
reciproce proportionales Cf. Pfeiderer l. c. §. 145.

Obs. 2. Cum quodvis parallelogrammum obliquangulum
aequale sit rectangulo aequo alto super eadem basi (I. 35.):
generatim etiam (V. 7. V. 11.) duo quaecunque parallelogramma
aequalia habent bases altitudinibus reciproce proportionales,
ac vicissim. Unde ope I. 41. V. 15. idem de triangulis ae-
qualibus deducitur (ibid. §§. 144. 145.).

Obs. 3. Quodsi priores 16. et 17. partes ad corollaria 8.
in Elementis ac in Obs. 2. 3. ad VI. 8. subiuncta applican-
tur; hae emergunt propositiones. Perpendicularo ab vertice an-
guli recti trianguli rectanguli in hypotenusam demisso, 1) qua-
dratum huius perpendiculari aequatur rectangulo sub segmentis
hypotenusae ab ipso factis. 2) Cuiuslibet catheti quadratum
aequale est rectangulo sub hypotenusa, et sub eius segmento,
quod catheto huic adiacet. 3) Rectangulum sub lateribus circa
angulum rectum aequale est rectangulo sub hypotenusa et per-

tum aequale est rectangulo sub extremis contento, quatuor rectae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae proportionales $AB, \Gamma A, E, Z$, ut AB ad ΓA ita E ad Z ; dico rectangulum sub AB, Z contentum aequale esse rectangulo sub $\Gamma A, E$ contento.

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis $AB, \Gamma A$ rectis ad rectos angulos $AH, \Gamma\Theta$, et ponatur ipsi quidem Z aequalis AH , ipsi vero E aequalis $\Gamma\Theta$, et compleantur parallelogramma $BH, \Delta\Theta$.

Et quoniam est ut AB ad ΓA ita E ad Z , aequalis autem E quidem ipsi $\Gamma\Theta$, ipsa vero Z ipsi AH ; est igitur (V. 7.) ut AB ad ΓA ita $\Gamma\Theta$ ad AH ; parallelogrammorum igitur $BH, \Delta\Theta$ reciproca sunt la-

pendiculo. 4) Rectangulum sub alterutro latere circa angulum rectum et sub perpendicularo aequatur rectangulo sub altero latere circa angulum rectum et sub segmento hypotenusae, quod priori adiacet catheto. In circulo 5) quadratum perpendiculari ab quocunque peripheriae puncto ad aliquam eius diametrum ducti aequatur rectangulo sub segmentis diametri ab perpendicularo factis. 6) Cuiuslibet chordae per centrum non transeuntis quadratum aequale est rectangulo sub diametro per unum chordae extremum ducta, et sub diametri huius segmento chordae contiguo, quod ab illa abscindit perpendicularum in illam ex altero chordae extremo demissum. Unde porro consequitur: perpendicularo in hypotenusam trianguli rectanguli (diametrum circuli) demisso ex vertice anguli recti (puncto quocunque peripheriae), et in circulo ductis ab hoc puncto rectis ad extrema diametri: 7) hypotenusam (diametrum) esse ad alterutrum ipsius segmentum, uti quadratum hypotenusae (diametri) ad quadratum catheti (chordae) huic segmento ad-

ἰσότητος ὡς ὅταν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τῆς ἴσας γωνίας.
 Ὡν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμω ἀντιπεντόν-
 θασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τῆς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν
 ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ
 AO παραλληλογράμῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ
 τῶν AB, Z , ἴση γὰρ ἢ AH τῇ Z · τὸ δὲ AO τὸ ὑπὸ
 τῶν $ΓΔ, E$, ἴση γὰρ ἢ $ΓΘ$ τῇ E · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν
 AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ
 τῶν $ΓΔ, E$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώ-
 νιον ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, E$ περιεχομένῳ ὀρ-
 θογώνιῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται,
 ὥς ἢ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἢ E πρὸς τὴν Z .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ
 τῶν AB, Z ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, E$, καὶ ἐστὶ
 τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, Z ἴσον γὰρ ἐστὶν ἢ
 AH τῇ Z · τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, E$ τὸ AO , ἴση γὰρ

iacentis: vel ut huius catheti (chordae) quadratum ad quadra-
 tum istius segmenti: vel ut quadratum catheti (chordae) ad-
 iacentis alteri segmento ad quadratum perpendiculari. Nempe
 (Erg. 356.)

$$\begin{aligned} BF : FA &= BF^2 : BG \times GA \text{ (Obs. 4. ad VI. 1.)} = BF^2 : GA^2 \\ &= BG \times GA : GA^2 &= AF^2 : FA^2 \\ &= FB \times BA : GA \times AB &= AB^2 : AA^2 \end{aligned}$$

nr. 2. 6.

8) Ipsa autem hypotenusae (diametri) segmenta esse: uti qua-
 drata cathetorum (chordarum) adiacentium $BA : AF = FB \times BA :$
 $FB \times AF$ (Obs. 4. ad VI. 1.) $= AB^2 : AF^2$ (nr. 2. 6.).

9) Eodemque, quo nr. 8. modo ostenditur, ex eodem peri-
 pheriae puncto ductis diametro et duabus pluribusve chordis,
 perpendicularisque ab alteris harum terminis in diametrum de-
 missis: quadrata chordarum esse ut segmenta ipsis adiacentia

tera, quae circa aequales angulos sunt. Quorum autem aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia (VI. 14.); aequale igitur est parallelogrammum BH parallelogrammo AO . Et est BH quidem sub AB , Z contentum, aequalis enim AH ipsi Z ; parallelogrammum vero AO sub GA , E continetur, aequalis enim FO ipsi E ; rectangulum igitur sub AB , Z contentum aequale est rectangulo sub GA , E contento.

Sit autem rectangulum sub AB , Z contentum aequale rectangulo sub GA , E contento; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad GA ita E ad Z .

His enim constructis, quoniam rectangulum sub AB , Z aequale est rectangulo sub GA , E contento, et est rectangulum quidem sub AB , Z ipsum BH , aequalis enim AH ipsi Z ; rectangulum vero sub GA ,

diametri. Cf. Pfeiderer l. c. §. 147. (Caeterum quatuor primas in hac observatione occurrentes propositiones iam vidimus in corollaris ad I. 41. et I. 43.).

Obs. 4. Propositionum obs. praecedente expositarum tres primae, usus in demonstrandis X. 34. X. 35. X. 36. gratia traduntur in Lemm. 1. ante X. 34. et ope VI. 17. VI. 16. stabiliantur mediante analogiis, una ab VII. 8. Cor. parte prior petita, caeteris ex ipsis propositionibus VI. 8. VI. 4. deductis (vid. Obs. 2. ad VI. 8.); tertia insuper demonstratur, rectangulis sub BA et AG , BF et AD descriptis, colligendo ex I. 34. utrumque duplum esse trianguli ABF . Primae et secundae demonstratio eadem, quae in Lemm. 1. ante X. 34. repetitur in Lemm. post XIII. 13. ad efficiendam praecedentis septimae (Obs. 3.) partem tertiam. Eiusdem septimae pars prima in demonstrationibus XIII. 14. XIII. 15. XIII. 16. tan-

ἡ $\Gamma\Theta$ τῇ E . τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ $\Delta\Theta$ · καὶ ἐστὶν ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἡ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὴν AH . ἴση δὲ ἡ μὲν $\Gamma\Theta$ τῇ E , ἡ δὲ AH τῇ Z . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z . Ἐάν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Ἐάν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστώσιν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ . λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς B τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ B ἴση ἡ Δ .

quam nota simpliciter sumatur: pariterque bis in demonstratione XIII. 18. semel autem, bisve, cum adiuncta ratione, ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ FAD τρίγῳ: in demonstrationibus XIII. 13. autem, pariter ac secunda pars in XIII. 18. ex proportionibus $B\Gamma:GA=AF:GA$, vel $FA:AF=AF:BG$ rursus utrobique ab VI. 8. VI. 4. deducta infertur per VI. 20. Cor. 2. Quae omnia, iuncta his, quae Obs. 2. ad VI. 8. notata fuere, nimis, quam ut auctori Elementorum tribui possint, ab methodo abludunt alias ipsi solenni, praemissas demonstrationum subsequentium suis locis ad perpetuum deinceps usum stabiliendi; nominatim etiam theorematum generaliorum ad speciales casus applicationes frequenter deinceps

E ipsum $\Lambda\Theta$, aequalis enim $\Gamma\Theta$ ipsi E ; erit parallelogrammum BH aequale parallelogrammo $\Lambda\Theta$ et sunt aequiangula. Aequalium autem et aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera (VI. 14.), circa aequales angulos; est igitur ut AB ad ΓA ita $\Gamma\Theta$ ad ΛH . Aequalis autem $\Gamma\Theta$ quidem ipsi E , ipsa vero ΛH ipsi Z ; est igitur ut AB ad ΓA ita E ad Z . Si igitur quatuor etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 365.)

Si tres rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est quadrato ex media; et si rectangulum sub extremis contentum aequale sit quadrato ex media, tres rectae proportionales erunt.

Sint tres rectae proportionales A, B, Γ , ut A ad B ita B ad Γ ; dico rectangulum sub A, Γ contentum aequale esse quadrato ex B .

Ponatur ipsi B aequalis Λ .

adhibendas. quamvis obvias et faciles, seorsim enunciandi, ut immediate essent ad usus occurrentes paratae. Cf. Obs. 2. ad II. 3. Unde, quum inenarratae et oscitantiae auctoris ista tribuere haud liceat, probabile fit, ut hodiernum, ita et olim communibus, tironum praecipue etiam utibus parata fuisse elementorum exemplaria variis modis respectibusque, compandii ac facilitatis gratia, forsitan et arctioris systematis praetextu (vid. Proclus in libr. II. p. 21.) truncata, sicque plura, praesertim, quae solis X. ac XIII. in praecedentibus libris interserrent, his excidisse et ac multifariam, nec apte semper et uniformiter, eorum textui assutis lemmatibus (Cf. Obs. 5. ad

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὥς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἡ B τῇ Δ ἔστιν ἄρα ὥς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ . Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεταὶ ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἀκρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν B, Δ . Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἀπὸ τῆς B ἔστιν, ἴση γὰρ ἡ B τῇ Δ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B τετραγώνῳ.

VI. 1.), insertisque auctariis ansam dedisse. Cf. Pfeiderer §. 148.

Obs. 5. Ope Prop. VI. 17. demonstrari posse I. 47. diximus in Excursu ad I. 47. Cf. Pfeiderer §. 149.

Obs. 6. Eadem Prop. VI. 17. explicat identitatem constructionis problematum II. 14. et VI. 13., quae aequipollere docet. Cf. Pfeiderer §. 150.

Obs. 7. Uti casus particularis Prop. III. 35. quem sistunt assertum Obs. 3., nr. 5. ac solutio problematis II. 14. (vid. Obs. 3. ad II. 14. sub finem) in libro II. et III. ope II. 5. I. 47. demonstratur, heic per III. 31. VI. 8. VI. 17. adstruitur, ita universim Prop. III. 35. ex III. 21. VI. 4. VI. 16. potest inferri. Ostenditur nempe, duas rectas intra circulum se secantes se mutuo secare in partes reciproce proportionales, unde caetera ex VI. 16. fluunt. Cf. Pfeiderer §. 151.

Obs. 7. Similiter Prop. III. 36. ipsiusque conversam III. 37. ex III. 32. eiusque conversa, et VI. 4. VI. 6. VI. 17. necesse licet. Ostenditur nempe, duabus rectis in circulum incidentibus, quarum una circulum contingat, altera secet, contingentem mediam proportionalem esse inter secantem, eiusque partem exteriorē, et contingentis quadratum aequari rectangulo sub tota secante, ipsiusque parte exteriori, et vice versa. Cf. Pfeiderer §. 152.

Et quoniam est ut A ad B ita B ad T , aequalis autem B ipsi A ; est igitur ut A ad B ita A ad T . Si autem quatuor rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est (VI. 16.) rectangulo sub mediis contento; rectangulum igitur sub A, T aequale est rectangulo sub B, A . Sed rectangulum sub B, A est quadratum ex B , aequalis enim B ipsi A ; rectangulum igitur sub A, T contentum aequale est quadrato ex B .

Obs. 8. Quodsi (Fig. 365) AB circulum contingat in B , AT secet in A et T , triacula AAB , ABT , ob angulum A utrique communem, et $\angle ABE = \angle BTF$ (III. 32.) aequiangula erant (I. 32.), adeoque

$$\begin{aligned} AA:AB &= AB:BT \text{ (VI. 4.)} = ABq:AB \times BT \text{ (Obs. 4. ad} \\ AB:AT &= AB:BT = AB \times BT:BTq \text{ VI. 1.} \end{aligned}$$

itaque $AA:AT = ABq:BTq$ (V. 22.) h. e. ab puncto extra circulum ductis recta eum contingente, et altera ipsum secante, ductisque in circulo rectis iungentibus punctum contactus prioris et puncta sectionum alterius; tota secans recta est ad partem ipsius exteriorem, uti quadratum rectae ab puncto contactus ad extremum secantis totius ductae, ad quadratum rectae iungentis punctum contactus, atque alterum sectionis punctum. Vicissim, si $AA:AT = ABq:BT$, cum ducta rectae AB parallela BE , etiam sit $AA:AT = AB:BE = ABq:AB \times TE$ (Obs. 2. ad VI. 4. et Obs. 2. ad VI. 1.), ideoque (V. 11.) $ABq:BTq = ABq:AB \times TE$ et (V. 9.) $BTq = AB \times TE$, et (VI. 17.) $AB:BT = BT:TE$, ac sit angulus $ABT = BTE$ (I. 29), est angulus $A = ABT$ (VI. 6.) et hinc AB circulum in B contingit (Obs. 2. ad III. 32.). Cf. Pflaiderer §. 153.

Obs. 9. Proposita Obs. 7. 8. sic etiam enunciantur; circa triangulum non aequicrurum descripto circulo, et per vertex trianguli ducta recta circulum tangente; haec basi productae sic occurrit, ut rectangulum sub rectis ponit o huius occurrat;

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς B . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B , ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς B τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ B τῇ Δ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ B, Δ . Ἐάν

extremisque basis interiacentibus aequale sit quadrato rectae ab eodem occurrentis puncto ad verticem trianguli ductae; rectae vero inter punctum illud occurrentis ac terminos basis in ipsa abscissae eandem habeant rationem, quam crurum trianguli, quibus adjacent, quadrata. Nempe, si triangulo ATB , cuius crus $AB > BT$, circulus circumscribitur, et hunc in B contingens agitur recta BA : ob angulum $ABT = A$ (III. 32.) $\angle ATB$ (I. 18.), ideoque angulos $ABT + ATB < ATB + ATB$ h. e. (I. 3.) < 2 rectis: ad partes angulorum ABT, ATB concurrunt rectae AT, BA (I. Post. 5.) Ac tum rectang. $AA \times AT = ABq$ (Obs. 7.) et $AA : AT = AB : BTq$ (Obs. 8.). Vicissim 1) si trianguli non aequicruri ATB basis AT ad partes cruris minoris BT sic producitur, ut rectangulum sub adiecta TA et sub composita AA ex basi AT et adiecta TA aequale sit quadrato rectae AB ab termino A continuationis basis ad trianguli verticem B ductae: recta haec circum triangulo circumscriptum in B contingit (Obs. 8. nr. 2.) et segmenta basis AA, AT terminis ipsius A, Γ , ac puncto A intercepta, eunt uti quadrata crurum trianguli AB, BT , ipsis adjacentium (Obs. 8. nr. 4.). Atque 2) si trianguli non aequicruri ATB basis AT ad partes cruris minoris sic in A usque producitur, ut segmenta eius AA, AT , puncto hoc A , terminisque basis A, Γ intercepta, sint, ut crurum trianguli AB, BT ipsis adjacentium quadrata: recta ab puncto A ad verticem B trianguli ducta circum triangulo circumscriptum in B contingit (Obs. 9. nr. 2.) et rectae AB quadratum aequale est rectangulo sub segmentis AA, AT basis puncto A ac terminis eius A, Γ

Sed rectangulum sub A , Γ aequale sit quadrato ex B ; dico esse ut A ad B ita B ad Γ .

His enim constructis, quoniam rectangulum sub A , Γ aequale est quadrato ex B , sed quadratum ex B est rectangulum sub B , A , aequalis enim B ipsi A ; erit igitur rectangulum sub A , Γ aequale rectan-

interceptis (Obs. 8, nr. 1.). Posterior conversa est Lemma 2. Libri II. Locorum planorum Apollonii. Cf. Pfeiderer. §. 154.

Obs. 10. Pariter immediate per III. 21. vel III. 22. et VI. 4. VI. 16. demonstratur, quod a Clavió et Baernianno III. Prop. 36. subiungitur corollarium (vid. supra III. 56. Cor. 1.), nempe si a puncto extra circulum ducantur duae rectae eum secantes, rectangula sub totis secantibus, et partibus earum exterioribus aequalia esse, sive, quod eodem redit, totas secantes esse partibus suis exterioribus reciproce proportionales. Cf. Pfeiderer. §. 155.

Obs. 11. Ex VI. 16. porro consequitur, cuiuslibet trianguli ABA (Fig. 366.) angulo quocunque A bifariam secto per rectam AT , rectangulum sub eius lateribus AA , AB angulum A comprehendentibus aequale esse rectangulo sub segmentis AT , TB tertii lateris, ab recta AT factis, una cum huius rectae AT quadrato (quae est Rob. Simson. Libr. VI. Prop. B.). Circumscribatur enim triangulo ABA circulus (IV. 5.), cui recta AT producta rursus occurrat in E , et iungatur alterutra recta AE , BE . Posteriore ducta, est angulus $A=E$ (III. 21.). Quare, cum etiam sit angulus $AA\Gamma=B\Lambda E$ (hyp.) est $AA:AT=EA:AB$ (VI. 4.) et hinc rectang. $AA \times AB=EA \times AT$ (VI. 16.) $=AT \times TE+ATq$ (II. 3.) $=AT \times TB+ATq$ (III. 35.). Cf. Pfeiderer. §. 157.

Obs. 12. Porro rectangulum sub duobus quibuscunque lateribus cuiuslibet trianguli aequale est rectangulo sub diametro circuli triangulo circumscripti et sub perpendiculari ex vertice anguli, quem latera ista comprehendunt, in latus ter-

δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσων ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τεσσαρες εὐθείαι ἀνάλογον εἶναι ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ A πρὸς τὴν Γ . Ἰσὴ δὲ ἡ B πρὸς τὴν A ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ . Ἐὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΗΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

tium demisso. 1) Si ipsum alterutrum latus AB (Fig. 367.) tertio $B\Gamma$ est perpendicularare: alterum $A\Gamma$ diameter est circuli triangulo circumscripti (III. 31. Conv. vid. Obs. ad III. 31. vel III. 33. nr. 2.) et propositio ad hanc identicam redit: rectang. $BA \times A\Gamma = \Gamma A \times AB$. 2) Si uterque ad basin sequentium latus $B\Gamma$ (Fig. 368.) angulus est acutus, quicumque sit angulus BAG duobus lateribus BA , $A\Gamma$ comprehensus; vel si altetur ad basin angulus $AB\Gamma$ (Fig. 369.) est obtusus, per vertexem A ducta diametro AZE , et iuncta BE recta, perpendicularoque AA in basi $B\Gamma$ demisso; ob angulos ABE , $AA\Gamma$ rectos (III. 31. et Constr.) atque $E = \Gamma$ (III. 21.) in triangulis ABE , $AA\Gamma$ est $BA : AE = AA : AF$ (VI. 4.), proinde rectangul. $BA \times A\Gamma = EA \times AA$ (VI. 16.). (Rob. Simson. Prop. C. Libr. VI. Pfleiderer. §. 158.). Hinc rectang. $B\Gamma \times AA : BA \times A\Gamma = B\Gamma \times AA : EA \times AA$ (V. 7.) $= B\Gamma : EA$ (Obs. 4. ad VI. 1.), ubi rectang. $B\Gamma \times AA$ duplum est areae trianguli (I. 41.). Quare duplum areae cuiusvis trianguli est ad rectangulum sub duobus ipsius lateribus, uti tertium latus ad diametrum circuli triangulo circumscripti. Cf. Pfleiderer, §. 159.

Obs. 13. Rectangulum contentum diagonalibus $A\Gamma$, BA (Fig. 370.) figurae quadrilaterae circulo inscriptae aequale est duobus rectangulis $AB \times A\Gamma + B\Gamma \times AA$ contentis oppositis eius lateribus. Fiat enim angulus ABE aequalis angulo $AB\Gamma$, et

gulo sub B , A . Si autem rectangulum sub extremis æquale est rectangulo sub mediis contento, quatuor rectæ proportionales sunt (VI. 16.) est igitur ut A ad B ita A ad Γ . Aequalis autem B ipsi A ; ut igitur A ad B ita B ad Γ . Si igitur tres etc.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 374.)

A data recta lineâ dato rectilineo simile et similiter positum rectilineum describere,

utrique addatur, vel ab utroque subtrahatur, angulus communis EBA , eritque angulus ABA aequalis angulo EBF . Et, quum præterea sit angulus $ADB = BFE$ (III. 21.), quippe in eodem cum illo segmento positus, erit triangulum ABA æquiangulum triangulo EBF , adeoque (VI. 4.) $BF:FE = BA:AA$, ideoque rectangulum $BF \times AA = FE \times BA$. Porro, quum angulus ABE aequalis sit angulo ABF , et angulus BAE aequalis angulo BAG (III. 21.), erit triangulum ABE æquiangulum triangulo ABF , adeoque (VI. 4.) $BA:AB = BF:AG$, ideoque rectangulum $BA \times AG = BF \times BA$. At ostensum fuit, esse rectangulum $BF \times AA = FE \times BA$. Erunt itaque rectangula $BA \times AG + BF \times AA = AG \times BA$. Haec propositio est theorema Ptolemaei in *μεγάλη σύνταξις* L. 1. c. 9. et apud ipsum fundamenti loco inseruit tabulis eius trigonometricis. Habetur illud etiam apud Rob. Simson. Prop. D., VI. in ed. Angl., apud Plafayr., Kraft. Instit. Geom. Sublim. §. 91. aliosque. Ad eandem propositionem referri potest sequens theorema, quod est apud Plafayr. Prop. E., VI. Si segmentum aliquod circuli ABF (Fig. 371.) bisectum sit in Γ , et e punctis extremis A , B segmenti, pariterque e puncto bisectionis Γ inflexæ sint ad punctum aliquod A reliquæ circumferentiæ rectæ AA , BA , ΓA : summa rectarum $AA + BA$ a punctis extremis basis inflexarum ad ΓA rectam a puncto bisectionis inflexam eandem rationem habebit, quam AB basi

Ἐάντιν ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθέν
 εὐθύγραμμον τὸ $ΓΕ$ δαὶ δὴ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας
 τῷ $ΓΕ$ εὐθύγραμμῳ ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως κείμενον
 εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεξεύχθω ἡ AZ , καὶ συνεστῶτο πρὸς τῇ AB
 εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς A , B τῇ
 μὲν πρὸς τῷ $Γ$ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ HAB , τῇ δὲ ὑπὸ
 $ΓAZ$ ἴση ἡ ὑπὸ ABH · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓZA$ λοιπὴ
 τῇ ὑπὸ AHB ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΖΓΔ$
 τρίγωνον τῷ HAB τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
 ἡ $ZΔ$ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ $ZΓ$ πρὸς τὴν HA καὶ

segmenti ad AT basin segmenti dimidii. Quum enim sit
 $ABΓΔ$ quadrilaterum circulo inscriptum, erit ex præced. AA
 $\times BΓ + AB \times AΓ = AB \times AΓ$ i. e. ob $BΓ = AΓ$ (III. 20.) (AA
 $+ AB) \times AΓ = AB \times AΓ$ (II. 1.), adeoque $AA + BA : ΓΔ = AB$
 $: AΓ$ (VI. 14.). (Playfair Prop. E. VI. Cf. 91. vel ut est apud
 Rob. Sims. Dat. 97.).

Obs. 14. Conversas præcedentium, præter iam Obs. 7.
 sqq. expositas notamus adhuc sequentes. Si quadratum per-
 pendiculi AA (Fig. 356.), quod in trianguli $ABΓ$ latus $BΓ$ an-
 gulis ipsius acutis interiorem ex vertice oppositō A demitti-
 tur, æquale est rectangulo sub segmentis BA , $AΓ$ lateris $BΓ$
 ab perpendicularo AA factis, seu (VI. 17.) si perpendicularum
 AA medium proportionale est inter segmenta BA , $AΓ$ lateris
 $BΓ$: trianguli ad verticem A angulus est rectus. Quippe ob
 $BA : AA = AA : AΓ$, et angulos ad A rectos, est angulus BAA
 $= Γ$ (VI. 6.); angulus igitur $BAΓ = Γ + ΓAA =$ recto (I. 32.
 Cor. 5.). Cf. Pflaiderer. §. 160. Pappus Collect. Mathem.
 I. VII. Prop. 203. propositioni huic adiungit: si quadratum
 perpendiculari AA (Fig. 372.) minus fuerit rectangulo sub seg-
 mentis BA , $AΓ$ lateris $BΓ$, angulus $BAΓ$ erit obtusus, si maius
 (Fig. 373.) acutus. Semicirculo enim super diametro $BΓ$ de-
 scripto, qui perpendicularum AA in puncto E secet, ac rectis

Sit data quidem recta AB , datum autem rectilineum ΓE ; oportet a recta linea AB rectilineo ΓE simile et similiter positum rectilineum describere.

Iungatur AZ , et constituatur (I. 23.) ad rectam AB et ad puncta in ea A , B angulo quidem ad Γ aequalis angulus HAB , angulo vero ΓAZ aequalis angulus ABH ; reliquus igitur ΓZA reliquo AHB est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $Z\Gamma A$ triangulo HAB ; est igitur (VI. 4.) ut ZA ad HB ita $Z\Gamma$ ad HA et ΓA ad AB . Rursus, con-

BE , ΓE iunctis ob $BA \times \Gamma A = AA^2$ (Obs. 3. nr. 5.) priori casu erit $AA < EA$, et hinc angulus $BA\Gamma > BE\Gamma$ (I. 21.); posteriori $AA > EA$, atque angulus $BA\Gamma < BE\Gamma$ (I. 21.). Rectus autem est angulus $BE\Gamma$ (III. 31.). Cf. Pflaiderer. §. 161. Propositorum in hac observatione casus specialis, quo segmenta BA , ΓA aequalia sunt, comprehenditur etiam is, quae pr. 2. in Excursu ad I. Prop. 47. etc. ad finem libri II. diximus. Cf. Pflaiderer. §. 162. Et, quum ostensum sit, rectum esse angulum $BA\Gamma$ (Fig. 356.), quem ab extremis B , Γ rectae $B\Gamma$ ad extremum A perpendiculari AA ductae BA , ΓA comprehendunt, si rectang. $BA \times \Gamma A = AA^2$, seu si $BA : AA = AA : \Gamma A$; per conversam III. 31. consequitur: circuli super diametro $B\Gamma$ descripti peripheriam transire per verticem A rectae AA diametro $B\Gamma$ inter extrema ipsius normalis, quae media proportionalis est inter segmenta diametri $B\Gamma$ puncto A facta, seu cuius quadratum rectangulo sub segmentis illis est aequale. Cf. Pflaiderer. §. 163. Ea quae ad hanc propositionem notata sunt solutioni etiam plurimorum problematum inservire possunt, quorum exquisitam copiam exhibet Pflaiderer. i. c. §§. 166—194, quae brevitatis studio hic praeterimus. Quae hactenus ad Propositiones libri VI. observata sunt, desumimus pleraque ex Pflaidereri scholiis in libro VI. Elementorum Eu-

ἡ FA πρὸς τὴν AB . Πάλιν, συνεστάτω πρὸς τῇ BA ἡ AD καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς B, H τῇ μὲν ὑπὸ AZE γωνία ἴση ἡ ὑπὸ $BH\Theta$, τῇ δὲ ὑπὸ ZAE ἴση ἡ ὑπὸ $HB\Theta$. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ E λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴσιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ZAE τριγώνον τῷ $HB\Theta$ τριγώνῳ ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς AZ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ ZE πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἡ EA πρὸς τὴν ΘB . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ZA πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ τε ZG πρὸς τὴν HA καὶ ἡ GA πρὸς τὴν AB καὶ ὡς ἄρα ZG πρὸς τὴν AH οὕτως ἡ τε GA πρὸς τὴν AB καὶ ἡ ZE πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἔτι ἡ EA πρὸς τὴν ΘB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ FZA γωνία τῇ ὑπὸ AHB , ἡ δὲ ὑπὸ AZE τῇ ὑπὸ $BH\Theta$ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ FZE ὅλη τῇ ὑπὸ $AH\Theta$ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ FAE τῇ ὑπὸ $AB\Theta$ ἐστὶν ἴση, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ F τῇ πρὸς τῷ A ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ E τῇ πρὸς τῷ Θ ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Theta$ τῷ GE , καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶ πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Theta$ εὐθύγραμμον τῷ GE εὐθύγραμμῳ.

clidis, quorum P. I. Tübingæ 1800.; P. II. 1801.; P. III. 1802. typis expressæ fuerunt. Pars IV. prodit ibidem 1805., in qua unice de VI. propositione 23. et VI. definitione 5., utpote qua nititur VI. Prop. 23. agitur, Quippe hanc ipsam VI. 23. inepte loco suo motam et inter propositiones ad figuras similes pertinentes positam fuisse indicat auctor. De hac itaque postea loco suo, et in excursu ad hunc librum viderimus. Dolendum autem est, scholia Pfleidereri in reliquas libri VI. propositiones, quæ ille iam elaborata in scriniis habet, sublata in Universitate Tübingensi consuetudine, occasione Magisterii philosophici quotannis dissertationes publicas conferendi, non in publicam lucem exire potuisse. E quibus benevole ab auctore nobiscum communicatis, nonnulla

stituatur (I. 23.) ad rectam BH et ad puncta in ea B , H , angulo quidem AZE aequalis $BH\theta$, angulo vero ZAE aequalis $HB\theta$; reliquus igitur ad E reliquo ad θ est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum ZAE triangulo $HB\theta$; est igitur (VI. 4.) ut AZ ad HB ita ZE ad $H\theta$, et EA ad θB . Ostensum est autem etiam, ut ZA ad HB ita $Z\Gamma$ ad HA et ΓA ad AB , ut igitur (V. 11.) $Z\Gamma$ ad AH ita et ΓA ad AB et ZE ad $H\theta$, et adhuc EA ad θB . Et quoniam aequalis est angulus quidem ΓZA angulo AHB , angulus vero AZE angulo $BH\theta$; totus igitur TZE toti $AH\theta$ est aequalis. Ex eadem ratione et ΓAE angulo $AB\theta$ est aequalis, est autem et angulus quidem ad Γ ipsi ad A aequalis, angulus vero ad E ipsi ad θ ; aequiangulum igitur est $A\theta$ ipsi ΓE , et circa aequales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est rectilineum $A\theta$ rectilineo ΓE (VI. 1. Def.).

certe in sequentibus breviter lectoribus nostris sistere volumus, nos rem ipsis admodum gratam facturos esse, persuasi. Cf. quae supra diximus ad VI. Def. 1.

PROPOSITIO XVIII.

Obs. 1. Quod ad sensum problematis, et maxime verborum „similiter positum“ attinet, Clavius eum ita exprimit: „dicuntur rectilinea super lineas rectas descripta esse similia et similiter posita, quando anguli aequales constituuntur super ipsas rectas lineas, et tam reliqui aequales anguli, quam latera proportionalia semper ordine sese consequuntur.“ Borellus autem rem ita explicat (Euclid. restit. lib. IV. Prop. 16.): problema poscit, super data recta linea describere polygonum

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ $ΓΕ$ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ $ΑΘ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔσσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$ ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν τῇ πρὸς τῷ E , ὡς δὲ τῇ AB πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τῇ $ΒΓ$ τῇ $ΕΖ$. λέγω ὅτι τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$ τρίτη ἀνάλογον ἢ BH , ὥστε εἶναι ὡς τὴν $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$ οὕτως τὴν $ΕΖ$ πρὸς τὴν BH . καὶ ἐπεξεύχθω ἡ HA .

Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως ἡ $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. ἐναλλαξ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΔΕ$ οὕτως ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. Ἀλλ' ὡς ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$ οὕτως ἔστιν ἡ $ΕΖ$ πρὸς τὴν BH . καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $ΔΕ$ οὕτως ἡ $ΕΖ$ πρὸς τὴν BH . τῶν ABH , $ΔΕΖ$ ἄρα τριγώνων ἀντιστεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

dato aequiangulum, et habens circum angulos aequales latera proportionalia lateribus illius, ita ut data recta homologa sit dato lateri polygoni. Necessitatem autem vocum „similiter positum“, quae Ramus definiri debuisse non sine ratione monet, iure asserit Tartalea contra Campanum (in cuius versione VI. Prop. apud ipsum 19. illeae omissae sunt). Nempe omissis his vocibus plura uno rectilineo super data recta construi possunt, ita ut dato rectilineo sint similia. Cf. Pfeiderer. Schol. msc. §§. 256. 257.

A data igitur recta AB dato rectilineo IE simile et similiter positum rectilineum AG descriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 376.)

Similia triacula inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum

Sint similia triacula $AB\Gamma$, ΔEZ , angulum ad B aequalem habentia angulo ad E , et sit ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ , ita ut homologum sit $B\Gamma$ ipsi EZ ; dico triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum ΔEZ duplicatam rationem habere eius quam habet $B\Gamma$ ad EZ .

Sumatur enim (VI. 11.) ipsis $B\Gamma$, EZ tertia proportionalis BH , ita ut sit ut $B\Gamma$ ad EZ ita EZ ad BH ; et iungatur HA .

Et quoniam est ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ ; alterne igitur est (V. 16.) ut AB ad ΔE ita $B\Gamma$ ad EZ . Sed ut $B\Gamma$ ad EZ ita est EZ ad BH ; ut igitur (V. 11.) AB ad ΔE ita EZ ad BH ; triangulorum igitur ABH , ΔEZ reciproca sunt latera circa aequales angulos. Quorum autem triangulorum unum angulum uni aequalem habentium, reciproca sunt latera circa ae-

Obs. 2. Circa demonstrationem huius propositionis, ut est in textu graeco, iure monet Rob. Simson, vitiatam eam videri, quod in quadrilateris tantum ostendatur. propositio, nec dicatur, quo modo extendi possit ad rectilinea quinque aut plurimum laterum. Idem praeterea observat, in duobus triangulis inter se aequiangulis hic concludi, esse latus unius ad latus homologum alterius, ut latus aliud primi ad latus alterius huic homologum, sine permutatione proportionalium contra morem Euclidis, ut ex sequente Prop. 19. manifestum sit,

Ὡν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντι-
πεπόνδασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας,
ἴσα ἐστὶν κεινὰ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ
 AEZ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν
 EZ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν BH . ἔαν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι
ἀνάλογον ᾧσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα
λόγον ἔχειν λέγεται ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν. ἡ $BΓ$
ἄρα πρὸς τὴν BH διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΓ$
πρὸς τὴν EZ . Ὡς δὲ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν BH οὕτως
τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον καὶ τὸ
 $ABΓ$ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ABH διπλασίονα λόγον
ἔχει ἥπερ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Ἰσον δὲ τὸ ABH
τρίγωνον τῷ AEZ τριγώνῳ καὶ τὸ $ABΓ$ ἄρα τρίγω-
νον πρὸς τὸ AEZ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει
ἥπερ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἔαν τρεῖς εὐθεῖαι
ἀνάλογον ᾧσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην
οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπεὶ περ
ἐδείχθη, ὡς ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν BH οὕτως τὸ $ABΓ$ τρί-
γωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον, τούτεστι τὸ AEZ .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαι-
ρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις.

idemque vitium recurrere in conclusionē. Contra hanc tamen
observationem forte haud iniuria monere queas, niti conclu-
sionem a Rob. Simson. reprehensam non quidem enuntiatio at
demonstratione VI. 4. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 261. Perfectior
autem demonstratio problematis solutionem ostendere potest
primū in triangulis, ab his procedere ad figuras quadrilateras,
ab his ad quinquelateras, et ita semper a quavis figura recti-

quales angulos, illa sunt aequalia (VI. 15.); aequale igitur est triangulum ABH triangulo $\triangle EZ$. Et quoniam est ut BF ad EZ ita EZ ad BH ; si autem tres rectae proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur (V. 10. Def.) eius quam ad secundam; BF igitur ad BH duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Ut autem BF ad BH ita (VI. 1.) triangulum ABF ad triangulum ABH ; ergo et triangulum ABF ad ABH duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Aequale autem est triangulum ABH triangulo $\triangle EZ$; unde et triangulum ABF (V. 7.) ad triangulum $\triangle EZ$ duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Ergo similia etc.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectae proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita triangulum ex prima ad triangulum ex secunda simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut BF ad BH ita triangulum ABF ad triangulum ABH ; hoc est $\triangle EZ$.

PROPOSITIO XX. (Fig. 373.)

Similia polygona in similia triangula dividuntur, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ad

linea ad aliam, quae habeat numerum laterum unitate maiorem, unde deinde generaliter propositum constabit.

Obs. 3. Alium modum paullo expeditiorem, super linea data AB constituendi figuram rectilineam similem et similiter positam dato rectilineo $\triangle AEZ$ (Fig. 373.) Clayius docet. ita fere. Ponatur data AB super latus AE , quod ei homologum esse debet, ducantur deinde ex A ad vertices angulorum figurae

καὶ τὸ πολὺγωνὸν πρὸς τὸ πολὺγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστω ὁμοία πολὺγωνα τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΖΗ$. λέγω ὅτι τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$ πολὺγωνα εἰς τε ὁμοία τρίγωνα διαίρεται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὰ $ΑΒΓΔΕ$ πολὺγωνον πρὸς τὸ $ΖΗΘΚΛ$ πολὺγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΖΗ$.

Ἐπεξενύχθωσαν αἱ $ΒΕ$, $ΕΓ$, $ΗΔ$, $ΑΘ$.

Καὶ ἐπεὶ ὁμοίων ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολὺγωνον τῷ $ΖΗΘΚΛ$ πολὺγῶνι, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΔΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΔ$ καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΔΕ$ οὕτως ἡ $ΖΗ$ πρὸς $ΖΑ$. Ἐπεὶ εὖν δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ $ΑΒΕ$, $ΖΗΑ$ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΑ$ τριγῶνι, ὥστε καὶ ὁμοίων ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΕ$

rectae $ΔΔ$, $ΔΕ$ etc. per B ducatur $BΘ$ parallela rectae $ΓΔ$; per $Θ$ pariter $ΘΕ$ parallela rectae $ΔΕ$ etc. et facile ostendetur, esse trianguia $ΑΒΘ$, $ΑΓΔ$; $ΑΘΕ$, $ΑΔΕ$ etc. adeoque tota rectilimeis $ΑΒΘΙΚ$, $ΑΓΔΕΖ$ similia et similiter posita.

Obs. 4. Huc pertinet problema (vid. XII. 2. et XII. 11.) dato circulo inscribendi (circumscribendi) figuram rectilineam datæ circulo alii inscriptæ (circumscriptæ) similem et similiter positam. Cf. Pflaiderer. l. c. §§. 263. 264.

PROPOSITIO XIX.

Obs. 1. Sensus huius propositionis est (Cf. dicta ad V. Def. 10.), similia trianguia inter se habere rationem, quæ eadem sit rationi duplicatæ laterum homologorum, vel triangu-
gulum $ΑΒΓ$ esse ad aliud ei simile $ΔΕΖ$ in eadem ratione in

polygonum duplicatam rationem habet eius quam homologum latus ad homologum latus.

Sint similia polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K A$, homologum vero sit latus AB ipsi ZH ; dico $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K A$ polygona in similia triangula dividi et in numero aequalia et homologa totis, et polygonum $AB\Gamma\Delta E$ ad polygonum $ZH\Theta K A$ duplicatam rationem habere eius quam habet AB ad ZH .

Iungantur BE , $E\Gamma$, HA , $A\Theta$.

Et quoniam simile est polygonum $AB\Gamma\Delta E$ polygono $ZH\Theta K A$, aequalis est angulus BAE angulo HZA ; et est ut BA ad AE ita ZH ad ZA (VI. Def. 1.). Et quoniam duo triangula ABE , ZHA unum angulum uni angulo aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia; aequiangulum igitur est triangulum ABE triangulo ZHA (VI. 6.), quare et (VI. 4.) simile; aequalis igitur est

qua est latus BF prioris trianguli ad rectam aliquam, ad quam BF habet rationem duplicatam eius rationis, quam BF habet ad latus EZ ipsi homologum in altero triangulo, vel, si sumitur (VI. 11.) $BF: EZ = EZ: BH$, esse triangulum ABF ad triangulum ΔEZ in eadem ratione, in qua est BF ad BH . Caeterum patet, loco laterum BF , EZ quaevis alia homologa poni potuisse. Et inverse erit ratio trianguli ΔEZ ad triangulum ABF duplicata lateris EZ ad BF , vel erit triangulum ΔEZ ad triangulum ABF ut BH ad BF (Cor. ad B. V.). Pflöiderer, in sched. msc. §§. 269. 270. 271. 275.

Obs: 2. Quodsi in triangulorum similium (Fig. 377.) homologa latera BF , EZ perpendicularia $A\Theta$, ΔK demittantur ex verticibus angulorum homologorum, erit, ob angulos B et E , pariterque Θ et K , adeoque (I. 32.) etiam reliquos angulos

γωνία τῇ ὑπὸ ZHA . Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ $ABΓ$ ὅλη τῇ ὑπὸ $ZHΘ$ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων λοιπῇ ἄρα ἡ ὑπὸ $EBΓ$ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ $AHΘ$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ABE , ZHA τριγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς BA οὕτως ἡ AH πρὸς HZ , ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς $BΓ$ οὕτως ἡ ZH πρὸς $HΘ$. διῶσον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς $BΓ$ οὕτως ἡ AH πρὸς $HΘ$, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ $EBΓ$, $AHΘ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $EBΓ$ τρίγωνον τῷ $AHΘ$ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον (ἐστὶ τὸ $EBΓ$ τρίγωνον τῷ $AHΘ$ τριγώνῳ ¹⁾). Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $EBΓ$ τρίγωνον ὅμοιον ἐστὶ τῷ $AΘΚ$ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ $ABΓΔΕ$, $ZHΘΚΑ$ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτίστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ABE , $EBΓ$, $EBΔ$, ἐπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ZHA , $AHΘ$, $AΘΚ$, καὶ ὅτι τὸ $ABΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΑ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτίστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH .

1) Verba uncis inclusa desunt in Ed. Oxon., nec multum refert, utrum ea ponas an omitas.

les, in triangulis aequiangulis $AΘ:AK=AB:ΔE$ (VI. 4. demonstr.) $=BΓ:EZ=ΔΓ:ΔZ$, adeoque (vid. dicta ad V. Def. 10.) triangula $ABΓ$, $ΔEZ$ erunt etiam in ratione duplicata altitudinum $AΘ$, AK , vel perpendicularium similem situm habentium. Pileid. rer. §§. 280. 281.

O b s. 3. Quum parallelogramma semper dupla sint trian-

angulus ABE angulo ZHA . Est autem et totus $AB\Gamma$ toti $ZH\Theta$ aequalis, propter similitudinem polygonorum; reliquus igitur angulus $EB\Gamma$ reliquo $AH\Theta$ est aequalis. Et quoniam propter similitudinem triangulorum ABE , ZHA , est ut EB ad BA ita AH ad HZ , sed et propter similitudinem polygonorum, est ut AB ad $B\Gamma$, ita ZH ad $H\Theta$; ex aequo igitur est (V. 22.), ut EB ad $B\Gamma$ ita AH ad $H\Theta$, et circa aequales angulos $EB\Gamma$, $AH\Theta$ latera proportionalia sunt; aequiangulum igitur est (VI. 6.) triangulum $EB\Gamma$ triangulo $AH\Theta$, quare (VI. 4.) et simile (triangulum $EB\Gamma$ triangulo $AH\Theta$). Ex eadem ratione et triangulum $ET\Lambda$ simile est triangulo ΛOK ; ergo similia polygonum $AB\Gamma\Lambda E$, $ZH\Theta K A$ in similia triangula dividuntur et in aequalia numero.

Dico et homolega totis, hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sint ABE , $EB\Gamma$, $ET\Lambda$, consequentia vero eorum ZHA , $AH\Theta$, ΛOK , et $AB\Gamma\Lambda E$ polygonum duplicatam rationem habere eius quam homologum latus ad homologum latus, hoc est, AB ad ZH .

gulorum eandem basin, eandemque altitudinem habentium (I. 41.), erunt etiam (V. 15.) similia parallelogramma in ratione laterum duplicata, vel etiam (Obs. 2.) in ratione duplicata perpendicularum similiter positorum. Pfleiderer. §. 282. sqq.

Obs. 4. Quum porro quadrata omnia sint parallelogramma similia (I. Def. 29.; I. 28.; VI. Def. 1.) erunt duo quaecunque quadrata in ratione duplicata laterum homologorum. Unde, si super rectis homologis $B\Gamma$, EZ triangulorum similia $AB\Gamma$, ΔEZ quadrata constructa imagineris, erunt tam

Ἐπεξέχθησαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΖΘ$.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΗΘ$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς $ΒΓ$ οὕτως ἡ $ΖΗ$ πρὸς $ΗΘ$. ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΘ$ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΘ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΓΑ$ τῇ ὑπὸ $ΗΘΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΜ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΝ$, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΜ$ τῇ ὑπὸ $ΖΗΝ$ ἴση καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΜΒ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΖΝΗ$ ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΜ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΝ$ τριγώνῳ· ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ $ΒΜΓ$ τριγώνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ $ΗΝΘ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΒ$ οὕτως ἡ $ΖΝ$ πρὸς $ΝΗ$, ὡς δὲ ἡ $ΒΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως ἡ $ΗΝ$ πρὸς $ΝΘ$ · ὥστε καὶ διίσουν, ὡς ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως ἡ $ΖΝ$ πρὸς $ΝΘ$. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως τὸ $ΑΒΜ$ τρίγωνον πρὸς $ΜΒΓ$, καὶ τὸ $ΑΜΕ$ πρὸς $ΕΜΓ$, πρὸς ἄλληλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ὡς ἄρα τὸ $ΑΜΒ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΜΓ$ οὕτως τὸ $ΑΒΕ$ πρὸς τὸ $ΓΒΕ$. Ἀλλ' ὡς τὸ $ΑΜΒ$ πρὸς τὸ $ΒΜΓ$ οὕτως ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ἡ

triangula, quam quadrata in ratione duplicata rectorum $ΒΓ$, $ΕΖ$, adeoque etiam triangula similia erunt in ratione quadratorum laterum homologorum. Pfeiderer. §. 278.

Obs. 5. Quodsi latera homologa duorum similium triangulorum (parallelogrammorum) aequalia sunt, ista triangula (parallelogramma) aequalia erunt (V. 22. Cox.) et vice versa. (Cox. Prop. m. in Excursu ad libr. V.)

Jungantur enim AT , ZO .

Et quoniam propter similitudinem polygonorum aequalis est angulus ABT angulo ZHO , et est ut AB ad BT ita ZH ad HO ; aequiangulum est (VI. 6.) triangulum ABT triangulo ZHO ; aequalis igitur est angulus quidem BAT angulo HZO , angulus vero BTA angulo HOZ . Et quoniam aequalis est angulus BAM angulo HZN , ostensus autem est et ABM angulo ZHN aequalis; et reliquus igitur (I. 32.) AMB reliquo ZNH aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum ABM triangulo ZHN . Similiter ostendemus et triangulum BMT aequiangulum esse triangulo HNO ; est igitur (VI. 4.) ut AM quidem ad MB ita ZN ad NH , ut vero BM ad MT ita HN ad NO ; quare et ex aequo (V. 22.) ut AM ad MT ita ZN ad NO . Sed ut AM ad MT ita triangulum ABM ad MBT , et AME ad EMT , inter se enim sunt ut bases (VI. 1.); et (V. 12.) ut unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur triangulum AMB ad BMT , ita ABE ad TBE . Sed ut AMB ad BMT ita AM ad MT ; ergo ut (V. 11.) AM ad MT ita triangulum ABE ad triangulum EBT . Ex eadem ratione et ut ZN ad NO ita triangulum ZHA ad triangulum HAO . Et est ut AM ad MT

Obs. 6. Corollarium Prop. 19. adiectum, quod et Austin. observat, nonnisi ipsam Prop. 19. aliis verbis, substituendo nempe termino „ratio duplicata“ definitionem eius, enunciat, verumtamen expeditionis in sequentibus (vid. Demonstr. VI. 22.; VI. 25.; VI. 31.) argumentationis causa diserte ea exponere e re erat. Idem observandum est de Cor. Prop. 20. VI. 2. Cf. Pfeiderer. §. 300.

ZN πρὸς $NΘ$ οὕτως τὸ ZHA τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AM πρὸς MF οὕτως ἡ ZN πρὸς $NΘ$ καὶ ὡς ἄρα τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ BEG τρίγωνον οὕτως τὸ ZHA τρίγωνον πρὸς τὸ $HΘA$ τρίγωνον, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον οὕτως τὸ BEG τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον. Ὀμοίως δὴ δείξομεν, ἐπιτευχθεῖσιν τῶν BA , HK , ὅτι καὶ ὡς τὸ BEG τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $EΓA$ τρίγωνον πρὸς τὸ $AΘK$ τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον οὕτως τὸ EBG πρὸς τὸ $AHΘ$, καὶ ἔτι $EΓA$ πρὸς τὸ $AΘK$ καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα

PROPOSITIO XX.

Obs. 1. Quum polygona hac varia ratione in triangula dividi possint, distinctius dici oportebat, qua ratione id fieri debeat, ut in utroque similibus polygonorum respective similia existant triangula. Nempe si in uno polygonorum a vertice anguli cuiuscunque v. gr. a vertice E ad vertices reliquorum angulorum omnium (exceptis duobus proximis) ducantur rectae EB , EF etc., pariterque in altero polygono a vertice eius anguli, qui cum angulo E similiter positus est, ducantur ad vertices reliquorum angulorum rectae AH , $AΘ$ etc., tum etc. Atque, triangulis ita formatis, diagonales homologae, i.e. eae, quae vertices angulorum respective aequalium iungunt, ut ex demonstratione patet, in partes respective aequales dividunt angulos, per quos transeunt, et ipsae hae diagonales sunt lateribus figurarum homologis proportionales. Cf. Pflaiderer. Schol. §. 292.

Obs. 2. Quod demonstrationem attinet, pars secunda, quod nempe homologa sint triangula ABE , ZHA , pariterque EBG , $AHΘ$ praeter rationem prolixa esse videtur, quum, de-

ita ZN ad $N\Theta$; ergo (V. 11.) ut triangulum ABE ad triangulum BET , ita triangulum ZHA ad triangulum $H\Theta A$, et alterne (V. 16.) ut triangulum ABE ad triangulum ZHA ita triangulum BEM ad triangulum $H\Lambda\Theta$. Similiter ostendemus, iunctis BA , HK , ut triangulum BET ad triangulum $H\Lambda\Theta$ ita triangulum ETA ad triangulum $\Lambda\Theta K$. Et quoniam est ut triangulum ABE ad ZHA ita EBT ad $AH\Theta$, et insuper ETA ad $\Lambda\Theta K$; erit ut (V. 12.) unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut triangulum ABE ad triangulum ZHA ita polygonum $ABTAE$ ad polygonum $ZH\Theta KA$. Sed triangulum ABE ad triangulum ZHA duplicatam rationem habet eius quam

monstrata ante triangulorum similitudine, res statim ex VI. 19. et V. 11. pateat, ut in altera demonstratione ad finem addita ostenditur. Unde haud paucis potior visa fuit haec posterior demonstratio, quam multi editores solam habent (v. c. Clavius, Giordano da Bitonto, Candalla, Billingsley, Orontius Fineus, Henrion, Borellus, Barrow., Cotesius, Rob. Simson., Playfair. alii) vel alteri addunt (ut Campanus, Zambertus, Commandinus, Boermannus, alii). Pfeiderero tamen (§. 294.) prior illa, subtiliori arte, et per consequentias magis immediatas suppositi argumentans, potius genuina videtur, quam altera expeditior, at remotiori consecratio utens, et demonstrationem partis tertiae imitans. Caeterum, si haec altera demonstratio eo tantum consilio adhibetur, quod inscriptio indicat, nempe ut ostendatur, homologa esse illa triangula, nihil opus erat verbis in Ed. Oxon. ad finem additis, quae in variantibus notavimus: sin autem tertia quoque propositionis pars, nempe, similia polygona esse in ratione duplicata laterum homologorum inde derivanda sint, sunt illa omnino necessaria.

Obs. 3. Circa corollaria huic propositioni addita obser-

τὰ ἐπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον οὕτως τὸ $ABΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΛ$ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔστι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν καὶ τὸ $ABΓΔΕ$ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΛ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α α.

Ὡσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλευρῶν δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔστι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α β.

Καὶ ἐὰν τῶν AB , ZH τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ , ἡ AB πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν ZH . Ἐχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ὁμόλογος

vat Austin., quemvis lectorem videre, vocem polygoni hic adhiberi de quavis figura rectilinea, quae plura quam tria latera habeat, unde nihil opus sit taediosis his corollariis, quae in ipsa propositione contenta sint. Verum enim vero, praeterquam quod vox πολύγωνον vel πολύπλευρον ita alio sensu sumenda foret, ac in I. Def. 23. eadem etiam rationes, quas in Obs. 6. ad VI. 19. vidimus, corollarii secundi enunciatum

latus homologum AB habet ad ZH latus homologum; similia enim triacula in duplicata ratione sunt (VI. 19.) laterum homologorum; ergo et polygonum $AB\Gamma\Delta E$ ad polygonum $ZH\Theta K A$ duplicatam rationem habet eius quam homologum latus AB ad homologum latus ZH . Ergo similia etc.

COROLLARIUM I.

Similiter et in similibus quadrilateris ostendetur, ea in duplicata ratione esse laterum homologorum. Ostensum autem est et in triangulis (VI. 19.); quare et universe similes rectilineae figurae inter se in duplicata ratione sunt laterum homologorum.

COROLLARIUM II.

Et si ipsis AB , ZH tertiam proportionalem sumamus quae sit E , AB ad E duplicatam rationem habet (V. 10. Def.) eius quam AB ad ZH . Habet autem et polygonum ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem eius quam homologum

tuentur. Praeterea observat Austin. in corollario hoc secundo primum occurrere vocem *σidos*, quum alias Euclides, qui a recepta semel dicendi forma recedere non solet, voce *εξημα* utatur, ut in I. Def. 14. ad indicandum spatium terminis circumscriptum. Nec vocem *σidos* apud Euclidem recurrere, nisi in demonstratione VI. 25., ubi hoc ipsum corollarium modo minus necessario in usum vocetur, et in Prop. VI. 27; VI.

πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH . ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι εἰν τρεῖς εὐθεταὶ ἀνάλογον ὡσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

$A \ A \ A \ \Omega \ \Sigma$.

Δείξομεν δὴ καὶ ἐτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ $ABΓΔΕ$, $ZHΘΚΑ$ πολύγωνα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ BE , $ΕΓ$, $ΗΑ$, $ΑΘ$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA οὕτως τὸ $EBΓ$ πρὸς τὸ $AHΘ$ καὶ τὸ $ΓΔΕ$ πρὸς τὸ $ΘΚΑ$.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίόν ἐστι τὸ ABE τρίγωνον τῷ ZHA τριγώνῳ, τὸ ABE ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ BE πρὸς τὴν HA . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $BEΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ BE πρὸς τὴν HA . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον οὕτως τὸ $EBΓ$ πρὸς τὸ $AHΘ$. Πάλιν,

28.; VI. 29; VI. 30.; VI. 31., quae hoc ipso nomine spectata videantur. Nec omnino consequi hoc corollarium ita generaliter expressum ex propositione, in qua sermo sit tantum de figuris rectilineis aut polygonis, non de quibuscunque spatii speciebus aut figuris. — Forte tamen non sine ratione responderi possit, ad vocem εἶδος subiutelligendam esse vocem πολυπλευρον, vel πολύγωνον ex antecedentibus facile supponendam, et id ipsum, quod corollarium non de figura quacunque ex propositione consequatur, Euclidi causae fuisse, eam generaliore voce σχῆμα hic uti nollet.

latus ad homologum latus, hoc est AB ad ZH ; ostensum est autem hoc et in triangulis; quare et universe manifestum est, si tres rectae proportionales sint, ut prima ad tertiam ita futuram esse figuram a prima ad figuram a secunda, similem et similiter descriptam.

ALITER.

Ostendemus etiam aliter expeditius homologa esse triangu-
la.

Exponantur enim rursus polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K A$, et iungantur BE , EF , HA , $A\Theta$; dico esse ut triangulum ABE ad ZHA ita $EB\Gamma$ ad $AH\Theta$ et $\Gamma\Delta E$ ad $\Theta K A$.

Quoniam enim simile est triangulum ABE triangulo ZHA , triangulum ABE ad triangulum ZHA duplicatam rationem habet (VI. 19.) eius quam BE ad HA . Ex eadem ratione et triangulum $BE\Gamma$ ad triangulum $HA\Theta$ duplicatam rationem habet eius quam BE ad HA ; est igitur (V. 11.) ut triangulum ABE ad triangulum ZHA ita $EB\Gamma$ ad $AH\Theta$. Rursus, quoniam

Obs. 4. Patet etiam, polygona similia, quorum homologa latera sunt inter se aequalia, esse quoque aequalia inter se. Nempe, quum ratio homologorum laterum sit (supp.) ratio aequalitatis, ratio duplicata laterum homologorum pariter erit ratio aequalitatis (V. 22. Cor.) i. e. ratio polygonorum similiarum super homologis istis lateribus descriptorum erit ratio aequalitatis, adeoque polygona aequalia. Et contra, si polygona similia fuerint aequalia, vel rationem aequalitatis habeant, ratio subduplicata eorum, h. e. ratio laterum homologorum etiam erit ratio aequalitatis (Cor. ad Prop. m. in Excursu ad

ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΛΗΘ$ τριγώνῳ· τὸ $ΕΒΓ$ ἄρα πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $ΓΕ$ εὐθεία πρὸς τὴν $ΘΛ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΘΚ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΘΛ$. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ οὕτως τὸ $ΕΓΔ$ πρὸς τὸ $ΛΘΚ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ $ΕΒΓ$ πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ οὕτως τὸ $ΑΒΕ$ πρὸς τὸ $ΖΗΛ$ καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΒΕ$ πρὸς τὸ $ΖΗΛ$ οὕτως τὸ $ΒΕΓ$ πρὸς τὸ $ΗΛΘ$ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ πρὸς τὸ $ΛΘΚ$ ¹⁾. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἐκάτερον τῶν A, B εὐθυγράμμων τῷ $Γ$ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ A τῷ B ἐστὶν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ A τῷ $Γ$, ἰσογώνιον τέ ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ B τῷ $Γ$, ἰσογώνιον τέ ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἐκάτερον ἄρα τῶν A, B τῷ $Γ$ ἰσογώνιον τέ ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, ὥστε καὶ τὸ A τῷ B ἰσογώνιον τέ ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς

1) Edd. Basil. et Oxon. addunt: καὶ ὡς ἄρα (V. 12.) ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενά πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δεῖξει. De hac lectione vide infra, quae ad hanc Propos. observantissimus.

Libr. V.) i. c. latera homologa erunt aequalia. (Quod posterius est Lemma ad VI. 22.) Cf. Obs. 5. ad VI. 19. Borellus

simile est triangulum EBF triangulo $AH\Theta$; EBF igitur (VI. 19.) ad $AH\Theta$ duplicatam rationem habet eius quam TE recta ad ΘA . Ex eadem ratione et triangulum ETA ad triangulum $A\Theta K$ duplicatam rationem habet eius quam TE ad ΘA ; est igitur (V. 11.) ut triangulum EBF ad $AH\Theta$ ita ETA ad $A\Theta K$. Ostensum est autem et ut EBF ad $AH\Theta$ ita ABE ad ZHA ; ergo ut ABE ad ZHA ita BEF ad $H\Lambda\Theta$ et ETA ad $A\Theta K$. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 379.)

Quae eidem rectilineo sunt similia, et inter se sunt similia.

Sit enim utrumque rectilineorum A , B ipsi Γ simile; dico et A ipsi B esse simile.

Quoniam enim est simile rectilineum A ipsi Γ , et aequiangulum est ipsi (VI. 1. Def.), et circa aequales angulos latera proportionalia habet. Rursus, quoniam simile est rectilineum B ipsi Γ , et aequiangulum est ipsi (VI. 1. Def.), et circa aequales angulos latera proportionalia habet; utrumque igitur ipsorum A , B ipsi Γ aequiangulum est et circa aequales angulos latera proportionalia habet, quare et rectilineum A ipsi B

Cor. 2. ad Prop. IV. 17. Pfeiderer. l. c. §. 299. Pariter, si polygonorum similium areae fuerint aequales, triangula quoque, quae diagonales homologae abscindunt, et similia et aequalia erunt. Cf. Pfeiderer. §. 298.

Obs. 5. Ut duo rectilinea M , N (triangulis quoque sub hac denominatione comprehensis) similia eam habeant rationem, quam latus aliquod A prioris habet ad rectam datam Γ ,

ανάλογον ἔχει 1). "Ομοιον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B .
 "Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἢ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

"Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB , ΓA , EZ , $H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν AB , ΓA ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ KAB , $\Lambda\Gamma A$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $H\Theta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ MZ , $N\Theta$ · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma A$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AB , ΓA τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ , τῶν δὲ EZ , $H\Theta$ τρίτη ἀνάλογον ἡ O . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, ὡς δὲ ΓA πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ $H\Theta$ πρὸς τὴν O · διῆσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν O . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma A$, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν O οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma A$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$.

1) Verba haec ab ὥστε inde ad absolvendam demonstrationem prorsus necessaria, quae ex Cod. a. sine dubio tantum ex oscitantia librarii exciderant, omittit Peyrardus. Nos morem Euclidi solemnem secuti ea restituimus, ut sunt in Edd. Basil. et Oxon.

posterioris latus homologum debet esse media proportionalis

est aequiangulum (I. Ax. 1.) et latera circum aequales angulos habet proportionalia (V. 11.). Simile igitur est A ipsi B (VI. Def. 1.). Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 380.)

Si quatuor rectae proportionales sint, et quae ab ipsis sunt rectilinea, similia et similiter descripta, proportionalia erunt; et si, quae ab ipsis sunt rectilinea similia et similiter descripta proportionalia sint, et ipsae rectae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae proportionales $AB, \Gamma A, EZ, H\Theta$, ut AB ad ΓA ita EZ ad $H\Theta$, et describantur ab ipsis quidem $AB, \Gamma A$ similia et similiter posita rectilinea $KAB, \Lambda \Gamma A$, ab ipsis vero $EZ, H\Theta$ similia et similiter posita rectilinea $MZ, N\Theta$; dico esse ut KAB ad $\Lambda \Gamma A$ ita MZ ad $N\Theta$.

Sumatur enim (VI. 11.) ipsis quidem $AB, \Gamma A$ tertia proportionalis Ξ ; ipsis vero $EZ, H\Theta$ tertia proportionalis O . Et quoniam est ut AB quidem ad ΓA ita EZ ad $H\Theta$, ut ΓA vero ad Ξ ita (V. 11.) $M\Theta$ ad O ; ex aequo igitur est (V. 22.) ut AB ad Ξ ita EZ ad O . Sed (VI. 20. Cor. 2.) ut AB quidem ad Ξ ita KAB ad $\Lambda \Gamma A$, ut EZ vero ad O ita MZ ad $N\Theta$; ut igitur (V. 11.) KAB ad $\Lambda \Gamma A$ ita MZ ad $N\Theta$.

inter latus illud A , et rectam datam Γ . Sit enim illa media proportionalis B , ita ut $A:B=B:\Gamma$, dico, latus illud homologum posterioris figurae esse $=B$. Quodsi enim non fuerit $=B$, sit illud alia recta quaecunque Δ diversa a B , sitque $A:\Delta=\Delta:E$, eritque $M:N=A:E$. At, quum ratio $A:\Delta$ diversa sit a ratione $A:B$, diversa quoque erit ratio $A:E$.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $ΛΓΔ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $ΝΘ$. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΗΘ$.

Γεγονέτω γάρ¹⁾ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΙΠ$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $ΙΠ$ ὁποτέρῳ τῶν MZ , $ΝΘ$ ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ $ΣΡ$.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΙΠ$, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν AB , $ΓΔ$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB , $ΛΓΔ$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $ΙΠ$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ MZ , $ΣΡ$. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $ΛΓΔ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $ΣΡ$. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $ΛΓΔ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $ΝΘ$ (καὶ ὡς ἄρα τὸ MZ πρὸς τὸ $ΣΡ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $ΝΘ$ ²⁾ τὰ MZ ἄρα πρὸς ἑκατέρον τῶν $ΝΘ$, $ΣΡ$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΝΘ$ τῷ $ΣΡ$. Ἔστι δὲ αὐτῷ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον ἴση ἄρα ἡ $ΗΘ$ τῇ $ΙΠ$. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΙΠ$, ἴση δὲ ἡ $ΙΠ$ τῇ $ΗΘ$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΗΘ$. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Loco verborum γεγονέτω γάρ Peyrardus ex Cod. a habet: εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως EZ πρὸς τὴν $ΗΘ$. ἔστω κ. τ. λ. At, quum ita indirecta demonstratio sequi debere videatur, Euclides autem directam habeat, praefereunda omnino videtur lectio Edd. Oxon. et Basil.

2) Voces unciis inclusas omittit Ed. Oxon. et possunt illae omnino abesse.

a ratione $A:F$ (Cor. ad Prop. m in Excursu ad Libr. V.). At utraque ratio $A:F$ (suppos.) et $A:E$ (demonstr.) aequalis est rationi $M:N$: itaque (V. 11.) etiam ratio $A:F$ eadem est

Sed sit ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad $N\Theta$; dico esse et ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$.

Fiat enim (VI. 12.), ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad IIP , et describatur (VI. 18.) a IIP alterutri ipsorum MZ , $N\Theta$ simile et similiter positum rectilineum ΣP .

Et quoniam est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad IIP , et descripta sunt ab ipsis quidem AB , $\Gamma\Delta$, similia et similiter posita KAB , $\Lambda\Gamma\Delta$, ab ipsis vero EZ , IIP , similia et similiter posita $M\Sigma$, ΣP ; est igitur (per part. prior. hui.) ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad ΣP . Ponitur autem et ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad $N\Theta$; et ut igitur (V. 11.) MZ ad ΣP ita MZ ad $N\Theta$; ergo MZ (V. 11.) ad utrumque ipsorum $N\Theta$, ΣP eandem habet rationem; aequale igitur est (V. 9.) $N\Theta$ ipsi ΣP . Est autem ipsi simile et similiter positum; aequalis igitur (sequens Lemma) $H\Theta$ ipsi IIP . Et quoniam est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad IIP , aequalis autem IIP ipsi $H\Theta$; est igitur (V. 7.) ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$. Si igitur quatuor etc.

rationi $A:B$, quod est absurdum. Latus igitur homologum posterioris figurae erit $=B$. Cf. Pfeiderer. §. 361.

Obs. 6. Hinc facile solvetur problema describendae figurae rectilineae similis datae figurae M , et quae ad hanc figuram M eandem rationem habeat, quam recta data Σ ad rectam datam II . Sumatur nempe latus quodcumque A figurae M , et fiat $II:\Sigma=A:\Gamma$ (VI. 12.). Inveniatur deinde rectis A , Γ media proportionalis B (VI. 11.), ut itaque sit $A:B=B:\Gamma$, et super recta B describatur (VI. 18.) figura similis et simili-

A H M M A.

"Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ἢ καὶ ὁμοία, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δεῖξομεν οὕτως.

Ἐστω ἴσα καὶ ὁμοία εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΗΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἀνισοὶ εἴσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΗΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΗΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον ἐστὶ τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀνισοὺς ἐστὶν ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, ἴση ἄρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν σγνεῖμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν 1).

1) Omnes quidem editiones legunt saltim: ἐκ τῶν πλευρῶν, nec Peyraudus aliam ex Codd. Mss. lectionem notavit. Quam tamen, ut recte monet Rob. Simson, in Not. ad VI. 23, p. 376. vulgaris lectio sit absurda, non dubitavimus illi aliam veriorē substituere.

liter posita figurae M , ita ut latera B , A , sint latera homologa, erit figura descripta, quam N vocabimus ea, quae describi iussa erat. Est enim $M:N=A:I=II:Σ$, vel $N:M=Σ:II$. Cf. Pfeiderer, §. 302. Nominativum eodem modo solvetur problema, triangulum datum per rectas designato eius lateri parallelas dividendi in partes quotcunque aequales, vel etiam quae rationes invicem habeant aequales rationibus rectarum datarum. Cf. Pfeiderer, §. 303.

O b s. 7. Quum nominativum etiam quadrata super homo-

L E M M A.

Si autem rectilinea aequalia sint et similia, homologa ipsorum latera aequalia inter se esse, sic ostendemus.

Sint aequalia et similia rectilinea $N\Theta$, ΣP , et sit ut ΘH ad HN ita $P\Pi$ ad $\Pi\Sigma$; dico aequalem esse $P\Pi$ ipsi ΘH .

Si enim inaequales sint, una ipsarum maior est. Sit maior $P\Pi$ ipsa ΘH . Et quoniam est ut $P\Pi$ ad $\Pi\Sigma$ ita ΘH ad HN , et alterne (V. 16.) ut $P\Pi$ ad ΘH ita $\Pi\Sigma$ ad HN . Maior autem $P\Pi$ ipsa ΘH ; maior igitur (Prop. A. libri V.) et $\Pi\Sigma$ ipsa HN ; quare et (VI. 20.) $P\Sigma$ maius est ipso ΘN ; sed et aequale, quod fieri nequit; non igitur inaequalis est $P\Pi$ ipsi ΘH , aequalis igitur. Quod oportebat ostendere.

P R O P O S I T I O XXIII. (Fig. 381.)

Aequiangula parallelogramma inter se rationem habent compositam ex rationibus laterum.

logis lateribus figurarum similium descripta sint in ratione duplicata horum laterum patet, polygona similia quaecunque (triangulis quoque et quadrilateris similibus sub hac denominatione comprehensis Obs. 4. ad VI. 19.) esse in ratione quadratorum laterum homologorum.

P R O P O S I T I O XXI.

Obs. Potest haec propositio deduci ut corollarium Prop. VI. 18. Ita est apud Borellum in Cor. ad Prop. 16. Libr. IV.

P R O P O S I T I O XXII.

Obs. 1. Propositio haec derivari facile potest ex VI. 20. et ex Cor. V. 22. et Cor. Prop. in in Excursu ad Libr. V.

Ἐστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ $ΑΓ$, $ΓΖ$, ἴσων ἔχοντα τὴν ὑπὸ $ΒΓΑ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΕΓΗ$. λέγω ὅτι τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν ¹⁾, τοῦ τε ὄν. ἔχει ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ καὶ τοῦ ὄν. ἔχει ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$.

Κείσθω γάρ. ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $ΒΓ$ τῇ $ΓΗ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΓ$ τῇ $ΓΕ$. καὶ συμπληρώσθω τὸ $ΔΗ$ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκείσθω τις εὐθεῖα ἡ $Κ$; καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως ἡ $Κ$ πρὸς τὴν $Α$, ὡς δὲ ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως ἡ $Α$ πρὸς τὴν $Μ$.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε $Κ$ πρὸς τὴν $Α$ καὶ τῆς $Α$ πρὸς τὴν $Μ$ οἱ αὐτοὶ εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ καὶ τῆς $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$.

1) Hic quoque ex eadem ratione ac in ipsa propositione ex ingenio adiecimus vocem τῶν.

Lemma subsequens deductam est supra in Obs. 4. ad VI. 20. Aliter ac in textu graeco Boermanntis, et accuratius, omitta etiam permutatione superflua, hoc lemma ita demonstrat. Si rectilinea $NΘ$, $ΣΡ$ sint similia et aequalia, latera quoque homologa $ΗΘ$, $ΠΡ$ aequalia erunt. Si enim non sint aequalia, alterutrum velut $ΠΡ$ maius erit, unde, quum sit (VI. Def. 1.) $ΠΡ:ΠΣ=ΗΘ:ΗΝ$, erit quoque $ΠΣ>ΗΝ$ (V. 14.) adeoque triangulum $ΣΠΡ$ ipsi $NHΘ$ impositum non congruet, sed maius erit (Cor. ad I. 14.). Est autem rectilin. $ΣΡ$: rectilin. $NΘ$ = triang. $ΣΠΡ$: triang. $NHΘ$ (VI. 20.) Itaque rectilin. $ΣΡ>$ rectilinis $NΘ$ (Prop. A. libr. V.) contra hypothesein, ergo $ΠΡ=ΗΘ$.

Obs. 4. Prop. 22. etiam valet de quatuor figuris rectilineis, non binis solum, sed omnibus similibus. Speciatim quatuor rectarum quadrata sunt proportionalia et vice versa.

Sint aequiangulara parallelogramma AF , FZ , aequalem habentia angulum BFA angulo EFH ; dico, parallelogrammum AF ad parallelogrammum FZ rationem habere compositam ex rationibus laterum, nempe ex ea, quam habet BF ad FH et ex ea quam habet AP ad FE .

Ponantur enim ita ut in directum sit BF ipsi FH ; in directum igitur est et AF ipsi FE (I. 14.); et compleatur parallelogrammum AH , et exponatur quaedam recta K , et fiat (VI. 12.) ut BF ad FH ita K ad A , ut AF vero ad FE ita A ad M .

Rationes igitur ipsius K ad A et ipsius A ad M eadem sunt quae rationes laterum; videlicet lateris BF ad FH et ipsius AF ad FE . Sed ipsius K ad

PROPOSITIO XXIII.

Obs. 1. Sensus huius propositionis, ut ex demonstratione eius patet (collat. Excursu ad hunc librum §. 8.), hic est: cognitis laterum circa aequales parallelogrammorum aequiangularum angulos rationibus mutuis, colligi ex iis posse rationem, quam areae parallelogrammorum invicem habeant. Vel rationem mutuam parallelogrammorum aequiangularum pendere ab rationibus laterum ipsorum circa aequales angulos, eodem modo, quo illa ex his eliciatur, propositio haec docet. Demonstrationis enim momentum eo redit, ut, si vel ipsa parallelogrammorum circa aequales angulos latera, proinde et eorum rationes dentur, rectae, quarum rationes eadem sint rationibus laterum binorum parallelogrammorum, ostendatur, duas quoque exhiberi posse rectas, quarum ratio mutua eadem sit rationi parallelogrammorum. Cf. Pfeiderer. l. c. P. IV. §. 195. Pfeiderer. simul observat, cum propositio haec, pariter ac VI. 14. nonnisi iterata propositionis VI. 1. applicatione nitatur, et argumenti 14. coepta continuatio ac supplementum sit; transpo-

Ἀλλ' ὁ τῆς K πρὸς τὴν M λόγος σύγκειται ἐκ τε τοῦ τῆς K πρὸς τὴν A λόγου καὶ τοῦ τῆς A πρὸς τὴν M ὥστε καὶ ἡ K πρὸς τὴν M λόγον ἔχει τῶν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν ¹⁾. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$ ἄλλ' ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως ἡ K πρὸς τὴν A καὶ ὡς ἄρα ἡ K πρὸς τὴν A οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΘ$. Ἡάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ ἄλλ' ὡς ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως ἡ A πρὸς τὴν M καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ K πρὸς τὴν A οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ A πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον· δίττου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ K πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΑΓ$

1) Hic quoque et pariter ad finem demonstrationis vocem τῶν altera vice positam ex coniectura adiecimus.

sitione haud apta propositiones inter ad figuras similes pertinentes, nec ullo modo cum ipsa connexas, insertam fuisse videri. Caeterum $ΑΓ$ et $ΓΕ$ in directum fore, si $BΓ$, $ΓΗ$ in directum ponantur, simili ratione ostendi potest ac in Obs. 2. ad VI. 14.

Obs. 2. Rationem, quae ex duabus datis rationibus per lineas rectas expressis componitur, dari, h. e. (Eucl. Dat. Def. 2.) ipsi aequalem lineis rectis exhiberi posse, efficit demonstratio Prop. VI. 23. idemque similiter ad plures, quam duas rationes sic datas, ex iisque compositas extenditur. Cf. Pfeiderer. §. 212.

Obs. 3. Eadem consequentiae, quae in demonstratione inde deducuntur, quod rationes $BΓ:ΓΗ$, et $ΑΓ:ΓΕ$ dari sup-

M ratio componitur, ex ratione ipsius K ad A et ex ratione ipsius A ad M (Def. rationis compos.); quare et K ad M rationem habet compositam ex rationibus laterum. Et quoniam est (VI. 1.) ut BF ad FH ita AF parallelogrammum ad FO ; sed ut BF ad FH ita K ad A ; erit igitur (V. 11.) K ad A ita AF ad FO . Rursus, quoniam est (VI. 1.) ut AF ad FE ita FO parallelogrammum ad FZ ; sed, ut AF ad FE ita A ad M ; erit ut igitur (V. 11.) A ad M ita parallelogrammum FO ad parallelogrammum FZ . Quoniam igitur ostensum est, ut K quidem ad A ita parallelogrammum AF ad parallelogrammum FO , ut A vero ad M ita parallelogrammum FO ad parallelogrammum FZ ; ex aequo igitur est (V. 22.), ut K ad M ita parallelogrammum AF ad parallelogrammum FZ . At vero K ad M rationem habet compositam ex rationibus laterum; et AF igitur ad FZ rationem habet

ponuntur, nectuntur, si rationes solum posteriores (Prop. B. in Excursu ad Libr. V.) invertantur, et rationes $BF:FH$, et $FE:AF$ dari ponantur. Tum nempe ob parallelogr.

$$\begin{aligned} AF:FO &= BF:FH \\ FZ:FO &= FE:AF \end{aligned} \quad (\text{VI. 1.})$$

simili ratione consequitur, dari rationem mutuam parallelogrammorum AF , FZ , si utriusque ratio ad idem parallelogrammum FO detur. Cf. Pfeiderer. §. 213.

Obs. 4. Hac ipsa methodo Euclides praemissis propositionibus (Dat. 1. 2.): duarum magnitudinum homogenearum datarum dari rationem mutuam; et vicissim dari magnitudinem, cuius ad datam magnitudinem ratio detur (si nempe, quod Rob. Simson. addit, duabus magnitudinibus, quibus haec ratio exprimitur, et magnitudini datae quartae proportionalis possit inveniri); generatim ostendit, duas magnitudines, quarum rationes ad eandem tertiam dentur, pariter mutuo habere

παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.
Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγγεόμενον ἐκ
τῶν τῶν πλευρῶν καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον
ἔχει τὸν συγγεόμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα
ἰσογώνια, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον
παραλληλόγραμμα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλή-
λοις.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος
δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα
ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ
παραλληλογράμμων ὁμοίων ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ
ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν
πλευρῶν τὴν ΒΓ ἤκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς
ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ.
Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν
πλευρῶν τὴν ΓΔ ἤκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν
ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ.

datam rationem in Dat. Prop. 8. (apud Rob. Simson. et Schwab.
Prop. 9.). Cf. Pfeiderer. §. 214. Quo nixus principio Eucli-
des deinde suam datorum tractationem absque rationum com-
positione instruit; nominatim Prop. 70. partem priorem (apud
Rob. Simson. et Schwab. Prop. 67.) Elementorum VI. 23. re-
spondentem demonstrat. Cf. Pfeiderer. §. 215.

Obs. 5. Quatenus ab modo, rationem ex laterum ΒΓ et
ΓΗ, ΑΓ ac ΓΕ rationibus compositam, lineis rectis datis ex-
hibendi abstrahitur; demonstratio VI. 23. praeunte Candalla,
eo redigi potest, ut observetur: rationem parallelogrammorum
ΑΓ, ΓΖ componi ex rationibus parallelogrammi ΑΓ ad ΓΘ, et

compositam ex rationibus laterum. Ergo aequiangula,
etc.

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 383.)

Omnia parallelogrammi, quae circa diametrum sunt
parallelogramma similia sunt et toti inter se.

Sit parallelogrammum $ABFA$, diameter autem eius
recta AF , circa AF autem parallelogramma sint EH ,
 OK ; dico utrumque parallelogrammorum EH , OK
simile esse toti $ABFA$ et inter se.

Quoniam enim uni laterum trianguli ABF videli-
cet ipsi BF parallela ducta est EZ , erit (VI. 2.) ut
 BE ad EA ita FZ ad ZA . Rursus, quoniam uni
lateri trianguli AFH nempe ipsi FA parallela ducta
est ZH , erit (VI. 2.) ut FZ ad ZA ita AH ad HA .
Sed ut FZ ad ZA ita ostensa est et BE ad EA ;

huius ad FZ (Exc. ad hunc libr. §. 3. nr. 1.) quae eadem
sint rationibus laterum ipsorum $BF:FH$, $AF:FE$ (VI. 1.);
itaque etiam dici ex his componi (Exc. ad hunc libr. §. 3.
nr. 2.). Cf. Clavius et Rob. Simson. Pfeiderer. §. 216.

Obs. 6. Quodsi desideratur, ut ratio parallelogrammo-
rum AF , FZ (Fig. 382.) seu composita ex rationibus laterum
eorum, exhibeatur per rationem quam ipsum prioris latius al-
terutrum BF habeat ad aliquam rectam datam; haec erit quarta
proportionalis quobus reliquis parallelogrammorum lateribus AF ,
 FE , et lateri TH posterioris FZ , quod respondet lateri BF
prioris AF .

Ἄλλ' ὥς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ καὶ ὥς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντεθέντι ὥς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἐγκαλᾷ ὥς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλεοναὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμῳ ἰσογώνιον ἐστὶν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὥς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὥς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ

Facta enim (VI. 12.) $ΔΓ:ΓΕ=ΓΗ:I$

erunt parallelogr. $ΔΓ:ΓΘ = ΒΓ:ΓΗ$ (VI. 1.)

$ΓΘ:ΓΖ=ΔΓ:ΓΕ$ (VI. 1.) $= ΓΗ:I$ (V. 11.)

proinde $ΔΓ:ΓΖ=ΒΓ:I$ (V. 22.). Cf. Pfeiderer.

§. 217.

Obs. 7. Si ab recta ΓΒ (producta, quando opus est) abscinditur ΓΝ=I (Fig. 382.) (quod iuxta Obs. 4. ad VI. 2.) immediate sit, diagonali ΔΗ parallelam ΕΝ agendo per punctum Ε, ac per Ν ducitur rectae ΔΓ parallela: sit parallelogrammum ΓΟ=ΓΖ (VI. 14.), et hinc

$$ΔΓ:ΓΖ=ΔΓ:ΓΟ \text{ (V. 7.) } ΒΓ:\begin{cases} ΓΝ \\ I \end{cases} \text{ (VI. 1.)}$$

ergo (V. 11.) ut BE ad EA ita AH ad HA ; et componendo (V. 18.), ut BA ad AE ita AA ad AH , et alterne (V. 16.) ut BA ad AA ita EA ad AH ; parallelogrammorum igitur $ABGA$, EH proportionalia sunt latera, quae circa communem angulum BAA sunt. Et quoniam parallela est HZ ipsi AG , aequalis est angulus AHZ angulo AAG (I. 29.), angulus vero HZA angulo AGA , et communis duobus triangulis AAG , AHZ angulus AAG ; aequiangulum igitur est triangulum AAG triangulo AHZ . Ex eadem ratione et triangulum AGB aequiangulum est triangulo AZE ; totum igitur parallelogrammum $ABGA$ parallelogrammo EH aequiangulum est; ergo (VI. 4.) ut AA ad AG ita AH ad HZ . Ut autem AG ad GA ita HZ ad ZA , ut AG vero ad GB ita AZ ad ZE , et insuper ut GB ad BA ita ZE ad ZA : itaque quoniam ostensum est ut AG ad GA ita HZ ad ZA , ut vero AG ad GB ita AZ ad ZE ; ex aequo igitur est (V. 22.) ut AG ad BG ita HZ ad ZE . Parallelogrammorum igitur $ABGA$, EH proportio-

Quare sic etiam potest Prop. VI. 23. enunciari: si parallelogramma AG , FZ sint aequiangula; fiatque, ut unum latus AG prioris ad unum latus FE posterioris, sic huius alterum latus GH ad rectam I : erit parallelogrammum AG ad FZ , ut alterum latus BF prioris ad hanc rectam I . Cf. Pfeleiderer. §§. 218. 219. Unde, data ratione parallelogrammi AG ad FZ datur ratio lateris BF prioris ad rectam I : estque, ut unum latus AG prioris parallelogrammi AG ad unum latus FE posterioris FZ , sic huius alterum latus GH ad hanc rectam I , ad quam alterum parallelogrammi prioris AG latus BF habet datam rationem mutuam parallelogrammorum AG , FZ . Quae

ἐδείχθη ὡς ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως ἡ $ΗΖ$ πρὸς τὴν $ΖΑ$, ὡς δὲ ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$ οὕτως ἡ $ΑΖ$ πρὸς τὴν $ΖΕ$. διότου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως ἡ $ΗΖ$ πρὸς τὴν $ΖΕ$. τῶν ἄρα $ΑΒΓΔ$, $ΕΗ$ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΕΗ$ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ $ΘΚ$ παραλληλογράμμῳ ὁμοιόν ἐστιν· ἐκάτερον ἄρα τῶν $ΕΗ$, $ΘΚ$ παραλληλογράμμων τῷ $ΑΒΓΔ$ παραλληλογράμμῳ ὁμοιόν ἐστι. Ταῦτα δὲ τῷ αὐτῷ εὐθύγραμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ $ΕΗ$ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ $ΘΚ$ παραλληλογράμμῳ ὁμοιόν ἐστι. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ὁμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὁμοιον συστήσασθαι, τὸ $ΑΒΓ$, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ $Δ$ δεῖ δὴ τῷ μὲν $ΑΒΓ$ ὁμοιον, τῷ δὲ $Δ$ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

est Dator. Prop. 56. (apud Rob. Simson. et Schwab. pars prior 63.). Cf. Pflaiderer. §. 220.

Obs. 8. Triangula quoque unum angulum aequalem habentia sunt in ratione composita ex rationibus laterum circa aequales angulos. Quod ipsum vel immediate simili ratione demonstrari potest ac VI. 23. vel ex VI. 23. opo I. 34. V. 15. derivari. Cf. Pflaiderer. in sched. mss. §. 239. Commandinus. Cor. ad VI. 23.

Obs. 9. Parallelogramma quaecvis aequiangula sunt inter se ut parallelogramma rectangula sub iisdem respective lateri-

alia sunt latera, quae circa aequales angulos; simile igitur est (VI. Def. 1.) parallelogrammum $ABTA$ parallelogrammo EH . Ex eadem ratione et parallelogrammum $ABTA$ parallelogrammo OK simile est; utrumque igitur parallelogrammorum EH , OK parallelogrammo $ABTA$ simile est. Quae autem eidem rectilineo similia sunt, et inter se sunt similia (VI. 21.) ergo et parallelogrammum EH parallelogrammo OK simile est. Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 394.)

Dato rectilineo simile, et alteri dato aequale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, ABC , cui vero aequale, sit A ; oportet igitur ipsi quidem ABC simile, ipsi vero A aequale idem constituere.

bus comprehensa. Quod ipsum etiam asserit Pappus Collect. Mathem. Libr. VII. Prop. 172., seu in Apollon. Conic. I. Lemm. 8. Cf. Commandinus et Clavius ad VI. 23. et Pfeiderer. §§. 240. 241. Idem valet de triangulis, quorum unus angulus aequalis est (Cf. iidem, Pfeiderer. §. 242. et Pappus Libr. VII. Coll. Math. Prop. 146. vel in Porism. 1. Lemma 20.). Pappus addit (ibid. Prop. 147.) idem valere in triangulis, quorum unum angulum habet, qui deinceps est alteri. Pfeiderer. §. 243. Pappus rem ad praecedentem Prop. 146. reducit, dum unus latus eius anguli, qui in uno triangulo ae-

Παραβεβλήσθω γάρ παρὰ μὲν τὴν $BΓ$ τῷ $ABΓ$ τρίγωνῳ¹⁾ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ BE , παρὰ δὲ τὴν $ΓΕ$ τῷ $Δ$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $ΓΜ$ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ZΓΕ$, ἥ ἐστίν ἴση τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν $BΓ$ τῇ $ΓΖ$, ἡ δὲ $ΔΕ$ τῇ $ΕΜ$. Καὶ εἰληφθῶ τῶν $BΓ$, $ΓΖ$ μέση ἀνάλογον ἡ $ΗΘ$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $ΗΘ$ τῷ $ABΓ$ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ $KΗΘ$.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΗΘ$ οὕτως ἡ $ΗΘ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοίον καὶ ὁμοίως ἀντανασφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$ οὕτως τῇ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $KΗΘ$ τρίγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$ οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $EΖ$ παραλληλόγραμμον καὶ ὡς ἄρα τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $KΗΘ$ τρίγωνον οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $EΖ$ παραλληλόγραμμον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ $KΗΘ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $EΖ$ παραλληλόγραμμον. Ἰσὸν δὲ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ BE παραλλη-

1) Vox *τρίγωνον*, *τρίγωνον* et similia proprie non huc pertinent, quum manifesto de figuris rectilineis quibuscunque sermo sit. Vid. observationem Rob. Simsonis ad hunc locum. Quum tamen illa in omnibus, qui hactenus comparati sunt, codicibus legantur, nolimus ea expungere.

qualis est angulo deinceps posito alterius trianguli, producit, usquedum latus ita productum æquale sit ei ipsi, quod producebatur, lateri, ubi tum res facile patet. Poterat autem idem etiam aliis modis demonstrari.

Obs. 10. Per VI. 23. et Obs. 8. duo parallelogramma (triangula) rectangula, et hinc quævis (I. 35. 1. 37. V. 7. V.

Applicetur enim (I. 44. et 45.) ad rectam quidem BF triangulo ABF aequale parallelogrammum BE , ad rectam vero FE ipsi A aequale parallelogrammum FM in angulo ZFE , qui est aequalis angulo FBA ; in directum igitur est (I. 14.) BF quidem ipsi FZ , et AE ipsi EM . Et sumatur (VI. 13.) inter ipsas BF , FZ media proportionalis $H\Theta$, et describatur (VI. 18.) ex $H\Theta$ rectilineo ABF simile et similiter positum rectilineum $KH\Theta$.

Et quoniam est ut BF ad $H\Theta$ ita $H\Theta$ ad FZ , si autem tres rectae proportionales sint, est (VI. 20. Cor. 2.) ut prima ad tertiam ita figura ex prima ad figuram ex secunda, similem et similiter descriptam; est igitur ut BF ad FZ ita triangulum ABF ad triangulum $KH\Theta$. Sed et (VI. 1.) ut BF ad FZ ita parallelogrammum BE ad parallelogrammum EZ ; ut igitur triangulum ABF ad triangulum $KH\Theta$ ita parallelogrammum BE ad parallelogrammum EZ ; alterne igitur (V. 16.) ut triangulum ABF ad parallelogrammum BE ita triangulum $KH\Theta$ ad parallelogrammum EZ . Aequale autem triangulum ABF parallelogrammo BE ; aequale igitur et triangulum $KH\Theta$ parallelo-

11.) sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum, quod et aliter demonstrari potest. Commandinus et Clavius ad VI. 23. Pfeiderer, §§. 247. 248. Cuiuslibet igitur parallelogrammi ad quadratum aliquod ratio componitur ex rationibus, quas basis et altitudo parallelogrammi habent ad latus quadrati. Unde per Defin. Simson. (in Exc. ad h. libr. §. 3. coll. §. 7.) consequitur regula generalis dimensionis parallelogrammorum. Cf. in Prop. II. 1. Cor. 4. Pfeiderer. §. 249, Schol. in libr. II. Elem. P. I. §. 5. sq.

Obs. 11. Ex VI. 23. indeque deductus Obs. 8. 10. per

λογράμῳ ἴσον ἄρα καὶ τὸ $KH\Theta$ τρίγωνον τῷ EZ παραλληλογράμῳ. Ἀλλὰ τὸ EZ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ $KH\Theta$ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ τὸ $KH\Theta$ καὶ τῷ $AB\Gamma$ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμῳ τῷ $AB\Gamma$ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ $KH\Theta$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὁμοίον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου γὰρ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον ἀφηρεσθῶ τὸ $AEZH$, ὁμοίον τῷ $AB\Gamma\Delta$ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔAB · λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τὸ $AB\Gamma\Delta$ τῷ $AEZH$.

ea, quae in Exc. ad hunc libr. §. 22. §. 25. notantur, consequuntur propositiones VI. 14. VI. 15. et Obs. 12. ad Prop. 16. 17. libr. VI. Pflaiderer. §. 250.

Obs. 12. Sint rectae $A:B=C:D$

et $E:F=G:H$

erunt etiam (per VI. 23. et Exc. ad hunc libr. §. 10.) rectangula $A \times E : B \times F = C \times G : D \times H$. Vicissim si $A \times E : B \times F = C \times G : D \times H$, atque $E:F=G:H$, pariter erit $A:B=C:D$ (VI. 23. et in Exc. ad hunc libr. §. 14.). Cf. Pflaiderer. §. 251.

Obs. 13. Per Obs. 10. et Exc. ad hunc libr. §. 13. duorum quorumvis parallelogrammorum, triangulorumve altitudines sunt in ratione composita ex directa arearum et inversa basium; bases in ratione composita ex directa arearum et inversa altitudinum. Pflaiderer. §. 263.

grammo EZ . Sed parallelogrammum EZ ipsi Δ est aequale; et $KH\Theta$ igitur ipsi Δ est aequale. Est autem $KH\Theta$ et ipsi $AB\Gamma$ simile; dato igitur rectilineo $AB\Gamma$ simile, et alteri dato Δ aequale idem constitutum est $KH\Theta$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXVI. (Fig. 385.)

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti et similiter positum, communem cum ipso angulum habens, circa eandem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammum auferatur $AEZH$, simile ipsi $AB\Gamma\Delta$ et similiter positum, communem angulum habens ΔAB cum ipso; dico circa eandem diametrum esse $AB\Gamma\Delta$ circa quam ipsum $AEZH$.

Obs. 14. Rursus (quae est altera Prop. 23. et praeced. Obs. 8. conversa), duo parallelogramma vel triangula, quorum areae sunt in ratione composita ex rationibus duorum laterum contiguorum, habent angulos lateribus his comprehensos vel iungulos aequales, vel simul aequales duobus rectis. Quod apsum facile, sumto contrario, probatur. Pfleiderer. §. 254.

PROPOSITIO XXIV.

Obs. 1. Rob. Simson. monet, videri imperitum quendam ex duabus diversis huius propositionis demonstrationibus hanc, quam nunc habemus, composuisse, ex una nempe, quae per VI. 2. et ex altera, quae per VI. 4. fieri potest. Postquam enim, ita pergit Simson., per VI. 2. et componendo, permutandoque ostenderat, latera circa communem angulum parallelogrammorum (taliter enim parallelogramma observante

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω αὐτοῦ ¹⁾ ἡ διάμετρος ἡ $ΑΘΓ$, καὶ ²⁾ ἐκβληθεῖσα ἡ $ΗΖ$ διήχθω ἐπὶ τὸ $Θ$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$ ὅποτέρᾳ τῶν $ΑΔ$, $ΒΓ$ παράλληλος ἡ $ΘΚ$.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΚΗ$, ὁμοίον ἔστι τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΚΗ$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΔΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ οὕτως ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΚ$. Ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΒΓΔ$, $ΕΗ$, ὡς ἡ $ΔΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ οὕτως ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΚ$ οὕτως ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$. ἡ $ΗΑ$ ἄρα πρὸς ἑκάτεραν τῶν $ΑΚ$, $ΑΕ$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΑΚ$, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΚΗ$ ³⁾ περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἔστι διάμετρον τὸ $ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΑΕΖΗ$ πα-

1) Ita recte ex Cod. a posuit Peyrardus, quum edd. Basil. et Oxon. haberent: αὐτῶν, quum tamen de diametro unius tantum parallelogrammi $ΑΒΓΔ$ hic sermo sit.

2) Pro verbis: καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ $ΗΖ$ διήχθω ἐπὶ τὸ $Θ$ καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$, quae ex Cod. a. posuit Peyrardus, cum quibus consentit etiam versio Commandini, in edd. Oxon. et Basil. solum legitur: καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$. Utraque lectio bene habet, prout schema ita formatum imagineris, ut diameter $ΑΘΓ$ rectam $ΗΖ$ productam, aut ipsam rectam $ΗΖ$ in puncto aliquo $Θ$ secet. Priorem casum et figuram lectio codicis a, posteriorem lectio ed. Oxon. supponit.

3) Pro his verbis Cod. a. et ex eo Peyrardus, correctis mendis typographicis ad calcem libri indicatis, habet: οὐκ ἄρα οὐκ ἔστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΕΗ$ (ita enim legendum est, non $ΚΗ$). Nos veriore lectionem ex edd. Basil. et Oxon. restitimus.

Ciavio intelliguntur, quae habeant unum angulum cum toto parallelogrammo communem, quod etiam Candalla, Henrion alique nominatim addunt proportionalia esse, immediate concludere potuisset, proportionalia esse latera circa reliquos angulos aequales, ope scilicet Prop. I. 34. et V. 7. Verum ille

Non enim, sed si fieri potest, sit ipsius diameter AOI , et ducta HZ producat ad O , et ducatur per O alterutri ipsarum AA , BT parallela OK (I. 31.)

Quoniam igitur circa eandem diametrum est parallelogrammum $ABTA$ circa quam parallelogrammum KH , simile est (VI. 24.) $ABTA$ ipsi KH ; est igitur (VI. Def. 1.) ut AA ad AB ita HA ad AK . Est autem et propter similitudinem ipsorum $ABTA$, EH , ut AA ad AB ita HA ad AE ; ut igitur (V. 11.) HA ad AK ita HA ad AE ; ipsa HA igitur ad utramque ipsarum AK , AE eandem habet rationem; aequalis igitur est (V. 9.) AE ipsi AK , minor maiori, quod fieri nequit; non igitur est circa eandem diametrum parallelogrammum $ABTA$ circa quam ipsum KH ; circa eandem igitur est diametrum parallelogrammum

hoc negligens spergit ostendere, triangula et parallelogramma esse aequiangula, et longo circuitu, ope VI. 4. et V. 22. concludit rem eandem. Manifestum propterea est, hanc inscite factam demonstrationem minime Euclidi esse. Ipse deinde Rob. Simson., superfluis reiectis, simpliciorum exhibet demonstrationem, postquam ostenderat, aequiangula esse triangula AHZ , AAT ope VI. 4. I. 34. et V. 7., quoad maximam partem similem ei, quae est apud Campanum, nisi quod is pro VI. 4. adhibet VI. 2., et triangula, quae diximus, aequiangula esse monet quidem, at non demonstrat. Simsonis demonstrationem habet etiam Playfair. et Peletarius.

Obs. 2. Perspicuum est, quod Clavius monet, parallelogramma circa eandem diametrum non solum similia esse, sed etiam similiter posita. C. observata ad VI. 18.

Obs. 3. Praeterea, eodem Clavio monente, etiam, si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita, ut duo huius latera rectas duas

παλληλογράμμω. Ἐάν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδеси παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον δὲ τῷ ἑλλείμματι.

Ἐστω εὐθεΐα ἡ AB , καὶ τετμήσθω διχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν AB εὐθεΐαν τὸ AD παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ GE , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς AB , τουτίεστι τῆς GB . λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν AB παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδеси παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις

componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, eadem fere ratione ostenditur, hoc illi esse simile.

Obs. 4. Parallelogramma, quæ unum angulum uni angulo æqualem, et circum eos proportionalia latera habent, similia sunt. Hec Corollarium addit Boermannus. Et ope Obs. 3. ad Prop. 5. et 6. libri VI. et nostræ huius propositionis id facile probatur.

PROPOSITIO XXV.

● Obs. 1. Rob. Simson. ad hanc propositionem monet: „liquido patet demonstrationem huius, quam Euclides dederat, vitiatam fuisse ab editore quodam geometriæ minus perito. Postquam enim ostenderat, „ut rectilineum $AB\Gamma$ ad rectilineum $KH\Theta$, ita parallelogrammum BE ad parallelogrammum BZ “ opus fuit

$AB\Gamma A$ quàm parallelogrammum $AEZH$. Si igitur a parallelogrammo etc.

PROPOSITIO XXVII. *) (Fig. 386.)

Omnium secundum eandem rectam applicatorum parallelogrammorum et deficientium figuris parallelogrammis, similibus et similiter positis ei, quae ex dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum parallelogrammum, simile existens defectui.

Sit recta AB et secetur bifariam in Γ , et applicetur ad rectam AB parallelogrammum AA deficiens figura parallelogramma ΓE , simili et similiter posita ei, quae ex dimidia ipsius AB descripta est, hoc est ex ΓB ; dico omnium secundum AB applicatorum parallelogrammorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ipsi ΓE , maximum esse AA . Applicetur enim ad rectam AB parallelogram-

*) Ut sequentes tres propositiones melius intelligantur Rob. Simson. praemittit sequentia: 1) Parallelogrammum ad rectam applicari dicitur, quando super recta illa describitur. Ex. gr. parallelogrammum $A\theta$ (Fig. 386.) applicari dicitur, ad rectam AB , quando super AB describitur. (Hoc casu dicitur Pflaiderero monente; ἀναγράφεσθαι seu παραβάλλεσθαι ἀπὸ τῆς AB . 2) Sed parallelogrammum AZ dicitur applicari ad (secundum) rectam AB (παραβάλλεσθαι παρὰ τὴν AB) deficiens figura parallelogramma, quando AK basis eius minor est recta AB , et propterea parallelogrammum AZ deficit ab ipso $A\theta$, quod super recta AB describitur in eodem angulo, et inter easdem parallelas figura parallelogramma $K\theta$, quae quidem dicitur defectus ipsius AZ . 3) Et parallelogrammum $A\Xi$ (Fig. 293.) applicari dicitur ad (secundum) rectam AB (παραβάλλεσθαι παρὰ τὴν AB), excedens figura parallelogramma, quando AO basis ipsius $A\Xi$ maior est recta AB , et propterea $A\Xi$ excedit parallelogrammum $A\theta$ ad AB applicatam figura parallelogramma θO .

solummodo addere, est autem rectilineum $AB\Gamma$ aequale pa-

τῷ ΓΕ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεΐαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἠλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μείζον ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διαμέτρων. Ἦχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον· ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶν· καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΑΜΝ γνόμενόν ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τούτεστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μείζον ἐστίν. 1)

1) Ed. Basil. hic iam addit: πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν εὐθεΐαν παραβαλλομένων, καὶ τὰ ἐξῆς, quae Gregorius, quamvis ea in omnibus codicibus tam mss. quam impressis inveniret, iure ad casus secundi finem reiecit, quem etiam Peyrardus, nulla tamen lectionis variantis mentione facta, secutus est.

rallelogrammo BE, aequale igitur est rectilineum KΘ parallelogrammo EZ videlicet per V. 14, sed inter has duas sententias interposuit „quare alterne, ut rectilineum ABΓ ad parallelogrammum BE ita rectilineum KΘ ad parallelogrammum EZ“ putavit scilicet, non tam perspicuum esse concludere secundam quatuor proportionalium quartae aequalem esse ex aequalitate primae et tertiae, quod quidem demonstratum est in V. Prop. 14. quam concludere, tertiam aequalem esse quartae ex aequalitate primae et secundae, quod nusquam in Elementis, quae iam habemus, ostensum est. Verum quamvis haec propositio, tertiam scilicet quatuor proportionalium aequalem esse quartae, si

num AZ , deficiens figura parallelogramma $K\Theta$, simili et similiter posita ipsi FE ; dico maius esse AD parallelogrammo AZ .

Quoniam enim simile est parallelogrammum FE parallelogrammo $K\Theta$, circa eandem sunt diametrum (VI. 26.). Ducatur eorum diameter AB , et describatur figura.

Quoniam igitur aequale est FZ ipsi ZE (I. 43.), commune addatur $K\Theta$; totum igitur $F\Theta$ toti KE est aequale. Sed $F\Theta$ ipsi TH est aequale (I. 36.), quoniam recta AT ipsi GB aequalis est; ergo et HF ipsi EK est aequale. Commune addatur FZ ; totum igitur AZ ipsi gnomoni AMN est aequale; quare et parallelogrammum FE , hoc est AD , parallelogrammo AZ maius est.

prima aequalis fuerit secundae, fuisset ab Euclide Elementis suis inserta, ut verisimile est eam fuisse, nunquam tamen ille in praesenti casu eadem usus fuisset; quoniam, ut dictum fuit, sine redundante hac proportionalium permutatione eadem conclusio directe elici potest. Haec autem fusius ostendimus, tum, quoniam certum praebent indicium, textum Euclidis vitiatum fuisse, idem enim error invenitur in textu graeco XI. 23. bis, et bis in XII. 2. et in Prop. 5. 11. 12. 18. eiusdem, in quibus libri XII. locis, excepto ultimo, recte omissa est haec permutatio proportionalium in versionis Commandini editione Oxoniensi; tum, ut caveant geometrae ab usu permutationis in simili casu, non raro enim recentiores, et inter alios ipse Commandinus in Commentario, ad III. 5. pag. 6. b. Pappi Alexandrini et alibi incidunt in hunc errorem: praeccepit scilicet multorum mentes vulgaris proportionum idea, qua fit, ut accuratam vix

Ἐστω γὰρ πάλιν ἡ AB τριηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβληθὲν τὸ AA ἑλλεῖπον εἶδει τῷ ΓM , καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AE παραλληλόγραμμον ἑλλεῖπον τῷ AZ , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB , τῷ ΓM . λέγω ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AA τοῦ AE .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ AZ τῷ ΓM , περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον· ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ EB , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AZ τῷ AO , ἐπεὶ καὶ ἡ ZH τῇ HO · μείζον ἄρα τὸ AZ τοῦ KE . Ἰσον δὲ τὸ AZ τῷ AA · μείζον ἄρα καὶ τὸ AA τοῦ EK . Κοινὸν προσκείσθω ¹⁾ τὸ KA · ὅλον ἄρα τὸ AA ὅλον τοῦ AE μείζον ἐστίν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἑλλεῖπον εἶδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ὃ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παρα-

1) Ita rectius omnino Peyrardus ex Cod. a. habet, quam ut vulgo legitur: κοινὸν ἐστω τὸ KA .

percipiant. Praeterea, quamvis rectilineum $AB\Gamma$, cui simile acriendum est, possit esse cuiuscunque generis, in demonstratione tamen graeci codices habent triangulum vice rectilinei, qui error correctus est in versionis Commandini editione, quae Oxonii impressa est. Huic Simsonis observationi addi potest, Campani quoque duplicem demonstrationem differre a demon-

Sit enim rursus AB secta bifariam in Γ ; et applicatum sit AA , deficiens figura ΓM , et applicetur rursus secundum AB parallelogrammum AE , deficiens figura AZ , simili et similiter posita ei, quae ex dimidia AB describitur, nempe ΓM , dico maius esse parallelogrammum, quod ad dimidiam applicatur, nempe AA parallelogrammo AE .

Quoniam enim simile est AZ ipsi ΓM , circa eandem sunt diametrum (VI. 26.); sit eorum diameter EB , et describatur figura.

Et quoniam (I. 36.) aequale est AZ ipsi $A\Theta$, etenim et ZH aequalis est ipsi $H\Theta$; maius igitur AZ ipso KE . Aequale autem AZ ipsi AA (I. 43.); maius igitur est AA ipso EK . Commune addatur KA ; totum igitur AA toto AE maius est. Omnium igitur etc.

PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 390.)

Secundum datam rectam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma simili alteri dato; oportet autem datum rectilineum, cui aequale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existenti-

stratione sextus graeci. In eorum priore sine permutatione proportionalium res refertur ad partem posteriorem V. 9. in posteriore permutatio proportionalium pariter adhibetur.

Obs. 2. Pfeiderer. in schedis mss. §. 308 monet, inepte inter VI. 24. eiusque conversam VI. 26. insertam esse hanc VI. 25. quae nullam ad illas habeat relationem, contra immediate nitatur VI. 20. Apud Campanum id vitium non reperitur, quum, quae vulgo sunt VI. 24., VI. 26. sint apud ipsum

βαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἔλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὁμοιον ἔλλείπειν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεία ἡ AB , τὸ δὲ δοθέν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ , μὴ μείζον ὢν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἔλλειμμάτων, ᾧ δὲ δεῖ ὁμοιον ἔλλείπειν, τὸ Δ δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἔλλείπον εἶδει παραλληλογράμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ .

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ $EBZH$, καὶ συμπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον· τὸ δὲ AH ἦτος ἴσον ἐστὶ τῷ Γ , ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὅρισμον. Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH , ἔλλείπον εἶδει παραλληλογράμῳ τῷ EZ .

VI. 22., VI. 23., nostra haec autem pariter VI. 25. Quae eundem vulgo est VI. 23. apud Campanum est VI. 24.

Obs. 3. Huc referri potest problema, quod est apud Thom. Simpson 14. libri VI., quo iubetur describi figura similis datae figurae rectilineae, quae ad aliam datam figuram rectilineam sit in ratione data.

PROPOSITIO XXVI.

Obs. 1. Si quis sumere velit, dari posse rectam $A\Theta\Gamma$, quae non transeat per punctum Z , necessario is ponere debet rectam HZ ipsam aut productam convenire in puncto aliquo Θ cum recta $A\Theta\Gamma$. Quoniam enim, ob angul. $AHZ = A\Delta\Gamma$ (supp.) recta HZ parallela est rectae $\Delta\Gamma$ (I. 28.) et $\Delta\Gamma$ secat

bus defectu eius, quod ad dimidiam et parallelogrammo, cui oportet simile deficere ¹⁾.

Sit data quidem recta AB , datum vero rectilineum, cui oportet aequale ad AB applicare, sit Γ , non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatum est similibus existentibus defectibus, cui autem oportet simile deficere, sit Δ ; oportet secundum datam rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit ipsi Δ .

Secetur AB (L. 10.) bifariam in puncto E , et describatur ex ipsa EB (VI. 18.) ipsi Δ simile et similiter positum $EBZH$, et compleatur parallelogrammum AH ; itaque AH vel aequale est ipsi Γ , vel maius ipso, ob determinationem. Et si quidem aequale est AH ipsi Γ , factum erit propositum; applicatum erit enim secundum datam rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum AH , deficiens figura parallelogramma EZ ipsi Δ simili. Si autem non, maius

1) Ad finem huius propositionis in versione latina praecedente Boermanno paululum recessimus a textu graeco, quo verius rem ipsam exprimeremus. Neque enim de duobus defectibus sermo esse potest, quorum alter pertineret ad parallelogrammum illud, cui oportet simile deficere. Itaque graeca quoque ita habere debebant: *ὁμοίων ὄντων τοῦ τε ἐλλείματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ (εἶδους) ᾧ δὲ ὁμοίων ἐλλείπειν*. Caeterum, monente Pfeiderero propositio haec ita etiam potest exprimi: datae figurae rectilineae aequale describere parallelogrammum sub angulo dato, cuius unum latus circa hunc angulum sit segmentum rectae datae, alterum vero latus habeat rationem datam ad reliquum segmentum rectae datae: dummodo figura rectilinea data maior non sit parallelogrammo sub eodem angulo dato, cuius unum latus circa hunc angulum est semissis rectae datae, alterum vero ad semissem rectae datae, seu ad prius eius latus habet eandem rationem datam.

rectam $A\Theta F$ in F (supp.), etiam HZ ipsa vel producta eandem

ὁμοίᾳ ὄντι τῷ Δ . Εἰ δὲ οὐ, μείζον ἐστὶ τὸ $\Theta\epsilon$ τοῦ Γ . Ἰσὸν δὲ τὸ $\Theta\epsilon$ τῷ HB · μείζον ἄρα καὶ τὸ HB τοῦ Γ . Ὡς δὴ μείζον ἐστὶ τὸ HB τοῦ Γ , πάντῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ $KAMN$. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ HB ἐστὶν ὁμοιον· καὶ τὸ KM ἄρα τῷ HB ἐστὶν ὁμοιον. Ἐστω οὖν ὁμολογος ἡ μὲν KA τῇ HE , ἡ δὲ AM τῇ HZ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ HB τοῖς Γ, KM , μείζον ἄρα ἐστὶ HB τοῦ KM · μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν HE τῆς AK , ἡ δὲ HZ τῆς AM . Κεῖσθω τῇ μὲν KA ἴση ἡ HE , τῇ δὲ AM ἴση ἡ HO , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $\Xi HO\Pi$ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοιὸν ἐστὶ τῷ KM τὸ $H\Pi$. Ἀλλὰ τὸ KM τῷ HB ὁμοιὸν ἐστὶ καὶ τὸ $H\Pi$ ἄρα τῷ HB ὁμοιὸν ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν· ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ $H\Pi$ τῷ HB . Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ $H\Pi B$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ BH τοῖς Γ, KM , ὡς τὸ $H\Pi$ τῷ KM ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ $\Gamma\Phi X$ γνῶμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ OP τῷ $\Xi\Sigma$, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠB · ὅλον ἄρα τὸ OB ὅλῳ τῷ ΞB ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞB τῷ TE ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ AE πλευρὰ τῇ EB ἐστὶν ἴση καὶ τὸ TE ἄρα τῷ OB ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $\Xi\Sigma$ · ὅλον ἄρα τὸ $T\Sigma$ ὅλῳ τῷ $\Gamma\Phi X$ γνῶμονί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ ὁ $\Gamma\Phi X$ γνῶμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ $A\Pi$ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον πα-

$A\theta\Gamma$ secabit in puncto aliquo θ (I. 29. Cor. 3.). Hinc proprie duo casus distingui debere videntur, prout punctum θ in ipsa

est ΘE ipso Γ . Aequale autem ΘE ipsi HB ; maius igitur et HB ipso Γ . Quo autem maius est HB ipso Γ , ei excessui aequale, ipsi autem Δ simile et similiter positum idem constituatur $KAMN$ (VI. 25.). Sed Δ ipsi HB est simile; et KM igitur ipsi HB est simile. Sit igitur homologa quidem KA ipsi HE , AM vero ipsi HZ . Et quoniam aequale est HB ipsis Γ , KM , maius igitur est HB ipso KM ; maior igitur est et HE ipsa AK (VI. 20. Cor. 1.), HZ vero ipsa AM . Ponatur (I. 3.) ipsi quidem KA aequalis $H\Xi$, ipsi vero AM aequalis $H\Theta$, et compleatur parallelogrammum $\Xi H \Theta \Pi$; aequale igitur et simile est ipsi KM ipsum $H\Pi$ (VI. 24.). Sed KM ipsi HB simile est; et $H\Pi$ igitur ipsi HB simile est: circa eandem igitur diametrum est $H\Pi$, circa quam HB (VI. 26.). Sit eorum diameter $H\Pi B$, et describatur figura.

Et quoniam aequale est BH ipsis Γ , KM , quorum $H\Pi$ ipsi KM est aequale; reliquus igitur $T\Phi X$ gnomon reliquo Γ est aequalis. Et quoniam (I. 43.) aequale est OP ipsi $\Xi\Sigma$, commune apponatur ΠB ; totum igitur OB toti ΞB aequale est. Sed ΞB ipsi TE est aequale (I. 36.), quoniam et latus AE lateri EB est aequale; et TE ipsi OB est aequale. Commune apponatur $\Xi\Sigma$; totum igitur $T\Sigma$ toti gnomoni $T\Phi X$ est aequale. Sed gnomon $T\Phi X$ ipsi Γ ostensus est aequalis; et $A\Pi$ igitur ipsi Γ est aequale.

Secundum datam igitur rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum applicatum est ΣT , de-

recta HZ , vel in ea producta poni sumas. Atque haec ipsa causa fuisse videtur lectionis variantis, quam ad hunc locum obser-

ραβέβληται τὸ ΣT , ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠB ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ , ἐπειδὴ περ τὸ ΠB τῷ $H\Pi$ ὁμοίον ἐστίν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ὃ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ , ὃ δὲ δεῖ ὁμοίον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ . δεῖ δὴ παρὰ τὴν AB εὐθείαν τῷ Γ εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ .

Τετμησθῶ ἡ AB ὅγχα κατὰ τὸ E , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὁμοίον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμὸν τὸ BZ , καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς BZ , Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοίον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ $H\Theta$ ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ $H\Theta$ τῷ EA . Ὁμολόγος δὲ ἔστω ἡ μὲν $K\Theta$ τῇ ZA , ἡ δὲ KH τῇ ZE . Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ ZB , μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν $K\Theta$ τῆς ZA , ἡ δὲ KH τῆς ZE . Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ZA , ZE , καὶ τῇ μὲν $K\Theta$ ἴση ἔστω ἡ ZAM , τῇ δὲ KH ἴση ἡ ZEN , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ MN . τὸ MN ἄρα τῷ $H\Theta$ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὁμοίον. Ἀλλὰ τὸ $H\Theta$ τῷ

vavimus. In versione Commandini uterque situs puncti Θ expressus est. Neque tamen id necessario fiet, dum observes, rectam $A\Theta\Gamma$, nisi per punctum Z transeat, necessario alteram rectarum HZ , EZ secare, ubi tum punctum Θ pro puncto

ficiens figura parallelogramma IIB simili existenti ipsi Δ , quandoquidem IIB ipsi HI simile est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIX. (Fig. 393.)

Secundam datam rectam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili datae.

Sit data recta AB , datum vero rectilineum Γ , cui oportet aequale secundum AB applicare, Δ autem cui oportet simile applicare; oportet igitur secundum AB rectam ipsi Γ rectilineo aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili ipsi Δ .

Secetur AB bifariam in E (I. 9.), et describatur ex EB (VI. 18.) ipsi Δ simile et similiter positum parallelogrammum BZ , et utrisque simul quidem BZ , Γ aequale, ipsi vero Δ simile et similiter positum idem constituatur $H\Theta$ (VI. 25.); simile igitur est $H\Theta$ ipsi EA . Homologa autem sit $K\Theta$ quidem ipsi ZA , KH vero ipsi ZE . Et quoniam maius est, parallelogrammum $H\Theta$ ipso ZB , maior igitur, est et recta quidem $K\Theta$ ipsa ZA , recta vero KH ipsa ZE . Producantur ZA , ZE , et ipsi quidem $K\Theta$ aequalis sit ZAM (I. 3.), ipsi vero KH aequalis ZEN et compleatur parallelogrammum MN ; ergo MN ipsi $H\Theta$ aequale est

intersectionis cum alterutra harum rectarum sumi potest, adeoque in ea ipsa positum est. Atque ita rem expedit Clavius.

Obs. 2. In conditionibus Theorematis, ut monet Clavius, haud negligi debet ea, parallelogramma non tantum similia,

ΕΑ ἔστιν ὁμοίον· καὶ τὸ *MN* ἄρα τῷ *ΕΑ* ὁμοίον ἔστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὸ *ΕΑ* τῷ *MN*. Ἦχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ *ΖΞ*, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἔστι τὸ *ΗΘ* τοῖς *ΕΑ*, *Γ*, ἀλλὰ τὸ *ΗΘ* τῷ *MN* ἴσον ἔστι· καὶ τὸ *MN* ἄρα τοῖς *ΕΑ*, *Γ* ἴσον ἔστιν. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ *ΕΑ*· λοιπὸς ἄρα

sed etiam similiter posita esse debere. Hac enim praetermissa non valeret propositio.

Obs. 3. Idem Clavius directam quoque huius Propositionis demonstrationem addit, ducta nempe recta, quae utramque rectarum *AB*, *BI* bisecat, cui deinde ostendit parallelam esse utramque rectarum *AZ*, *IZ*, unde, quum per punctum *Z* una tantum recta alteri datae parallela esse possit, necessario in directum erunt puncta *A*, *Z*, *I*. Cf. infra Obs. 1. ad VI. 32.

Obs. 4. Denique Clavius monet Propositionem hanc adhuc valere, si duo parallelogramma similia, similiterque posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra alterum hac tamen lege, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituent, nempe, etiam hoc casu parallelogramma circa eandem consistere diametrum, quod eodem modo directe vel indirecte demonstrari poterit. Idemque etiam monet Rob. Simson. ad VI. 32. (Vide infra.)

PROPOSITIO XXVII.

Obs. 1. Robert. Simson. monet secundum casum huius Propositionis habere in Editione nempe Basil. ἄλλως ante verba: ἔστω γὰρ πάλιν praefixum, quasi alia esset demonstratio, ab imperito, ut videatur, librario adiectum, quam vocem recte omiserit Gregorius (Peyrardus quoque eam iure omittit, nulla variantis huius lectionis mentione facta.) Librarii autem non animadvertisse videntur, a vocibus inde ἔστω γὰρ πάλιν casum secundum incipere, cuius negligentiae causa forte in eo

et simile. Sed $H\Theta$ ipsi EA est simile; et MN igitur (VI. 21.) ipsi EA simile est; circa eandem igitur (VI. 26.) diametrum est ipsum EA circa quam MN . Ducatur eorum diameter $Z\Xi$, et describatur figura.

Et quoniam aequale est $H\Theta$ ipsis EA , Γ , sed $H\Theta$ ipsi MN aequale est; et MN igitur ipsis EA , Γ

quaerenda fuerit, quod in schemate casus secundi non eadem litterae Alphabeti adhibitae fuerunt, quae in schemate primi casus, quod utique, ut Rob. Simson notat, fieri debebat. Quo facto haec foret demonstratio.

"Εστω πάλιν ἡ AB τμηθεῖσα διχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβληθὲν παρὰ τὴν AB τὸ AA , ἐλλείπον εἶδει τῷ ΓE , καὶ παραβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AZ παραλληλόγραμμον ἐλλείπον τῷ $K\Theta$, ὁμοίωτε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB τῷ ΓE . λέγω, ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AA τοῦ AZ . Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΓE τῷ $K\Theta$, περιαντήν εἰσι διάμετρον. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ZB , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$ τῷ ΔH , ἐπεὶ καὶ ἡ ΘN τῇ HN μείζον ἄρα τὸ $\Delta\Theta$ τοῦ OZ . Ἰσον δὲ τὸ $\Delta\Theta$ τῷ ΔK · μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔK τοῦ OZ . Κοινὸν προσκεῖσθω τὸ OK , ἴσον ἄρα τὸ AK ὅλον τοῦ AZ μείζον ἐστίν.

Sit rursus (f. 388.) AB secta bifariam in Γ , et applicatum sit ad AB parallelogrammum AA , deficiens figura ΓE , et applicetur rursus ad AB parallelogrammum AZ deficiens figura $K\Theta$ simili et similiter posita ei, quae ex dimidia AB descripta est, nempe ΓE : dico, maius esse parallelogrammum, quod ad dimidiam applicatur, nempe AA , parallelogrammo AZ . Quoniam enim simile est ΓE ipsi $K\Theta$, circa eandem diametrum sunt: sit eorum diameter ZB , et describatur figura. Et, quoniam aequale est $\Delta\Theta$ ipsi ΔH , etenim et ΘN aequalis est ipsi HN , maius igitur $\Delta\Theta$ ipso OZ . Aequale autem $\Delta\Theta$ ipsi ΔK : maius igitur et AK ipso OZ . Commune addatur OK : totum igitur AK toto AZ maius est.

ὁ $\Psi\chi\Phi$ γνώμων τῷ Γ ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ EB , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ AN τῷ NB . τουτέστι τῷ AO . Κοινὸν προσκείσθω τὸ $EΞ$. ὅλον ἄρα τὸ $AΞ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $\Phi\chi\psi$ γνώμονι. Ἀλλὰ ὁ $\Phi\chi\psi$ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστὶ καὶ τὸ $AΞ$ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ $AΞ$, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ HO ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ , ἐπεὶ καὶ τῷ EA ἐστὶν ὁμοίον τὸ OH . Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν 1) εὐθείαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

1) Austin. refert, pro voce: *δοθεῖσαν* se in omnibus græcis exemplaribus reperire *τιθείσαν*, quam vocem etiam Campanus et Tartalea per „propositam“ explicem. At nec Peyrardus nec Gregorius quidquam circa vocem *δοθεῖσαν*, quam ipsi habent, monent, editio autem Basileensis habet: *τιθείσαν*.

Ita statim apparet, casum secundum a primo eo tantum differre, quod in illo basis AK parallelogrammi AZ minor sit, quam AG dimidia rectae AB , in hoc contra maior.

Obs. 2. Quum plures queri soleant, sensum huius propositionis, pariterque duarum sequentium esse satis obscurum, is paullo clarius ita forte exprimi posse videtur: si recta aliqua AB (Fig. 586. 588.) bifariam dividatur in Γ , et super dimidia $B\Gamma$ constituatur parallelogrammum quodcunque FE , cuius diamēter sit BA , et compleatur totum parallelogrammum $ABEO$, tum dicitur parallelogrammum super dimidia AG constitutum, applicatum esse secundum rectam AB , desiciens parallelogrammo FE . Quodsi iam in diametro BA ipsa, aut

aequale est. Commune auferatur EA ; reliquus igitur $\Psi X \Phi$ gnomon ipsi Γ est aequalis. Et quoniam aequalis est AE ipsi EB , aequale est (I. 36.) et AN ipsi NB , hoc est (I. 43.) ipsi AO . Commune apponatur BE ; totum igitur $A\Xi$ aequale est gnomoni $\Phi X \Psi$. Sed $\Phi X \Psi$ gnomon ipsi Γ aequalis est; et $A\Xi$ igitur ipsi Γ aequale est.

Secundum datam igitur rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum applicatum est $A\Xi$, excedens figura parallelogramma HO simili ipsi A , quoniam et ipsi EA simile est OII . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXX. (Fig. 395.)

Datam rectam terminatam secundum extremam et mediam rationem secare.

producta sumatur punctum quodcunque Z , et per illud ducantur rectae $HZ\Theta$, ZK , quae sint parallelae rectis AB , $B\Theta$: dicetur parallelogrammum AZ super recta AK constitutum applicari secundum rectam AB ita, ut deficiat parallelogrammo $K\Theta$ simili et similiter posito (VI. 26.) parallelogrammo ΓE , et demonstrari poterit, parallelogrammum AD super dimidia recta AI constitutum maius esse quocunque parallelogrammo AZ hac ratione super alio segmento rectae AB nempe AK constituto. Ita fere Clavius.

Obs. 3. Differentia, qua parallelogrammum AD superat alterum AZ , aequalis est parallelogrammo ZA simili et similiter posito parallelogrammo ΓE . Huius parallelogrammi ZA unum latus $ZN = KI$ (I. 34.) $= AI - AK$ (vel $AK - AI$) alterum NA : $\left\{ \begin{array}{l} ZN \\ KI \end{array} \right. = AI : \Gamma B = ZK : KB$ (VI. 4.). Ex schedis Pfeiderer. Hinc eodem observante sequens emergit propositionis huius enunciatum magis determinatum: parallelogram-

"Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB . δι-
δὴ τὴν AB εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ
 $BΓ$, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν $ΑΓ$ τῷ $BΓ$ ἴσον
παράλληλόγραμμον τὸ $ΓΔ$, ὑπερβάλλον εἶδει τὸ $ΑΔ$
ὁμοῶς τῷ $BΓ$.

Τετράγωνον δὲ ἐστὶ τὸ $BΓ$ τετράγωνον ἄρα ἐστὶ
καὶ τὸ $ΑΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $BΓ$ τῷ $ΓΔ$,
κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $ΓΕ$. λοιπὸν ἄρα τὸ $BΖ$ λοιπὸν
τῷ $ΑΔ$ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσώνιονον
τῶν $BΖ$, $ΑΔ$ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ
περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΖΕ$ πρὸς τὴν
 $ΕΔ$ οὕτως ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΕΒ$. Ἴση δὲ ἡ μὲν $ΖΕ$
τῇ $ΑΓ$, τοιούτεσι τῇ $ΑΒ$, ἡ δὲ $ΕΔ$ τῇ $ΑΕ$. ἐστὶν
ἄρα ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$ οὕτως ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν
 $ΕΒ$. Μείζων δὲ ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΑΕ$. μείζων ἄρα καὶ ἡ
 $ΑΕ$ τῆς $ΕΒ$.

morum sub dato angulo A secundum rectam datam applicato-
rum et deficientium (ab parallelogrammis aequiangulis et si-
milibus inter easdem parallelas super tota AB) parallelogram-
mis similibus ac similiter positis, maximum est, quod ad $ΑΓ =$
 $\frac{AB}{2}$ applicatur, nempe hoc excedit aliud quodcumque paralle-
logrammo simili similiterque posito iis, quibus deficient, cu-
ius unum latus æquale est differentiae ipsius $ΑΓ$ et segmenti
rectae AB , cui alterum parallelogrammum insistit.

Obs. 4. Casus particularis, ad maxime memorabilis, et
saepissime occurrens is est, quo parallelogramma, de quibus agi-
tur, sunt rectangula, et simul $ΓΔ = ΓΕ = ΓΑ$, adeoque $ΑΔ$ in
quadratum abit, pariter ac $ΓΕ$, unde et $ΚΖ = ΚΒ$. Hoc casu
propositio mutatur in hanc: ex omnibus rectangulis, quorum
latera sunt segmenta rectae datae, maximum est quadratum

Sit data recta terminata AB ; oportet igitur AB rectam secundum extremam et mediam rationem secare.

Describatur enim (I. 46.) ex AB quadratum BF , et applicetur (VI. 29.) secundum AF ipsi BF aequale parallelogrammum GA , excedens figura AA simili ipsi BF .

Quadratum autem est BF ; quadratum igitur est et AA . Et quoniam aequale est BF ipsi GA , commune auferatur FE ; reliquum igitur BZ reliquo AA est aequale. Est autem et ipsi aequiangulum; ipsorum BZ , AA igitur (VI. 14.) reciproca sunt latera circa aequales angulos; est igitur ut ZE ad EA ita AE ad EB . Aequalis autem est ZE ipsi AF , (I. 34.) hoc est ipsi AB , et EA ipsi AE ; est igitur ut BA ad AE ita AE ad EB . Maior autem AB ipsa AE ; maior igitur et AE ipsa EB .

super dimidia recta. (Hoc nempe excedit rectangulum quodcunque ipsi ipsoperimetrum quadrato, cuius latus aequale es, differentiae inter latus prioris quadrati et latus quodcunque illius rectanguli.) Atque haec propositio eadem est cum ea, quam habuimus in II. 5. Cor. 1., quae itaque casus particularis est VI. Prop. 27. (vid. Pfeidereri Schol. in Libr. 2. §. 33. sqq.) Playfair. loco generalioris propositionis Euclidean quam in elementis laud necessariam esse indicat, tantum hunc casum particularem, utpote saepissime obuium, et tironibus magis accomodatum et sufficientem posuit, et similiter etiam in duabus sequentibus propositionibus veratus est. Paullo generalior adhuc maneret propositio, si parallelogrammum super dimidia AB descriptum foret quidem aequilaterum, a non rectangulum.

Ἡ ἄρα AB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ E , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἴσιν τὸ AE . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι¹⁾.

$A \ A \ A \ \Omega \ \Sigma$.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB · δεῖ δὴ τὴν AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Τετμησθῶ γὰρ ἡ AB κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετραγώνου.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον ἴσιν τῷ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $A\Gamma$ οὕτως ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν $B\Gamma$. Ἡ ἄρα AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ

1) Austin. refert, hic legi: ὅπερ ἔδει δεῖξαι, et inde argumentatur inter alia, haud ab Euclide esse hanc propositionem. Peyrardus autem et Gregorius habent: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, Basileensis hic quidem legit: δεῖξαι, at post alteram demonstrationem pariter habet: ποιῆσαι.

Obs. 5. Si secundum eandem rectam AB (Fig. 389.) applicentur parallelogramma AZ , $A\zeta$, deficientia parallelogrammis BZ , $B\zeta$ similibus et similiter positiss, parallelogrammo AA vel BA , quod a rectae AB dimidio describitur, ita tamen, ut sit $AK=B\kappa$, vel $\Gamma K=\Gamma\kappa$, parallelogramma AZ , $\Gamma\zeta$ erunt aequalia. Nam, quum ex hyp. sint parallelogramma BZ , BA similia et similiter posita parallelogrammo BA communem cum eo angulum habenti, erunt BZ , BA circa eandem diametrum: et ex simili ratione erunt $B\zeta$, BA circa eandem diametrum (VI. 26.) adeoque puncta Z , A , ζ , B erunt in eadem recta.

Ipsa igitur AB , recta secundum extremam et mediam rationem secta est in E , et maius eius segmentum est AE . Quod oportebat facere.

ALITER. (Fig. 396.)

Sit data recta AB ; oportet rectam AB secundum extremam et mediam rationem secare.

Secetur enim AB in Γ , ita (II. 11.) ut rectangulum sub AB , $B\Gamma$, aequale sit quadrato ex $A\Gamma$.

Et quoniam rectangulum sub AB , $B\Gamma$ aequale est quadrato ex $A\Gamma$; est igitur (VI. 17.) ut AB ad $A\Gamma$ ita $A\Gamma$ ad $B\Gamma$; ergo (VI. Def. 3.) AB secundum extremam et mediam rationem secta est in Γ . Quod oportebat facere.

C PROPOSITIO XXXI. (Fig. 396.)

In rectangulis triangulis figura ex latere rectangulum angulum subtendente aequalis est figuris ex lateri-

Erit itaque (I. 43.) parallelogrammum $K\zeta$ aequale parallelogrammo $\Theta\zeta$ (I. 43.). At ob $B\kappa=AK$ (hyp.) vel $M\Theta=HZ$, erit parallelogrammum $\Theta\zeta=HA$, itaque et $K\zeta=HA$, additoque communi AA , erit $AZ=A\zeta$ (Whiston. Cor. 1. ad VI. 27.). Aliter ita: quum parallelogrammum BA , vel id, quod ei aequale est, AA superet, ut ex demonstr. VI. 27. patet, parallelogrammum $A\zeta$ parallelogrammo $A\zeta$; pariterque parallelogrammum AA superet parallelogrammum AZ parallelogrammo AA , sit autem, ob $K\Gamma=\Gamma\kappa$ (hyp.), etiam parallelogrammum $A\zeta=AA$, erit $A\zeta=AZ$. Contra, si sit $AZ=A\zeta$, caeteris ut antea manentibus, erit $\Gamma\kappa=FK$ Nam parallelogramma aequalia AZ , $A\zeta$ aequaliter different a parallelogrammo AA , nempe parallelogrammis AA , $A\zeta$; itaque AA , $A\zeta$ aequalia erunt, unde erit $AN=N\zeta$ (Obs. ad I. 36.), adeoque $FK=\Gamma\kappa$ (I. 34.) Simul

τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἶδеси, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

"Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $ABΓ$, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ $BAΓ$ γωνίαν λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , $ΑΓ$ εἶδеси, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

"Ηχθω κάθετος ἡ $ΑΔ$.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ τῷ $ABΓ$, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ A ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν $ΒΓ$ βάσιν κάθετος ἡται ἡ $ΑΔ$ τὰ $ABΔ$, $ΑΔΓ$ ἄρα πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνῳ ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ $ABΓ$ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιὸν ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τῷ $ABΔ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν BA οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $ΒΔ$. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον

patet, esse etiam $AK=Bx$, adeoque $AK+Ax=AB$. Cf. Whiston. Cor. 2. ad VI. 27.

PROPOSITIO XXVIII.

Obs. 1. Ex iis, quae in Obs. 4. ad VI. 27. dicta sunt, emergit, casu secundo alia adhuc huius problematis solutio. Factis nempe, ut ante (Fig. 391.) parallelogrammis $EBZH$, $AEHΘ$ dato A similibus, producaturs ipsius $EBZH$ latus EH , et diameter BH , fiatque in angulo ipsi EHZ ad verticem opposito parallelogrammum $Hoπξ$ aequale ipsi $KAMN$ i. e. aequale excessui parallelogrammi $EBZH$ super figuram A , ipsique $EBZH$ simile, similiterque positum. Erit itaque $Hπ$ simile et aequale HL in constructione priori, et productis rectis $πξ$, $AΘ$, usquedum in $γ$, pariterque rectis $πξ$, BZ , usquedum, in $ρ$ conveniant, ob $Eσ=Ho=AM=HO$ (constr.) $=BZ$, erit

bus rectumangulum subtendentibus, similibus et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum $AB\Gamma$, rectum habens $BA\Gamma$ angulum; dico figuram ex $B\Gamma$ aequalem esse figuris ex BA , $A\Gamma$, similibus et similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis AA .

Quoniam igitur in triangulo rectangulo $AB\Gamma$, ab angulo recto ad A super basim $B\Gamma$ ducta est perpendicularis AA ; erunt triangula ABA , $AA\Gamma$, quae sunt ad perpendicularem similia et toti $AB\Gamma$ et inter se (VI. 8.) Et quoniam simile est $AB\Gamma$ ipsi ABA , est igitur ut ΓB ad BA ita AB ad BA . Et quoniam tres rectae proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita figura ex prima ad figuram ex secunda, similem et similiter descriptam; (VI. 20. Cor. 2.) ut igitur ΓB

(VI. 27. Obs. 4.) $A\pi = A\Gamma$ dato rectilineo Γ . Et, quum $B\pi$ sit simile et similiter positum ipsi BH i. e. ipsi A (VI. 24.), erit $A\pi$ secundum datam rectam AB applicatum aequale dato Γ , ita ut deficiat figura parallelogramma BH simili et similiter posita ipsi A . Duplex itaque solutio locum habet, neque tamen ad alteram hanc obtinendam nova constructione opus est, quum (Obs. 5. ad VI. 27.) semper $As = B\Sigma$, adeoque una As cognita, altera $As = AB - A\Sigma$ semper simul innotescat. Whiston. Schol. ad VI. 28. et Cor. 2. ad eandem.

Obs. 2. Si parallelogrammum datum A quadratum fuerit, problema sic effertur: secundum datam rectam AB dato rectilineo Γ aequale rectangulum applicare, deficiens quadrato: oportet autem datum rectilineum Γ non maius esse quadrato super dimidia AE vel EB . (Ita Whiston in Cor. 1. ad VI. 28. et Rob. Simpon. in Not. ad h. l.) Aliter ita: datam re-

καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον ὡς ἄρα ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ ὥστε καὶ ὡς ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὰς $ΒΔ$, $ΔΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν $ΒΔ$, $ΔΓ$, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἰση δὲ ἡ $ΒΓ$ ταῖς $ΒΔ$, $ΔΓ$ ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΔ$, $ΔΓ$ εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

$A \Delta A \Omega \Sigma,$

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ ἄρα εἶδος

erat AB ita dividere, ut rectangulum inter segmenta eius contentum aequale sit dato spatio; hoc spatium autem oportet non maius esse quadrato ex linea dimidia. Ita Playfair. rem exprimit, qui hunc modo casum particularem huius problematis, utpote maxime necessarium exprimit. Aliter problema ita enunciari potest: data summa AB laterum trianguli, et rectangulo ipso magnitudine dato, latera invenire. Vid. Rob. Simson. l. c. Potest autem hic casus particularis brevius multo ac generalis ille construi. Nempe datum spatium rectilineum, cui aequale constituendum est rectangulum inter segmenta rectae AB , vel quadratum erit, vel non. Priore casu quomodo res efficiatur, iam ostensum fuit in Obs. 3. ad II. 14., unde eo remittimus lectorem. Poterit tamen etiam huic casui applicari solutio problematis generalis. Posterior casus ope VI. 25. facile ad priorem revocari poterit. Eius autem casus, sub posteriore hoc comprehensi, quo spatium rectilineum datum est rectangulum (qui ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. etiam

ad BA ita figura ex BF ad figuram ex BA , similem et similiter descriptam. Eadem ratione et ut BF ad GA ita figura ex BF ad figuram ex GA ; quare et ut BF ad ipsas BA , AF ita figura ex BF ad figuras ex BA , AF , similes et similiter descriptas. Aequalis autem BF ipsis BA , AF ; igitur et figura ex BF aequalis figuris ex BA , AF , similibus et similiter descriptis. Ergo in rectangulis, etc.

A L I T E R.

Quoniam (VI. 23.) similes figurae in dupla ratione sunt laterum homologorum, figura ex BF ad figuram ex

facile ad priorem reduci poterat) sequentem solutionem habet Rob. Simson. in Not. ad VI. 28. desumptam ex Willebrordi Snellii Apollonio Batavo, et Halleio in Schol. ad Prop. 18. libri 8. Conicor. Apollonii. Sit nempe data recta AB (Fig. 392.), datum autem rectangulum, quod rectis T , A , continetur, non minus existens quadrato ex dimidio rectae AB : oportet secundum datam rectam AB dato rectangulo $T \times A$ aequale rectangulum applicare, deficiens quadrato. Ducantur AE , BZ ad rectos angulos ipsi AB , et ad easdem eius partes, quarum AE quidem aequalis sit T , BZ vero A . Bifariam secetur iuncta EZ in I , centroque I , intervallo IE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H , et iungatur HZ , cui parallela ducatur AE , et ad AB ducatur IA parallela rectae AE . Quoniam igitur angulus EHZ in semicirculo aequalis est recto EAB , parallelae erunt AB , HZ , et parallelae sunt AH , BZ , quare AH aequalis est BZ et rectangulum $EA \times AH$ aequale erit ipsi $EA \times BZ$, hoc est rectangulo $T \times A$. Et, quoniam aequales

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤτερ ἢ GB πρὸς τὴν BA . Ἐχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς BG τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤτερ ἢ GB πρὸς τὴν BA · καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς GB εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA εἶδος οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς GB τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BG εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς GA εἶδος οὕτως τὸ τῆς BG τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς GA τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BG εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν BA , AG εἶδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BG τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν BA , AG τετράγωνα. Ἰσὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BG τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AG τετραγώνοις ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς BG εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AG εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ.

Ἐάν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα,

AI , BZ inter se parallelæ, æquales erunt AA , AB , et æquales etiam sunt (III. 5.) EK , KH . Est autem, ob determinationem, rectangulum $\Gamma\chi\Delta$ non maius quadrato ex AA dimidio ipsius AB , ergo et rectangulum $EA\chi AH$ non maius est quadrato ex AA h. e. ex IK : commune addatur quadratum ex KE , et quadratum ex AK (II. 6.) non maius erit quadratis ex EK , IK h. e. quadrato ex IE : quare recta AK seu IA non maior est ipsa IE . Et, siquidem IE æqualis fuerit ipsi IA , circulus EHZ continget rectam AB in Δ , et quadratum ex AA (III. 36.) æquale erit rectangulo $EA\chi AH$, sive dato rectangulo $\Gamma\chi\Delta$, et factum erit, quod proponebatur. Si vero

BA duplam rationem habet eius quam habet ΓB ad BA . Habet autem et quadratum ex $B\Gamma$ (VI. 20. Cor. II.) ad quadratum ex BA duplam rationem eius quam ΓB ad BA ; ut igitur (V. 11.) figura ex $B\Gamma$ ad figuram ex BA ita quadratum ex ΓB ad quadratum ex BA . Ex eadem ratione et ut figura ex $B\Gamma$ ad figuram ex ΓA ita quadratum ex $B\Gamma$ ad quadratum ex ΓA ; quare et ut figura ex $B\Gamma$ ad figuras ex BA , ΓA ita quadratum ex $B\Gamma$ ad quadrata ex BA , ΓA . Aequale autem quadratum ex $B\Gamma$ (I. 47.) quadratis ex AB , ΓA aequalis igitur et figura ex $B\Gamma$ figuris ex BA , ΓA similibus et similiter descriptis. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXII. (Fig. 397.)

Si duo triangula componantur secundum unum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia ha-

sunt BI , IZ , et AE , inaequales fuerint IE , IA , erit IE maior, et propterea circulus EHZ secabit rectam AB ; secet in M , N punctis, et super NB describatur quadratum $NBOH$, et compleatur rectangulum $ANHO$. Quoniam igitur aequales sunt MA , AN , et aequales ostensae sunt AA , AB , aequales erunt AM , NB . Rectangulum igitur $AN \times NB$ aequale est ipsi $NA \times AM$, hoc est (III. 36. Cor.) rectangulo $EA \times AH$, sive rectangulo $\Gamma \times A$. Rectangulum vero $AN \times NB$ est ipsum AH , est enim $HN = NB$. Ergo rectangulum AH aequale est rectangulo $\Gamma \times A$. Igitur secundum datam rectam AB dato $\Gamma \times A$ rectangulo aequale

ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΓΕ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς $ΒΑ$, $ΑΓ$ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς $ΓΔ$, $ΔΕ$ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΔΕ$, παράλληλον δὲ τὴν μὲν $ΑΒ$ τῇ $ΔΓ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΕ$. λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔστιν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΕ$.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΔΓ$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$, καὶ αἱ ἐναλλαξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΑΓΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ ὑπὸ $ΓΔΕ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΔ$ ἔστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ἔστιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΓΕ$ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ $Α$ μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ $Δ$ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΕ$ · ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΓΕ$ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ τῇ ὑπὸ $ΒΑΓ$ ἴση· ὅλη

rectángulum $ΑΠ$ applicatum est deficiens quadrato $ΒΠ$, quod facere oportebat.

Obs. 3. Data recta $ΑΒ$, et rectilineo, per hanc propositionem et observationem præcedentem habebitur $ΝΒ$ vel $ΝΠ$ latus quadrati, quo deficit rectángulum $ΑΠ$ rectilineo dato æquale, et secundum datam rectam $ΑΒ$ applicatum. Pro quantitate incognita $ΝΒ$ vel $ΝΠ$ ponatur y , unde $ΑΟ = ΑΒ \times y$, et $ΝΟ = yq$, ergo $ΑΠ = ΑΒ \times y - yq$, vel $Γ \times Δ = ΑΒ \times y - yq$. Atque hæc est prima æquationum affectarum quadraticarum species seu forma, quam ex hac Prop. 28. solverunt geometræ

bentia, ita ut homologa eorum latera et parallela sint; reliqua triangulorum latera in directum erunt.

Sint duo triangula ABF , AFE , duo latera BA , AF duobus lateribus FA , AE proportionalia habentia ut AB quidem ad AF ita AF ad AE , parallela vero sit AB ipsi AF , AF vero ipsi AE ; dico BF in directum esse ipsi FE .

Quoniam enim parallela est AB ipsi AF , et in ipsas incidit recta AF , alterni anguli BAF , $AF A$ aequales inter se sunt (I. 29.) Ex eadem ratione et FAE ipsi $AF A$ est aequalis; quare et BAF ipsi FAE est aequalis. Et quoniam duo triangula sunt ABF , AFE unum angulum ad A unum angulo ad A aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad AF ita FA ad AE ; aequiangulum est (VI. 6.) triangulum ABF , triangulo AFE ; aequalis igitur angulus ABF ipsi AFE . Ostensus autem est et $AF A$ ipsi BAF aequalis; totus igitur AFE duobus ABF , BAF aequalis est. Communis appo-

veveteres, inveniendō quantitatem incognitam NB , vel NH per applicationem rectanguli dato rectangulo aequalis secundum datam rectam AB et deficientis quadrato. Et ipsa etiam regula, qua ad solvendas aequationes huius formae utuntur recentiores, ex huius Prop. 28. constructione, vel, quod idem est, ex constructione in Obs. 3, ad II. 14. allatā deduci potest (Whiston. Cor. 2. et 3. ad VI. 28.). Obtinebitur nempe

$$HE = AE - BZ = r - d, \text{ et } KE = \frac{HE}{2} = \frac{r - d}{2}, \text{ et ob } KI = AA =$$

ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΡΕ$ δυοὶ ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΑΓ$ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείμεθω ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$. αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ ταῖς ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΑΒΓ$, $ΑΓΒ$ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΑΒΓ$, $ΑΓΒ$ δυοῖν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ ἄρα δυοῖν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δὲ τινὶ εὐθείᾳ τῇ $ΑΓ$, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Γ$, δύο εὐθεῖαι αἱ $ΒΓ$, $ΓΕ$, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρος κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ δυοῖν ὁρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΕ$. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχοντες ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, εὐν τε

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2}, \text{ erit } IEq &= KIq + KEq = \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma - \Delta}{2}\right)^q. \text{ Et } IA = \\ AK &= AH + HK = \Delta + \frac{\Gamma - \Delta}{2} = \frac{\Gamma + \Delta}{2}; \text{ hinc } NAq = INq - IAq = \\ IEq - IAq &= \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma - \Delta}{2}\right)^q - \left(\frac{\Gamma + \Delta}{2}\right)^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q - \\ - \Gamma \times \Delta, \text{ unde } NB &= AB - NA = \frac{AB}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma \times \Delta\right)} \text{ et } \\ \text{eodem modo } NA &= \frac{AB}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma \times \Delta\right)}. \end{aligned}$$

PROPOSITIO XXIX.

Obs. 1. Quod primum sensum huius propositionis attinet, facile ille intelligitur ex ea explicatione, quam in Obs. 2. ad VI. 27. de simili expressione attulimus. Nempe in Prop. 27. 28. de defectu, in Prop. 29. de excessu sermo est, resque ita intelligenda erit: Si linea aliqua AB producat ad punctum aliquod O , tumque super AO constituatur parallelogrammum $AΞ$ excedens figura parallelogramma $BΞ$, et haec

natur ATB : anguli igitur ATE , ATB ipsis BAT , ABT , ATB aequales sunt. Sed (I. 32.) BAT , ABT , ATB duobus rectis aequales sunt; et ipsi ATE , ATB igitur duobus rectis aequales sunt. Ad quandam igitur rectam AT , et ad punctum in ea T , duae rectae BT , TE , non ad easdem partes positae, angulos deinceps ATE , ATB duobus rectis aequales faciunt; in directum igitur est BT ipsi TE (I. 14.). Si igitur duo etc.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 400.)

In aequalibus circulis anguli eandem rationem habent quam circumferentiae quibus insistent, sive ad

ipsa figura BZ excessus dicitur, isque excessus in hac propositione 29. similis esse debet dato parallelogrammo A , et totum parallelogrammum AZ debet aequale esse spatio dato F . Caeterum etiam hic duplex solutio locum habet, at posterior eum priore eodem redit.

Obs. 2. Si datum istud rectangulum A quadratum fuerit, problema sic efferetur: Ad datam rectam AB dato rectilineo F aequale rectangulum applicare excedens quadrato (Ita Whiston in Cor. 1. ad VI. 29. et Rob. Simson in Not. ad h. l.) Aliter ita: Datam rectam AB producere ad punctum aliquod O ; ita ut rectangulum contentum segmentis inter hoc punctum et puncta extrema rectae AB interceptis aequale, sit spatio dato. Ita Playfair rem exprimit, qui etiam hic in casu hoc particulari subsistit. Vel etiam: data AB differentia laterum rectanguli, ipsoque rectangulo magnitudine dato, invenire latera. Vid. Rob. Simson l. c. Erit autem spatium datum, cui aequale fieri debet rectangulum, vel quadratum, vel non. Priori casu problema solutum est supra in Obs. 4. ad II. 12. Posterioris casum particularem, quo spatium datum est rectam
Euclid. Element. P. II.

πρὸς τοῖς κέντροις, ἐὰν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις
ἔσι βεβηκέναι ἐτι δὲ καὶ οἱ τομῆς (ἄτε πρὸς τοῖς
κέντροις συνιστάμενοι).

Ἐστῶσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, καὶ πρὸς
μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς H , $Θ$ γωνία ἔστωσαν
αὐτὰ ἐπὶ $BHΓ$, $ΕΘΖ$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αὐ-
τὰ ἐπὶ $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$. λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ $BΓ$ περιφέρειαν
πρὸς τὴν $ΕΖ$ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ἐπὶ $BHΓ$ γωνία
πρὸς τὴν ἐπὶ $ΕΘΖ$, καὶ ἡ ἐπὶ $ΒΑΓ$ πρὸς τὴν ἐπὶ
 $ΕΔΖ$ καὶ ἐτι ὁ HBP τομῆς πρὸς τὸν $ΘΕΖ$ τομῆα.

1) Verba, quae nuncius inclusimus, Rob. Simson. omit-
tenda censet, utpote imperiti cuiusdam additamentum. Scar-
burgh. etiam iudicat, haec verba absurdam continere notam
e margine in textum receptam. Et reapse, quum ex III. 10.
Def. nulli alii dentur sectores circuli, quam qui ad contra
constituti sunt, superflua certe sunt haec verba, quibus inse-
rentis praecedentes anguli sive ad centrum, sive ad circumfe-
rentias insistentes occasionem dedisse videntur. In Cod. a.
omnia, quae de sectoribus dicta sunt, nec non Corollarium
manu aliena vel inter lineas, vel in margine exarata sunt vo-
cabulis contractis. Hinc Peyrardus iudicat, in Praefat. ad Tom.
I. quoniam Rob. Simson. in Ed. Angl. iniquerat, pariter ac
Scarburgh. additam esse hanc secundam. Propositionis partem,
quae moram saltim afferat, Euclidi et nusquam in sequenti-
bus adhibetur, a Theop. ipso referente in Commentar. ad
Ptol. Μεγάλη σύνταξις p. 50. Ed. 1558, ubi ille: ὅτι δὲ οἱ
ἐπὶ ἴσων κύκλων τομῆς πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς καὶ γωνία, ἐφ'
ὧν βεβηκέναι, δίδεσθαι ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς
τῷ τέλει τοῦ ἔκτου βιβλίου.

gulum (qui pariter ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. ad
priorem reduci potest) exhibet Rob. Simson. in not. ad VI.
29., et solutionem similem ei, quae in problemate simili ad
VI. 28. habebatur, in hunc modum affert. Sit data recta AB
(Fig. 291.), datum autem rectangulum sit id, quod rectis $Γ$,
 $Δ$ continetur: oportet secundum datam rectam AB dato rectan-
gulo $ΓΧΔ$ aequale rectangulum applicare excedens quadrato
Ducantur AE , BZ ad rectos angulos ipsi AB , et ad contra-
rias eius partes, quarum AE aequalis sit ipsi $Γ$, et BZ rectae

centra, sive ad circumferentias insistant; adhuc etiam et sectores (quippe ad centra constituti).

Sint aequales circuli ABF , ΔEZ , et ad centra quidem ipsorum H , Θ sint anguli BHF , EGZ ; ad circumferentias vero anguli BAF , EAZ ; dico esse ut BF circumferentia ad EZ circumferentiam ita angulum BHF ad angulum EGZ , et angulum BAF ad angulum EAZ ; et adhuc sectorem HBF ad sectorem ΘEZ .

A. Iungatur EZ et bifariam secetur in I , centroque I , intervallo IE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H , et iungatur HZ , et ad AB ducatur IA parallela ipsi AE ; occurrat vero circulus rectae AB productae in M et N , et super BN describatur quadratum $NBOH$, et compleatur rectangulum $ANH\Theta$. Quoniam igitur angulus BHZ in semicirculo aequalis est angulo recto EAB , parallelas erunt AB , HZ ; aequales igitur sunt AH , BZ , et rectangulum $EA \times AH = EA \times BZ$ h. e. rectangulo $\Gamma \times A$. Et, quoniam aequales sunt MA , AN , ut et AA , AB , erunt et MA , BN aequales, et propterea rectangulum $AN \times NB = MA \times AN =$ (III. 35.) $BA \times AH = \Gamma \times A$. Rectangulum igitur $AN \times NB$ h. e. ipsum AH aequale est rectangulo $\Gamma \times A$. Secundum datam igitur rectam AB dato rectangulo $\Gamma \times A$ aequale rectangulum AH applicatum est excedens quadrato BH . Quod oportebat facere.

Obs. 3. Data recta linea AB , et rectilineo, per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel NH latus quadrati, quo excedit rectangulum datum AH secundum datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita NB vel NH ponatur y , unde $AO = AB \times y$, et $NO = y^2$, ergo $AH = AB \times y + y^2$ h. e. $\Gamma \times A = AB \times y + y^2$. Pariterque, si ponatur $AN = x = AB + y$, erit $BN = x - AB$, unde $AH = AN \times BN = x^2 - x \times AB$. Et has aequationum quadraticarum affectarum species ex hac Prop. 29. solverunt Geome-

Κατέδωσαν γὰρ τῇ μὲν $BΓ$ περιφέρειᾳ ἴσαι καὶ τὸ ἐκτὸς ὁσαυδηποτοῦν αἱ $ΓΚ$, $ΚΑ$, τῇ δὲ EZ περιφέρειᾳ ἴσαι ὁσαυδηποτοῦν αἱ ZM , MN , καὶ ἐπέχθησαν αἱ $ΗΚ$, $ΗΑ$, $ΘΜ$, $ΘΝ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ $BΓ$, $ΓΚ$, $ΚΑ$ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $BΗΓ$, $ΓΗΚ$, $ΚΗΑ$ γωνίαι ἀλλήλαις ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῇ $BΓ$, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $BΗΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BΗΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ $ΕΝ$ περιφέρεια τῆς EZ , τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΕΘΝ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΘΖ$. Ἐκ δὲ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῇ $ΕΝ$ περιφέρειᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BΗΑ$ τῇ ὑπὸ $ΕΘΝ$.

trae veteres, inveniendō quantitatem incognitam EN vel AN per applicationem rectanguli dato rectangulo aequalis secundum datam rectam AB et excedentis quadrato. Et ipsa etiam regula, qua ad solvendas aequationes harum formarum utuntur recentiores, facile ex huius Prop. 29. constructione, vel, quod idem est, ex constructione in Obs. 4. ad II. 11. allata deduci potest simili ratione ac factum est in Obs. 5. ad VI. 24. Erit

$$\text{nempe } BN = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \Gamma \times \Delta} - \frac{AB}{2}, \text{ et } AN = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \Gamma \times \Delta} + \frac{AB}{2}. \text{ Cf. Whiston. Cor. 2—5 ad VI. 29.}$$

Quum itaque haec problemata in Prop. 28. et 29. contenta sint maxime utilia, et in solutione aliorum problematum saepissime adhibita, maxime etiam in libro decimo Elementorum Euclidis et in Conicis Apollonii, ubi applicatio 24 ad Ellipsiu, 29 autem ad Hyperbolam spectat, Rob. Simson iure censet inscite admodum ab Andr. Tacquet et Claud. Dechalets in illa, quas dederunt, Elementorum Editionibus has propositiones omissas esse, et insulse admodum ab his dici nullius fore usus esse. Caeterum vide adhuc ad calcem VI. Prop. 31.

Ponantur enim circumferentiae quidem BF aequales quocunque deinceps FK , KA , circumferentiae vero EZ aequales quocunque ZM , MN , et iungantur HK , HA , OM , ON .

Quoniam igitur aequales sunt circumferentiae BF , FK , KA inter se, aequales sunt et anguli BHF , FHK , KHA inter se (III. 27.) Quam multiplex igitur est circumferentia BA circumferentiae BF , tam multiplex est et angulus BHA anguli BHF . Ex eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EZ , tam multiplex est et angulus EON anguli EOZ . Si igitur aequalis est circumferentia BA circumferentiae EN , aequalis est et angulus BHA

PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Pflaiderer monet in sched. mss. §. 306. propositionem 31. incongrue a VI. 20. cum qua proxime cohaereat, seiunctam, et propositionibus 27—30. minime ad eam pertinentibus subiunctam esse.

Obs. 2. Rob. Simson, observat, in demonstratione bis omissam esse inversionem ope Prop. B. V. vel, ut vulgo habent, ope Cor. V. 4. faciendam. Ita enim demum demonstrationem ope V. 24. rite procedere, unde et Clavius ea inversione usus sit. Nempe ita habere debet demonstratio: Ut FB ad BA , ita figura ex FB ad figuram similem et similiter positam ex BA , et invertendo (B. V.) ut BA ad FB ita figura ex BA ad figuram ex FB : unde (V. 24.) ut $BA + FA$ ad FB ita figurae ex BA et FA ad figuram ex FB . Aequales autem sunt $BA + FA$ ipsae FB : unde (A. V.) figurae ex BA et FA aequales erunt figurae ex FB .

Obs. 3. Propositio VI. 31. generatorem, reddit propositionem I. 47. et in demonstratione priore ex praemissis ab hac independentibus sistit (Pflaiderer l. c. §. 306.).

Obs. 4. Converti quoque potest haec propositio eadem

καὶ εἰ μείζων ἴσται ἡ $ΒΔ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφέρει-
ας, μείζων ἴσται καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΔ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΟΝ$
γωνίας καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων τεσσάρων δὲ ὄντων με-
γεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$, δύο δὲ γω-
νιῶν τῶν ὑπὸ $ΒΗΓ$, $ΕΟΖ$, εἴληπται τῆς μὲν $ΒΓ$
περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνίας ἰσότης πολλα-
πλασιῶν ¹⁾, ἢ τε $ΒΔ$ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΔ$ γω-
νία, τῆς δὲ $ΕΖ$ περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ $ΕΟΖ$ γω-
νίας, ἢ τε $ΕΝ$ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ $ΕΟΝ$ γωνία
καὶ δεικνύεται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ $ΒΔ$ περιφέρεια τῆς
 $ΕΝ$ περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΔ$ γωνία τῆς

1) Hic inserendum Rob. Simson *vis* ἔτυχε iure censet, col-
lat. in V. 5. Def. verbis: καθ' ὅποιον πολλαπλασιασμόν, et su-
pra in praeparatione ad demonstrationem voce: ὁσαυδοποῦν.

ratione ac I. 47. Praeterea op. VI, 31. deducta quoque ex I. 47.
problemata generatorem formam induunt. Cf. Pfeiderer. l. c. §.
305. Clavius ad h. l. Tacquet et Whiston. in Cor. ad hanc
propositionem.

Obs. 5. Denique notabimus, Austino omnes propositiones
27—31 spurias esse videri, non quod ipsarum utilitatem negot,
quam potius de propositionibus 27—29 agnoscit, at non suffi-
cere putat ad eas Euclidi vindicandas, sed maxime ob usum
vocis *εἶδος* alias apud Euclidem non occurrentis, de qua dixi-
mus in Obs. 3. ad VI. 20, et quod demonstrationum concatenatio
inter VI. 26 et VI. 32. quae inter se cohaereant, abrupta sit.
Praeterea VI. 50. adco facile ad II. 11. referri, ut ea non opus sit.
Denique, quoad VI. 31. patere (it is evident) omnes figuras
similes rectilineas descriptas super quibusdam rectis ad se in-
vicem in eadem ratione esse, ac alias quascunque similes figu-
ras rectilineas super iisdem rectis descriptas, unde res facile ex
I. 47. conficiatur. Nobis turbatus quidem ordo propositionum
videtur, omnes autem has propositiones 25—31 spurias esse,
vix adducimur, ut credamus.

angulo EON ; et si maior est circumferentia BA circumferentia EN minor est et angulus BHA angulo EON ; et si minor, minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis BT , EZ , duobus vero angulis BHT , EOZ , sumpta sunt circumferentiae quidem BT , et anguli BHT aequae multiplicia, et BA circumferentia et BHA angulus, ipsius vero EZ circumferentiae et ipsius EOZ anguli et EN circumferentia et EON angulus; et ostensum est, si superat circumferentia BA circumferentiam EN , superare et angulum BHA angulum EON et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem esse;

PROPOSITIO XXXII.

Obs. 1. Rob. Simpson. monet, enunciatum propositionis VI. 26. non esse satis generalem, sed eam eo etiam sensu sumi posse, quem indicavimus in Obs. 4. ad VI. 26. Addit, forte etiam aliam fuisse demonstrationem propositionis VI. 26. directam (diversam ab ea, quam Clavius habet, vide Obs. 3. ad VI. 26.) Deinde exhibet aliam paulo breviorē demonstrationem propositionis VI. 32. in hunc modum: Sint duo triangula AQZ , ZHT (f. 398.) quorum duo latera AQ , QZ duobus lateribus HZ , HT proportionalia sint, sc. sit ut AQ ad QZ ita HZ ad HT ; parallela autem sit QA ipsi HZ , et QZ ipsi HT : erit AZ ipsi ZT in directum. Duceatur PK parallela ipsi ZH (I. 31.) occurratque rectae QZ productae in K . Quoniam igitur utraque AQ , PK parallela est ipsi ZH , erunt et AQ , KT inter se parallelae (I. 30.) quare anguli AQZ , ZKT sunt invicem aequales (I. 29.) Est autem AQ ad QZ ut ZH ad HT ; h. e. (I. 31.) ut PK ad KZ ; et sunt circa aequales angulos: ergo (VI. 6.) aequiangula sunt AQZ , PKZ triangula, et propterea angulus AZQ aequalis est angulo PZK , est autem PZK recta linea; igitur AZ ipsi PZ est in directum. (I. 14.) Opus huius propositionis, deinde VI. 26. ita demonstrat. Si duo

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἥτερ ἢ GB πρὸς τὴν BA . Ἐχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἥτερ ἢ GB πρὸς τὴν BA · καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς GB εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA εἶδος οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς GB τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς GA εἶδος οὕτως τὸ τῆς $BΓ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς GA τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν BA, AG εἶδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν BA, AG τετράγωνα. Ἰσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AG τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AG εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως αναγραφομένοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα,

AI, BZ inter se parallelae, aequales erunt AA, AB , et aequales etiam sunt (III. 5.) EK, KH . Est autem, ob determinationem rectangulum $\Gamma \times \Delta$ non maius quadrato ex AA dimidio ipsius AB , ergo et rectangulum $EA \times AH$ non maius est quadrato ex AA h. e. ex IK : commune addatur quadratum ex KE , et quadratum ex AK (II. 6.) non maius erit quadratis ex EK, IK h. e. quadrato ex IE : quare recta AK seu IA non maior est ipsa IE . Et, siquidem IE aequalis fuerit ipsi IA , circulus EHZ continget rectam AB in Δ , et quadratum ex AA (III. 36.) aequale erit rectangulo $EA \times AH$, sive dato rectangulo $\Gamma \times \Delta$, et factum erit, quod proponebatur. Si vero

BA duplam rationem habet eius quam habet ΓB ad BA . Habet autem et quadratum ex $B\Gamma$ (VI. 20. Cor. 11.) ad quadratum ex BA duplam rationem eius quam ΓB ad BA ; ut igitur (V. 11.) figura ex $B\Gamma$ ad figuram ex BA ita quadratum ex ΓB ad quadratum ex BA . Ex eadem ratione et ut figura ex $B\Gamma$ ad figuram ex ΓA ita quadratum ex $B\Gamma$ ad quadratum ex ΓA ; quare et ut figura ex $B\Gamma$ ad figuras ex BA , ΓA ita quadratum ex $B\Gamma$ ad quadrata ex BA , ΓA . Aequale autem quadratum ex $B\Gamma$ (I. 47.) quadratis ex AB , ΓA aequalis igitur et figura ex $B\Gamma$ figuris ex BA , ΓA similibus et similiter descriptis. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXII. (Fig. 397.)

Si duo triangula componantur secundum unum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia ha-

sunt BI , IZ , et AE , inaequales fuerint IE , IA , erit IE maior, et propterea circulus EHZ secabit rectam AB ; secet in M , N punctis, et super NB describatur quadratum $NBOH$, et compleatur rectangulum $ANHO$. Quoniam igitur aequales sunt MA , AN , et aequales ostensae sunt AA , AB , aequales erunt AM , NB . Rectangulum igitur $AN \times NB$ aequale est ipsi $NA \times AM$, hoc est (III. 36. Cor.) rectangulo $EA \times AH$, sive rectangulo $\Gamma \times A$. Rectangulum vero $AN \times NB$ est ipsum AH , est enim $HN = NB$. Ergo rectangulum AH aequale est rectangulo $\Gamma \times A$. Igitur secundum datam rectam AB dato $\Gamma \times A$ rectangulo aequale

ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας εἰσονται.

Ἐστὼ δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς BA , AG ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς ΓA , ΔE ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν AB πρὸς τὴν AG οὕτως τὴν $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΔE , παράλληλον δὲ τὴν μὲν AB τῇ $\Delta\Gamma$, τὴν δὲ AG τῇ ΔE · λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ ΓE .

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Delta\Gamma$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ AG , καὶ αἱ ἐναλλαῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ BAG , $AG\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ τῇ ὑπὸ $AG\Delta$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ A μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν BA πρὸς τὴν AG οὕτως τὴν ΓA πρὸς τὴν ΔE · ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Gamma E$ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma E$ · Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $AG\Delta$ τῇ ὑπὸ BAG ἴση· ὅλη

rectangulum AN applicatum est deficiens quadrato BN , quod facere oportebat.

Obs. 3. Data recta AB , et rectilineo, per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel NI latus quadrati, quo deficit rectangulum AN rectilineo dato aequale, et secundum datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita NB vel NI ponatur y , unde $AO = AB \times y$, et $NO = yq$, ergo $AN = AB \times y - yq$, vel $\Gamma \times \Delta = AB \times y - yq$. Atque haec est prima aequationum affectarum quadraticarum species seu forma, quam ex hac Prop. 28. solverunt geometrae

bentia, ita ut homologa eorum latera et parallela sint; reliqua triangulorum latera in directum erunt.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔTE , duo latera BA , AT duobus lateribus ΓA , ΔE proportionalia habentia ut AB quidem ad AT ita ΔT ad ΔE , parallela vero sit AB ipsi AT , AT vero ipsi ΔE ; dico $B\Gamma$ in directum esse ipsi TE .

Quoniam enim parallela est AB ipsi AT , et in ipsa incidit recta AT , alterni anguli BAT , $AT\Delta$ aequales inter se sunt (I. 29.). Ex eadem ratione et $\Gamma\Delta E$ ipsi $AT\Delta$ est aequalis; quare et BAT ipsi $\Gamma\Delta E$ est aequalis. Et quoniam duo triangula sunt $AB\Gamma$, ΔTE unum angulum ad A utriusque angulo ad Δ aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad AT ita ΓA ad ΔE ; aequiangulum est (VI. 6.) triangulum $AB\Gamma$, triangulo ΔTE ; aequalis igitur angulus $AB\Gamma$ ipsi ΔTE . Ostensus autem est et $AT\Delta$ ipsi BAT aequalis; totus igitur ATE duobus $AB\Gamma$, BAT aequalis est. Communis appo-

veheres, inveniendū quantitatem incognitam NB , vel NH per applicationem rectanguli dato rectangulo aequalis secundum datam rectam AB et deficientis quadrato. Et ipsa etiam regula, qua ad solvendas aequationes huius formae utuntur recentiores, ex huius Prop. 28. constructione, vel, quod idem est, ex constructione in Obs. 3. ad II. 14. allatā deduci potest (Whiston. Cor. 2. et 3. ad VI. 28.). Obtinebitur nempe

$$HE = AE - BZ = \Gamma - \Delta, \text{ et } KE = \frac{HE}{2} = \frac{\Gamma - \Delta}{2}, \text{ et ob } KI = AA =$$

ἄρα ἡ ὑπὸ APE δυοὶ ταῖς ὑπὸ $ABΓ$, $BAΓ$ ἴση ἐστίν.
 Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$. αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΓΕ$,
 $ΑΓΒ$ ταῖς ὑπὸ $BAΓ$, $ABΓ$, $ΑΓΒ$ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ'
 αἱ ὑπὸ $BAΓ$, $ABΓ$, $ΑΓΒ$ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ
 καὶ αἱ ὑπὸ $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ ἄρα δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.
 Πρὸς δὴ τινι εὐθείᾳ τῇ $ΑΓ$, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-
 μείῳ τῷ $Γ$, δύο εὐθεῖαι αἱ $ΒΓ$, $ΓΕ$, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
 μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΓΕ$,
 $ΑΓΒ$ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν ἐπ' εὐθείας ἄρα
 ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΕ$. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ᾠχὸν
 ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐν τε

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2}, \text{ erit } IEq &= KIq + KEq = \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma - A}{2}\right)^q. \text{ Et } IA = \\ AK &= AH + HK = A + \frac{\Gamma - A}{2} = \frac{\Gamma + A}{2}; \text{ hinc } NAq = INq - IAq = \\ IEq - IAq &= \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma - A}{2}\right)^q - \left(\frac{\Gamma + A}{2}\right)^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q - \\ - \Gamma \times A, \text{ unde } NB &= AB - NA = \frac{AB}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma \times A\right)} \text{ et} \\ \text{eodem modo } NA &= \frac{AB}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma \times A\right)}. \end{aligned}$$

PROPOSITIO XXIX.

Obs. 1. Quod primum sensum huius propositionis atti-
 net, facile ille intelligitur ex ea explicatione, quam in Obs.
 2. ad VI. 27. de simili expressione attulimus. Nempe in
 Prop. 27. 28. de defectu, in Prop. 29. de excessu sermo est,
 resque ita intelligenda erit: Si linea aliqua AB producat^{ur} ad
 punctum aliquod O , tumque super AO constituatur parallelo-
 grammum $AΞ$ excedens figura parallelogramma $BΞ$, et haec

natur ATB : anguli igitur AFE , ATB ipsis BAT , ABF , ATB aequales sunt. Sed (I. 32.) BAT , ABF ATB duobus rectis aequales sunt; et ipsi AFE , ATB igitur duobus rectis aequales sunt. Ad quandam igitur rectam AF , et ad punctum in ea F , duae rectae BF , FE , non ad easdem partes positae, angulos deinceps AFE , ATB duobus rectis aequales faciunt; in directum igitur est BF ipsi FE (I. 14.). Si igitur duo etc.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 400.)

In aequalibus circulis anguli eandem rationem habent quam circumferentiae quibus insistent, sive ad

ipsa figura BZ excessus dicitur, isque excessus in hac propositione 29. similis esse debet dato parallelogrammo A , et totum parallelogrammum AE debet aequale esse spatio dato F . Caeterum etiam hic duplex solutio locum habet, et posterior cum priore eodem redit.

Obs. 2. Si datum istud rectangulum A quadratum fuerit, problema sic efferetur: Ad datam rectam AB dato rectilineo F aequale rectangulum applicare excedens quadrato (Ita Whiston in Cor. 1. ad VI. 29. et Rob. Simson in Not. ad h. l.) Aliter ita: Datam rectam AB producere ad punctum aliquod O , ita ut rectangulum contentum segmentis inter hoc punctum et puncta extrema rectae AB interceptis aequale sit spatio dato. Ita Playfair rem exprimit, qui etiam hic in casu hoc particulari subsistit. Vel etiam: data AB differentia laterum rectanguli, ipsoque rectangulo magnitudine dato, invenire latera. Vid. Rob. Simson: l. c. Erit autem spatium datum, cui aequale fieri debet rectangulum, vel quadratum, vel non. Priori casu problema solutum est supra in Obs. 4. ad II. 12. Posterioris casum particularem, quo spatium datum est rectae

πρὸς τοῖς κέντροις, εἰάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις
ᾗσι βεβηκέναι· ἐτι δὲ καὶ οἱ τομῆς (ἅτε πρὸς τοῖς
κέντροις συνιστάμενοι).

Ἐστῶσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ABΓ$, AEZ , καὶ πρὸς
μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς H , $Θ$ γωνίαι ἐστῶσαν
αὐτὴν ἐπὶ $BHΓ$, EOZ , πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αὐτὴν
ἐπὶ $BAΓ$, EAZ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ περιφέρεια
πρὸς τὴν EZ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ $BHΓ$ γωνία
πρὸς τὴν ὑπὸ EOZ , καὶ ἡ ὑπὸ $BAΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ
 EAZ . καὶ ἐτι ὁ HBP τομῆς πρὸς τὸν $ΘEZ$ τομῆα.

1) Verba, quae nuncis inclusimus, Rob. Simson. omit-
tenda censet, utpote imperiti cuiusdam additamentum. Scar-
burgh. etiam indicat, haec verba absurdam continere notam
e margine in textum receptam. Et reapse, quum ex III. 10.
Def. nulli alii dentur sectores circuli, quam qui ad centra
constituti sunt, superflua certe sunt haec verba, quibus inse-
rentis praecedentes anguli sive ad centrum, sive ad circumfe-
rentias insistentes occasionem dedisse videntur. In Cod. a.
omnia, quae de sectoribus dicta sunt, nec non Corollarium
manu aliena vel inter lineas, vel in margine exarata sunt vo-
cabulis contractis. Hinc Peyrardus indicat, in Praefat. ad Tom.
I. quoniam Rob. Simson. in Ed. Angl. iniquerat, pariter ac
Scarburgh. additam esse hanc secundam. Propositionis partem,
quae moram saltim afferat, Euclidi et nusquam in sequenti-
bus adhibeatur, a Theone ipso referente in Commentar. ad
Ptol. *Μετὰ τὴν σύνταξιν* p. 50. Ed. 1558. ubi ille: ὅτι δὲ οἱ
ἐπ' ἴσων κύκλων τομῆς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς καὶ γωνίαι, ἐφ'
ᾧ βεβηκέναι, δίδονται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς
τῷ τέλει τοῦ ἔκτου βιβλίου.

gulum (qui pariter ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. ad
priorem reduci potest) exhibet Rob. Simson. in not. ad VI.
29., et solutionem similem ei, quae in problemate simili ad
VI. 28. habebatur, in hunc modum affert. Sit data recta AB
(Fig. 391.), datum autem rectangulum sit id, quod rectis G ,
 A continetur: oportet secundum datam rectam AB dato rectan-
gulo $ΓΧΔ$ aequale rectangulum applicare excedens quadrato
Ducantur AE , BZ ad rectos angulos ipsi AB , et ad contra-
rias eius partes, quarum AE aequalis sit ipsi G , et BZ rectae

centra, sive ad circumferentias insistant; adhuc etiam et sectores (quippe ad centra constituti).

Sint aequales circuli ABF , AEZ , et ad centra quidem ipsorum H , Θ sint anguli BHF , EOZ ; ad circumferentias vero anguli BAF , EAZ ; duo essent BF circumferentia ad EZ circumferentiam ita angulum BHF ad angulum EOZ , et angulum BAF ad angulum EAZ ; et adhuc sectorem HBF ad sectorem ΘEZ .

A. Iungatur EZ et bifariam secetur in I , centroque I , intervallo IE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H , et iungatur HZ , et ad AB ducatur IA parallela ipsi AE ; occurrat vero circulus rectae AB productae in M et N , et super BN describatur quadratum $NBOH$, et compleatur rectangulum $ANHO$. Quoniam igitur angulus EHZ in semicirculo aequalis est angulo recto EAB , parallelae erunt AB , HZ ; aequales igitur sunt AH , BZ ; et rectangulum $EA \times AH = EA \times BZ$ h. e. rectangulo $\Gamma \times A$. Et, quoniam aequales sunt MA , AN , ut et AA , AB , erunt et MA , BN aequales, et propterea rectangulum $AN \times NB = MA \times AN =$ (III. 35.) $EA \times AH = \Gamma \times A$. Rectangulum igitur $AN \times NB$ h. e. ipsum AH aequale est rectangulo $\Gamma \times A$. Secundum datam igitur rectam AB dato rectangulo $\Gamma \times A$ aequale rectangulum AH applicatum est excedens quadrato BH . Quod oportebat facere.

Obs. 3. Data recta linea AB , et rectilineo; per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel NH latus quadrati, quo excedit rectangulum datum AH secundum datam rectam AH applicatum. Pro quantitate incognita NB vel NH ponatur y , unde $AO = AB \times y$, et $NO = y$, ergo $AH = AB \times y + y$, h. e. $\Gamma \times A = AB \times y + y$. Pariterque, si ponatur $AN = x = AB + y$, erit $BN = x - AB$, unde $AH = AN \times BN = x(x - x \times AB)$. Et haec aequationum quadraticarum affectarum species ex hac Prop. 29. solverunt Geome-

Κατέδωσαν γὰρ τῇ μὲν $BΓ$ περιφέρειᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἐξῆς ὁσαυδηποτοῦν αἱ $ΓΚ$, $ΚΛ$, τῇ δὲ EZ περιφέρειᾳ ἴσαι ὁσαυδηποτοῦν αἱ ZM , MN , καὶ ἐπέχειδωσαν αἱ $ΗΚ$, $ΗΛ$, $ΘΜ$, $ΘΝ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ $BΓ$, $ΓΚ$, $ΚΛ$ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $BΗΓ$, $ΓΗΚ$, $ΚΗΛ$ γωνίαι ἀλλήλαις ὁσαυδαπλάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ $ΒΛ$ περιφέρεια τῇ $BΓ$, τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $BΗΛ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BΗΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαυδαπλάσιον ἐστὶν ἡ $ΕΝ$ περιφέρεια τῆς EZ , τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΕΘΝ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΘΖ$. Ἐὶ ἄρα ὅση ἐστὶν ἡ $ΒΛ$ περιφέρεια τῇ $ΕΝ$ περιφέρειᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BΗΛ$ τῇ ὑπὸ $ΕΘΝ$.

trae veteres, inveniendō quantitatem incognitam EN vel AN per applicationem rectanguli dato rectangulo aequalis secundum datam rectam AB et excedentis quadrato. Et ipsa etiam regula, qua ad solvendas aequationes harum formarum utuntur recentiores, facile ex huius Prop. 29. constructione, vel, quod idem est, ex constructione in Obs. 4. ad II. 11. allatā deduci potest simili ratione ac factum est in Obs. 5. ad VI. 28. Erunt

nempe $BN = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + ΓΧΔ} - \frac{AB}{2}$, et $AN = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + ΓΧΔ} + \frac{AB}{2}$. Cf. Whiston. Cor. 2—5 ad VI. 29.

Quum itaque haec problemata in Prop. 28. et 29. contenta sint maxime milia, et in solutione aliorum problematum saepissime adhibita, maxime etiam in libro decimo Elementorum Euclidis et in Conicis Apollonii, ubi applicatio 28. ad Ellipsin, 29. autem ad Hyperbolam spectat, Rob. Simson iure ceuset incite admodum ab Andr. Tacquet et Claud. Dechalets in illis, quas dederunt, Elementorum Editionibus has propositiones omissas esse, et insulse admodum ab his diei populo fore usus esse. Caeterum vide adhuc ad calcem VI. Prop. 31.

Porrigatur etiam circumferentiae quidem BT aequales quocunque deinceps TK , KA , circumferentiae vero EZ aequales quocunque ZM , MN , et iungantur HK , HA , OM , ON .

Quoniam igitur aequales sunt circumferentiae BT , TK , KA inter se, aequales sunt et anguli BHT , THK , KHA inter se (III. 27.) Quam multiplex igitur est circumferentia BA circumferentiae BT , tam multiplex est et angulus BHA anguli BHT . Ex eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EZ , tam multiplex est et angulus EON anguli EOZ . Si igitur aequalis est circumferentia BA circumferentiae EN , aequalis est et angulus BHA

PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Pflaiderer monet in sched. mss. §. 306. propositionem 31. incongrue a VI. 20. cum qua proxime cohaereat, se iunctam, et propositionibus 27–30 minime ad eam pertinentibus subiunctam esse.

Obs. 2. Rob. Simson, observat, in demonstratione bis omissam esse inversionem ope Prop. B. V. vel, ut vulgo habent, ope Cor. V. 4. faciendam. Ita enim demum demonstrationem ope V. 24. rite procedere, unde et Clavius ea inversione usus sit. Nempe ita habere debet demonstratio: Ut GB ad BA , ita figura ex IB ad figuram similem et similiter positam ex BA , et invertendo (B. V.) ut BA ad GB ita figura ex BA ad figuram ex GB : unde (V. 24.) ut $BA + GA$ ad GB ita figurae ex BA et GA ad figuram ex GB . Aequales autem sunt $BA + GA$ ipsae GB : unde (A. V.) figurae ex BA et GA aequales erunt figurae ex GB .

Obs. 3. Propositio VI. 31. generatorem, reddit propositionem I. 47. et in demonstratione priore ex praemissis ab hac independentibus sistit (Pflaiderer l. c. §. 306.).

Obs. 4. Converti quoque potest haec propositio eadem

καὶ εἰ μείζων ἴσται ἢ $ΒΔ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφερείας, μείζων ἴσται καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΔ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΟΝ$ γωνίας καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ $ΒΗΓ$, $ΕΟΖ$, εἴληπται τῆς μὲν $ΒΓ$ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνίας ἰσάκως πολλαπλασιῶν ¹⁾, ἢ τε $ΒΔ$ περιφέρειᾳ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΔ$ γωνία, τῆς δὲ $ΕΖ$ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ $ΕΟΖ$ γωνίας, ἢ τε $ΕΝ$ περιφέρειᾳ καὶ ἡ ὑπὸ $ΕΟΝ$ γωνία· καὶ δεδεικνύται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ $ΒΔ$ περιφέρειᾳ τῆς $ΕΝ$ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΔ$ γωνία τῆς

1) Hic inserendum Rob. Sim-son οἷς ἐπὶ τῆς ἰσῆς censet, col- lat. in V. 5. Def. verbis: καθ' ὅποιον πολλαπλασιασμόν, et sup- ra in praeparatione ad demonstrationem voce: ὅσα ἰσῆς ποτὺν.

ratione ac I. 47. Praeterea op. VI, 31. deducta quoque ex I. 47. problemata generaliore formam induunt. Cf. Pfeiderer, l. c. §. 305. Clavius ad h. l. Tacquet et Whiston. in Cor. ad hanc propositionem.

Obs. 5. Denique notabimus, Austino omnes propositiones 27—31 spurias esse videri, non quod ipsarum utilitatem negat, quam potius de propositionibus 27—29 agnoscit, at non sufficere putat ad eas Euclidi vindicandas, sed maxime ob usum vocis εἶδος alias apud Euclidem non occurrentis, de qua diximus in Obs. 3. ad VI. 20, et quod demonstrationum concatenatio inter VI. 26 et VI. 32. quae inter se cohaereant, abrupta sit. Praeterea VI. 50. adeo facile ad II. 11. referri, ut ea non opus sit. Denique, quoad VI. 31. patere (it is evident) omnes figuras similes rectilineas descriptas super quibusdam rectis ad se invicem in eadem ratione esse, ac alias quascunque similes figuras rectilineas super iisdem rectis descriptas, unde res facile ex I. 47. conficiatur. Nobis turbatus quidem ordo propositionum videtur, omnes autem has propositiones 25—31 spurias esse, vix adducimur, ut credamus.

angulo EON ; et si maior est circumferentia BA circumferentia EN maior est et angulus BHA angulo EON ; et si minor, minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis BF , EZ , duobus vero angulis BHT , EOZ , sumpta sunt circumferentiae quidem BF , et anguli BHT aequae multiplicia, et BA circumferentia et BHA angulus, ipsius vero EZ circumferentiae et ipsius EOZ anguli et EN circumferentia et EON angulus; et ostensum est, si superat circumferentia BA circumferentiam EN , superare et angulum BHA angulam EON et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem esse;

PROPOSITIO XXXII.

Obs. 1. Rob. Simpson. monet, enunciatum propositionis VI. 26. non esse satis generalem, sed eam eo etiam sensu sumi posse, quem iudicavimus in Obs. 4. ad VI. 26. Addit, forte etiam aliam fuisse demonstrationem propositionis VI. 26. directam (diversam ab ea, quam Clavius habet, vide Obs. 3. ad VI. 26.) Deinde exhibet aliam paulo breviorē demonstrationem propositionis VI. 32. in hunc modum: Sint duo triangula AQZ , ZHT (f. 396.) quorum duo latera AQ , AZ duobus lateribus HZ , HT proportionalia sint, sc. sit ut AQ ad AZ ita HZ ad HT ; parallela autem sit QA ipsi HZ , et AZ ipsi HT : erit AZ ipsi ZT in directum. Ducatur TK parallela ipsi ZH (I. 31.) occurratque rectae AZ productae in K . Quoniam igitur utraque AQ , TK parallela est ipsi ZH , erunt et AQ , TK inter se parallelae (I. 30.), quare anguli AQZ , ZKF sunt invicem aequales (I. 29.) Est autem AQ ad AZ ut (ZH) ad HT , h. e. (I. 31), ut TK ad AZ ; et sunt circa aequales angulos, ergo (VI. 6.) aequiangula sunt AQZ , TKZ triangula, et propterea angulus AQZ aequalis est angulo TKZ , est autem TKZ recta linea; igitur AZ ipsi ZT est in directum. (I. 14.) Opus huius propositionis, deinde VI. 26. ita demonstrat. Si dua-

ὑπὸ BON καὶ εἰ ἴση, ἴση καὶ εἰς ἑλάντων, ἑλάντων
 ἔστιν ἄρα ὡς BF περιφέρεια πρὸς τὴν EZ , οὕτως ἡ
 ὑπὸ BHF γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EOZ . Ἄλλ' ὡς ἡ
 ὑπὸ BHF γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EOZ οὕτως ἡ ὑπὸ
 BAF πρὸς τὴν ὑπὸ EAZ , διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἐκ-
 τέρως καὶ ὡς ἄρα ἡ BF περιφέρεια πρὸς τὴν EZ
 περιφέρειαν οὕτως ἢ τε ὑπὸ BHF γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ
 EOZ , καὶ ἡ ὑπὸ BAF πρὸς τὴν ὑπὸ EAZ .

Ἐν ἄρ' αὖ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν
 ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασι, ἔάν
 τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἔάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις
 ὡς βεβήκωσι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

parallelogramma similia et similiter posita communem habue-
 rint angulum aut angulos ad verticem oppositos; erunt illorum
 diametri in recta linea. Primo habeant parallelogramma ABIA
 AEZO communem angulum BAZ , sintque similia et similiter
 posita, erunt ABIA , AEZO circa eandem diametrum. Produ-
 cantur enim EZ , FZ ad H , K et iungantur ZA , BI : Quoniam
 igitur similia sunt ABIA , AEZO parallelogramma, erit AA ad
 AB , ut OA ad AE ; quare reliqua AO erit ad reliquam EB ut
 OA ad AE (V. 19. Cor.) Est autem AO aequalis ipsi ZH , EB
 ipsi FH , et AE ipsi OZ . Ergo ut ZH ad FH ita AO ad OZ ;
 et parallelae sunt ZH , FH ipsis AO , OZ ; et triacula AOZ ,
 ZHF ad unum angulum composita sunt in puncto Z ; quare
 erunt AZ , ZI sibi ipsis in directum (VI. 32.). Secundo, sint
 parallelogramma KZHI , OZEA similia et similiter posita, ha-
 beantque angulos KZH , EZO ad verticem oppositos; erunt
 diametri AZ , ZI sibi ipsis in directum. Quoniam enim pa-
 rallelae sunt AO , OZ ipsis ZH , HF , et est AO ad OZ ut ZH
 ad HF ; erunt AZ , ZI in directum (VI. 32.).

Obs. 2. Clavius monet, ut vera sit propositio VI. 32.
 duo ista, de quibus sermo est, triacula, ita secundum unum

est igitur (V. Def. 5.) ut circumferentia BF ad circumferentiam EZ ita angulus BHF ad angulum EOZ . Sed (V. 15.) ut angulus BHF ad angulum EOZ ita angulus BAF ad angulum EAZ ; duplus enim uterque utriusque; (III. 20.) ut igitur circumferentia BF ad circumferentiam EZ ita et angulus BHF ad angulum EOZ , et angulus BAF ad angulum EAZ .

In aequalibus igitur circulis anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus insistant; sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat ostendere.

angulum composita esse debere, ut uterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus alterius sit illi angulo, secundum quem triacula componuntur.

PROPOSITIO XXXIII.

Obs. 1. In praeparatione demonstrationis loco arcuum FK , KA arcui BF aequalium anguli GHK , KHA angulo BHF aequales poni possunt iuberi. Modum hoc faciendi immediate docet I. 23. Modus prius faciendi nititur IV. 1; III. 28, immediate autem non exponitur, nisi addere velis ut IV. 1, Cor. (Pfleiderer.)

Obs. 2. Si in parte secunda propositionis sectores occurrant semicirculo aequales aut maiores, bisecando illi facite ad sectores minores semicirculo reducentur. Caeterum angulos gibbos etiam per demonstrationem partis primae non excludi posse diximus ad III. 20.

Obs. 3. Ex hac propositione sequentia adhuc derivantur Corollaria, quae sunt apud Clavium, Tacquetum, Baermannum, Pfleidererum, aliosque. 1. Ut est angulus ad centrum ad quatuor angulos rectos, ita arcus isti angulo subtensus

Δείκνυσι ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομεύς.

Ἐπεξείχθησαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ καὶ ληροδέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ε, Ο σημείων, ἐπεξείχθησαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυοὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ, ἴσαι εἶσι, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι καὶ βάσεις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση, καὶ ἴσων ἐστὶ²⁾ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφέρειᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ³⁾ ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ τμήματι καὶ εἰσὶν ἐκείνων ἐκείνων πῶν ΒΓ, ΓΚ. Ταῦτα δὲ ἐπὶ ἴσων ἐνθεῖσιν ὁμοία τμήματι κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεὶ ἴσος ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΗΚΑ τομεὺς ἐκατέρω

1) Peyrardus in Praefat. ad Tom. I, ait: „In textu graeco manuscripti 19J vel Cod. a nequaquam agitur de elementorum sectoribus in ultima sexti libri propositione. Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia, quae ad sectores pertinent, et quidem, ut in lect. variant. addit, vocabulis contrariis.“ Quam igitur postea ad Cod. a provocet Peyrardus, id saltem de lectione ista ad marginem notata intelligi debet.

2) Pro: ἴσων ἄρα ἐστὶ quod vulgo habent, legendum esse: καὶ ἴσων ἐστὶ recte monet Rob. Simson.

3) Ha leg. Gregorius, cuius lectionem hic restituumus. Peyrardus ex Cod. a habet: καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ἐστὶν ὅλον κύκλου περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ.

ad totam peripheriam, et vice versa. Vel etiam, ut angulus

Dico et ut circumferentia BF ad circumferentiam EZ ita sectorem HBF ad sectorem ΘEZ .

Iungantur enim BF , FK , et sumptis in circumferentiis BF , FK , punctis Z , O , iungantur et BZ , EZ , FO , OK .

Et quoniam dato BH , HF duabus GH , HK aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt; et basis BF basi FK est aequalis et aequale est etiam triangulum BHF triangulo (I. 4.) HFK . Et quoniam aequalis est circumferentia BF circumferentiae FK , et reliqua circumferentia quae complet totum circulum ABF aequalis est (3 Ax.) reliquae circumferentiae quaecundum circulum complet; quare et angulus BZF angulo FOK est aequalis (III. 27.); simile igitur est (II. Def. 11.) segmentum BZF segmento FOK ; et sunt super aequales rectas BF , FK . Sed similia segmenta circulorum super aequales rectas aequalia inter se sunt (III. 24.); aequale igitur est segmentum BZF segmento FOK . Est autem et triangulum BHF triangulo HFK aequale; et totus igitur sector HBF toti sectori HFK

ad centrum est ad angulum rectum, ita ut is angulus subtensus ad quadrantem circuli. 2) Diversorum circulorum arcus qui aequales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Et vice versa arcus similes aequales angulos subtendunt, ubi nempe similes duorum circulorum arcus dicuntur ii, qui ad integras circumferentias, quarum partem constituunt, eandem utrimque rationem habent. 3) Duae semidiametri a concentricis peripheriis arcus auferunt similes. 4) Hisce innititur vulgaris ratio angulos metiendi per arcus, qui illos subtendunt. Si enim, datis tota circumferentia cuiuscunque circuli divisa in certum numerum partium aequalium v. c. 360, qui gradus vocantur, disquiritur ope instrumenti goniometrici,

τῶν $HKΓ$, HGB ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ $HBΓ$, $HΓK$, $HKΛ$ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΘΕΖ$, $ΘΖΜ$, $ΘΜΝ$ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαυταπλάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΒΓ$ περιφέρειας, τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ ὁ HBA τομεὺς τοῦ $HBΓ$ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαυταπλάσιον ἐστὶν ἡ $ΕΝ$ περιφέρεια τῆς $ΕΖ$ περιφέρειας, τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ ὁ $ΘΕΝ$ τομεὺς τοῦ $ΘΕΖ$ τομέως. Ἰὴ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῇ $ΕΝ$ περιφέρειᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ HBA τομεὺς τῷ $ΘΕΝ$ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ὁ HBA τομεὺς τοῦ $ΘΕΝ$ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγέθων, δύο μὲν τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν $HBΓ$, $ΘΕΖ$ τομέων, εἴληται ἰσότης πολλαπλάσια ¹⁾ τῆς μὲν $ΒΓ$ περιφέρειας, καὶ τοῦ $HBΓ$ τομέως, ἥτε $ΒΑ$ περιφέρειᾳ καὶ ὁ HBA τομεὺς, τῆς δὲ $ΕΖ$ περιφέρειας καὶ τοῦ $ΘΕΖ$ τομέως ἰσότης πολλαπλάσια ²⁾, ἥτε $ΕΝ$ περιφέρειᾳ καὶ ὁ $ΘΕΝ$ τομεὺς. Καὶ δίδεικται οὖν εἰ ὑπερέχει ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ὁ HBA τομεὺς τοῦ $ΘΕΝ$ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΒΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν $ΕΖ$ οὕτως ὁ $HBΓ$ τομεὺς πρὸς τὸν $ΘΕΖ$ τομεῖ.

1) Verbis: ἰσότης πολλαπλάσια addenda esse: ἃ εἴη, recte monet Rob. Simson.

quot gradus sint in duobus arcibus circuli alicuius, patet per VI. 35. rationem angulorum, quos hi arcus subtendunt, in numeris exhiberi posse. Et si unus angulus consideratur, et numerus graduum in arcu ad eum pertinente inventus est:

aequalis est. (2. Ax.) Ex eadem ratione et sector HKA utrique ipsorum HKT , HGB aequalis est; tres igitur sectores HBT , HKT , HKA aequales inter se sunt. Similiter et sectores ΘEZ , ΘZM , ΘMN aequales inter se sunt; quam multiplex igitur est circumferentia BA circumferentiae BT , tam multiplex est et sector HBA sectoris HBT . Ex eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EZ , tam multiplex est et sector ΘEN sectoris ΘEZ ; si igitur aequalis est circumferentia BA circumferentiae, EN aequalis est et sector HBA sectori ΘEN ; et si superat circumferentia BA circumferentiam EN , superat et sector HBA sectorem ΘEN ; et si deficit, deficit. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duobus quidem circumferentiis BT , EZ , duobus vero sectoribus HBT , ΘEZ , sumpta sunt aequae multiplicia ipsius quidem circumferentiae BT et ipsius sectoris HBT , circumferentia BA , et sector HBA , circumferentiae vero EZ et sectoris ΘEZ aequae multiplicia, circumferentia EN et sector ΘEN . Et ostensum est si superat circumferentia BA circumferentiam EN , superare et sectorem HBA sectorem ΘEN ; et si aequalis sit, aequalem esse et si deficit, deficere; est igitur (V. Def. 5.) ut circumferentia BT , ad circumferentiam EZ , ita sector HBT ad sectorem ΘEZ .

constat ratio anguli ad 4. rectos per nr. I. Sit e. gr. numerus graduum, quos arcus habet = 45, erit angulus ad eum arcum pertinens: 4 rect. = 45: 360 = 1: 8. Caeterum loco 360 partium vel graduum, in quos vulgo circumferentiam quamcunque dividere solent, recentiores Galli eam in 400, adeoque quadrantem in 100 partes aequales dividere instituerunt. 5) Mensura quoque angulorum circulo insistentium, quorum

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ ὁφείλει ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα
οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

vertex intra vel extra circulum est, facile habetur per summam
vel differentiam arcuum; quibus insistent. 6) Inaequalium
circulorum arcus sunt in ratione composita ex rationibus an-
gularum ad centrum et peripheriarum. Denique notandum
est; apud Clavium ad calcem libri VI. plura adhuc addita
esse theoremata et problemata; quorum multa versantur circa

COROLLARIUM.

Et manifestum est (V. 11.) et ut sector ad sectorem
ita esse angulum ad angulum.

inventionem superficierum proportionalium. Et sunt quidem
illa, ut Clavius ait, scitu non iniucunda, et augeat etiam eorum
numerus facile poterat e scriptis veterum et recentiorum Ma-
thematicorum. At memores, nos in Elementis versari, nolui-
mus nimii esse.

EXCURSUS
AD
ELEMENTORUM

L. V. et maxime ad Def. 5. et 7.

A primis inde litterarum in Europa restitutarum temporibus ad nostram usque aetatem laud defuere Mathematici, qui in libro quinto Elementorum Euclidis multa difficilia, obscura, haud satis explicata esse contenderent, quum contra alii hunc ipsum librum pulcherrimum ingenii Euclidei foetum iudicaret. Gravissima autem dubia, quae contra demonstrationes in hoc libro obvias afferunt, ipsa fundamenta, quibus illae nuntur, spectant, definitiones nempe rationum aequalium aut inaequalium, et ad haec fere redeunt. Euclidem aiunt (v. 2. Borellus Euclid. restituit. L. III. Ax. VI. et quae ad illud observat) multifariam rationem et proportionem (aut, ut alii dicunt, proportionalitatem) magnitudinum definivisse duplici modo, primo quidem in libro quinto, et aliter deinde in libro septimo, quod ipsum indicio sit eum sibi ipsi non constituisse, aut forte in primis istis definitionibus ipsum sibi non satisfecisse. Eam autem potissimum definitionem rationum aequalium aut inaequalium, cui integer fere liber quintus superstruitur, nempe 5. Def. V. et 7. Def. V. esse subobscuram, nec naturam rei definitae satis declarare aut distinguere a quavis alia, et notissimas adeo magnitudinum proportionalium proprietates inde deduci non posse v. c. propositionem: si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et prima superet secundam, tertiam quoque necessario excedere quartam. Defectum autem definiti-

onis 5tae et 7mae in eo potissimum latere, quod ea quae in his Definitionibus de magnitudinibus, quae eandem aut non eandem rationem inter se habeant, dicantur, non sint proprietates prima et omnium notissima, quae istis magnitudinibus competat, qualis tamen esse debeat illa, quae definitionem scientificam constituat. Plura alia adhuc carpit in his definitionibus Thom. Simpson, de quibus infra videbimus. Consulto omisit obiectiones manifesto falsas, a Ramo, iniquissimo illo Euclidis reprehensore aliisque factas, qui male intellecta Euclidis definitione — in quem errorem Campano (vid. obi. supra ad Def. V. 5.) inducti fuisse videntur — calumpniantur Euclidem generalem datorum proportionem definire per specialem aequimultiplicium proportionem. Et fortasse falsa ista Campani expositio causa fuerit, cur multi primo post litteras renatas tempore Euclidem male intelligerent. (Cf. Barrow: Lect. 1666. Lect. VII.) Tacquetus etiam putat (Element. Euclid. Geometr. planae ac solidae L. V. ab initio) Euclidis definitionem non naturam aequalium rationum sed affectionem solummodo aliquam explicare. Et illam multiplicium proprietatem adduci vel tanquam signum infallibile rationum aequalium ut, quandocunque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certo licet, aequales eas esse: vel eum illius sensum esse, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit quam eas quarum multiplices modo iam dicto excedant vel excedantur. Si prius, demonstrare debuisset Euclidem, eam affectionem omnibus et solis rationibus aequalibus inesse. Id vero nec Euclidem nec alium quemquam demonstrasse. Si posterius, securus nos quidem esse de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonstrationum nobis constare de absoluta rationum aequalitate. — Tacquetus itaque fundamenti loco sumere videtur, aliunde constare, quid sit rationum aequalitas et demonstrandum esse, cum vulgari isto conceptu de rationum aequalitate necessario consentianum esse eam quam Euclides affert, proprietatem, et vice versa. Eodem fere redire videntur, quae Grilaei monet (vid. principio de

Quinta Giornata del Galileo dettata ad Evang. Torricelli in Elem. Euclid. Ital. editis a Carlieri Flor. 1769. p. 117.) qui ita habet: Quodnam ingenium adeo felix est, ut certo sciat, quatuor magnitudinum proportionalium aequemultipla semper (Euclideo more) inter se convenire? Aut quis novit, ista aequemultipla non semper convenire, etiamsi istae magnitudines non sint proportionales? — Euclidis itaque illud assertum Theorema potius esse ait, quam definitionem. Et vana haec contra Euclidis theoriam dubia alii alio modo evitare vel refellere studuerunt. Atque ii quidem, qui nulla Euclidis ratione habita diversam ab eo quantitatum proportionalium theoriam dederunt, huc non pertinent. Inter eos autem, qui sua cum Euclide conciliare voluerunt, ii maxime perfunctorie versati esse videntur, qui ut Tacquetus, Toricellius, van Swinden aliique plurima ab Euclide demonstrata theoremata v. c. 7. V. 8. V. 9. V. Axiomatum fere loco habuerunt, quippe quae declaratione potius subinde aliqua, quam demonstratione egere putarent. Aliam deinde rationum aequalium notionem sumentes, demonstrare sategerunt, Euclidis notionem cum ea qua ipsi usi erant, convenire, atque ex ea derivari posse. Perfunctorie diximus eos in hac re versatos esse. Neque enim hoc est demonstrare v. c. duas rationes, quae eidem tertiae aequales sint aequales esse inter se, si tantum affirmaveris, rem ita se habere, nec provocare licet ad Ax. I. 1. quum id, quod de duabus magnitudinibus valet, nequaquam applicari semper possit ad duas, quae inter magnitudines obtinent, rationes aut relationes. Ad demonstrandum autem Euclidean notionem rationum aequalium cum sua notione convenire, plerique ut per se clarum sumunt, datis tribus quantitibus A, B, C, dari semper quartam, ad quam C eandem rationem habeat, quam habet A ad B quod pariter sine demonstratione, qua ratione illa quantitas D inveniri possit, sumere a rigore Euclidi solemni alienum esse videtur. Id tamen, praesente Campano et Clavio, qui caeterum cum Tacqueto in hac re nihil commune habet, sibi permiserunt Tacquetus, Galilaei, Carlieri, aliique. Saccherius contra (Euclid. ab omni naevo restituit. p. 111 sqq.) quam maxime instat, illud postu-

latum in Geometria sumere haud licere. Cf. Pflleiderer, de dimens. Circuli P. II. §§. 51. 52. et Rob. Simson in notis ad V. 18. Plura praeterea alia notatu dignissima contra Tacqueti similesque aliorum obiectiones habet Barrow in Lection. Cantabrig. habitis 1666. Lect. VII. e quibus haec adhuc afferemus. «Nulla, inquit p. 297 sqq., definitio rei cuiusvis naturam aliter explicat, quam aliquam eius affectionem necessariam et reciprocam, id est, huic nostrae parem, assignando. Qui circulum e radiorum paritate, triangulum e trium rectarum concursu spatium includente etc. definit, quid aliud quam figurarum istarum naturam ex affectionibus quibusdam suis explicat? Nec dari aut concipi potest natura ab affectionibus eiusmodi necessariis distincta, siue prior. Habere talem aliquam affectionem ipsa rei natura est, ei essentielle est, eam constituit. Unde qui dicit: res talem habens affectionem, eius naturam explicat. Igitur Euclides cum proportionalium affectionem necessariam exhibuerit, eius naturam, quantum fieri solet et potest, abunde declaravit et explicuit. Caeterum Euclididi reliquisque definitionum auctoribus lex iniusta et impossibilis figitur, scilicet, ut demonstrent, definitionis praedicatum (subjecto convenire: non tenentur, neque possunt id demonstrare, sed gratis assumunt, hoc est, attributo proprium subiecti nomen imponunt ex arbitratu suo. Num incumbit mihi demonstrare, circuli nomen solis pares radios habentibus figuris competere? Minime vero, sed iis omnibus et solis iure meo circuli nomen adsigno. Eodem plane modo pro habitu suo (quamvis non temere nec imprudenter, at certis de causis iustis illis et idoneis) aequalium rationum nomen attribuit *ἰσότητος* omnibus et solis dicta proprietate praeditis rationibus; proportionalium appellamentum appropriat quantis conditionem istam obtinentibus; unde propterea hoc ipsum rationum aequalium et quantorum proportionalium nomen censendum est iis omnibus et solis congruere. — *Unicum est, quod definitionis auctor ostendere tenetur (exemplis scilicet ad sensum claris aut per evidentem discursum) attributam definitionis impossibile nihil aut mere imaginariam complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione supposita praeditas.* —

Cum igitur perfacile perspicueque probari possit, idque passim praestetur ab Euclide, ubicunque definitionem hanc applicet materiae cuius determinatae, dari quanta, quibus conveniat huiusce definitionis hypothesis, nihil amplius est exigendum, eique licet optimo iure quantis iis omnibus et solis proportionalium nomen affigere. — Caeterum quod, hanc proprietatem proportionalibus accidere, theorema esse dicunt, respondeo, quod secundum rem ipsam omnis definitio est theorema, propositio scilicet demonstrabilis ex aliis subiecti definitionibus aut ex aliis reciprocis affectionibus prius attributis subiecto. Vicissim omne theorema poterit in definitionem compingi. Simili fere ratione iudicat Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus p. 125.): „Licitum est unicuique definire, prout ipsi libuerit, terminos suae facultatis, dum tamen ex una parte eos nunquam usurpet, nisi iuxta Definitiones iam stabilitas; et ex altera accusari istae non possint de confusione unius termini cum altero“ Cf. idem p. 125. Reapse etiam alii hanc negant, iure suo Euclidem definitionem magnitudinum proportionalium eam, quae est Def. V. 5. dare potuisse, at eam tamen intellectu difficilem, et subobscuram, et ab affectione aliqua magnitudinum proportionalium, quae mihi obvia sit, petitam esse putant, unde hanc Euclidis definitionem vel explicare, vel pariter ac Tacquetus, firmiter tamen argumentis nec tot propositionibus Axiomatum loco habitis ex alia faciliore eandem definitione quasi Theorema derivare studuerunt, quo facto demum secure illa uti se posse putarunt. Atque his ipse etiam Clavius annumerandus videtur. Quamvis enim ille asserat, potuisse omnino Euclidem iure suo quantitates proportionales aut non proportionales appellare, ut def. 5 et 7. stabilivit, et quamvis etiam causam, qua permotus Euclides illis definitionibus usus sit, asserat veram omnino ab incommensurabilibus petitam, addit tamen, ex definitionibus istis non videri colligi posse, vere magnitudines, quarum aequimultiplicam conditionem habeant, esse proportionales, vel non proportionales, etiamsi eas solum Euclides velit ita appellare. Itaque ad excusandas Euclidis definitiones haec fere habet. „Si de magnitudinibus saltim rationabilibus quaestio fuisset, potuisset

omnino Euclides magnitudines proportionales eodem modo definire ac VII. 20. Def. numeros proportionales. Dicere nempe poterat: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secundae et tertia quartae aequemultiplica est, vel eadem pars, vel eadem partes, vel: cum prima secundam, et tertia quartam aequaliter continet, eandemque insuper alius partem, vel eadem partes. Et simili ratione poterat definire magnitudines non proportionales. At quum irrationales quoque complecti vellet, iam non uti poterat hac definitione, quod in irrationalibus maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel, aut aliquoties, et insuper aliquam eius partem aut partes continere. Iam putat Euclidem, cum omnis proportio rationalis sive magnitudinum commensurabilium sit ut proportio numeri ad numerum, circumspexisse primum aliquid, quod certum sit convenire quibuslibet quatuor numeris, sive magnitudinibus eandem habentibus proportionem, vel non eandem, ut si idem illud convenire demonstretur quatuor magnitudinibus etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illae quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales, quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quaevis magnitudines commensurabiles, eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstrantur. Primum itaque, sumtis propositionibus libri VII, quae nullo modo ex V. 5. Def. et V. 7 aut omnino libro V, pendent, ostendit: propositis quatuor numeris proportionalibus, sumtisque primi ac tertii aequemultiplicis iuxta quamvis multiplicationem, item secundi et quarti aequemultiplicis iuxta quamcunque pariter multiplicationem: si multipulum primi maius sit multiplo secundi, fore etiam multipulum tertii maius multiplo quarti; et si multipulum primi aequale sit multiplo secundi, fore et multipulum tertii aequale multiplo quarti; si denique multipulum primi minus sit multiplo secundi, fore et multipulum tertii minus multiplo quarti. Quod ita demonstrat. Sint quatuor numeri proportionales a, b, c, d . Quoniam igitur $a:b=c:d$, erit (VII. 13,) permutando, $a:c=b:d$. Iam, si sumtum fuerit ma, mc , erit $ma:m=c$ (VII. 17,) pariter.

que, si sumtum fuerit rb , rd , erit $rb:rd=b:d$, unde ex lem-
mate quod Clavius habet ad VII. 14, erit $ma:mc=rb:rd$, et
permutando (VII. 13.) $ma:rb=mc:rd$, unde, si $ma>rb$,
erit $mc>rd$, quod ex VII. 20. Def. consequitur i. e. ex
vulgari numerorum proportionalium Definitione consequitur ea
eorum proprietas, quam Euclides V. 5. Def. exprimit. Deinde
similiter demonstrat, si $a:b>c:d$, sumi posse aliqua multipla,
 ma , mc , et rb , rd , ita ut $ma>rb$, at non $mc>rd$, quod satis
prolixè evincit. Itaque ex vulgari numerorum non proportio-
nalium Definitione consequitur ea eorum proprietas, quam
Euclides habet 7. Def. V. Pariter deinde vice versa ostendit,
e Definitionibus Euclidis 5. et 7. libri V. ad numeros appli-
catis, consequi vulgares numerorum proportionalium et non
proportionalium Definitiones. Addit deinde, in magnitudini-
bus, quae aliis incommensurabiles sint, et quae ex Def. 5, V.
proportionales sint, eam plerumque reperiri proportionem, quae
in numeris exhiberi possit, nec unquam hactenus aliquid falsi
aut absurdi ex applicatione Def. 5. et 7. ad magnitudines in-
commensurabiles deductum esse, unde colligit, generaliter recte
se habere Definitiones 5, V. et 7. V. Quae tamen argumentatio
an satis certa sit, quam maxime dubitamus. Coniectura illa potius,
satis forte probabilis, quam demonstratio mathematica fuerit.

Giordano da Bitonto explicatione saltem aliqua opus esse
putat, quo melius Definitio 5, V, quae multis obscura, et e
principio remoto petita esse visa sit, intelligi possit. Hanc au-
tem explicationem sequentibus Propositionibus Definitioni isti
praemittendis, facileque probandis exhiberi posse putat:

Prop. 1. Si duae magnitudines sint multiplae alicuius tertiae,
erunt illae aequales, si aequemultiplae illius tertiae fuerint; sin
autem non aequemultiplae fuerint, ea, quae tertiam saepius
continet, maior erit.

Prop. 2. Vice versa, si duae magnitudines sint multiplae
alicuius tertiae, sintque istae magnitudines aequales, erunt il-
lius tertiae aequemultiplae: sin autem fuerint inaequales, ma-
ior saepius eandem tertiam continebit, quam minor.

Prop. 3. Si sint duae magnitudines A , B duarum C , D
aequemultiplae (v. c. $A=mc$, $B=mD$), et sint aliae duae

E, F pariter aequemultiplae earundem C, D (v. c. $E=rC$, $F=rD$), erit, si $A>=<E$, etiam $B>=<F$, (i. e. si $mC>=<rC$, etiam $mD>=<rD$).

Prop. 4. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D, sitque prima A aequemultipla aut aequesubmultipla secundae B, ac tertia C est quartae D (scilicet, si $A=mB$, et simul $C=mD$)
 vel $A=\frac{1}{m}B$ vel $C=\frac{1}{m}D$)
 sumantur primae et tertiae quaecunque aequemultipla F, G, (puta $F=pA$, $G=pC$), et secundae et quartae aequemultipla H, I (v. c. $H=rB$, $I=rD$) erit, prout $F>=<H$, etiam $G>=<I$ (i. e. prout $pA>=<rB$, etiam $pC>=<rD$).
 Atque haec iam sufficiunt ad probandam Definitionis 5, V. possibilitatem, sive ad ostendendum, ut Barrow ait, attributum definitionis nihil impossibile aut mere imaginarium complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione supposita praeditas. Simili deinde ratione possibilitatem Definitionis 8, V. ostendere studet.

Galilaei (in Dialogo supra citato) primum quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales esse dicit, si vel $A=B$, pariterque $C=D$, vel si $A=mB$, et $C=mD$ i. e. si prima secundae B aequemultipla fuerit ac tertia C quartae D, vel, ut postea (ut Definitio. irrationales magnitudines quoque comprehendat), at forte minus perspicue dicit, si excessus primae A super secundam B similis sit excessui tertiae C super quartam D. Atque ad hunc casum invertendo reduci posse ait cum, quo prima minor sit secunda, et tertia minor quarta. Hanc deinde Definitionem (quam caeterum irrationales quoque magnitudines clare satis complecti vix putaverim) cum Euclidea convenire ostendere vult hac fere ratione. Facile patere ait, si $A:B=C:D$, fore et $2A:2B=2C:2D$, et generaliter $mA:mB=mC:mD$, pariterque $A:2B=C:2D$, et generaliter $A:pB=C:pD$, et adhuc generalius $mA:pB=mC:pD$, unde ex Definitione Galilaei consequatur, si sit $A:B=C:D$, adeoque et $mA:pB=mC:pD$, fore et, quoties $mA>=<pB$, simul $mC>=<pD$, quae sit conversa Definitionis Euclidae. Haec est Galilaei Prop. 1.

Similiter deinde, postquam quatuor magnitudines A, B, C, D non proportionales esse dixerat, si A aliquanto maior fuerit ea magnitudine $A-E$, quae ita comparata est, ut $A-E : B = C : D$, ex hac Definitione satis prolixè ostendit, consequi *Conversam* Def. 8, V. nempe tum esse posse aliquando $mA > pB$, quamvis non sit $mC > pD$. Sumatur nempe magnitudinis E tale multipulum mE , ut sit $mE > B$, pariterque sumantur magnitudinum $A-E$, et C aequemultiplica $m(A-E)$, mC . Pariter sumatur magnitudinis B tale multipulum pB , quod ex multiplo magnitudinis B primum maius sit magnitudine $m(A-E)$, ita nempe, ut sit quidem $pB > m(A-E)$, at $(p-1)B < m(A-E)$, vel, quod eodem redit, $m(A-E) > (p-1)B$, pariterque magnitudinis D sumatur aequemultipulum pD . Iam si addantur mE et $m(A-E)$, erit eorum summa, nempe mA (ob $mE > B$, et $m(A-E) > (p-1)B$) semper $> pB$. At, quum $A-E : B = C : D$, erit ex Galil. Prop. 1. quoties $m(A-E) < pB$, etià $mC < pD$. Sumtum autem est $m(A-E) < pB$: itaque necessario $mC < pD$, quamvis sit $mA > pB$. Itaque, si quatuor magnitudines A, B, C, D non proportionales sunt, semper talia aequemultiplica primae et tertiae, pariterque aliqua aequemultiplica secundae et quartae inveniri possunt, ut sit quidem multipulum primae maius multiplo secundae, at multipulum tertiae non maius multiplo quartae, quae est *Conversa* 8. Def. V. seu Galil. Prop. 2.

His praemissis, iam Definit. 5, V. et 7, V. ex suis Definitionibus consequi, ita ostendit Galilaei. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D ita comparatae, ut, quoties $mA > < pB$, etià $mC > < pD$, erit $A : B = C : D$. Si enim non sit $A : B = C : D$, sit *ex. g.* A maior ea magnitudine $A-E$, quae ita comparata est, ut sit $A-E : B = C : D$, poteruntque ex Propositione Galilaei 2 talia aequemultiplica mA , mC primae ac tertiae, pariterque aequemultiplica pB , pD secundae et quartae inveniri, ut sit quidem $mA > pB$, at non simul $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Atque haec est Galilaei Propos. 3.

Pariter denique Definitionem 7, V. ex suis Definitionibus ita deducit Galilaei. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D

ita comparatae, ut sit quidem $mA > pB$, at non simul $mC > pD$, erit $A:B > C:D$, vel A maior erit ea magnitudine, quae ita comparata est, ut ad B eandem rationem habeat, quam habet C ad D . Si enim A non maior est ista magnitudine, illi aut aequalis, aut minor ea erit. Si illi aequalis sit, erit ex Prop. 1. Galilaei, quoties $mA > pB$, etiam $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Sin autem prima A minor sit ea magnitudine, quae ad secundam eandem rationem habet, quam tertia habet ad quartam, id indicio est, tertiam maiorem esse ea, quae ad quartam eandem habet rationem, quam prima ad secundam. Erit itaque aliquo $C-E$ ita comparata, ut $A:B = C-E:D$, adeoque ex Prop. 1. Galilaei, quoties $mA > pB$, erit $m(C-E) > pD$. At postimus $mA > pB$, itaque erit $m(C-E) > pD$, unde multo magis $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Fieri igitur nequit, ut A non maior sit ea magnitudine, quae ad B eandem rationem habet, quam C ad D : maior itaque erit, sive erit $A:B > C:D$, quae est Propositio 4. Galilaei.

Borellus autem, de cuius dubiis contra Euclidis methodum mox videbimus, pariter ab alia magnitudinum proportionalium et non proportionalium Definitione progreditur, distinctis casibus, quibus illae magnitudines vel commensurabiles sunt, vel non. Nempe si quatuor quantitatum prima secundae, et tertia quartae aequae multiples fuerint, vel eadem pars, vel eadem partes: quatuor quantitates vocantur proportionales commensurabiles, et proportio (ratio) commensurabilis quantitatis primae ad secundam eadem vel aequalis proportioni (rationi) quantitatis tertiae ad quartam. Sin autem quantitas prima maior (vel minor) fuerit illa quantitate, quae ad secundam eandem rationem commensurabilem habet, quam tertia habet ad quartam: vocatur ratio primae ad secundam maior (vel minor) commensurabili ratione tertiae ad quartam. Si vero quatuor quantitatum antecedentes fuerint incommensurabiles consequentibus, et ratio quantitatis primae ad secundam maior (minor) fuerit, atque ratio quantitatis tertiae ad quartam minor (maior) sit eadem tertia commensurabili ratio-

ne: vocatur ratio primae quantitaris ad secundam maior (minor) illa incommensurabili ratione, quam tertia habet ad quartam. Denique si in quatuor incommensurabilibus quantitatibus ratio primae ad secundam non fuerit maior nec minor ea ratione incommensurabili, quam tertia habet ad quartam: tum ratio incommensurabilis primae ad secundam eadem vocatur rationi tertiae ad quartam, et quatuor istae quantitates vocantur proportionales incommensurabiles. His deinde Definitionibus suam proportionalium theoriam superstruit, et denique ad finem libri Euclidean Definitiones ut theorematate suis deducit. Et ipse etiam Barrovi^{us} iudicat, eius methodum in se spectatam admodum pulchram et elegantem esse (III. c. p. 333 et 314.) et, si nulla daretur alia, haberi posse pro sufficiente ac satis absoluta, ac fuisse eum in sua methodo exstruenda felicior^{em} quam in Euclidean diruenda. Displicet tamen ei in Definitionibus Borelli generalis subiecti distractio, et per inferiora circuitus, quum dari possit et ab Euclide exhibetur rationum aequalium omni^{um}genarum (ut et (inaequalium) proprietas aliqua generalis, ex qua possunt universaliter definiri. Minus placet rationum incommensurabilium negativa Definitio, et praeposteram videtur ex inaequalitate de aequalitate statuere. Omnis porro doctrina prolixior, et demonstrationes plerumque apagogicae anfractuosa^e videntur. Denique potissimum displicet Barrovio harum definitionum ad speciales materias applicatio. Non enim, ut apud Euclidem v. c. in 1, VI. aut 33, VI. definitionum ope statim innotescit, aut ex iis promte deducitur rerum proportionalitas, sed ex intermediis propositionibus, iisque non adeo comprehensu facilibus, et per indirectam argumentationem comprobatis demonstratur. Ad eas autem, quas contra Euclidis doctrinam Borellus affert obiectiones praeter ea, quae supra habuimus, Barrovi^{us} monet (p. 314. sequ. coll. p. 306.) obscuritatem illam, quam Euclidi obiciat, vel in re ipsa positam esse, vel ex interpretum incuria, vel e discentium culpa repetendam esse. Rem ipsam quidem habere omnino aliquid difficultatis propter asymmetriam quantorum, sic ut nemo non

arduum esse fateatur, affectionem aliquam proportionalibus aequè congruamprehendere, definitionem aliquam cunctas rationum aequalitates complectentem exhibere. Quod et hinc pateat, quod praeclearis viris huic morbo remedium adhibere conatus hactenus acciderit, ut vel nihil praestiterint omnino sufficiens, aut viis insisterint prolixioribus, nec minus impeditis, et implicitis, aut methodos saltem tradiderint culpae cuiquam graviori subditas: caeterum Euclidis verba esse clarissima, nullam in vocabulis amphibologiam, nullum a prolixitate taedium, semperque directissimum adhibere discursum, hinc tantam obscuritatem aut difficultatem subesse non posse, nisi quis arcanam, nescio quam, naturam, omni definitionem ingrediente proportionem priorem, quae certe nulla sit, somnare velit. Interpretes omnino rem omnem exemplis illustribus et apposis illustrare debere, nec eos forte ab omni culpa liberari posse. Maxime vero discentes sibi plerumque deesse. Quum enim definitionis verba clarissima sint, quotusquisque tamen sit, qui iis penitus intelligendis operam navet, qui tantam a suo stomacho patientiam impetret, ut trium lineolarum sensum accurate perpendat? Neque vero (ibid. p. 319.) Euclidem eapropter definitionem suam 6. V. insufficientem iudicasse, quoniam in libro VII. adhibuerit aliam. Sibi minus probata, nedum improbata proferre abhorruisse sane ab Euclidis ingenio. Contra potius, quia septimi libri definitionem omnigenae proportionalitati, deprehenderit haud competentem, solis utpote symmetrorum proportionabilibus adaptabilem, hanc vero compererit universis congruam, ideoque, dum hic loci generalem iniret analogiae tractatum, illa reiecta hanc amplexatum esse iure meritoque. Illam vero (20. Def. VII.) Symmetris proportionalibus applicuisse non tam necessitatis quam commoditatis gratia, quia nonnihil ad vulgarem captum istius specialis materiae respectu facilior ac simplicior visa fuerit. — His, quae Barrovius habet, addi potest, multis editoribus, et praecipue Rob. Simsoni, ut supra diximus, Defn. 3, V. et 8, V. in quibus pariter de rationibus, et rationum aequalitate sermo est, serius additamentum esse vi-

deri. Denique Barroius addit, quod Borellus criminetur, ~~facillimam~~ Propositionem si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et prima superet secundam, tertiam quoque necessario excedere quartam, e Definitione Euclidis derivari non posse, falsum omnino esse, et posse facillime illam e doctrina Euclidis demonstrari. Ipse etiam eiusmodi demonstrationem exhibet indirectam, sed perspicuam. Atque ita omnibus illis pristinae aetatis obiectionibus satisfactum esse videri poterat. At recentiori aetate Euclidis theoriā acerrime denuo impugnavit Thom. Simpson. (Elem. of Geometry Lond. 1800.) Is nempe, postquam ipsius Rob. Simsonis, magni illius Euclidis admiratoris et propugnatoris verbis docuerat, verba, *maior, eadem sive aequalis, minor*, de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dici, adeoque non licere Axiomata de magnitudinibus aut aequalibus aut inaequalibus proposita immediate ad rationes applicare, unde etiam ipse Rob. Simson vulgarem Propos. 10, V. demonstrationem reiiciat, addit, omnem Rob. Simsonis obiectionem eo niti, quod neget, tuto sumi posse, rationem $A:C$ non posse simul maiorem ac minorem esse ratione $A:B$. At ita ex Defin. 7, V. nunquam quemquam scire, posse, an ratio $A:B$ maior aut minor sit ratione $C:D$. Nempe Euclidem dicere quidem, esse $A:B > C:D$, si acciderit unquam, ut $nA > nB$, nec tamen simul $mC > nD$. Verum enim vero, quum inter multipla tertiae et quartae pro subita sumta quaedam etiam ita comparata esse possint, ut sit $pC > qD$ ut Definitio sibi constet, demonstrandum esse, tum nunquam fieri posse, ut sit simul $pA = < qB$. Hoc enim si fieri posset, esset etiam ex Defin. 7, V. $A:B < C:D$. Usquedum igitur hoc praestetur, quod fieri posse haud negare velit, quamvis difficile ipsi videatur, nullius usus esse Definit. 7, V. et totum Euclidis aedificium theoriae [proportionum fundamento parum valido superstructum videri. Hinc etiam ipse Propositionem 19, V. 13, V et reliqua iis, aut Definitioni 7, V. inolexat prorsus omittit. Caeterum sibi persuasum esse dicit, habuisse omnino homines ante Euclidis tempora aliquam rationum et proportionum notionem magis minus distinctam, quam Euclides

aliquantum expoliverit, quo facilius incommensurabilibus adaptari possit, ita vero primam et originariam huius notionis formam adeo immutatam esse, ut aliqua ingenii vi opus sit ad eam in Euclidis Definitionibus agnoscendam. Caeterum multum subtilitatis et acuminis habere hanc Euclidis theoriam, at subobscuram sibi videri, adeoque tantis laudibus efferrī, ac a Rob. Simsone fiat, haud debere.

Gravia haec contra Euclidis theoriam dubia removeri tamen videntur observationibus, quibus Pfeiderer et Nordmark eam stabilire tentarunt. Prior quidem in *Dissertat. Academica: Expositio ac Dilucidatio Libri V. Element. Euclid. P. 1. Turing. 1782* (Pars II. nunquam prodit), et potissimum in *Dissertatione inserta Promptuarii Mathematici Ifindenb. 7. et 8. fasciculo p. 257. sqq. et 440 sqq.* ad defendendam Euclidis theoriam haec fere habet, quae, quantum fieri potest, brevissime hic sistimus.

§§. 1—8. Qui rationem duarum magnitudinum eiusdem generis A, B inter se commensurabilium indicare volunt, docent, esse magnitudinem A magnitudinis B aut aliquod multipulum, aut aliquam partem, aut aliquas partes, vel esse aut $A = mB$, aut $A = \frac{1}{n}B$, aut $A = \frac{m}{n}B$, ubi $m, \frac{1}{n}, \frac{m}{n}$ exponentis nomine veniunt: sin autem A et B incommensurabiles sint, docent, esse $A > \frac{r}{n}B$ et $< \frac{r+1}{n}B$, ubi $\frac{r}{n}$ et $\frac{r+1}{n}$ limites exponentis rationis A:B vocant. Unde, si quantitates sunt commensurabiles; erit vel $A = mB$, vel $nA = B$, vel $nA = mB$; sin autem sint incommensurabiles, erit $nA > rB$; at $nA < (r+1)B$. Atque in hac ultima expressione de nulla magnitudinum divisione, sed de multiplicatione tantum i. e. repetita additione sermo est, quae simplicior est divisione. Caeterum Euclides, qui hanc ultimo loco positam expressionem adhibet, pariter ac Archimedes (de sphaera et cylindro Lib. 1. et quadrat. parabol. Praef.) tacite postulat, eiusmodi magnitudinum homogenearum minorem ita multiplicari posse, ut superet maiorem.

§§. 9–12. Duas rationes $A:B$, $C:D$ vulgo aequales esse dicunt, si commensurabiles sint A et B , adeoque etiam C et D , quando eundem utraque ratio exponentem habet, aut, si incommensurabiles sunt, quando utriusque exponentis intra eodem semper terminos cadit, h. e. priore casu, si $A = mB$, debet etiam esse $C = mD$; si $A = \frac{1}{n}B$ (vel, quod eodem valet, si $nA = B$) debet simul $B = \frac{1}{n}D$, vel $nB = D$; si $A = \frac{m}{n}B$ (vel $nA = mB$), debet etiam $C = \frac{m}{n}D$, vel $nC = mD$ esse: si autem incommensurabiles sint, debet pro numero quocunque n , pro quo est $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$ etiam esse $C > \frac{r}{n}D < \frac{r+1}{n}D$, vel, ut aliter dicamus: quoties $nA > rB$, at $< (r+1)B$, debet etiam esse $nC > rD$, at $< (r+1)D$, et vice versa. Euclides autem in Definitione V. 5. ad aequalitatem rationum $A:B$ et $C:D$ postulat, ut quoties $nA > mB$, sit simul $nC > mD$. Euclidis itaque Definitio, quod ad quantitates commensurabiles attinet, eo quidem respectu plus continet quam altera, quam vulgarem vocabimus, quod non tantum vult, si $nA = mB$, debere etiam esse $nC = mD$, sed etiam addit, quoties $nA > mB$, debere etiam esse $nC > mD$. Id vero nihil difficultatis habet, et inservit omnibus una expressione complectendis. Contra autem (§§. 35. 36.) eos quidem casus (quum m , n proprie pro numeris unitate maioribus sumantur) non expresse habet, quibus vel $A = mB$, vel $nA = B$, tacite tamen eos complectitur. Nempe, si $A = mB$, erit simul $pA = pmB$. Ut itaque esse possit $A:B = C:D$, ex Euclidis Definitione simul esse debet $pC = pmD$, adeoque $C = mD$. Pariter, si $nA = B$, erit simul $pnA = pB$. Ut itaque esse possit $A:B = C:D$, erit ex Euclidis Definitione simul $pnC = pD$, adeoque $nC = D$. Quod vero ad quantitates incommensurabiles attinet, ut dici possit, esse $A:B = C:D$, ex Euclidis sententia, quoties $nA > mB$, esse debet simul $nC > mD$. In his autem conditionibus manifesto continentur conditiones Definitionis vulgaris, quibus, si $nA > rB < (r+1)B$, esse debet simul

$nC > rD < (r+1)D$. Nec opus est iam pro multiplo aliquo nA determinare multipla proxime se insequentia rB , $(r+1)B$, quae ad limites rationis determinandos pertinent, atque hactenus simplicior est Euclidea ratio. Semper itaque, quae ex Euclidis Definitione proportionalia sunt, proportionalia sunt etiam ex Definitione vulgari.

Contra vero, quoties ex vulgari Definitione sit $A:B=C:D$, esse etiam aequalitatem rationum ex Euclidea Definitione, auctor, expositis §§. 14–30. antea quibusdam propositionibus facillimis, quae ad doctrinam de multiplis et aequemultiplis pertinent, et quorum pars est apud Euclidem Prop. 1, V; 2, V; 3, V, aliisque, quae hio pro Axiomatibus vel Lemmatibus sumere liceat, v. c. si $a=b$, esse $ma=mb$, et vice versa: contra, si $a>b$, esse $ma>mb$, et vice versa (cf. Axiom. ad initium libri V.) ita fere §§. 31–46. demonstrat. Ut dici possit, esse $A:B=C:D$, si magnitudines sunt commensurabiles, ex vulgari Definitione erit vel $A=mB$, et simul $C=mD$, vel $nA=B$, et simul $nC=D$; vel $nA=nB$ et simul $mC=nD$. Sit (§§. 31. 32.) 1.) $A=mB$, et $C=mD$, erit itaque, si p denotet numerum quemcunque, etiam $pA=pB$, et $pC=pD$. Itaque, quoties $pA>=<qB$ (q pariter denotante numerum quemcunque) erit etiam $pmB>=<qB$, adeoque $pm>=<q$, unde et $pmD>=<qD$ i. e. $pC>=<qD$.

Sit 2.) $nA=B$, $nC=D$, erit etiam $qA=qB$, et $qnC=qD$. Itaque, quoties $pA>=<qB$, etiam $pA>=<qnA$, et $p>=<qn$, adeoque $pC>=<qnC$ i. e. $pC>=<qD$.

Denique sit 3.) $nA=mB$, et simul $nC=mD$, erit itaque, quoties $pA>=<qB$, etiam $npA>=<nqB$. At, quum $nA=mB$, erit pnA vel $npA=pB$, itaque, quoties $pA>=<qB$, erit $pmB>=<nqB$, vel $pm>=<nq$, adeoque $pmD>=<nqD$. At ob $nC=mD$ (hyp.), erit $pnC=pD$. Itaque, quoties $pA>=<qB$, erit $pnC>=<nqD$, vel $pC>=<qD$. Quoties igitur ex vulgari Definitione duas rationes quantitatum commensurabilium aequales sunt, eadem etiam aequales sunt ex Euclidea Definitione.

Si autem (§§. 33. 34.) quantitates sint incommensurabiles, erit ex vulgari Definitione $A:B=C:D$, si quoties $nA > rB < (r+1)B$, simul etiam fuerit $nC > rD < (r+1)D$. Itaque, quoties $nA > mB$, esse debet $mB = < rB$, adeoque $m = < r$, et $mD = < rD$. Quoties igitur $nA > mB$, erit nC (quod ex hypoth. $> rD$) $> mD$. Quoties autem $nA < mB$, esse debet $mB = > (r+1)B$, adeoque $m = > r+1$, et $mD = > (r+1)D$, adeoque nC (quod ex hypoth. $< (r+1)D$) erit $< mD$. Et, quamvis hoc casu nunquam esse possit nec $nA = mB$, nec $nC = mD$, pariter quae ex vulgari Definitione proportionales sunt quatuor quantitates incommensurabiles, proportionales erunt etiam ex Definitione Euclidea. Omnibus itaque casibus certis esse posuimus, quantitates, quas ex una Definitione proportionales esse dicimus, proportionales esse etiam ex altera Definitione diiudicatas.

Hactenus de aequalitate duarum rationum dictum est. Veni-
amus nunc (§§. 37—46.) ad rationes inaequales. Et hic qui-
dem (§. 38.) distingui possunt varii casus, prout in utraque
ratione quantitates sint commensurabiles; vel in utraque in-
commensurabiles, vel in una commensurabiles, in altera in-
commensurabiles. Sint itaque 1. (§. 39.) A et B pariterque
C et D commensurabiles, eritque ex vulgari Definitione
 $A:B > C:D$, si exponens rationis A:B maior est, quam ex-
ponens rationis C:D et vicissim. Itaque, si $A = mB$, debet
esse $C < mD$; si $A = \frac{1}{n}B$, erit $C < \frac{1}{n}D$; si $A = \frac{m}{n}B$, erit

$C < \frac{m}{n}D$; vel, ut aliter dicamus, si $A = mB$, at $C < mB$; si

$nA = B$, at $nC < D$; si $nA = mB$, at $nC < mD$, erit $A:B > C:D$,

et vicissim. Sint deinde 2. (§. 40.) A et B commensurabiles,

C et D incommensurabiles, eritque ex communi Definitione

$A:B > C:D$, si $A = mB$ (ubi sumitur $m = > (r+1)$, unus

nempe maiorum limitum secundae rationis), at $C > rD < (r+1)D$,

adeoque $C < mD$; vel, si $nA = B$, at $nC < D$, vel si $nA = mB$

(sumto iterum $m = > (r+1)$), at $nC > rD < (r+1)D$, adeo-

que iterum $nC < mD$. Iam hi quidem casus, ubi in utraque

sunt in primis saltem ratione quantitates occurrunt commensurabiles, non expresse memorantur in *Euclidis* Definitione, non tamen excluduntur. Nempe (§. 44, 1) si $A = mB$, et $C < mD$, sit $C + E = nD$. Quoties igitur $C = < E$, erit $2C = < C + E$ i. e. $2C = < mD$, at $2A (= 2mB) > mB$, ubi igitur habemus aequemultipla primae et tertiae $2A$, $2C$, quorum illud maius est multiplo aliquo secundae mB , hoc vero non maius aequemultiplo quartae mD . Sin autem $C > E$, sumi potest aliquod multipulum magnitudinis E v. c. $rE > C$, vel $C < rE$, itaque $rC + C < rC + rE$ i. e. $(r+1)C < r(C+E) < r mD$: contra vero $(r+1)A > rA$ i. e. $> r mB$. Si deinde (§44, 2.) $nA = B$, at $nC < D$, nempe $D = nC + E$, erit, si $C = < E$, adeoque $nC + C < nC + E$, vel $(n+1)C = < D$, $2(n+1)C = < 2D$: at $(n+1)A < nA$ vel $> B$, adeoque $2(n+1)A > 2B$. Sin autem $C > E$, sit $C < rE$, eritque $rnC + C < rnC + E$ i. e. $(rn+1)C < r(nC+E)$ vel $< rD$: contra autem $rnA + A$ vel $(rn+1)A > rnA$ vel $> rB$. Denique (§. 44, 3.) si $nA = mB$, at $nC < mD$, nempe $mD = nC + E$, erit, si $C = < E$, $nC + C = < nC + E$ i. e. $< mD$; at $(n+1)A > nA$ i. e. $> mB$. Sin autem $C > E$, et sumatur $C < rE$, erit denuo $rnC + C < rnC + rE$ i. e. $(rn+1)C < r(nC+E)$ i. e. $< r mD$: at $(rn+1)A > rnA$ i. e. $> mB$. Semper itaque habemus aliqua aequemultipla primae ac tertiae, quorum illud quidem maius est aliquo multiplo secundae, hoc vero non maius aequemultiplo quartae.

Contra vero (§. 45.) si ex *Euclidis* Definitione est $A:B > C:D$, nempe, si $pA > qB$, at $pC = < qD$, sitque $A = mB$, erit $C < mD$. Nam ob $pA > qB$, vel $pmB > qB$, erit et $pm > q$, adeoque $pmD > qD$. At $pC = < qD$, unde semper $pmD > pC$, vel $mD > C$ i. e. $C < mD$.

Pariter, si, reliquis manentibus, sit $nA = B$, erit $nC < D$. Nam ob $nA = B$, erit $qnA = qB$. At ex hypoth. $pA > qB$, itaque $pA > qnA$, et $p > qn$, adeoque $pD > qnD$. At ex hypoth. $pC = < qD$, adeoque $npC = < \left(\frac{nqD}{qnD} \right)$

adeoque semper $pnC < pD$, et $pC < D$. Denique, si caeteris manentibus, $nA = mB$, adeoque $pnA = pmB$, vel $npA = mpB$,

erit, ob' $pA > qB$ (hyp.) $mpA > nqB$, adeoque $mpB > nqB$, vel $mp > nq$, adeoque $mpD > nqD$. At $pC = < qD$, adeoque $mpC = < nqD$, et $npC < mpD$, et $nC < mD$. Rationes igitur huius generis, quae ex *Euclidis* Definitione inaequales sunt, inaequales etiam sunt ex communi Definitione.

Veniamus iam ad eos casus, quibus prior ratio $A:B$ habet quantitates incommensurabiles, et tunc erunt vel C et D commensurabiles, vel non. Sint commensurabiles (§. 44.), eritque ex vulgari Definitione $A:B > C:D$, si $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$, at C vel $= \frac{r}{n}D$ vel $< \frac{r}{n}D$, adeoque, si $nA > rB$, at $nC = < rD$, et vice versa. Denique sint (§. 42.) A et B pariter ac C et D incommensurabiles, eritque ex vulgari Definitione $A:B > C:D$, si $A > \frac{r}{n}B < \frac{(r+1)}{n}B$, at tantum $C > \frac{(r-1)}{n}D < \frac{r}{n}D$, vel adeo $C < \frac{(r-1)}{n}D$, itaque iterum, si $nA > rB$, at $nC < rD$ et vice versa.

Ex his omnibus deinde §. 46. concluditur, Definitiones, V. 5. et V. 7, continere conditiones et proprietates rationum inter se aequalium, aut quarum una maior est altera, quae in vulgari notione insunt, variosque ibi obvios casus, generalissime, et ita, ut ad paucissimos terminos omnia reducantur.

Ex sola deinde *Euclidea* definitione rationum aequalium aut inaequalium, seposita prorsus vulgari notione, deducit *Pfleiderer* §§. 48. 49. 50. sive (§. 48.) magnitudines A, C ipsas cum quibusdam aequimultiplicis magnitudinum B, D ; sive magnitudines ipsas B, D cum quibusdam aequimultiplicis magnitudinum A, C ; sive denique (§. 49.) quaedam aequimultiplica magnitudinum A, C cum quibusdam aliis aequimultiplicis magnitudinum B, D comparamus, esse aut 1) quosunque numeros integros, exclusa unitate, p, q denotent, semper simul $pA \geq qB$, et $pC \geq qD$, aut 2) pro nonnullis numeris integris n, m (iterum exclusa unitate) $nA > mB$, at $nC = < mD$. (Esse quidem etiam potest, ut sub finem §. 50. observatur, $nC > mD$, et $nA = < mB$, at hio castus vedit ad

priorem, litteris A et C, B et D inter se permutatis). Hinc efficitur §§. 51–54. omnes casus, qui in comparatione quatuor magnitudinum obtingere possint, aut sub Def. 5, V. aut sub Def. 7, V. comprehendi, adeoque rationes aequales, maiores, minores eodem modo sibi invicem opponi, quo vulgo magnitudines aequales maiores, minores, ut itaque unum alterum excludat, nec cum illo simul consistere possit. Quod ipsum (§. 55.) Saecherius quidem demonstrare studuit, at non propterea felici successu. Quibus omnibus simul sublata esse dubia Thom. Simpson patet.

Praeterea §. 56. alia adhuc ratione idem confirmatur, maxime ope eorum, quae supra ex §§. 44, 3. evicta sunt. Nempe 1) si $A:B=C:D$, adeoque ex Def. 5, V. semper simul $nA \geq mB$, et $nC \geq mD$, adeoque nunquam $nA > mB$ et simul $nC < mD$, nec $nC > mD$, et simul $nA < mB$. tum non esse potest nec $A:B > C:D$, nec $A:B < C:D$ ex Def. 7, V. 2) Contra, si nec $A:B > C:D$, nec $C:D > A:B$, esse debet $A:B=C:D$. Nam si $nA = mB$, non esse potest $nC > mD$, nam tum foret $C:D > A:B$ (Def. 7, V.) contra hypothesis; nec $nC < mD$, namquo tum foret (ex §. 44, 3 et Def. 7, V.) $A:B > C:D$ pariter contra hypothesis; itaque esse debet $A:B=C:D$. Sin autem $nA > mB$, erit etiam $nC > mD$; namque si esse posset $nC = mD$, foret $A:B > C:D$ contra hypothesis. Denique, si $nA < mB$, debet pariter esse $nC < mD$, nam, si foret $nC = mD$, esset $C:D > A:B$ (§. 44, 3. et Def. 7, V.) Itaque tum semper est simul $nA \geq mB$ et $nC \geq mD$, adeoque ex Def. 5, V. $A:B=C:D$. 3) Si non est $A:B=C:D$, itaque (Def. 5, V.) non semper simul $nA \geq mB$, et $nC \geq mD$, erit pro quibusdam numeris integris n, m aut α) $nC > mD$, dum $nA = mB$; tum vero primo casu est $C:D > A:B$ (Def. 7, V.) altero est $A:B > C:D$ (§. 44, 3. et Def. 7, V.), aut erit β) $nC = mD$, dum $nA > mB$, at tum $A:B > C:D$ (Def. 7, V.) aut erit γ) $nC = mD$, dum $nA < mB$; tum vero $C:D > A:B$ (Def. 7, V. et §. 44, 3.) 4) Si $A:B > C:D$, adeoque (Def. 7, V.) pro quibusdam numeris n, m est $nA > mB$, at $nC = mD$, tum α) non pro numeris quibuscunque n, m simul erit $nA \geq mB$, et $nC \geq mD$,

adeoque non erit $A:B=C:D$ (Def. 5, V.) nec β) tum esse potest $A:B < C:D$ aut $C:D > A:B$ & e. pro nullis numeris integris p, q simul esse potest $pC > qD$, at $pA = < qB$. Nam ob $nA > mB$, at $nC = < mD$ (hyp.) est etiam $pnA > pmB$, at $pnC = < pmD$, aut $pmD = > pnC$. Et si $pC > qD$, est etiam mpC vel $pnC > nqD$, adeoque semper $pmD > nqD$, vel $pm > nq$, adeoque et $pmB > nqB$, unde tanto magis $pnA > nqB$, adeoque $pA > qB$. Aque etiam ita *Thom. Simpson* dubia remota sunt.

Danique observat *Pfleiderer* (§§. 57–62) si sit $nA = nB$, et $nC = nD$, fore etiam $A=B$, et $C=D$, adeoque prout $pA < = < qB$, i. e. prout, $pA > = < qA$, fore $p > = < q$ adeoque et $pC > = < qC$ i. e. $pC > = < qD$, ac proinde $A:B=C:D$, vel posse Definitionem 5, V. etiam ad aequemultiplica omnium 4. magnitudinem applicari, et nominatim (§. 60. Nr. 1.) si fuerit $A=B$, $C=D$ esse $A:B=C:D$: pariter idem valere de Defin. 7, V. Vice versa etiam, si $A:B=C:D$, esse simul $A > = < B$, et $C > = < D$ (vid. infra Prop.); sin autem $A:B > C:D$, esse debere $C < D$, si $A = < B$; contra vero esse debere $A > B$, si $C = > D$ fuerit.

Nordmarkius autem (in Nov. Act. reg. Societ. Upsal. Vol. VI. Upsal. 1799. Nr. XIII. Lacunae in doctrina Proportionum Euclidea animadversae expletio.) ita in hac re versatur. Postquam obiectionem a *Thom. Simpson* factam contra Defin. 7, V. attulit, fatetur omnino §. 3. illa ipsum probandi nervum huius Definitionis prorsus esse incisum, frustra que ad Principium Contradictionis immediate provocari, ex rationibus ab ipso *Rob. Simson* exhibitis patere ait. Omnia autem, §. 4. addit, ex proportionum theoria omittere, quae ad rationes inter se inaequales pertineant, ut *Thom. Simson* fecerit, non sine doctrinae proportionum iactura fieri posse. Adicit praeterea §. 5. multa etiam alia esse, quae nexum inter multiplicium attributa spectent, et adhuc quaeri possint, v. c. si $nA = mB$, at $mC < mD$, an tum $A:B > C:D$. Id vero *Euclidem* omittere. Quin (§. 6.) ipsam etiam Definitionem 5, V. internae possibilitatis demonstrationem desiderare, nec satis de nexu inter aequemultiplicium proprietates cogitasse *Gepmetras*, aut certe non satis cante semper loqui. Ita v. c. ipsum *Barrovium* p. 284. haec

habere: » Accidere potest in aliquo casu simultaneus iste defectus, excessus aut aequalitas etiam quantiaminime proportionalibus; ast solis proportionalibus universaliter convenit. » Id autem (de aequalitate) falsum esse. Si enim vel semel simul $mA = nB$, et $mC = nD$, necessario, quoties $pA > qB$, esse etiam $pC > qD$. Pariter (§. 7.) si semper simul $mA < nB$, et $mC < nD$, fore etiam semper simul $mA = nB$ et $mC = nD$, unde prior conditio proprie sufficiat scopo Definitionis 5, V. Necesse itaque esse (§. 8.) notarum characteristicarum in Def. 5, V. et 7, V. obviarum partim per mutuam nexum absolutam necessitatem, partim compossibilitatem independentem, ab ipsis Definitionibus demonstrare. Quod si non factum sit in Elementis Euclidis, id non ipsius auctoris, sed sine dubio temporis, quò plura deperdita fuerint, culpam esse. Praeterea sibi in animo esse, consensum quoque notionis vel definitionis quam vulgo de Proportionibus in Arithmeticeis afferant, cum Euclidea ex ipsis his Definitionibus ostendere. Praemitit autem §. 10. Lemma 1. supra ad 3, V. ipsis auctoris verbis allatum quod brevitatis causa ita exprimere liceat: Si sint quotcunque magnitudines $A, B, C, D, \dots$ et aliae ipsis numero aequales $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ quae binae sumantur in eadem multiplicitate, sit autem perturbata ipsarum multiplicitas h. e. sit

$$A = m B \text{ et } \gamma = m \delta$$

$$B = n C - \beta = n \gamma$$

$$C = p D - \alpha = p \beta$$

erunt ex aequo etiam aequemultiplices, siue quantiplex est A magnitudinis D , tantiplex erit α magnitudinis δ . Quod quidem Nordmarkius more Geometris solemni demonstrat, ut ad 3, V. vidimus, ex nostra autem expressione statim patet, dum tam $A = mnpD$, quam $\alpha = pnm\delta = mnp\delta$. Atque hoc quidem Lemma ab Euclide praetermissum esse miratur Nordmark. quamvis cum 3, V. arcissimo vinculo coniungatur, et omnia doctrinae proportionum arcana eo referentur, praesertim, quum in Prop. 20. 21. 22. 23. l. V. semper uterque casus quantitatum ordinate et perturbate sumtarum ostensus sit. Huic addit Lemm. 2. quod ita habet: a) Si duae quantitates commensu-

sabiles sint, erit 1) aliqua unius multiplex aequalis alicui alterius multiplici et 2) vice versa. β) Si autem duae magnitudines incommensurabiles sint, 1) non erit aliqua unius multiplex aequalis cuidam alterius multiplici et 2) vice versa. Quoniam α , Γ . et ope Lemm. 1. etiam α , 2. facile probatur, unde β) 1. 2. apagogice derivantur. His praemissis sequentia habet theoremata, quae primum ordine iunctim afferemus.

Theor. 1. Si vel semel acciderit, ut existente $mA = nB$, sit etiam $mC = nD$, erit $A:B = C:D$.

Theor. 2. Si, quando $mA > nB$, sit etiam semper $mC > nD$, erit $A:B = C:D$.

Theor. 3. Si, quando $mA > nB$, semper etiam sit $mC > nD$, et vicissim, quando $mC > nD$, semper etiam sit $mA > nB$, erit $A:B = C:D$.

Atque haec quidem ad ostendendum mutuum illum, qui inter multiplicium symptomata in Defn. 5, V. intercedit, nexum. Observat Nordmark. addi adhuc posse: si sit $A:B = C:D$, esse etiam $C:D = A:B$. Quamvis enim nimiam identitatis speciem praesens ferant Thesis et Hypothesis (unde etiam, omiserit) adsertum tamen non constituere propositionem plane identicam, quae praeevidentia demonstrationem non admittat. Excludi enim semper debere in Propositionibus ita conversis binas adsumto contrarias hypotheses.

Theor. 4. Si acciderit aliquando, ut sit $mA = nB$, sed $mC < nD$, erit $A:B > C:D$.

Theor. 5. Si $A:B > C:D$, sitque $mA = nB$, erit $mC < nD$.

Theor. 6. Si $A:B > C:D$, sitque $mC > nD$, erit $mA > nB$.

Theor. 7. Si $A:B > C:D$, sitque $mC = nD$, erit $mA > nB$.

Atque haec quidem ad Defn. 7, V. pertinent, et nominatim Theor. 7. objectionem Simpsonianam directe et funditus tollit. Reliqua consensum notionis vulgaris aut Arithmeticae cum Definitionibus Euclidis ostendunt.

Theor. 8. Si (ex Euclidis Definitione) sit $A:B = C:D$, atque B et D in aequae multas partes quocunque, utrimque eorum aequales, dividantur, quarum unaquaeque in B sit $= G$, et unaquaeque in D sit $= H$, adeo, ut G. et H ipsae B et

D aequaliter metiantur; auferatur porro G ex AF, quoties potest, donec vel nihil, vel se minorem relinquat: dico, toties auferri posse H ex CE, quoties G ex AF; et eodem modo superesse vel nihil, vel aliquam ipsa II minorem (i. e. si quantitates AF, B, CE, D ex Euclidea Definitione proportionales sint, proportionales sunt etiam ex vulgari notione.)

Theor. 10. Est conversum praecedentis.

Theor. 11. Si fuerit $AF:B > CE:D$ (ex Euclidea Definitione); dabuntur aliquae tam parvae magnitudines G et H, quae ipsas B et D aequaliter metiuntur, ut G ablata ex AF quoties potest saepius in hac contineri deprehendatur, quam H in CE, quando nempe H ex CE auferitur, quoties potest. (Aliiter: si ex Euclidea Definitione $AF:B > CE:D$, erit etiam ex vulgari Definitione $AF:B > CE:D$).

Theor. 12. Conversum praecedentis.

Ut autem methodus viri acutissimi uno certe exemplo pateat, liceat adponere, quam Theorematis 1. dedit demonstrationem.

Theor.

Si vel semel acciderit, ut existente $mA = nB$, sit etiam $mC = nD$, erit $A:B = C:D$. (f. 336.)

Dem. Sit E, G, illae ipsarum A, C aequae multiples, et F, H illae aequemultiplices ipsarum B, D, quae faciant $E = F$, et $G = H$: sint autem I, L ipsarum A, C utcumque aequemultiplices, et similiter K, M ipsarum B, D aequemultiplices quaelibet. Hisce positis, quantiplex est M ipsius D, tantiplex sumantur N, O, P, Q ipsarum E, F, G, H; et quantiplex est H ipsius D, tantiplex sumantur R, S, T, U ipsarum I, K, L, M. Erunt ergo N, O, P, Q ipsarum E, F, G, H aequemultiplices, et R, S, T, U ipsarum I, K, L, M. ideoque ob $E = F$, $G = H$, erit $N = O$, $P = Q$. Praeterea erunt (3, V.) N et P ipsarum A et C aequemultiplices, atque O et Q ipsarum B et D: praeiterque R et T ipsarum A et C, atque S et U ipsarum B et D. Quia iam Q est ipsius H aequemultiplex ac M ipsius D, atque H ipsius D tantiplex, quantiplex est U ipsius M: erit (Lemm. 1.) Q ipsius D totiplex, quodiplex est H eiusdem D. Ergo

Q et S aequales erunt. Sed quantuplex est Q ipsius D , tantuplex est S ipsius B ; et quotuplex est U ipsius D , totuplex est S ipsius B ; ergo O et S sunt eiusdem B aequemultiplicēs, adeoque etiam aequales. Ponatur iam $I > K$; dico esse $L > M$. Quia enim R et S sunt ipsarum I et K aequemultiplicēs, et $I > K$; erit $R > S$, h. e. $R > O$ h. e. $R > N$. Sed utraque tantum R quam N est ipsius A magis multiplex, quam N eiusdem A est. Ergo etiam T est ipsius C multiplicior, quam P eiusdem C est. Unde erit $T > P$, h. e. $T > Q$, seu $T > U$. Sed L et M sunt ipsarum T et U similes (eandem) partes: ergo etiam $L > M$.

Sit iam $I = K$, dico esse $L = M$. Etenim ob $I = K$, est $R = S$, h. e. $R = O$, seu $R = N$. Quocirca R et N sunt ipsius A aequemultiplicēs; ideoque etiam T et P ipsius C : unde $T = P$, h. e. $T = Q$, seu $T = U$. Ergo etiam $L = M$.

Quodsi denique $I < K$, dico, esse $L < M$. Nam, ob $I < K$, erit $R < S$, h. e. $R < O$, seu $R < N$. Ergo N est ipsius A multiplicior, quam R eiusdem A est: quocirca etiam P est ipsius C multiplicior quam T eiusdem C est. Unde $P > T$, seu $T < P$, h. e. $T = Q$ vel $T < U$. Unde etiam $L < M$.

Quam itaque ostensum sit, consistente $I > = < K$, esse quoque $L > = < M$, h. e. quando $mA > = < nB$, esse simul $mC > = < nD$, erit $A:B = C:D$ q. s. d. (Aliter haec demonstratio ita sisti potest. Si $mA = nB$, et $mC = nD$, erit, quoties $pA > = < qB$, etiam $pC > = < qD$; adeoque (Def. 5, V.) $A:B = C:D$. Nam, si $mA < nB$, et $mC = nD$, erit et $mqA = nqB$, et $mqC = nqD$. Itaque, si $pA > = < qB$, erit $mpA > = < \begin{pmatrix} nqB \\ mqA \end{pmatrix}$, adeoque $mp > = < mq$, et $npC > = < \begin{pmatrix} mqB \\ nqD \end{pmatrix}$, adeoque $pC > = < qD$. Unde patet, hanc demonstrationem aliis verbis eandem esse, quam *Prolegomena* dedit §. 31. Nr. 3.

His praemissis, Propositiones, quae ad theoriam Proportionum pertinent, semper eodem rigore e vulgari Proportionum Definitione atque ex Euclides derivari poterunt, at demonstrationes e vulgari Definitione petite, si iusto rigore eas esse velis, plerumque longioris sunt. (Cf. Playfair ad Def. 5. V.) V. e. Propositio 4, V. cuius demonstrationem Euclides supra habuimus, e vulgari Definitione ita demon-

strabitur. Si $A:B=C:D$, erit etiam $pA:qB=pC:qD$, p et q denotantibus numeros integros quoscunque, unitate haud exclusa. Nam 1) quando commensurabiles sunt magnitudines A et B , C et D ; ob $A:B=C:D$ (supp.) ex vulgari Definitione simul erunt $A=\frac{r}{n}B$, et $C=\frac{r}{n}D$, adeoque et simul $pA=\frac{pr}{n}B$, et $pC=\frac{pr}{n}D$; et $pA=\frac{pr}{qn}qB$, et $pC=\frac{pr}{qn}qD$: unde ex vulgari Definitione $pA:qB=pC:qD$.

2) Quodsi magnitudines A et B , C et D sunt incommensurabiles; ex vulgari Definitione utriusque rationis Exponens iisdem continebitur limitibus, ita ut simul sint $A > \frac{r}{n}B$ et $< \frac{r+1}{n}B$, ac $C > \frac{r}{n}D$ et $< \frac{r+1}{n}D$, vel etiam $pA > \frac{pr}{qn}qB$ et $< \frac{pr+1}{qn}qB$, ac $pC > \frac{pr}{qn}qD$ et $< \frac{pr+1}{qn}qD$, unde etiam rationum $pA:qB$ et $pC:qD$ Exponentes iisdem respective limitibus $\frac{pr}{qn}$ et $\frac{pr+1}{qn}$ continentur (*Pfleiderer. Expos. ac Dilucid. libri V. Elem. p. 18. 19.*)

Post generaliores has ad librum Vtutis observationes eas iam Propositiones, quas *Rob. Simson* huic libro inseruit, vel addidit, eodem ordine, eademque nota, qua ipse usus est, designatas exhibebimus. Demonstrationes tamen brevitatis causa symbolice sistemus.

Est nempe apud *Rob. Simsonem* post V. 6. haec

Propositio A.

(Haec est ea ipsa Propositio, quam *Borellus* negaverat ex Euclidea theoria demonstrari posse, et quam doctiss. *Pfleiderer*, ut supra notavimus, sponte ex *Euclidis* praeceptis fluere ostendit l. c. §. 61. et in *Expos. et Dilucid. libri V. p. 5. Prop. VI.*)

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, fueritque prima maior secundâ, erit tertia maior quartâ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Nempe, si $A:B=C:D$, fueritque $A>B$, erit (V. Ax. 3.) etiam $2A>2B$. Tum vero, ob $A:B=C:D$, ex V. Def. 5. est etiam $2C>2D$, adeoque pariter $C>D$.

Robert. Simson observat, Propositione hac saepissime uti Geometras, eamque in V. 25. VI. 31. XI. 34. XII. 15. adhiberi, à *Theone* autem eam ex Elementis sublatam esse putat, quoniam satis evidens visa sit ei, aliisque; qui confusam et indistinctam proportionalium ideam apud vulgus receptam substituant loco accuratae ideae, quae ex Definitione V. 5. habeatur. Nullum enim dubium esse, *Eudoxum* vel *Euclidem*, qui hac nihilo difficiliore 7^{ma} sc. et 9^{am} huius Libri demonstratione muniverit, etiam huic in Elementis locum dedisse. *Cominandinum* quidem eam ut V. 16. Cor. subiunxisse, quod vero recte *Clavius* reprehendat, quoniam ita saltem ad quatuor magnitudines eiusdem generis pertinere videretur. Neque tamen ipsum *Clavium* aliā eius demonstrationem dedisse, sed asseruisse, eam perspicuam esse ex natura proportionum. Quo ipso occasionem dederit *Borello*, *Euclidem* iniuste cavillandi.

Propositio. B.

(Vulgo Corollarium V. Prop. 4. ubi vide notata.)

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inversae proportionales erunt. Si $A:B=C:D$, erit etiam inversae: $B:A=D:C$. Sumtis enim aequemultiplicis quibuscunque primae ac tertiae nA , nC , pariterque aliis aequemultiplicis quibuscunque secundae et quartae rB , rD , erunt ex V. Def. 5. quoties $nA>rB$, etiam simul $nC>rD$, adeoque etiam, quoties $rB>nA$, simul $rD>nC$, unde ex V. Def. 5. est $B:A=D:C$ (vel $D:C=B:A$.)

(Cor. Hinc consequitur, si $A:C$ sit duplicata ratio rationis $A:B$, fore $C:A$ duplicatam rationis $B:A$. Erit enim (V. Def. 10.) $A:B=B:C$, adeoque ex hac Propositione $C:B=B:A$, unde $C:A$ est ratio duplicata rationis $C:B$, vel rationis $B:A$. Similia ostendentur de triplicata ratione etc.)

Prop. C.

Si prima aequae multiplex fuerit, vel eadem pars (vel quod addi potest, eadem partes) secundae, atque tertiae quartae: erit prima ad secundam, ut tertia ad quartam: vel ut *Pfleiderer* rem exprimit (Expos. ac Dilucid. Libr. V. §. 29.) Magnitudinum A et B aequemultiplices, vel partes aequae aliquotae, vel et partes aequae aliquantae ad magnitudines ipsas. A et B easdem respective habent rationes. Nempe $pA:A = pB:B$; $\frac{A}{q}:A = \frac{B}{q}:B$; $\frac{pA}{q}:A = \frac{pB}{q}:B$. Nam, cum tam $n(pA) = (np)A$, quam $n(pB) = (np)B$ (V. 3.) erit, quoties $n(pA) > < rA$, simul $n(pB) > < rB$, prout $np > < r$, adeoque ex

V. Def. 5. $pA:A = pB:B$. Sit deinde $\frac{A}{q} = E$, $\frac{B}{q} = F$, adeoque $A = qE$, $B = qF$, erit per modo demonstrata $qE:E = qF:F$, adeoque (Prop. B) $E:qE = F:qF$, i. e. $\frac{A}{q}:A = \frac{B}{q}:B$. Denique, quum sit $\frac{A}{q}:A = \frac{B}{q}:B$, erit etiam (V. 4, Cor. a.) $\frac{pA}{q}:A = \frac{pB}{q}:B$. Hae Propositiones, ut *Robt. Simson* observat,

saepius a Geometris usurpantur, et necessaria est in X. 5, et X. 6. Caeterum ex ea evincitur, ut supra à *Pfleidereri* Dissertat. Promtuariorum Mathem. *Hindenburgii* inserta §§. 31. 32. allatum fuit, quoties ex vulgari Definitione i. e. ex ea, quae habetur in VII. Def. 20. sit $A:B = C:D$, esset etiam aequalitatem rationum ex altera *Euclidea* Definitione, nempe V. Def. 5. Quod ipsum, ut supra vidimus, *Clavius* in notis post V. Def. 8. in numeris ostendit ope quarundam Propositionum libri VII, sc. V. Def. 5. quatenus numeris congruat, ex ea numerorum proportionalitate, quae in VII. Def. 20. habetur, demonstrari posse.

Prop. D.

(Conversa antecedentis.)

Si fuerit prima ad secundam, ut tertia ad quartam, fueritque prima multiplex, vel pars (vel partes) secundae:

erit tertia eadem multiplex, vel eadem pars (vel eadem partes) quartae.

Si enim $A:B=C:D$, erit etiam $A:qB=C:qD$, $mA:B=mC:D$, et $mA:qB=mC:qD$ (V. 4, et V. 4, Cor. a.), unde ex Prop. A, si $A=qB$, erit et $C=qD$: si $mA=B$, vel $A=\frac{1}{m}B$, erit $mC=D$, vel $C=\frac{1}{m}D$: si $mA=qB$, vel

$A=\frac{q}{m}B$, erit $mC=qD$, seu $C=\frac{q}{m}D$. Observat Rob. Simson,

hanc Propositionem non raro ad alias demonstrationes adhiberi, et necessariam esse ad demonstrandam VI. 9. Videri autem à Theone omissam esse propter rationem ad Prop. A, memoratam.

Prop. E.

quam habet Rob. Simson post V. Prop. 19.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et convertendo proportionales erunt, vel si $A:B=C:D$, sitque $A>B$, adeoque etiam (Prop. A.) $C>D$, erit $A:A-B=C:C-D$. Nam, quum $A:B=C:D$, erit dividendo (V. 17.) $A-B:B=C-D:D$, et invertendo (Prop. B.) $B:A-B=D:C-D$. Quare componendo (V. 18.) erit $B+A-B:A-B=D+C-D:C-D$ i. e. $A:A-B=C:C-D$.

Observ. Eandem demonstrationem habet Gregorii in nota ad hunc locum. Caeterum haec Propositio, quae cum V. 17. recto nexu cohaeret, potest etiam pariter ac illa sine ope V. 18. demonstrari (*Pfleiderer*. Expos. ac Dilucid. Libr. V. p. 23.)

Cor. 1. Si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales sunt, et $A<B$, adeoque etiam (Prop. A.) $C<D$: erit etiam inverse (Prop. B.) $B:A=D:C$; adeoque ex hac Propositione $B:B-A=D:D-C$.

Cor. 2. Generatim itaque, si duae magnitudines inaequales A et B eandem invicem habent rationem, quam aliae duae inaequales C et D: erit et maior priorum duarum ad ipsarum differentiam, uti maior duarum posteriorum ad earundem differentiam; vel etiam inverse (Prop. B.) differentia duarum

priorum ad eundem maiorem erit, ut differentia duarum posteriorum ad ipsarum maiorem. Breviter, si $A:B=C:D$, erit etiam convertendo $A:A-B=C:C-D$, seu $A-B:A=C-D:C$, vel $B:B-A=D:D-C$, seu $B-A:B=D-C:D$.

Cor. 3. Generaliusque, si duae magnitudines inaequales eandem invicem habent rationem, quam aliae duae magnitudines inaequales: etiam alterutra priorum erit ad ipsarum differentiam, uti posterior homologa, seu quae priori ordine respondet, est ad differentiam posteriorum; et inverse (V. 17. Cor. 2. et Cor. 2. E. *Pfleiderer*. 1. c. p. 25.).

Sub finem libri quinti *Rob. Simson* adhuc quatuor addit Propositiones, quas nos, cum cohaereant cum aliis ad Definitionem rationis compositae pertinentibus, reiecimus in Excursum ad Libr. VI. ubi de ea Definitione agitur. Fluxus praeterea Propositiones de rationibus inter se diversis *Euclidis* interpretes et commentatores libro quinto subiungere solent. Multas earum habet *Pappus* (*Collect. Mathém. Libr. VII. Prop. 3—11.*), quas ut *Lemmata Apollonii* libris de sectione rationis et spatii praemisit. Ex *Pappo* deinde *Cainpanus*, *Commandinus* (qui expresse se eas ex *Collectionibus Pappi* transferre monet, immutato tamen ordine, et quibusdam additis detractivis) *Clavius*, *Tacquetus*, *Barrovius*, *Baermannus* alique has Propositiones huc transtulere, aliasque similes adiecere. Plerique omnes tamen in iis demonstrandis pro Axiomate aut Postulato sumserunt, posse tribus magnitudinibus datis semper aliquam quartam proportionalem, vel duabus datis tertiam proportionalem inveniri, quod ipsum pro Axiomate sumi haud licere supra ad Axiomata libri V. monuimus, ex pro lineis rectis demum in libri VI. Propositionibus 11 et 12. demonstratur. *Hauberus* autem, vir doctissimus nunc *Seminarii Schönthalensis* Professor in Dissertatione »Propositionum de Rationibus inter se diversis Demonstrationes ex solis libri V. Elementorum Definitionibus ac Propositionibus deductae *Tubing. 1793.*« sine opè illius Postulati eas demonstravit, ita ut primum Propositiones ad duas vel

plures rationes inter se diversas *universim* pertinentes stabiliret, et deinde ad eos casus progrediretur, quibus omnes omnium rationum termini sunt eiusdem generis. Ita autem rem exposcit *Hauberus*. Praemittit §§. 2—4. Lemmata, quorum pars cum Axiomatibus ad Librum V. supra allatis consentit. Nampe §. 2. si $A=B$, erit etiam $mA=mB$, et vice versa: contra, si $A>B$, etiam $mA>mB$, et vice versa. §. 3. Si $A=B$, et $m>n$, erit $mA>nB$. Contra, si $mA>nB$, erit $m>n$, at, si $mA=nB$, erit $m=n$. §. 4. $n.(mA)=m.(nA)$. Deinde sequentes Propositiones, earumque demonstrationes exhibet, quas consentiente amicissimo auctore hic denuo sistimus.

Propositio a. (*Hauberi* Prop. 1. Diss. §. 5. apud *Pappam* VII. 7. apud *Claviu* V. 26.)

Si quatuor magnitudinum A, B, C, D prima A ad secundam B maiorem rationem habet quam tertia C ad quartam D: inverse secunda B ad primam A minorem rationem habebit, quam quarta D ad tertiam C. Breviter, si $A:B>C:D$, erit $B:A<D:C$, seu $D:C>B:A$. Demonstratio. Ob $A:B>C:D$ (supp.) sumi poterunt (V. Def. 7.) mA , mC , et nB , nD ita, ut $mA>nB$, et $mC<nD$. Quodsi fuerit $mC<nD$, vel $nD>mC$, cum sit $nB<mA$, constabit propositum ex V. Def. 7.

Sin autem sit $mC=nD$: quoniam est $mA>nB$, sit $nB+E=mA$, et 1) $E>A$, quibus subductis, erit $nB<(m-1)A$: et, cum $nD=mC$ (supp.) $>(m-1)C$, rursus per V. Def. 7. constat propositum. Iam, si 2) sit $E<A$, fiat aliquod multipulum E, velut $rE>A$ (V. Def. 4.). Tum, quia $nB+E=mA$, erit etiam (V. Ax. 1.) $r(nB+E)$ i. e. (V. 1.) $rnB+rE=rmA$, unde, demtis $rE>A$, erit $rnB<(rm-1)A$. Sed, quia $nD=mC$, erit et $rnD=rmC>(rm-1)C$. Unde ex V. Def. 7. constat propositum.

Cor. (*Hauberi* §. 6. apud *Claviu* Schol. ad V. 26.) Pariter, si $A:B<C:D$, erit etiam $D:C<B:A$, seu $B:A>D:C$. Tum enim est $C:D>A:B$. Omnino autem, si ea ratio, quae altera est maior, ex V. Def. 7. hac ipsa minor dicatur, facile,

quae de maioribus rationibus traduntur, ad minores applican-
tur, si transponantur rationibus ea, quae altera minor est, maior
ponatur.

Propositio b. (Hauber §. 7.)

Si sex magnitudinum A, B, C, D, E, F sit $A:B > C:D$,
et $C:D > E:F$, erit et $A:B > E:F$.

Demonstr. Cum sit $A:B > C:D$, et $C:D > E:F$, sit ex
V. Def. 7. $mA > nB$, $mC = nD$; et $pC > qD$, $pE = qF$,
designantibus m, n, p, q semper numeros integros: erit
quoque (V. Ax. I.) $pmC = pnD$, $mpC > mqD$, seu $pnD =$
 $> pmC$, $pmC > mqD$, hincque $pnD > mqD$, et $pn > mq$, ac
proinde etiam $pnB > mqB$: cumque sit $mA > nB$, itaque et
 $pmA > pnB$, erit a fortiori $pmA > mqB$, seu $mpA > mqB$, et
 $pA > qB$: et, quia praeterea est $pE = qF$, per V. Def. 7.
constat propositum.

Scholion. (Hauber. §. 8.). Hanc Propositionem quidam
editores Elementorum V. 13. pro corollario subiunxe-
runt, et Clavius quidem expresse addens in Schol. ad V. 13.
eodem modo eam demonstrari posse, quo V. 13. ipsa demon-
strata sit: quod non ita se habet.

Propos. c. (Hauber. §. 10. Pfleiderer. in Promt. Mathem.

Lips. 1798. §. 60. Nr. 2. 3.)

Quatuor magnitudinum A, B, C, D si $A=B$, et $C < D$,
vel si $A > B$, et $C = D$, erit $A:B > C:D$, seu inverso
(Prop. a.) $B:A < D:C$.

Demonstrationi praemissa adest apud Hauberum §. 9. ea
Propositio, quam supra ex Profr. Lips. §. 60. Nr. 1. attuli-
mus, quamque Lemma ad a. vocabimus, nempe si $A=B$,
 $C=D$, esse $A:B = C:D$. Tum vero! Hauberus ita patet.
1) Si $A=B$, $C < D$, sit $C+E=D$; erit ex modo dictis $A:B$
 $= C+E:D$, cumque sit $C+E:D > C:D$ (V. 8.) erit etiam
 $A:B > C:D$ (V. 13.). 2) Hinc etiam, si $A > B$, $C=D$, seu
 $D=C$, et $B < A$, erit $D:C > B:A$, seu (Prop. a.) $A:B > C:D$,
quae est Pappi VII. 10. 3) Si $A > B$, et $C < D$, sit $A=B$
 $+E$, $C+F=D$, erit $A:B > A:B+E$ (V. 8.) et $A:B+E=C$

+F:D ex Lemm. ad initium Demonstrationis addito, ac proinde
 $A:B > O+F:D$ (V. 13.): quoniamque $C+F:D > C:D$ (V. 8.);
 etiam $A:B > C:D$ (Prop. b.). Est haec Pappi VII. 11.

Prop. d. (Hauber. §. 11. Pfleiderer. in Promt. Mathesr.
 Lips. 1798. §. 62.)

Si $A:B > C:D$, erit $C < D$, si $A = < B$, et erit $A > B$,
 si $C = > D$.

Dem. 1) Si $A:B > C:D$, atque $A = < B$, seu $B = > A$,
 erit $B:B = > A:B$ (V. 7. 8.) quare $B:B > C:D$ (V. 13. et
 Prop. b.). Sed, cum sit $B:B = D:D$ (Lemm. ad c.), erit $D:D$
 $> C:D$ (V. 13.) ac proinde $D > C$, seu $C < D$ (V. 10.).

2) Si $A:B > C:D$, atque $C = > D$, erit $C:D = > D:D$
 (V. 7. 8.) hincque $A:B > D:D$ (V. 13. et Prop. b.).
 Sed quia $D:D = B:B$ (Lemm. ad c.), erit et $A:B > B:B$ (V. 13.)
 ac proinde $A > B$ (V. 10.).

Prop. e. (Hauber. §. 12.)

Si $A:B > C:D$, erit etiam $mA:mB > C:D$, et $A:B > nC:nD$,
 et $mA:mB > nC:nD$, ac vicissim, denotantibus m , n nume-
 ros integros quoscunque.

Dem. 1) Cum sit $mA:mB = A:B$ (V. 15), si sit $A:B >$
 $C:D$, erit etiam $mA:mB > C:D$ (V. 13.): pariterque, si sit
 $mA:mB > C:D$, etiam $A:B > C:D$ (V. 13.).

2) Sic et, quum sit $nC:nD = C:D$ (V. 15.) si rursus
 $A:B > C:D$, erit quoque $A:B > nC:nD$ (V. 13.): si vero
 $A:B > nC:nD$, pariter $A:B > C:D$ (V. 13.).

3) Denique, si $A:B > C:D$, erit $mA:mB > C:D$ per modo
 demonstrata nr. 1. adeoque et $mA:mB > nC:nD$ per demon-
 strata nr. 2. Vicissim, si $mA:mB > nC:nD$, erit et $A:B > nC$;
 nD (nr. 1.), atque hinc $A:B > C:D$ (nr. 2.)

Cor. 1. (Hauber. §. 13.) Hinc etiam, si $A:B > C:D$, erit

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{m} A : \frac{1}{n} B \\ \frac{p}{m} A : \frac{p}{n} B \end{array} \right\} > \frac{q}{n} C : \frac{q}{n} D, \text{ atque } \left. \begin{array}{l} \frac{p}{m} A : \frac{p}{m} B \\ \frac{1}{m} A : \frac{1}{m} B \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} C : D \\ \frac{1}{n} C : \frac{1}{n} D \end{array} \right.$$

Cor. 2. (Hauber §. 14.). Atque etiam, si rursus $A:B > C:D$

$$\text{erit } mA:mB > \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{n}C:\frac{1}{n}D & \frac{1}{m}A:\frac{1}{m}B \\ \frac{q}{n}C:\frac{q}{n}D & \frac{p}{m}A:\frac{p}{m}B \end{array} \right\} > nC:nD.$$

Prop. f. (Hauber. §. 15.)

Si $A:B > C:D$; erit etiam $mA:B > mC:D$, et $A:nB > C:nD$,
et $mA:nB > mC:nD$, m et n denotantibus numeros integros
quoscumque.

Dem. Si ob $A:B > C:D$ (supp.) sit $pA > qB$, $pC = < qD$
(V.Def. 7.) etiam (V. Ax. 5.) erit $m.pA > m.qB$; $mpC = < m.qD$,
 $n.pA > n.qB$; $npC = < n.qD$,
 $mnpA > mnqB$; $mnpC = < mnqD$,

seu $p(mA) > m.qB$; $p(mC) = < m.qD$

$n.pA > q.(nB)$; $n.pC = < q(nD)$

$np(mA) > mq(nB)$; $np(mC) = < mq(nD)$,

et cum aequemultiplices magnitudinum pA , pC ; qB , qD
sint ipsarum quoque magnitudinum A , C ; B , D , pariterque
aequemultiplices magnitudinum $p(mA)$, $p(mC)$; $q(nB)$,
 $q(nD)$ sint ipsarum mA , mC , nB , nD aequemultiplices
(V. 3.), per V. Def. 7. constat propositum.

Prop. g. (Hauber. §. 16.)

Vicissim, si $A:B > C:D$

seu si $mA:B > mC:D$,

erit etiam $\frac{A}{m}:B > \frac{C}{m}:D$

vel $A:nB > C:nD$

et $A:\frac{B}{n} > C:\frac{D}{n}$

vel $mA:nB > mC:nD$

et $\frac{A}{m}:\frac{B}{n} > \frac{C}{m}:\frac{D}{n}$

erit etiam $A:B > C:D$

Dem. Ob $mA:B > mC:D$, $A:nB > C:nD$, $mA:nB > mC:nD$
 (supp.), fit (V. Def. 7.) $p(mA) > qB$, $p(mC) = < qD$

$$pA > q(nB), pC = < q(nD)$$

$$p(mA) > q(nB), p(mC) = < q(nD)$$

sive (V. 3.) $(pm)A > qB$, $(pm)C = < qD$

$$pA > (qn)B, pC = < (qn)D$$

$$(pm)A > (qn)B, (pm)C = < (qn)D$$

proinde V. Def. 7. erit $A:B > C:D$.

Cor. 1. (Hauber. §. 17.). Hinc et per Prop. f., si $A:B$

$$> C:D, \text{ erit } \frac{pA}{m} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}B \\ \frac{q}{n}B \end{array} \right\} > \frac{pC}{m} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}D \end{array} \right\}$$

$$\text{et } \frac{1}{m}A : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}A \\ \frac{q}{n}B \end{array} \right\} > \frac{1}{m}C : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}C \\ \frac{q}{n}D \end{array} \right\}$$

Cor. 2. (Hauber. §. 18.). Itemque

$$mA : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}B \\ \frac{q}{n}B \end{array} \right\} > mC : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}D \end{array} \right\} \text{ et } \frac{1}{m}A : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}A \\ \frac{p}{m}A \end{array} \right\} : nB > \frac{1}{m}C : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}C \\ \frac{p}{m}C \end{array} \right\} : nD.$$

Prop. h. (Hauber. §. 19. Pappi Prop. VII. 3. coll. VII. 4.
 apud Clavius V. 28.)

Si $A:B > C:D$, erit componendo $A+B:B > C+D:D$.

Dem. Sit $mA > nB$, $mC = < nD$ (supp. et V. Def. 7.),
 et additis mB , mD , erit $mA+mB > nB+mB$, $mC+mD = < nD+mD$, cumque

(V. 1.) sit $mA + mB = m(A + B)$, $mC + mD = m(C + D)$, ac
 (V. 2.) $nB + mB = (n + m)B$, $nD + mD = (n + m)D$, et proinde
 $m(A + B) > (n + m)B$, $m(C + D) = < (n + m)D$, per
 V. Def. 7. constat propositam.

Cor. 1. (Hauber. §. 20.) Aliter haec Propositio sic expri-
 metur: Si differentia duarum magnitudinum ad earum mino-
 rem in maiori ratione est, quam differentia duarum aliarum
 ad harum minorem; etiam maior priorum ad ipsarum mino-
 rem in maiori ratione erit, quam maior posteriorum ad mino-
 rem. Nam si $A - B : B > C - D : D$, erit $A - B + B : B > C - D + D : D$
 hoc est $A : B > C : D$.

Cor. 2. Hauber. §. 21.) Eodem supposito, quod in
 Prop. h., summa duarum priorum ad earum priorem in mi-
 nori ratione erit, quam summa posteriorum ad tertiam. Nam,
 si $A : B > C : D$, inverse erit (Prop. a.) $B : A < D : C$, adeoque
 $A + B : A < C + D : C$ (Prop. h.), seu $A : A + B < C : C + D$ (Prop. a.)

Prop. i. (Hauber. §. 22. Clav. V. 29.)

Si $A : B > C : D$, et $C > D$, ac proinde etiam $A > B$ (Prop. d.),
 erit etiam dividendo $A - B : B > C - D : D$, seu inverse $B : A - B <$
 $D : C - D$.

Dem. Sit $mA > nB$, $mC = < nD$ (supp. et V. Def. 7.);
 tum (V. Ax. 3.) quia $D < C$, erit $nD < nC$, proinde ex aequo
 vel à fortiori $mC < nC$, itaque $m < n$, et $nB > mB$, $nD > mD$.
 Iam, demtis mB , mD , erit $mA - mB > nB - mB$, $mC - mD =$
 $< nD - mD$, cumque

per V. 5. $mA - mB = m(A - B)$, $mC - mD = m(C - D)$

ac per V. 6. $nB - mB = (n - m)B$, $nD - mD = (n - m)D$;

erit $m(A - B) > (n - m)B$, $m(C - D) = < (n - m)D$.

Quodsi $n - m$, qui est numerus integer, sit > 1 , propositum
 constat ex V. Def. 7. si vero $n - m = 1$, erit $2m(A - B) > 2B$,
 $2m(C - D) = < 2D$, quoniamque aequemultiplices magnitudi-
 num $m(A - B)$, $m(C - D)$ sunt ipsarum $A - B$, $C - D$ aequem-
 multiples (V. 5.), rursus per V. Def. 7. constat propositum.

Coroll. (Hauber. §. 23.) Quod quidem et quoque exprimi potest: Si summa duarum magnitudinum ad earum alteram maiorem rationem habet, quam summa duarum aliarum ad harum alteram; ad eam priorum, quae terminum consequentem rationis maioris constituit, etiam altera ipsarum maiorem rationem habebit, quam altera posteriorum ad eam harum, quae est terminus consequens rationis minoris. Quippe

$$\text{si } A+B:B > C+D:D;$$

$$\text{et } A+B-B:B > C+D-D:D$$

$$\text{i. e. } A:B > C:D$$

Prop. k. (Hauber. §. 24. Pappi VII. 6. Clav. V. 30.)

Si $A:B > C:D$, et $C > D$, ac proinde (Prop. d.) $A > B$, erit convertendo $A:A-B < C:C-D$, seu inverse $A-B:A > C-D:C$.

Dem. Ob $A:B > C:D$ (supp.), erit dividendo (Prop. i.) $A-B:B > C-D:D$, ac proinde $A-B+B:A-B < C-D+D:C-D$ (Prop. h. Cor. 2.) i. e. $A:A-B < C:C-D$, seu

$$A-B:A > C-D:C \text{ (Prop. a.)}$$

Cor. 1. (Hauber. §. 25.) Sive etiam: si summa duarum magnitudinum ad earum unam maiorem rationem habet, quam summa duarum aliarum ad harum unam; summa priorum ad earum alteram maiorem rationem habebit, quam summa posteriorum ad harum alteram. Etenim, si

$$A+B:B > C+D:D$$

$$\text{erit } A+B:A+B-B < C+D:C+D-D$$

$$\text{i. e. } A+B:A < C+D:C$$

Quod etiam consequitur ex Prop. i. Cor. et Prop. h. Cor. 2.

Cor. 2. (Hauber. §. 26.) Generatim, si quatuor magnitudinum, quarum prior ad secundam maiorem rationem habet, quam tertia ad quartam, tertia maior fuerit quam quarta, adeoque (Prop. d.) etiam prima maior quam secunda; differentia priorum ad earum alterutram maiorem rationem habebit, quam differentia posteriorum ad harum alterutram, quae nimirum ei, quae in maiori ratione assumpta erat, ordine respondet.

Cor. 3. (Hauber. §. 27.) Pariter, si differentia duarum magnitudinum ad earum minorem habet rationem maiorem, quam differentia duarum aliarum ad harum minorem, priorum quoque differentia ad earum maiorem in maiori ratione erit quam differentia posteriorum ad ipsarum maiorem.

Si enim $A-B:B > C-D:D$

erit $A-B:A-B+B > C-D:C-D+D$ (Prop. h. Cor. 2.)

i. e. $A-B:A > C-D:C$.

Quod etiam consequitur ex Prop. h. Cor. 1. et Prop. k.

Prop. l. (Hauber. §. 28.)

Si $A:B > C:D$, et $B > A$ adeoque (Prop. d.) $D > C$, erit

$$\frac{A}{B} \left\{ :B-A > \frac{C}{D} \right\} :D-C \text{ et inverse.}$$

Dem. Cum sit $A:B > C:D$ (supp.), seu

$D:C > B:A$ (Prop. a.) et $B > A$ (supp.)

dividendo erit $D-C:C > B-A:A$ (Prop. i.), atque etiam

$D-C:D > B-A:B$ (Prop. k.)

unde pariter (Prop. a.) $A:B-A > C:D-C$

et $B:B-A > D:D-C$.

Cor. 1. (Hauber. §. 29.) Si duarum magnitudinum differentia ad earum maiorem in maiori ratione est, quam duarum aliarum differentia ad harum maiorem; priorum quoque maior ad ipsarum minorem in maiori ratione erit, quam posteriorum maior ad harum minorem. Nam, si

$$A-B:A > C-D:C$$

est $A:A-(A-B) > C:C-(C-D)$ Prop. l.

i. e. $A:B > C:D$.

Cor. 2. (Hauber. §. 30.) Item, eodem supposito, quod in Cor. praeced. pariter differentia priorum ad ipsarum minorem in maiori ratione erit, quam differentia posteriorum ad harum minorem. Si enim

$$A-B:A > C-D:C$$

est $A-B:A-(A-B) > C-D:C-(C-B)$ Prop. l.

i. e. $A-B:B > C-D:D$

quod et consequitur ex Cor. 1. et Prop. i.

Prop. m. (Hauber. §. 31. Clav. V. 31. cum Schol.).

Si vel $A:B=D:E$ vel $A:B>D:E$ vel tam $A:B>D:E$
 et $B:C>E:F$ et $B:C=E:F$ quam $B:C>E:F$

ex aequo etiam erit $A:C>D:F$

Dem. 1) Si $A:B=D:E$ et $B:C>E:F$, sit $mB>nC$,
 $mE=<nF$ (V. Def. 7.). Tnm, quia $nC<mB$ erit
 $A:nC>A:mB$ (V. 8.), et, cum ob $A:B=D:E$ (supp.) sit
 $A:mB=D:mE$ (V. 4.), etiam $A:nC>D:mE$ (V. 13.), quoniamque
 $mE=<nF$, erit et $D:mE=<D:nF$ (V. 7. 8.), at proinde
 $A:nC>D:nF$ (V. 13. et Prop. b.), itaque $A:C>D:F$ (Prop. e.).

2) Si $A:B>D:E$, et $B:C=E:F$, inverse (V. 4. et Prop. a.)
 erit $C:B=F:E$
 et $B:A<E:D$

igitur ex aequo per demonstrata nr. 1. $C:A<F:D$ seu inverse
 (Prop. a.) $A:C>D:F$.

3) Si tam $A:B>D:E$, quam $B:C>E:F$, sit $mA>nB$,
 $mD=<nE$, et $pB>qC$, $pE=<qF$ (V. Def. 7.) erit et
 $pmA>pnB$, $pmD=<pnE$, $npB>nqC$, $npE=<nqF$
 seu $pmA>pnB$, et $pnB>nqC$, pariterque
 $pmD=<pnE$, et $pnE=<nqF$: itaque hinc $pmA>nqC$,
 $pmD=<nqF$. Quare, cum aequemultiplices magnitudinum
 mA , mD , qC , qF sint ipsarum etiam A , D , C , F aequemultiplices (V. 3.), propositum per V. Def. 7. constat.

(Hinc sequens deduci potest Corollarium: Rationum inter
 se diversarum duplicatae (triplicatae etc.) etiam inter se di-
 versae sunt, et maioris quidem maior. Nempe, sit v. gr.
 $A:B=B:C$, et $P:Q=Q:R$, sitque $A:B>P:Q$, et $mA>nB$,
 $mP=<nQ$. Iam, quoties $mA>nB$, erit et $mB>nC$,
 et quoties $mP=<nQ$, erit et $mQ=<nR$ (V. Def. 7.)
 itaque erunt simul $mB>nC$, et $mQ=<nR$, adeo-
 que (V. Def. 7.) $B:C>Q:R$, unde ex hac Propositione m.
 erit $A:C>P:R$. Cf. observ. ad V. Def. 10. 11. Atque hinc
 porro facile coll. Cor. ad V. 22. per indirectum demonstrabi-
 tur, rationum earundem inter se subduplicatas (subtriplicatas etc.)
 pariter inter se esse easdem, diversarum diversas.)

Prop. n. (Hauber, §. 32. Clav. V. 30. cum Schol.)

Si, vel $A:B=E:F$, vel $A:B>E:F$, vel tam $A:B>E:F$
et $B:C>D:E$ et $B:C=D:E$ quoniam $B:C>D:E$

erit etiam ex aequo perturbato $A:C>D:F$.

Dem. 1) Si $A:B=E:F$ et $B:C>D:E$. sit $mB>nC$, $mD=$
 $<nE$ (V. Def. 7.), et erit $nE:mF=>mD:mF$ (V. 7 et 8.)
et, quia ob $A:B=E:F$ (supp.) etiam $nA:mB=nE:mF$ (V. 4.),
erit et $nA:mB=>mD:mF$ (V. 11. 13.). Sed, cum sit
 $mB>nC$, est $nA:nC>mD:mF$ (V. 13. et Prop. b.), unde
 $A:C>D:F$ (Prop. e.).

2. Si $A:B>E:F$, et $B:C=D:E$, erit inverse

$C:B=E:D$ (V. Cor. 4. vel Prop. B.)

et $B:A<F:E$ (Prop. a.)

itaque per demonstrata nr. 1. $C:A<F:D$; seu inverse $A:C>$
 $D:F$ (Prop. a.)

3. Si $A:B>E:F$, et $B:C>D:E$, sit $mA>nB$, $mE=<nF$,
et $pB>qC$, $pD=<qE$ (V. Def. 7.), igitur et $pmA>pnB$,
 npB , seu $pnB>nqC$, pariterque $qmE=<qnF$, mpD seu
 $pmD=<mqE$ seu qmE , atque hinc $pmA>nqC$, $pmD=$
 $<nqF$, et, quoniam magnitudinum mA , mD ; qC , qF aequi-
multiplices ipsarum quoque A ; D ; C , F sunt (V. 3.), erit
per V. Defini. 7. $A:C>D:F$.

Prop. o. (Hauber, §. 33.)

Si $A:B=>C:D$, et $E:B>F:D$, erit $A+E:B>C+F:D$.

Dem. 1) Si $A:B=C:D$ et $E:B>F:D$, sive inverse

$B:E<D:F$ (Prop. a.), ex aequo erit (Prop. m.)

$A:E<C:F$, itaque $A+E:A>C+F:C$ (Cor.

2. Prop. h.) et, cum sit $A:B=C:D$ (supp.), ex aequo etiam
(Prop. m.) $A+E:B>C+F:D$.

2) Si $A:B>C:D$, et $E:B>F:D$, sit $mA>nB$, $mC=<nD$,
et $pE>qB$, $pF=<qD$, erit etiam $pmA>pnB$,

$pmC=<pnD$, et mpE , seu $pmE>mqB$, mpF seu

$pmF=<mqD$, ergo etiam $pmA+pmE>pnB+mqB$,

$pmC+pmF=<pnD+mqD$, seu (V. 3., V. 1., V. 2.)

$pm(A+B) > (pn+mq)B$, pariterque
 $pm(C+F) = < (pn+mq)D$, unde et
 $A+B > C+F:D$ per V. Def. 7.

Coroll. (Hauber. §. 34.) Sive etiam, si

$$A:B = > C:D$$

$$\text{et } E-A:B > F-C:D$$

$$\text{erit } A+B-A:B > C+F-C:D$$

$$\text{i. e. } E:B > F:D.$$

Prop. p. (Hauber. §. 35.)

Si $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, erit $C > F$, si $A > E$, et
 $A < E$, si $C < F$.

Dem. Nam, ob $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$ (supp.)

$$B:E < D:F \text{ (Prop. a.)}$$

erit etiam ex aequo $A:E < C:F$ (Prop. m.)

$$\text{seu } E:A > F:C \text{ (Prop. a.)}$$

unde per Prop. d. constat propositum.

Prop. q. (Hauber. §. 36.)

Si $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, erit

$A-E:B < C-F:D$, si $B > E$, ac proinde (Prop. p.) $C > F$,
 sed $E-A:B > F-C:D$, si $C < F$ $A < E$.

Dem. 1) Si est $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, et $A > E$,
 [inverse erit $B:E < D:F$ (Prop. a.)

igitur ex aequo $A:E < C:F$ (Prop. m.)

et quia $A > E$, $A-E:A < C-F:C$ (Prop. k.)

quoniamque $A:B = < C:D$ (supp.)

etiam ex aequo $A-E:B < C-F:D$ (Prop. m.)

2) Si est $E:B > F:D$, et $A:B = < C:D$, atque $D < F$,
 erit inverse $B:A = > D:C$ (Prop. B et a.)

quare ex aequo $E:A > F:C$ (Prop. m.),

et hinc $E-A:E > F-C:F$ (Prop. i.) quia $C < F$,

cumque sit $E:B > F:D$ (supp.)

ex aequo etiam $D-A:B = F-C:D$ (Prop. m.)

Cor. 1. (Hauber. §. 37.) Quod quidem etiam sic exprimi potest

Si est $A + E : B = < C + F : D$

et $A : B > C : D$

erit et $E : B < F : D$.

Sed, si $A : B = < C : D$

et $A + E : B > C + F : D$

erit et $E : B > F : D$.

Cor. 2. (Hauber. §. 38.) Hinc etiam, si

$A - E : B < C - F : D$

et $A : B = < C : D$

erit $A - (A - E) : B < C - (C - F) : D$ (Prop. q. nr. 1.)

seu $E : B < F : D$.

Et, si $A : B > C : D$

atque $A - E : B = < C - F : D$

erit $A - (A - E) : B > C - (C - F) : D$ (Prop. q. nr. 2.)

hoc est $E : B > F : D$.

Prop. r. (Hauber. §. 39.)

Si $A : B > C : D$, tum si $C > D$, ergo et (Prop. d.) $A > B$, erit
 $A + B : A - B < C + D : C - D$; et, si $A < B$, ergo et (Prop. d.)
 $C < D$, erit $A + B : B - A > C + D : D - C$.

Dem. Ob $A : B > C : D$ (supp.)

1) erit $A + B : A < C + D : C$ (Cor. 2. Prop. h.)

et, si $C > D$, convertendo $A : A - B < C : C - D$ (Prop. k.)

quare ex aequo $A + B : A - B < C + D : C - D$ (Prop. m.)

2) erit quoque $A + B : B > C + D : D$ (Prop. h.);

et, si $A < B$, $B : B - A > D : D - C$ (Prop. l.)

tunc rursus ex aequo $A + B : B - A > C + D : D - C$ (Prop. m.)

Prop. s. (Hauber. §. 40.)

Vicissim, si $A + B : A - B > C + D : C - D$

erit $A : B < C : D$

Dem. Nam, ob $A+B:A-B < C+D:C-D$ (supp.)

est $A+B+A-B:A+B-(A-B) < C+D+C-D:C+D-(C-D)$ (Prop. r.) hoc est $2A:2B < 2C:2D$

et proinde $A:B < C:D$ (Prop. e.)

Et hactenus quidem de magnitudinibus universim sermo fuit, sive ea, quae ad duas diversas rationes pertinent, inter se eiusdem, sive diversi generis fuerint. Iam vero transit auctor ad magnitudines homogeneas.

Prop. t. (Hauber. §. 41.) Conf. Prop. c.

Si quatuor homogenearum magnitudinum A, B, C, D sit $A=C$, et $B < D$, vel, si $A > C$, et $B = < D$, erit

$A:B > C:D$.

Dem. 1) Si $A=C$, et $B > D$,

erit $A:B > A:D$ (V. 8.)

et $A:D = C:D$ (V. 7.)

eo proinde $A:B > C:D$ (V. 13.)

2) Si $A > C$, et $B = < D$,

erit $A:B > C:D$ (V. 8.)

et $C:B = > C:D$ (V. 7. 8.)

itaque et $A:B > C:D$ (V. 13. et Prop. b.)

Prop. u. (Hauber. §. 42.)

Vicissim, si $A:B > C:D$, erit $B < D$, si $A = < C$, et $A < C$, si $B = > D$.

Dem 1) Si $A = < C$, erit

$C:B = > A:B$ (V. 7. 8.)

et cum sit $A:B > C:D$ (supp.)

etiam $C:B > C:D$ (V. 13. et Prop. b.)

proindeque $B < D$ (V. 10.)

2) Si $B = > D$, erit $C:D = > C:B$ (V. 7. 8.)

quare, cum sit $A:B > C:D$ (supp.)

erit et $A:B > C:B$ (V. 13. et Prop. b.)

itaque $A > C$ (V. 10.)

Prop. v. (Hauber. §. 43. Pappi VII. Prop. 5. apud Clav. V. 27.)

Si $A:B > C:D$, erit et alterne $A:C > B:D$, seu inverse $C:A = D:B$.

Dem. Sit $mA > nB$, et $mC \leq nD$ (supp. et V. Def. 7.)

erit igitur $mA:mC > nB:nD$ (Prop. t.)

et hinc $A:C > B:D$ (Prop. e.)

Prop. w. (Hauber. §. 44.)

Si $A:B > C:D$, erit $A+E:C+D \begin{cases} > B:D \\ < A:C \end{cases}$

Dem. Ob $A:B > C:D$ (supp.) erit

1) componendo $A+B:B > C+D:D$ (Prop. h.)

et alterne $A+B:C+D > B:D$ (Prop. v.)

2) erit etiam $A+B:A < C+D:C$ (Cor. 2. Prop. h.)

et rursus alterne $A+B:C+D < A:C$ (Prop. v.)

Cor. 1. (Hauber. §. 45. Pappi VII. 8.) Pariter, si $A:B > C:D$,

erit et $A+C:B+D \begin{cases} > C:D \\ < A:B \end{cases}$ Nam, ob $A:B > C:D$ (supp.)

erit alterne $A:C > B:D$ (Prop. v.) et hinc

$A+C:B+D \begin{cases} > C:D \\ < A:B \end{cases}$ (Prop. w.)

Cor. 2. Inaequalium duarum magnitudinum maior ad minorem in maiori ratione est, quam summa maioris et cuius-cunque tertiae ad summam minoris et eiusdem tertiae.

Nam, si $A > B$, est $A:C > B:C$ (V. 8.), ideoque

$A+C:B+C < A:B$ (Prop. w.), seu $A:B > A+C:B+C$,

Prop. x. (Hauber. §. 47.)

Si $A:B > C:D$, et $C > D$, itaque (Prop. d.) $A > B$, erit

$A-B:C-D > \begin{cases} A:C \\ B:D \end{cases}$; sed si $B > A$, adeoque (Prop. d.)

$D > C$, erit $B-A:D-C < \begin{cases} A:C \\ B:D \end{cases}$.

Dem. Propter $A:B > C:D$ (supp.)

1) si $C > D$, erit $A-B:A > C-D:C$ (Prop. k.)

et $A-B:B > C-D:D$ (Prop. i.)

proinde etiam alterne $A-B:C-D > A:C$

et $A-B:C-D > B:D$ (Prop. v.)

2) si $B > A$, erit $B-A:A < D-C:C$

pariterque $A-A:B < D-C:D$ (Prop. I.)

unde iterum alterne $B-A:D-C < A:C$

et $B-A:D-C < B:D$ (Prop. v.)

Cor. 1. (Hauber. §. 48. Pappi VII. 9. Clav. V. 33.) Si $A:B > C:D$, et fuerit $B > D$, adeoque (Prop. u.) $A > C$, erit $A-C:$

$B-D > \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$; sin autem $A < C$, ac proinde (Prop. u.) $B < D$,

erit $C-A:D-B < \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$.

Nam, ob $A:B > C:D$ (supp.), erit alterne (Prop. n.)

$A:C > B:D$, atque hinc, si $B > D$, erit

$A-C:B-D > \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$; sin autem $A < C$,

$C-A:D-B < \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$ Prop. x.

Cor. 2. Inaequaliam duarum magnitudinum maior ad minorem in minori ratione est, quam excessus maioris super tertiam quamcunque ad excessum minoris super eandem, minorem nimirum ambabus; in maiori vero, quam excessus tertiae cuiuscunque, quae sit ambabus maior, super maiorem, ad excessum eiusdem super minorem.

Etenim, si $A > B$, est $A:C > B:C$ (V. 8.)

et proinde $A-C:B-C > A:B$, si $C < B$

et $C-A:C-B < A:B$, si $C > A$ (Prop. x.)

sen $A:B \begin{cases} < A-C:B-C \\ > C-A:C-B \end{cases}$

Prop. y. (Hauber. §. 50. Clav. V. 34.)

Si $A:B > C:D$, et $C:D > E:F$ etc, erit summa omnium priorum $A+C+E+$ etc. ad summam omnium posteriorum $B+D+F+$ etc. in maiori ratione, quam postrema E priorum ad postremam F posteriorum; in minori autem, quam prima A priorum ad primam B posteriorum; et denique in maiori quam summa priorum $C+E+$ etc. omnium excepta prima A ,

ad summam posteriorum $D + F +$ etc. omnium, excepta harum prima B.

Dem. Ob $A:B > C:D$ (supp.)

est $A + C:B + D > C:D$ et $< A:B$ (Cor. 1, Prop. v.)

Quoniam autem $C:D > E:F$ (supp.), erit etiam

$A + C:B + D > E:F$ (Prop. b.)

atque hinc $A + C + E:B + D + F > E:F$, sed $< A + C:B + D$ (Cor. 1, Pr. f.) Unde porro ob $A + C:B + D < A:B$ per demou-

strata erit $A + C + E:B + D + F < A:B$ (Prop. b.)

atque hinc $A + C + E:B + D + F > C + E:D + F$

(Cor. 1. Prop.)

Prop. z. (Hauber. §. 51.)

Si $A:B > C:D$, et $B > D$, pariterque $C > D$, et proinde (Prop. d. et Prop. u.) etiam $A > B$, et $A > C$: summa maximae et minimae $A + D$ maior est, quam summa duarum reliquarum $B + C$.

Dem. Ob $A:B > C:D$, et $C > D$ (supp.)

dividendo est $A - B:B > C - D:D$ (Prop. i.)

quoniamque $B > D$ (supp.) etiam $A - B > C - D$ (Prop. u.)

et, addito utrimque $B + D$

$A + D > B + C$.

Prop. a. (Hauber. §. 52. Pappi VII. 16.)

Si sint quatuor numeri vel lineae A, B, C, D, ita, ut $A:B > C:D$; erit productum vel rectangulum extremorum maius, quam productum aut rectangulum mediorum, et vicissim. (Hanc Propositionem, quamvis iam supponat Propositiones aliquas libri VI. vel VII., quae tamen independentes ab ea demonstrantur, propter nexum cum praecedentibus, nominamus à reliquis Hauberianis saeparare, et suo demum loco ponere, cui facile eam restituet lector intelligens).

Dem. 1) Quoniam $A:B > C:D$ (supp.)

et $A:B = A \times C:B \times C$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

erit etiam $A \times C:B \times C > C:D$ (V. 13.)

et quia rursus $C:D = A \times C:A \times D$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

etiam $A \times C : B \times C > A \times C : A \times D$ (V. 13.)

et hinc $B \times C < A \times D$ (V. 10.) seu

$$A \times D > B \times C.$$

2) Si $A \times D > B \times C$, pariter erit

$$A \times C : B \times C > A \times C : A \times D \text{ (V. 8.)}$$

et ob $A \times C : B \times C = A : B$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

$$A : B > A \times C : A \times D \text{ (V. 13.):}$$

et, quia rursus $A \times C : A + D = C : D$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

$$\text{pariter } A : B > C : D \text{ (V. 13.)}$$

Cor. (Hauber. §. 53.). Proinde, si $A : B > B : C$, denotantibus rursus A, B, C numeros, vel lineas,

est $A \times C > B^2$, vel B^2 , et vicissim.

EXCURSUS

A^D

ELEMENTORUM

L. VI. et maxime ad VI. Def. 5.

§. 1. *H*_{æc} Definitio in Edictione *Oxonienſi* ita habet: *Λόγος ἐκ λόγων συγκρίσθαι, ὅταν αἱ τῶν λόγων πληκτότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλὰ πλασιασθεῖναι ποιῶσι τινά.* Editio *Basileensis* legit: *τινές.* Theon ſeculi poſt C.N. quarti ſcriptor in Commentar. in *Ptolomæi Almageſtum* (*Πτολεμαίου μεγάλης συνταξέως βιβλ. ιγ. Θεωνος Ἀλέξανδρείως ἐς τὰ ἐντὰ ἵπομνημάτων βιβλ. ια.* Basil. 1558 p. 61. poſt ambiguum illud et vagum *τινά* addit *πληκτότητα λόγῳ.* Et Scholion Anonymi in Edit. Elementor. *Basileenſi* p. 67. pro *τινά* ſubſtituit *λόγόν.* *Eutocius* in locum *Archimedis* (*Ἀρχιμήδους τὰ ſωζόμενα, μετὰ τῶν Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ἵπομνημάτων* iisdem verbis hanc Definitionem habet, ut nunc legitur in Edit. Oxon. Plerique Commentatores, ut *Clavius*, *Tartalea*, *David Gregorius* aliique vocem *πληκτότης* vertunt: *quantitas*, vel, ut ipſi vocem: *quantitas* interpretantur: *rationum denominator* vel *exponens.* *Wallisius* (*Opera Mathem. Tom. II. p. 665. ſqq.*) *πληκτότης* interpretatur: *quantuplicitas*, quam exponi ait per *exponentem* rationis. (*Pfleiderer. in Schol. in libr. VI. Elem. P. IV, è quibus excerpta ſunt, quæ in hoc Excursu habentur* §. 200. not. 7. 8. 9 coll. §. 202. not. 15.).

§. 2. Verum enim verò, ut *Rob. Simson* obſervat, huius Definitionis, laxo, in quod definit, effato (vide *Pfleiderer* l. c. §. 200.) ſatis ſuſpectæ, in ſequentibus apud *Eu-*

clidem, Archimedelem, Apollonium, reliquosque veteres, qui ratione composita saepius utuntur, nullum amplius vestigium invenitur. (Id ipsum etiam, si non verbis, re tamen ipsa fatetur Clavius, nec satis excusare studet Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus P. 158 sq.)). Ita v. c. in demonstratione VI. 23. in qua primum rationis compositae fit mentio, nihil prorsus occurrit, quod ad hanc Definitionem se referret. Campanus quoque Definitionem VI. 5. non habet.

§ 3. Aliam potius rationis compositae Definitionem, analogam ei, quae V. Def. 10. 11. habetur, aperte supponunt demonstrationes *Euclidis*, in quibus de rationibus compositis semo est v. c. VI. 23. et VII. 5. Eam à *Campano* iam strictius indicatam in VII. Def. 19. varii recentiores Mathematici, quorum plures nominat *Hfleiderer*. l. c. §. 201. dedere, uberrime exhibuit *Rob. Simson* in Definitione A, quam V. Defin. 11. subnectit, his verbis:

1. Si fuerint quotanque magnitudinis eiusdem generis, prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione, quam habet prima ad secundam, et ratione secundae ad tertiam, et ea, quam habet tertia ad quartam, et ita deinceps usque ad ultimam. Ex. gr. sint magnitudines A, B, C, D: prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compositam ex ratione ipsius A ad B, et ratione B ad C, et ratione C ad D; vel ratio A ad D dicitur composita esse ex rationibus A ad B, B ad C, et C ad D.

2. Si igitur ratio A ad B eadem sit rationi E ad F; et ratio B ad C eadem fuerit rationi G ad H; et ratio C ad D eadem rationi K ad L: A ad D habere dicitur rationem compositam ex rationibus, quae eadem sunt rationibus E ad F, G ad H, et K ad L. Idemque intelligitur, quando brevitalis gratia dicitur A ad D habere rationem compositam ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

3. Similiter, si ratio M ad N eadem sit rationi A ad D, praecedentibus manentibus: brevitalis gratia dicitur ratio M ad N eadem esse rationi compositae ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L; (vel. quod *Playfair* addit, ipso etiam

ratio M ad N composita dicitur ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.)

Eodem sensu caeteri quoque Geometrae veteres Graeci denominationem rationis compositae usurpant, v. c. *Archimedes* Libr. II. Prop. 5. de Sphaera et Cylindro; *Apollonius* Conic. I. Prop. 59. I. 40. III. 54. III. 66. *Ptolemaeus* loco supra citato, alique.

§. 4. Ex his omnibus non sine ratione concludunt magni nominis Geometrae, inprimis *Rob. Simson* in Not. ad VI. 23. *Pfleiderer*. l. c. §. 204. not. 17. cum quibus consentiunt etiam plures eorum Mathematicorum, qui Definitionem §. 3. allatam etiam ipsi exhibent, et maxime *Scarburgh* (the English Euclide Oxf. 1705. Schol. in V. Def. 10. et in Def. 5. vulgarem libri VI.), vulgarem illam §. 1. exhibitam Definitionem non esse ipsius *Euclidis*; sed a *Theone* sine dubio, sublata genuina §. 3. allata, substitutam fuisse eam, quae nunc habetur explicationem, quae tamen minus apta, et, ut *Rob. Simson* ait, puerilis sit, quippe quae eis solummodo rationibus conveniat, quae numeris exhiberi possint. Atque hac ratione omnem de compositione rationum doctrinam absurdam et ἀγεωμετρικὴν redditam esse. Unde et *Savilius*, qui vulgarem illam Definitionem §. 1. genuinam putarat, professus est, in pulcherrimo Geometriae corpore duas esse labe, nec, quod sciat, plures, in quibus eluendis et emaculandis cum veterum tum recentiorum vigilaverit industria. Priorem nempe Post. 5. I. posteriorem, quae ad compositionem rationum pertineat (*Savilii Praelect. Lect. VII. p. 140.*)

§. 5. Hanc suspicionem, nempe *Theonem* Architectum esse vulgaris Definitionis §. 1. confirmare videntur ea, quae *Theon* in Commentar. ad *Ptolem.* loco supra citato habet. Ibi nempe, postquam *Ptolemaeus* propositionem aliquam de compositione rationum legitimo more eo sensu demonstraverat, quem Definitio §. 3. supponit, *Theon* ulterioris, quod ait, illustrationis gratia VI. Propos. 23. adhibet, quae vero argumentationem complicit potius quam explicat, tum vero ex abrupto et sine ulla ad propositum applicatione Definitionem cum *Euclid. Element. P. II.*

vulgari illa exacte consentientem, nisi quod ad finem addit „*πληρότητα λόγου*“ exhibet. Atque hoc primum certum est vestigium Definitionis §. 1. allatae, quam ipsam deinde Eutocius seculi post C. N. sexti scriptor in Commentario in Archimedem eo, quem §. 1. diximus, loco, ut in Elementis occurrentem, designat.

§. 6. Aliud praeterea argumentum, quo vulgarem rationis compositae Definitionem §. 1. allatam supposititiam esse probari possit, in eoprehendit Rob. Simson p. 374 squ. quod VIII. Prop. 5. nihil aliud continet, quam quod in ipsa illa vulgari Definitione asseritur. Absurdum autem fore, propositionem aliquam in Elementis poni tanquam Definitionem, et eandem in iisdem demonstrari. Propositionem autem VIII. 5. in Elementis locum habere debere, non est dubium, idem enim in ea demonstratur de numeris planis, quod in VI. 23. de parallelogrammis aequiangulis; quare VI. Definitio 5. in Elementis locum habere non potest. Quae quum ita sint, liceat vulgarem illam Definitionem §. 1. positam, Definitionem Theonis, alteram autem §. 3. exhibitam, V. Definitionibus 10. 11. analogam, adeoque sine dubio magis ex Euclidis mente positam, Definitionem Simsonis appellare.

§. 7. Vulgarem illam Definitionem minus aptam esse non tantum inde patet, quod rei mere geometricae numeri, atque operationes in numeris usitatae immiscentur, verum etiam quarumlibet rationum datarum exponentes integros fractosque dari, nullo tot rationum numeris ineffabilium censu habito, supponitur. Quando autem numeris integris aut fractis rationes datae exprimuntur, ex quibus alia haud immediate cognita componitur, seu infertur, tum omnino haec eadem est ratio, quam productum multiplicationis terminorum antecedentium rationum habet ad productum ex ipsarum terminis consequentibus, vel, quod eodem redit: denominator, (i. e. numerus integer aut fractus indicans, cui multiplo, aut cui parti, quibusve partibus consequentis aequatur terminus antecedens rationis) rationes primae quantitatis ad ultimam exprimitur denominatoribus mediarum rationum inter se multiplicatis. Nempe,

si $A:B=m:n$ denotantibus m, n, p, q, r, s numeros datos,
 $B:C=p:q$ eosque integros (quia rationes numero integro
 $C:D=r:s$ et fracto, vel duobus fractis expressae facile
 etc.

per V. 15. aequipollentes numeris integris expressas reducuntur): erit $A:C=mp:nq$; $A:D=mp:rqs$ etc. Necesse est autem ad hanc propositionem, in qua de numeris agitur, demonstrandam, doctrinam de numeris, ut libr. VII. Elementorum (qui nihil de rationum compositione supponit) traditur, adhibere, aut, quae huc pertinent, separatim demonstrare. Quod quum omnino liceat, haec erit demonstratio (vid. *Pfleiderer*. l. c. §. 207.)

Ob $A:B=m:n=pm:pn$ (V. 15.) $=mp:nq$ (VII. 16.)

et $B:C=p:q$ $np:nq$ (V. 15.)

est $A:C=mp:nq$ (V. 22.),

Tum, ob $A:C=mp:rqnq$ (V. 15.) $=mpr:nqr$ (VII. 16.)

et $C:D=r:s$ $nqr:nqs$ (V. 15.)

fit $A:D=mpr:nqs$ (V. 22.) etc.

vel $\frac{A}{D} = \frac{mpr}{nqs} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{q}{s} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot B \cdot C}{B \cdot C \cdot D} = \frac{A \cdot B \cdot C}{B \cdot C \cdot D}$

Varios aliorum conatus Definitiones *Theonis* et *Rob. Simsonis* inter se conferendi refert *Pfleiderer*. l. c. not. 17. et ipse plures etiam exhibet.

§. 8. Usus rationis compositae, quum omnia, in quibus solet adhiberi ratio composita, possint etiam sine eius auxilio tum enuntiari, tum demonstrari, in hoc unice consistere ait *Rob. Simson*, quod eius ope periphraes evitentur et ita Propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari brevius, vel utrumque simul fieri possit. Ex. gr. si Propositio VI. 23. enuntianda esset, non facta rationis compositae mentione, id ita fieret: Si duo Parallelogramma aequiangula fuerint, et at, fiat unum latus prioris ad unum posterioris, ita quatuor recta assumpta ad secundam aliquam; et, uti alterum latus prioris ad alterum posterioris, ita secunda illa fiat ad tertiam: erit prius Parallelogrammum ad posterius, ut recta primitus assumpta ad hanc tertiam. Veteres autem cum vidis-

sunt, hanc enunciationem posse breviorē reddi, si nomen inpositum esset rationi, quam habet prima recta ad ultimam, quo nomine simul indicarentur rationes intermediae, primae scilicet ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, et ita deinceps, si plures fuerint rectae; rationem hanc primae ad ultimam dixerunt rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, hoc est, in praesenti casu ex rationibus, quae eadem sunt rationibus laterum, atque ita brevius Propositionem enunciarunt: Si fuerint duo aequiangula parallelogramma, habebunt inter se rationem eandem ei, quae composita est ex rationibus, quae eadem sunt rationibus laterum, vel adhuc brevius: aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eandem ei, quae composita est ex rationibus laterum. Quum itaque ratio composita sit tantum modus loquendi, *Euclides* utitur quoque in Definitionibus rationis duplicatae et triplicatae verbo: *λέγεται*, quo verbo sine dubio utebatur etiam in Definitione rationis compositae, quam *Thaon* aliisque ex *Elementis* sustulit; nam idem verbum retentum est in inepta Definitione rationis compositae, quae nunc in VI. Def. 5. habetur. In citationibus autem harum Definitionum aliquando retinetur, ut in Dem. VI. 19.; aliquando omittitur ut in Dem. XI. 33. ubi tamen *ἔχει* sine dubio idem significat, ac *ἔχειν λέγεται*, et in V. 23. ubi *συγκείται* brevitatis causa dicitur pro: *συγκείσθαι λέγεται*. Ita fere *Rob. Simson* l. c. *Pfleiderer* tamen l. c. §§. 222. 223. monet, hae denominatione indicari simul, rationem, quae ex alijs componi dicatur, ab his pendere, per eas determinari, sic ut ex his cognitis iuxta normam quandam constantem colligi atque inferri possit. Has porro et omnes, et simplicissimas designari supponi, quas indoles magnitudinum, de quarum ratione ex iis componenda praecipiat, requirat, vel quas datorum problematis, cui enodando earum compositio adhibeatur, conditio suggerat.

§. 9. Ex Definitione *Rob. Simsonis* plures deduci possunt consequentiae, quarum partem habet ipse *Rob. Simson* in Proposit. F, G, H, K. Append. ad Libr. V. Nos eas hic

ita sistemus, ut sunt apud *Pfleiderer*. l. c. Earum prima haec est: Rationes ex rationibus respective inter se iisdem compositae (sensu strictiori Defn. *Simson*. nr. 1.) sunt inter se eadem. (Est haec *Simson*. Propos. F in Append. ad Libr. V. vel, si mavis, V. Prop. 22. et 23. (caeterum antea demonstrandae, ut ab *Euclide* factum est) alijs verbis ita exprimi possunt. *Pfleiderer*. §. 208.)

Sic enim $A : B = D : E$

$B : C = E : F$

erit (V. 22.) $A : C = D : F$

Vel; sit $A : B = E : F$

$B : C = D : E$

erit (V. 22.) $A : C = D : F$.

Et similiter, si fuerint plures rationes in utroque casu.

§. 10. Pariter, si duae pluresve rationes eadem sint totidem alijs; terminisque singularum ac magnitudini datae vel assumptae quarta proportionalis inveniri potest (quae eadem determinatio propositionibus analogis sequentibus est applicanda); latiori etiam sensu Def. *Simson*. nr. 2. sq. eadem erunt inter se rationes, quarum una ex prioribus, altera ex posterioribus componitur.

Quodsi enim $A : B = E : F$

$C : D = G : H$

fiat $A : B = K : L$

et $E : F = N : O$

$C : D = L : M$

$G : H = O : P$,

eruntque ex V. 11. $K : L = N : O$

$L : M = O : P$

adeoque V. 22. $K : M = N : P$

Eodemque modo assertum de pluribus, quam duabus rationibus, compositioneque rationum iuxta Def. *Simson*. nr. 3. accepta demonstratur. (*Rob. Simson*. l. c. Prop. G. *Pfleiderer*. l. c. §. 209.).

In sequentibus rationem ex duabus pluribusve sensu Def. *Simson*. nr. 2. 3. compositam, ubi esse erit, compendii causam designabimus, has serie verticali scriptas uncis includendo.

Sic modo praecedens propositio ita exprimetur:

$$\left(\begin{matrix} A:B \\ C:D \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} E:F \\ G:H \end{matrix} \right), \text{ si } A:B = E:F \\ C:D = G:H,$$

§. 11. Eadem porro inter se sunt rationes, quarum utraque sensu Def. *Simson*. nr. 2. ex iisdem rationibus componitur. Hoc quippe sensu, si tam ratio $A:B$, quam altera $C:D$ ex rationibus $E:F$, $G:H$ componitur, sintque $E:F = K:L$

$$G:H = L:M$$

erit tam $A:B = K:N$ (Def. *Sims.* nr. 2.) quam $C:D = K:M$; gitor $A:B = C:D$ (V. 11.) *Pfleiderer*. l. c. §. 210.

§. 12. Sicut rationis ignotae investigatio compositione eius ex rationibus scopo congruis dirigitur, et, quando haec liquent, absolvitur: ita vicissim indagatio rationis, quam unam esse constat earum, ex quibus ratio data componitur, ad determinandam alteram, alterasve hanc componentes reducitur; quo facto illa divisione, quam vocant, *datae rationis compositae* per notam componentem alteram vel ex alteris compositam innotescit. (*Pfleiderer*. l. c. §. 224.)

§. 13. Reductionem divisionis huius ad compositionem docet *Pappi* Propositio 171. Lib. VII. Collect. Mathem. seu Lemm. 7. in Lib. I. Coniector. Apollonir: quo, si A sit ad B in ratione composita ex rationibus $C:D$, $E:F$; vicissim rationem $C:D$ ex rationibus $A:B$ ac $F:E$ seu inversa ipsius $E:F$ componi ostendit. Facto enim $E:F = D:H$; erit (Def. *Simson*.) ratio, quae ex rationibus $C:D$, $E:F$ componitur, h. e. (supp.) $A:B = C:H$.

Quare, cum ita sint $C:H = A:B$

$$H:D = F:E$$

$$\text{est (Def. Sims.) } C:D = \left(\begin{matrix} A:B \\ F:E \end{matrix} \right)$$

Eodemque modo, ex quocunque rationibus $C:D$, $E:F$, $G:H$ etc. componatur ratio $A:B$; caeterae $E:F$, $G:H$ etc. ad unam $P:Q$ ex iis compositam reductis, demonstratur, rationem $C:D$ componi ex rationibus $A:B$ et $Q:P$; seu C esse ad D in ratione composita ex directa A ad B et inversa rationis P ad Q . (*Pfleiderer*. l. c. §. 225.)

§. 14. Hinc eadem etiam inter se sunt rationes, quae rationibus iisdem inter se $A:B$, $C:D$ per alias $E:F$, $G:H$ pariter inter se eadem divisio obtinentur. Quippe ob $E:F=G:H$ (supp.) est etiam $F:E=H:G$ (Prop. B. in Excurs. ad Libr. V.). Quare, cum quoque sit $A:B=C:D$, ratio ex $A:B$ ac $F:E$ composita eadem est rationi compositae ex $C:D$ et $H:G$ (§. 10.) h. e. (§. 13.) quae rationem $A:B$ per alteram $E:F$ dividendo prodit, ratio eadem est rationi divisione rationis $C:D$ per alteram $G:H$ oriundae. (Pfleiderer. l. c. §. 226.)

§. 15. Idem in Propositionibus H, K Element Libr. V. annexis Rob. Simson uberius sic enunciat: „Si ratio ex quibusdam rationibus“ (sive strictiori, sive latiori, in Def. Sims. exposito sensu) „composita eadem sit rationi ex quibusdam aliis rationibus compositae, fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibusdam ex prioribus composita, eadem uni rationi ex posterioribus, vel rationi ex quibusdam ex posterioribus compositae: erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus composita, eadem rationi reliquae ex posterioribus, vel rationi ex reliquis posterioribus compositae. (Pfleiderer. l. c. §. 227.)

§. 16. Quando $A:B=\left(\frac{C:D}{E:F}\right)$, pariter est $A:B=\left(\frac{E:F}{C:D}\right)$.

Factis enim $C:D=K:L$, $E:F=L:M$, est $A:B=\left(\frac{K:L}{L:M}\right)=K:M$ (V. 22.)

at ob $K:M$ quoque $=\left(\frac{L:M}{K:L}\right)$ (V. 23.) $=\left(\frac{E:F}{C:D}\right)$;

pariter est $A:B=\left(\frac{E:F}{C:D}\right)$. Similiterque rationem

ex pluribus quam duabus compositam, mutato horum ordine haud mutari ostenditur (Pfleiderer. §. 228.)

§. 17. Inverse, quando $A:B=\left(\frac{C:D}{E:F}\right)$, erit $B:A=\left(\frac{D:C}{F:E}\right)$.

Factis enim $C:D=K:L$, $E:F=L:M$, est $A:B=\left(\frac{K:L}{L:M}\right)=K:M$,

et $B:A=M:K$ (Prop. B. in Excursu ad Libr. V.) $= \left(\frac{L:K}{M:L} \right)$ (V. 23.)

$= \left(\frac{D:C}{F:E} \right)$ (Prop. B in Exc. ad Libr. V.). Quod rursus similiter ad rationem ex pluribus quam duabus compositam extenditur (Pfleiderer. §. 229.)

§. 18. Si A, B, C, D sunt magnitudines homogeneae, est
 $\left(\frac{A:B}{C:D} \right) = \left(\frac{A:D}{C:B} \right)$. Factis enim $A:B=K:L$ $A:D=K:O$
 $C:D=L:M$; $C:B=O:P$
 ut sint $\left(\frac{A:B}{C:D} \right) = K:M$, $\left(\frac{A:D}{C:B} \right) = K:P$ (Def. Simson.)

ob $A:B=K:L$

$B:C=P:O$ (Prop. B in Exc. ad Libr. V.)

$C:D=L:M$.

est $A:D$ seu (constr.) $K:O = \left(\frac{K:L}{P:O} \right)$,
 $\left(\frac{L:M}{L:M} \right)$.

unde §. 13. $\left(\frac{K:O}{O:P} \right) = \left(\frac{K:L}{L:M} \right)$

h. e. (V. 22.) $K:P=K:M$, ideoque $\left(\frac{A:B}{C:D} \right) = \left(\frac{A:D}{C:B} \right)$.
 (Pfleiderer. §. 230.)

§. 19. Si $A:B = \left(\frac{C:D}{E:F} \right)$, atque $E:F=D:I$, est

$A:B = \left(\frac{C:I}{G:H} \right)$. Facto enim $G:H=I:K$, fit

$A:B = \left(\frac{B:D}{B:I} \right)$ (§. 10.) $= C:K$ (Def. Sims.) $= \left(\frac{C:I}{I:K} \right)$

(Def. Sims.) $= \left(\frac{C:I}{G:H} \right)$ §. 10. (Pfleiderer. §. 231.)

§. 20. Sit A ad B in ratione composita ex rationibus E:F

et $G:H$; atque $B:C=I:K$: erit A ad C in: ratione composita ex rationibus $E:F$, $G:H$, $I:K$. Factis enim

$$P:Q=E:F \quad P:R=\left(\begin{matrix} E:F \\ G:H \end{matrix}\right)$$

$$Q:R=G:H; \text{ unde}$$

$$R:S=I:K \quad P:S=\left(\begin{matrix} E:F \\ G:H \\ I:K \end{matrix}\right)$$

$$\text{erunt } A:B=P:R \text{ (§. 21.)}$$

$$B:C=R:S \text{ (V. 11.)}$$

$$A:C=P:S \text{ (V. 22.)} = \left(\begin{matrix} E:F \\ G:H \\ I:K \end{matrix}\right). \text{ Idemque simi-}$$

liter et ad plures magnitudines A , B , C , D etc: et ad rationes ipsarum rationibus mutuis aequipollentes simplices compositas: ve quaslibet extenditur (*Pfleiderer*. §. 232.)

§. 21. Si $A:B=\left(\begin{matrix} C:D \\ E:F \end{matrix}\right)$, et A , B , C , D , E , F sunt magnitudines homogeneae: ob $B:C=B:C$

$$B:E=B:E$$

$$\text{fiunt } A:C=\left(\begin{matrix} C:D \\ E:F \\ B:C \end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} B:C \\ C:D \\ E:F \end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} B:D \\ E:F \end{matrix}\right)$$

§. 29.

§. 16.

§. 19.

§. 18.

$$A:E=\left(\begin{matrix} C:D \\ E:F \\ B:E \end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} C:D \\ B:E \\ E:F \end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} C:D \\ B:F \end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} B:D \\ C:F \end{matrix}\right)$$

(*Castillon* sur une nouvelle propriété des sections coniques in *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin. Année 1776. p. 298.*) Ceterae, quae ibidem ex $A:B=\left(\begin{matrix} C:D \\ E:F \end{matrix}\right)$ deducuntur rationes, ex §. 13. 17. 18. et nunc §. 21 ostensis consequuntur. (*Pfleiderer*. §. 233.)

§. 22. Ratio composita ex eisdem rationis directa et inversa est ratio aequalitatis, seu aequalium, Quippe, si

$$A:B=E:F$$

$$\text{et } B:C=F:E$$

fit $A:C=E:E$ (V. 22.), proinde $A=C$ (Excurs. ad Libr. V. (Prop. A.) (Pfleiderer. §. 231.)

§. 23. Compositionem vero plurium rationum ingredientes eiusdem rationis directa et inversa se mutuo destruunt:

$$\text{ita ut sint } \left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \\ B:A \end{array} \right) = C:D, \quad \left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} C:D \\ E:F \end{array} \right) \text{ etc.}$$

$$\text{Factis enim } A:B=K:L$$

$$C:D=L:M$$

$$E:F=M:N$$

$$\text{ideoque (Def. Sims.) } \left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \end{array} \right) = K:M$$

$$\left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \\ E:F \end{array} \right) = K:N$$

$$\text{ob } B:A=L:K \text{ (const. et Prop. B. in Excurs. ad Libr. V.)}$$

$$\text{fiunt } \left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \\ B:A \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} K:M \\ L:K \end{array} \right) = L:M = C:D \text{ (Constr. et V. 11.)}$$

§. 20.

$$\left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} K:N \\ L:K \end{array} \right) = L:N = \left(\begin{array}{c} C:D \\ E:F \end{array} \right) \text{ (Constr. et §. 11.)}$$

(Pfleiderer. §. 235.)

§. 24. Hinc, si $\left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} E:F \\ G:H \end{array} \right)$, atque $C:D=G:H$;
pariter erit $A:B=E:F$.

$$\text{Quippe, ob } \left(\begin{array}{c} A:B \\ C:D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} E:F \\ G:H \end{array} \right)$$

$$\text{est } A:B = \left(\begin{array}{c} E:F \\ G:H \\ D:C \end{array} \right) \text{ §. 18.} = \left(\begin{array}{c} E:F \\ C:D \\ D:C \end{array} \right) \text{ (supp. et §. 10.)}$$

$$= E:F \text{ (§. 23.) (Pfleiderer. §. 236.)}$$

§. 25. Vicissim si ratio, quæ ex duabus componitur, est ratio æqualitatis; rationum, ex quibus componitur, una est alterius inversa.

Nempe, si $A:B=E:F$ igitur $A:C=\left(\frac{E:F}{G:H}\right)$;

et $A=C$, ideoque $A:B=C:B$ (V. 7.): fit $E:F=H:G$ (supp. et Prop. B in Exc. ad Libr. V. et V. 11.) (Pfleiderer. §. 237.)

§. 26. Pariter, si in Compositione trium pluriumve rationum duæ se mutuo destruunt, harum una alterius est inversa.

Quippe si $\left(\frac{A:B}{C:D}\right)=A:B$, et $\frac{A:B=K:L}{C:D=L:M}$
 $\frac{E:F=M:N}$

est (Def. Sims.) $K:N=K:L$, ideoque (V. 9.) $N=L$, et (V. 7.) $L:M=N:M$; proinde $C:D=F:E$ (Prop. B in Excurs. ad Libr. V. et V. 11.)

Pariter, si $\left(\frac{A:B}{E:F}\right)=\left(\frac{A:B}{C:D}\right)$; et $\frac{A:B=K:L}{C:D=L:M}$
 $\frac{E:F=M:N}{G:H=N:O}$

est (Def. Sims.) $K:O=K:M$

et (V. 9.) $O=M$

et (V. 7.) $M:N=O:N$; itaque $E:F=H:G$.

Et sic ulterius. (Pfleiderer. §. 238.).

BONNAE
TYPIS BÜSCHLERIANIS
1825.

CORRIGENDA.

IN TOMO I.

- p. XI v. 24 Boermann l. Baermann
 — XVI v. 7 Ptolomaeo l. Ptolemaeo
 — 5 v. 27 $\epsilon\phi'$ l. $\epsilon\phi$, eodemque modo p. 6. v. 32.
 — 13 v. 32 circuli, quadrati l. circuli quadrati
 — 24 v. 11 e l. et
 — 27 v. 34 et l. ac
 — 28 v. 35 quoque l. quoquo
 — 30 v. ult. §. d. §. 28
 — 32 v. 29 ad oculos l. ob oculos
 — 56 v. 29. prope l. pro.
 — 72 v. 24 Coila l. Cod. a
 — 73 v. ult. duobus l. quatuor
 — 105 v. 26 scalarum l. scalenorum
 — 120 v. 20 et 21 $(n-2) \times 2R$ l. $(n-2) \times 2R$
 — 124 v. 4 ABA l. ATA
 — 150 v. 23 et 25 hypotenusa l. hypotenusa
 — 168 v. 21 $\beta\alpha\gamma\delta\eta\kappa\epsilon\iota\nu$ l. $\beta\alpha\gamma\delta\eta\kappa\epsilon\iota\nu$
 — 173 v. 10 habent l. habent ZB
 — ibid. v. penult. Quadrata l. quadrata
 — 180 v. 23 ostendet l. ostendent
 — 181 v. ult. et p. 182 v. 20 parallelogrammum l. parallelogrammorum.
 — 297 v. antepen. recat l. recta
 — 200 v. 30 $\frac{AH-PB}{2}$ l. $\frac{PB-AH}{2}$
 — 201 v. 15 $AH=GP+GI=H+A=\frac{AH-PB}{2}$
 l. $AH=GI+GA=\frac{PB-AH}{2}$
 — 202 v. 25 $AA-BA$ l. $\frac{AA-BA}{2}$
 — 206 v. 5 EO l. NSO
 — 208 v. 24 H. ad 10. Obs. 8. l. ad H. 10. Obs. 10
 — 214 v. 21 $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\iota\nu$ l. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\iota\nu$

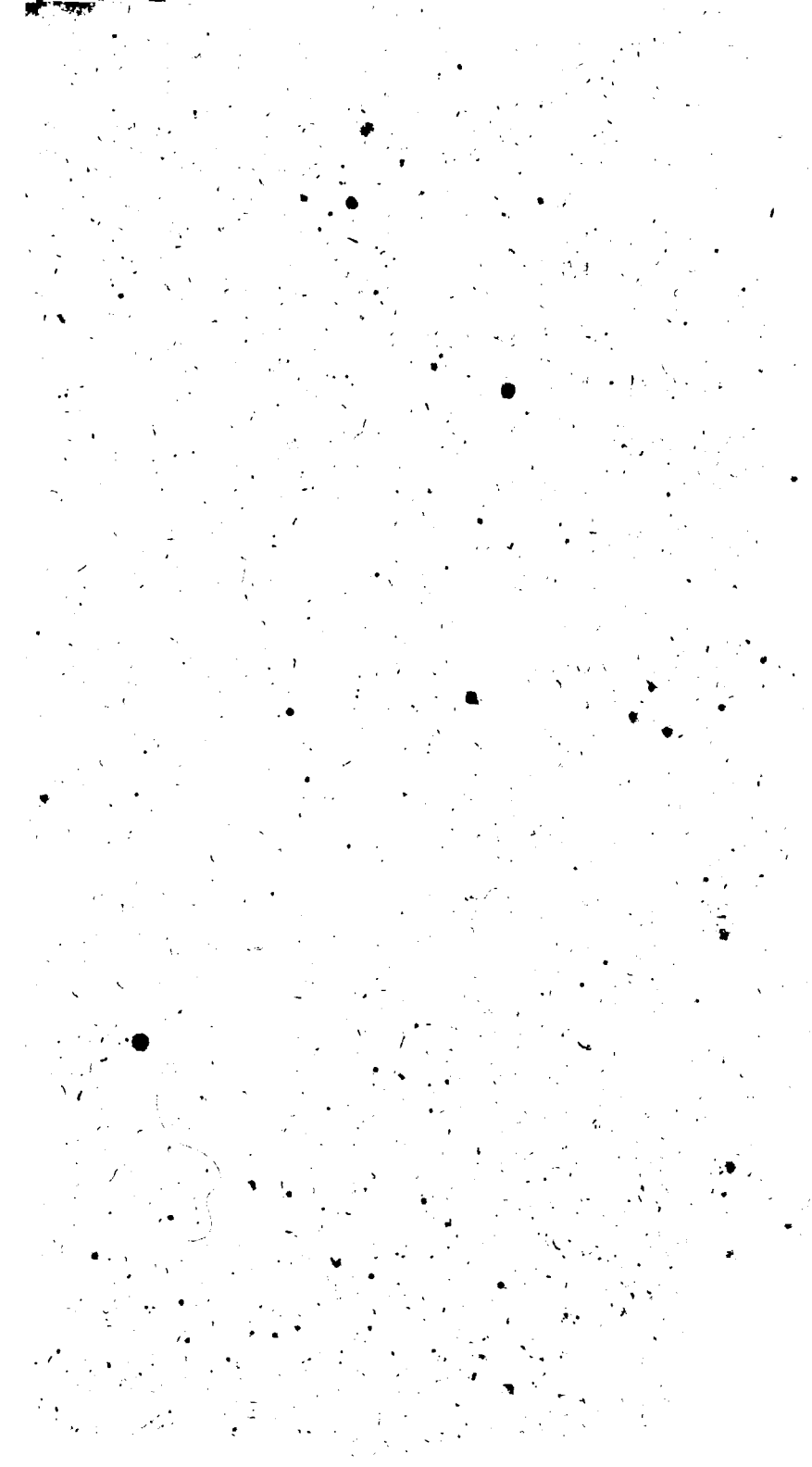
- P. 248 v. antepen. $ABB \rightarrow A$ l. $AB \rightarrow BA$
 — 245 v. 8 et 9 ΠA l. ΠA
 — 248 v. 29 e si sit l. i. e. q. sit
 — 249 v. 18 $-AA^q + BA^q$ l. $-(AA^q + BA^q)$
 — ibid. v. 19 $2. \Gamma H^q - 2(\Gamma H^q - \Gamma A^q)$
 l. $2. \Gamma H^q - 2\Gamma A^q = 2(\Gamma H^q - \Gamma A^q)$
 — 223 v. 9 EZ l. AZ
 — 232 v. 24 $2\Gamma A$ l. $2\Gamma A^q$
 — 240 v. 13 $11. II$ l. $H. 11.$
 — 241 v. 15 $rectangulus$ l. $rectangulum$
 — 242 v. 15 $Obs. 6$ l. $Obs. 5.$
 — 252 v. 3 AG l. AG
 — 255 v. 29 $Obs. (.$ l. $Obs. 4.$
 — 256 v. 21 $HEq\theta$ l. HE^q
 — 258 v. 16 $difficiens$ l. $deficiens$
 — 261 v. 24 $ad Obs. 5$ l. $ad Obs. 4.$
 — 262 v. 12 seu l. $sed,$
 — 272 v. 19 ABE l. ABE
 — 279 v. 22 $B\Gamma$ l. B, Γ
 — 283 v. 23 $BE: EZ$ l. BE, EZ
 — 308 v. 7 $\omega s \alpha$ l. $\omega s \eta$
 — 309 v. 16 $differentia$ l. $differentias$
 — 372 v. 25 $\left(\frac{MN}{2}\right)^2$ l. $\left(\frac{MN}{2}\right)^q$
 — 328 v. 2 $\mu\eta\gamma$ l. $\mu\epsilon\nu$
 — 355 v. 4 BH l. BH
 — 379 v. 9 AGB l. AGB
 — 387 v. 8 AB l. AE
 — ibid. v. 13 $Et angulus$ l. $Angulus itaque$
 — 393 v. 16 $BBc contento$ l. $EB contento$
 — 403 v. 23 $nonnullam$ l. $nonnullas$

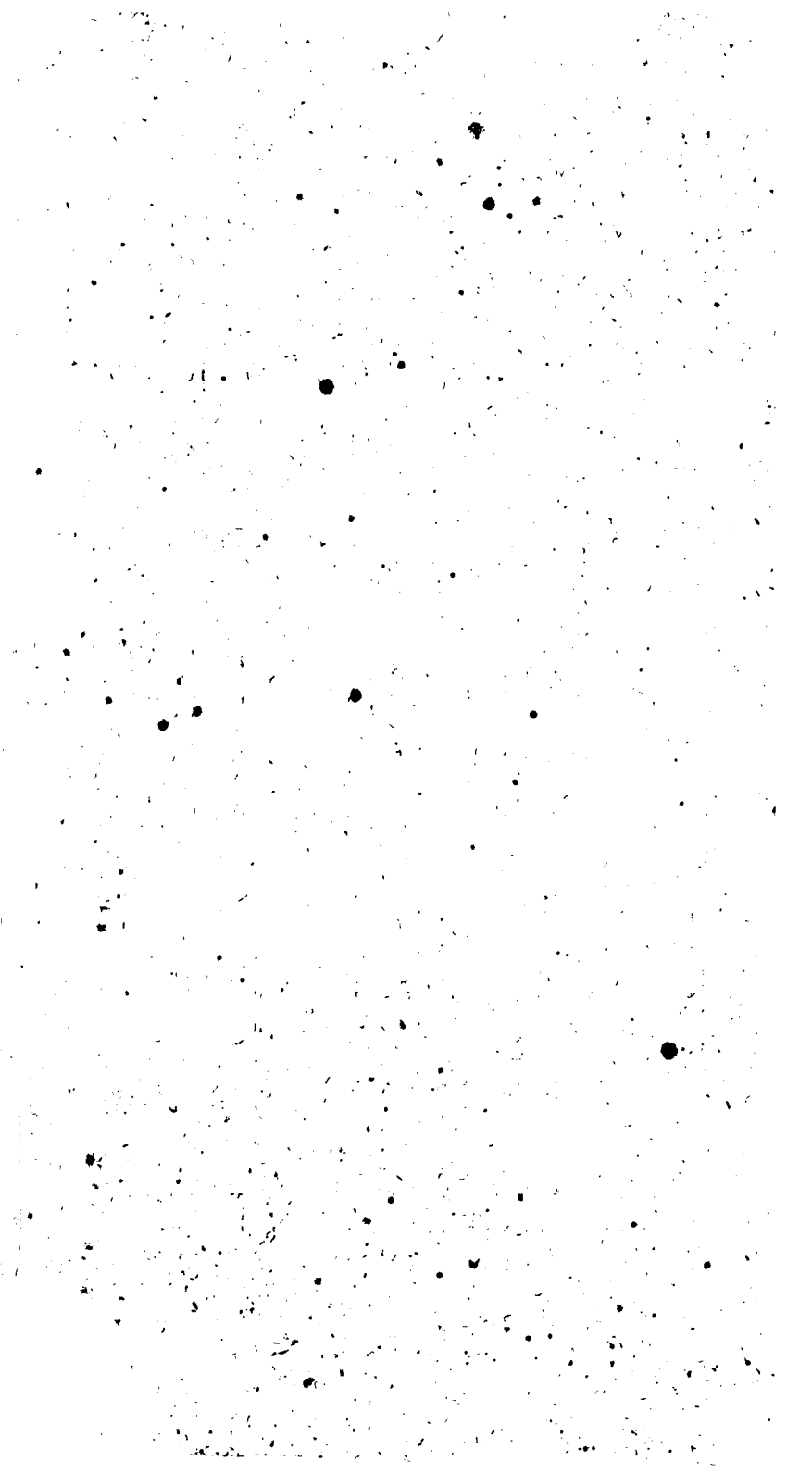
IN TOMO II.

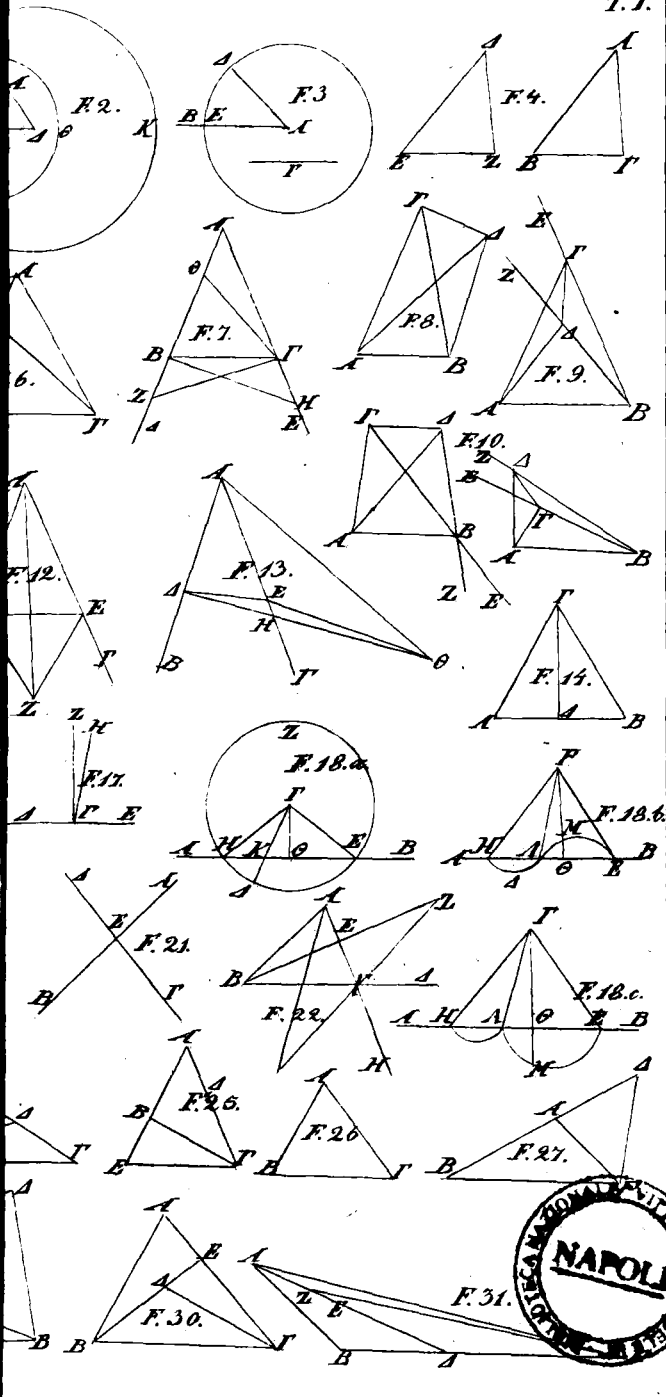
- P. 6 v. 2 $\omega\mu\epsilon\zeta\omega\nu$ l. $\omega\mu\epsilon\zeta\omega\nu$
 — 8 v. ult. $omni$ l. $omnia$
 — 16 v. 40 te l. et
 — 31 v. 21 OA l. OA^2
 — 37 v. 16 BAG l. BAB
 — 38 v. 15 BAA l. BAA
 — 47 v. ult. sit $(n-\frac{1}{2})$ l. sit $(n-\frac{1}{2})$ plus anguli ad
 verticem, ita ut v. gr. Pro octogono
 — 49 v. 28 sin l. sit

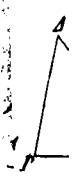
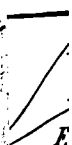
- P. 50 v. 26 2u l. 2ⁿ
 — 61 v. penult. = Rect. l. = Rect.
 3
 — 66 v. 25 2r l. 2^r
 — 67 v. 16 $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 20+1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 21+1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 22+1 \end{smallmatrix} \right)$
 $l. \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2+1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2+1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2+1 \end{smallmatrix} \right)$
 — ibid. v. 16 et 17 2m+1 l. 2^m+1
 — ibid. v. 22 = $\frac{1}{15} 7. = \frac{1}{51}$
 — 71 v. 3 Post quindecagono add.: aequilatero et
 sequianguulo
 — 79 v. 12 confirmare l. confirmari
 — 86 v. 9 ἀναδορυ l. ἀναδορυ
 — 88 v. 11 πᾶντᾶ l. πᾶντα
 — 101 v. 22 pAgB l. pA:gB
 — 108 v. 4 a fine propositioni l. propositione
 — 113 v. ultim. ea: quae l. ea, quae
 — 114 v. 19 (A-B l. (A-B)
 — 121 v. 6 a fine magnitudinibus l. in magnitudinibus
 — 128 v. ultim. ΓΔ l. ΓΔ
 — 140 v. 6 a fine ratione A ratione
 — 158 v. 12 definitionem l. definitionum
 — 161 v. 5 — 2 l. 4
 — ibid. v. 16 duobus l. duabus
 — 213 v. antepenult. disideret l. desideret
 — 214 v. 14 πρὸς l. πρὸς
 — 220 v. 8 ΓΔ l. ΓΔ, E
 — 222 v. 17 τὸ l. τὸ
 — 225 v. 6 a fine compendi l. compendii
 — 227 v. 11 a fine BT l. BTⁿ
 — 228 v. 7 a fine in l. ad
 — 232 v. 2 εὐθεῖαι l. εὐθεῖαι
 — 234 v. 8 οὕτως l. οὕτως
 — 240 v. 14 a fine ABF l. ABE
 — 246 v. 17 hac l. hac
 — 247 v. 5 BEM l. BEI^r
 — 253 v. 3 a fine quartae l. quarta
 — 259 v. ultim. unus l. unum
 — 270 v. 15 τῇ l. τὸ
 — 273 v. 10 a fine singulos l. singulos
 — ibid. v. 9 a fine ipsum l. ipsum
 — 280 v. 5 a fine sciendum l. faciendum
 — 281 v. 8 a fine sextus l. textus
 — 290 v. 14 πεπερασμένη l. πεπερασμένη

- P. 292 v. 6 *a fine* ad l. at
 — 293 v. 13 *a fine* es, l. est
 — *ibid.* v. 8 *a fine* Euclidea et l. Euclideae
 — *ibid.* v. 2 *a fine* a l. at
 — 294 v. 9 *τὸ* l. *τῶ*
 — 298 v. 12 *a fine*: trianguli l. rectanguli
 — 301 v. 10 *a fine* verba: sunt EI,IZ, et AB deleantur.
-









F 31

F E



Z

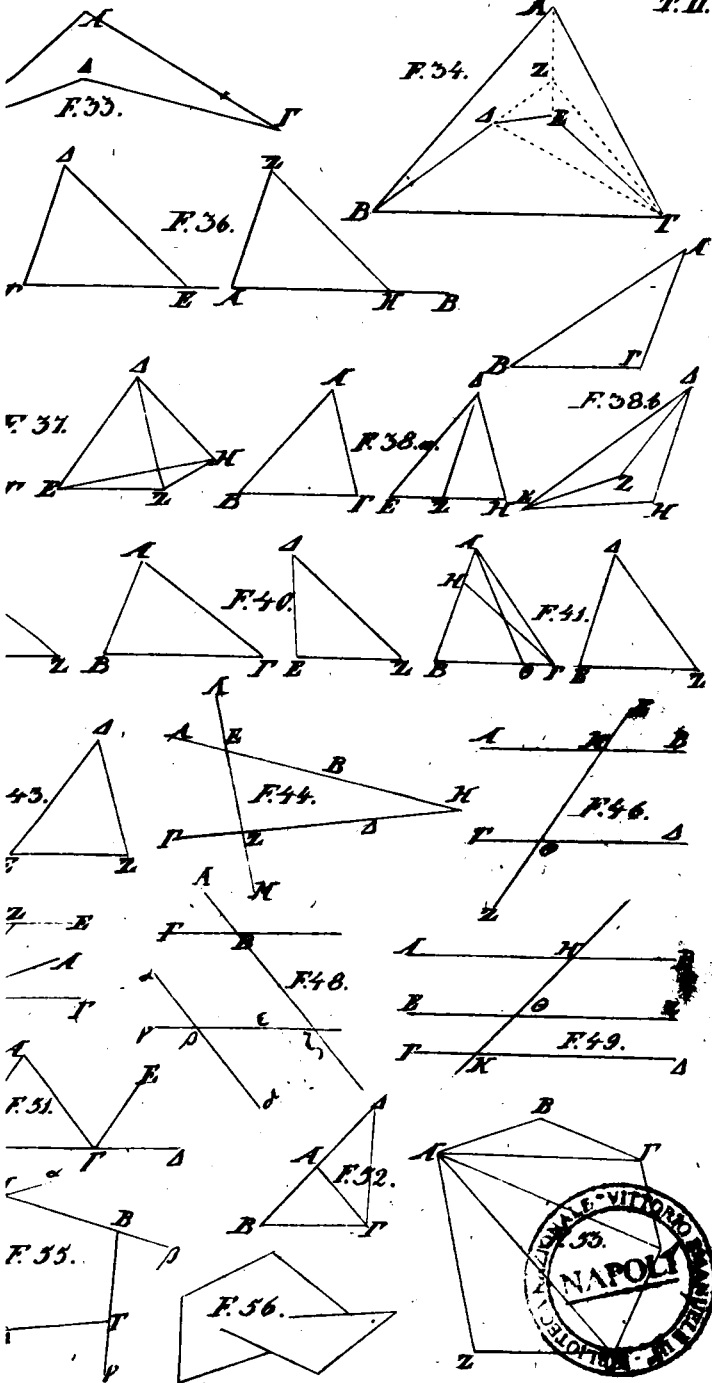


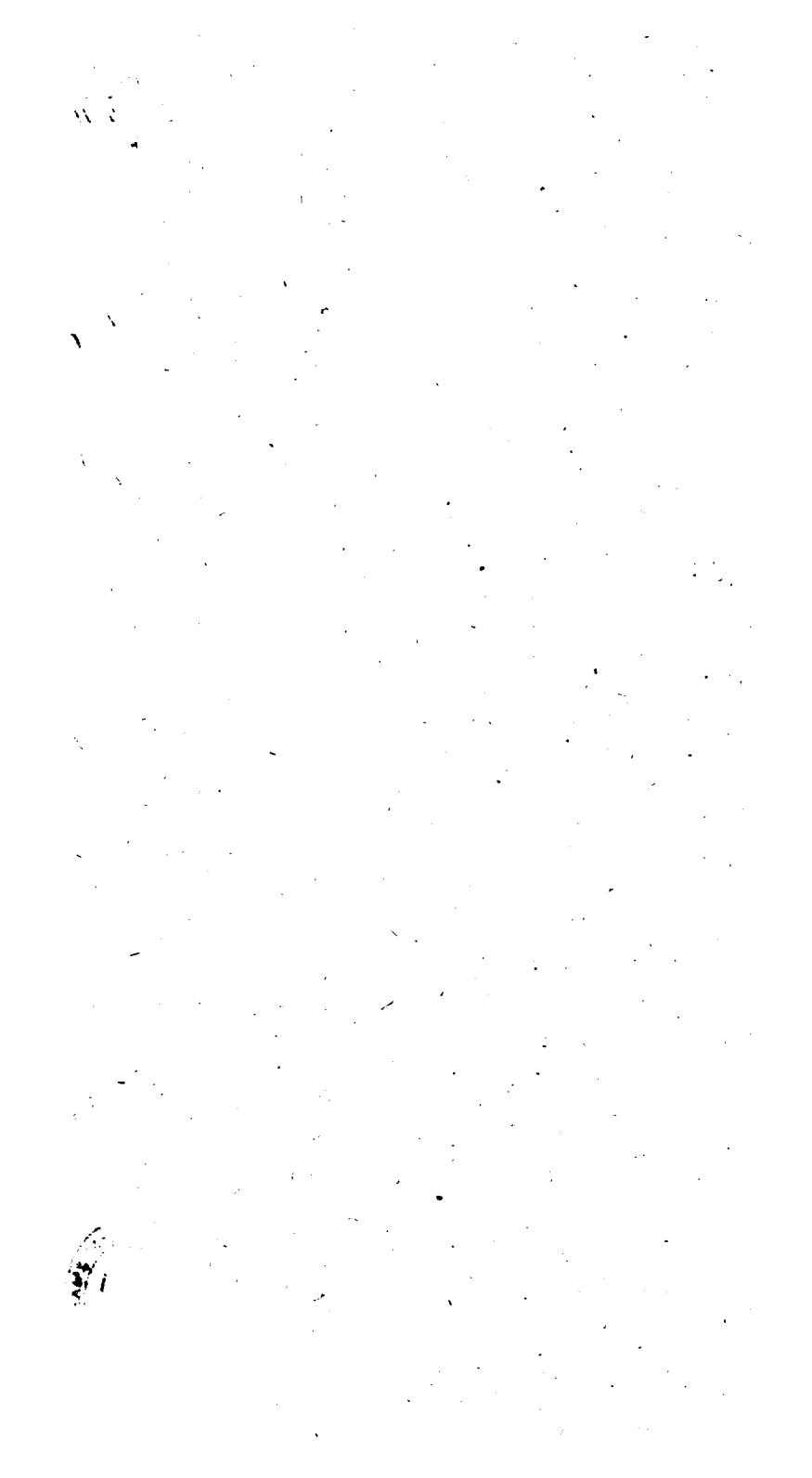
F

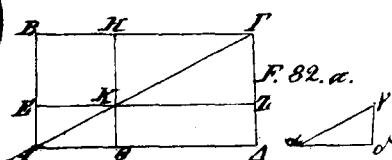
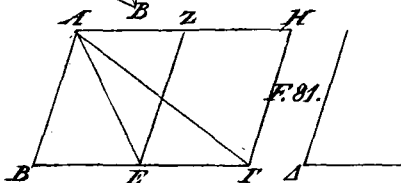
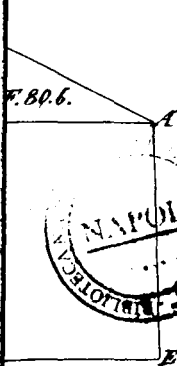
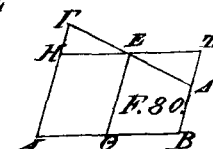
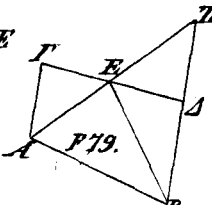
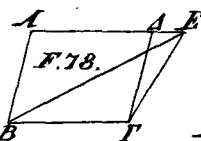
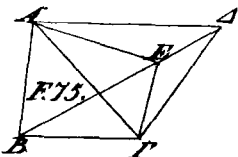
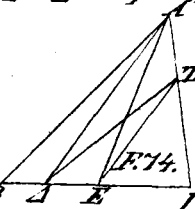
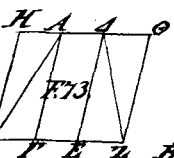
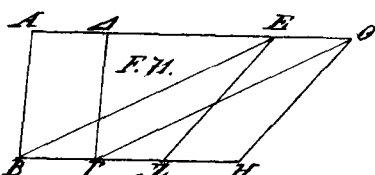
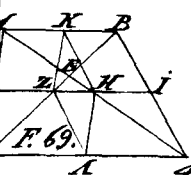
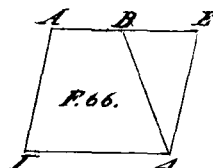
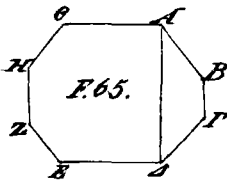
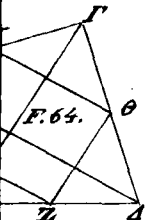
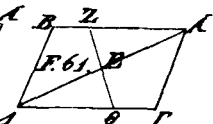
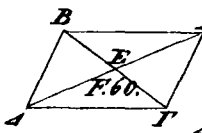
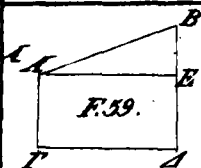


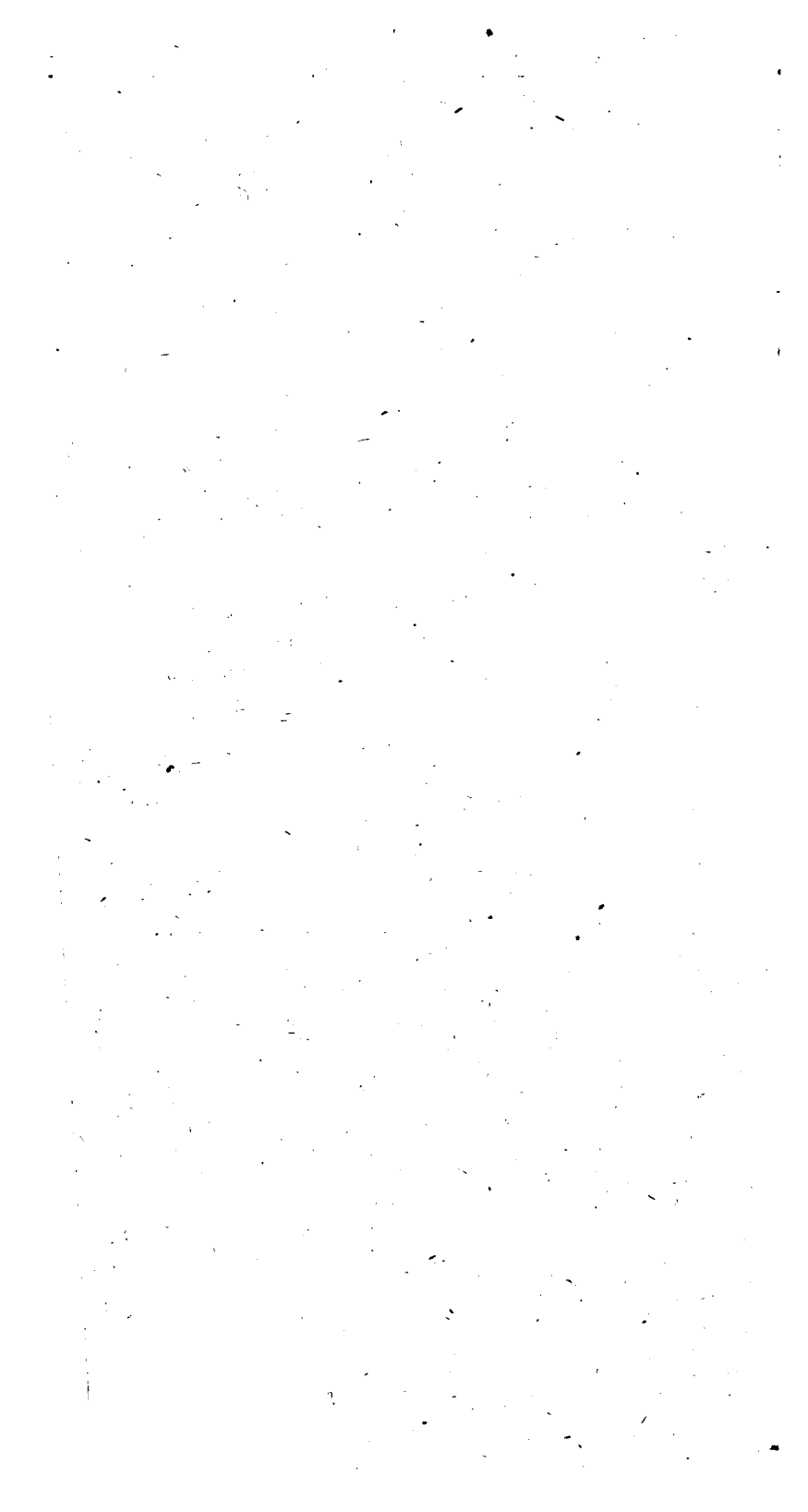
F

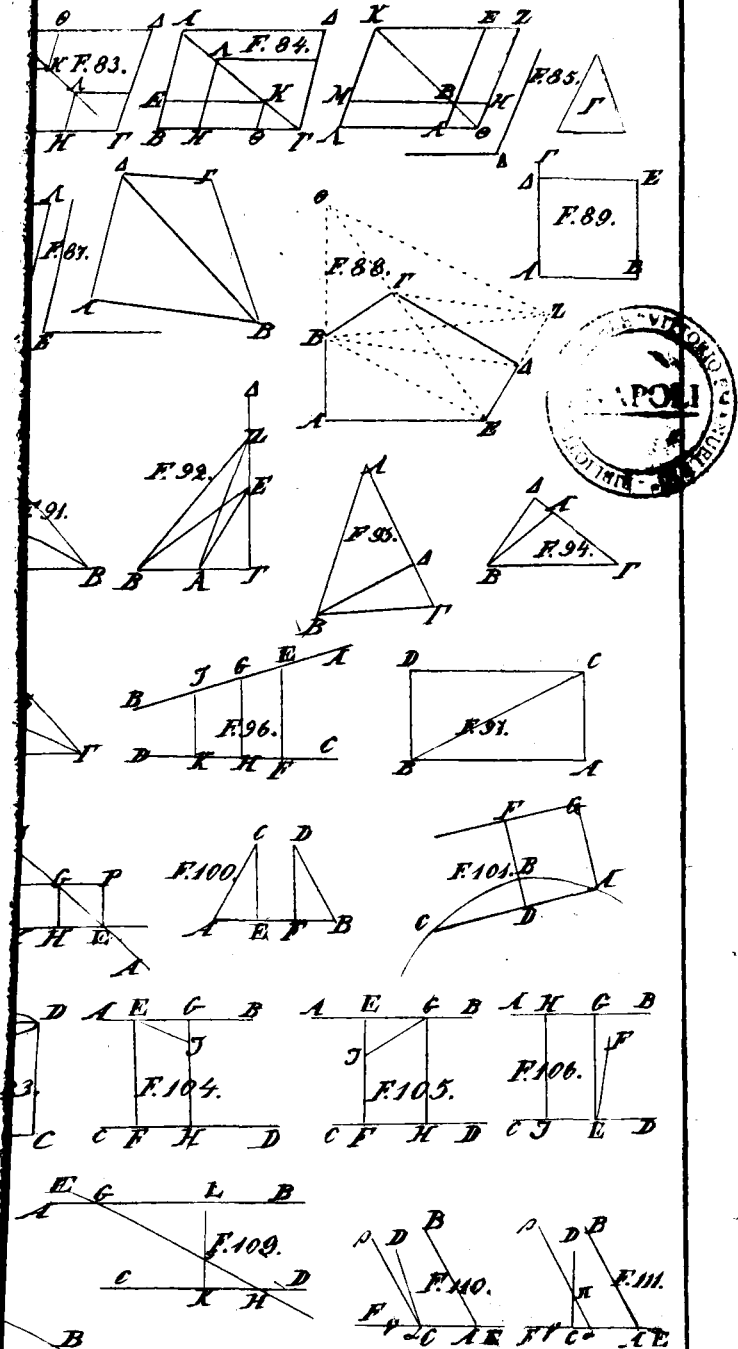


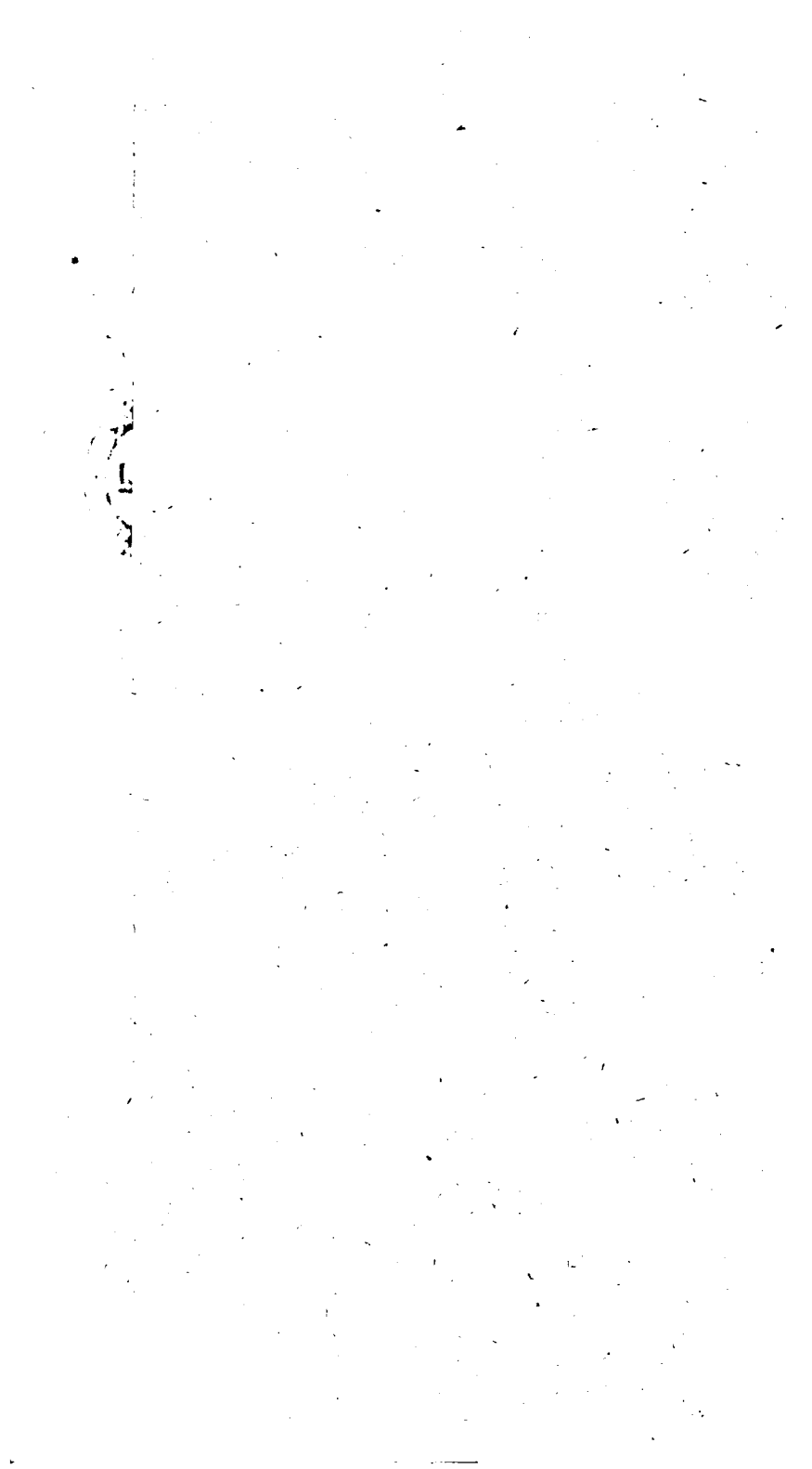


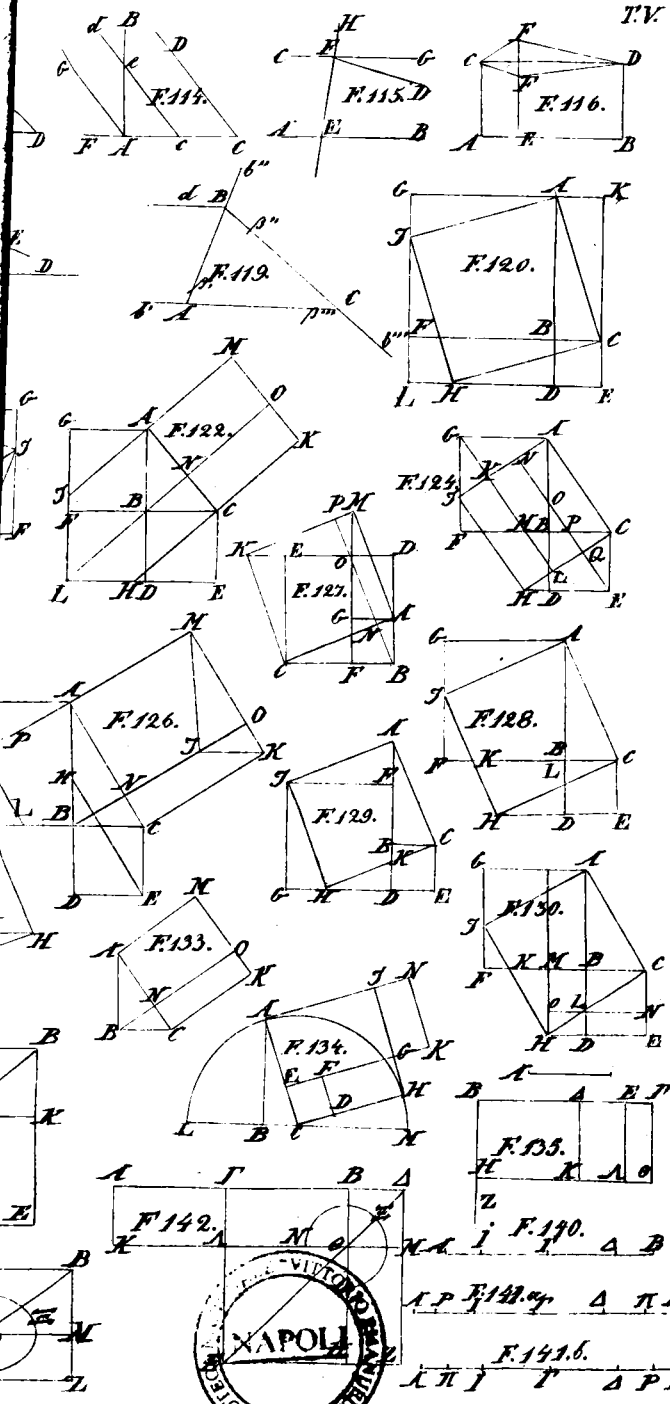




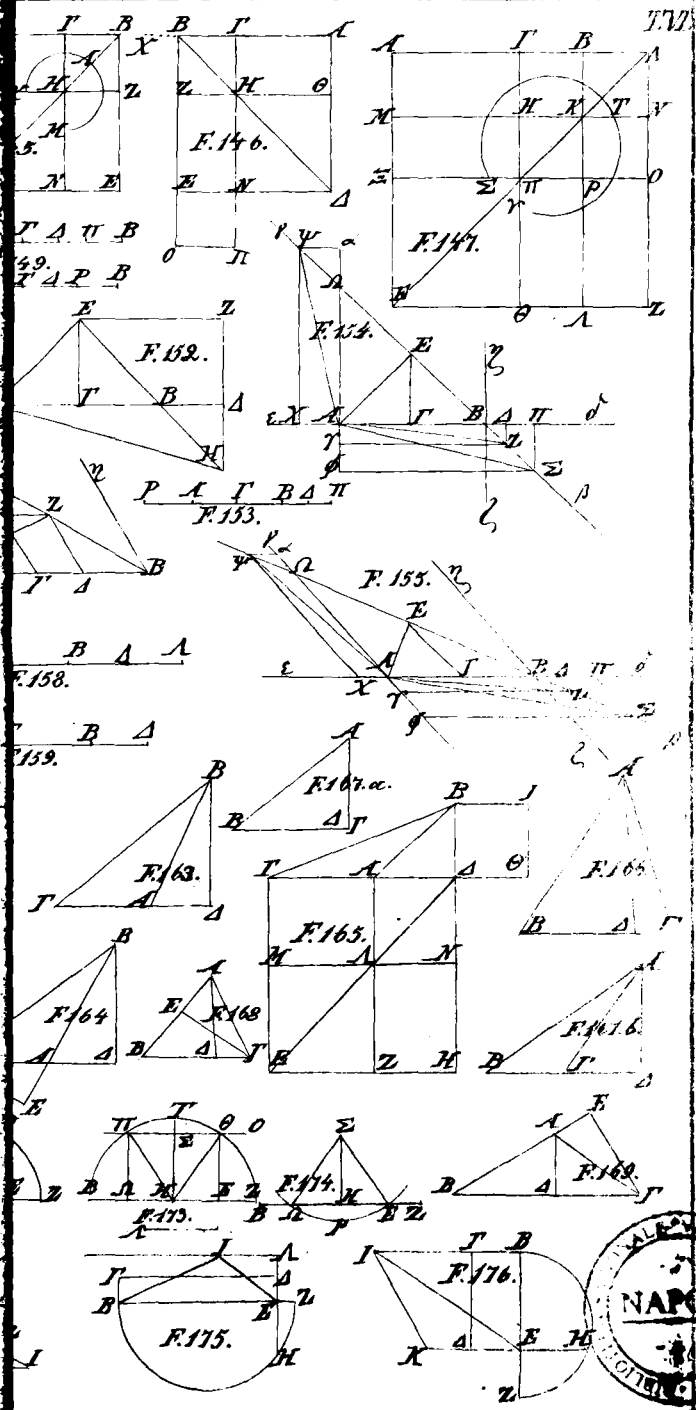




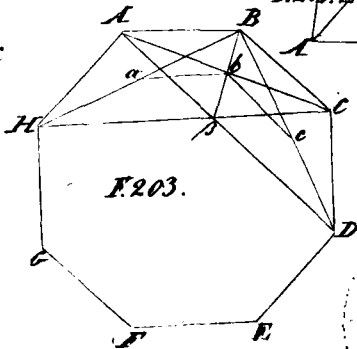
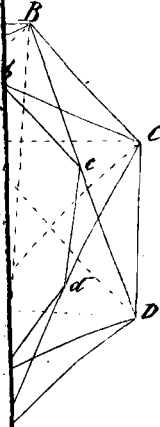
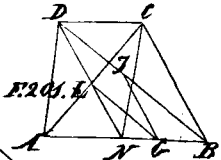
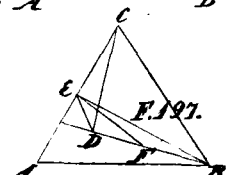
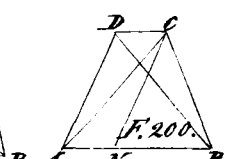
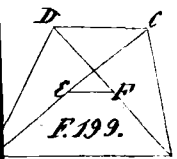
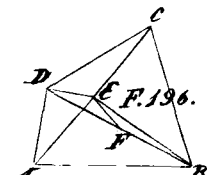
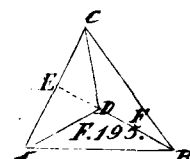
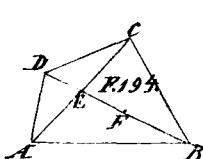
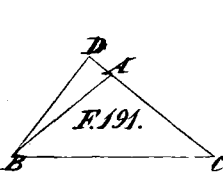
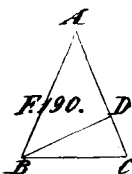
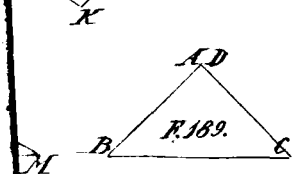
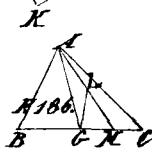
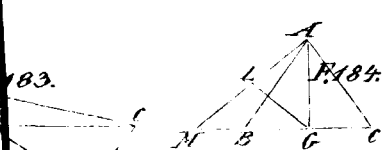
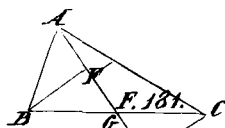
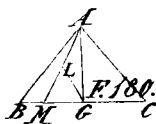
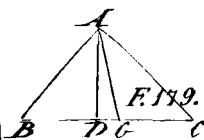


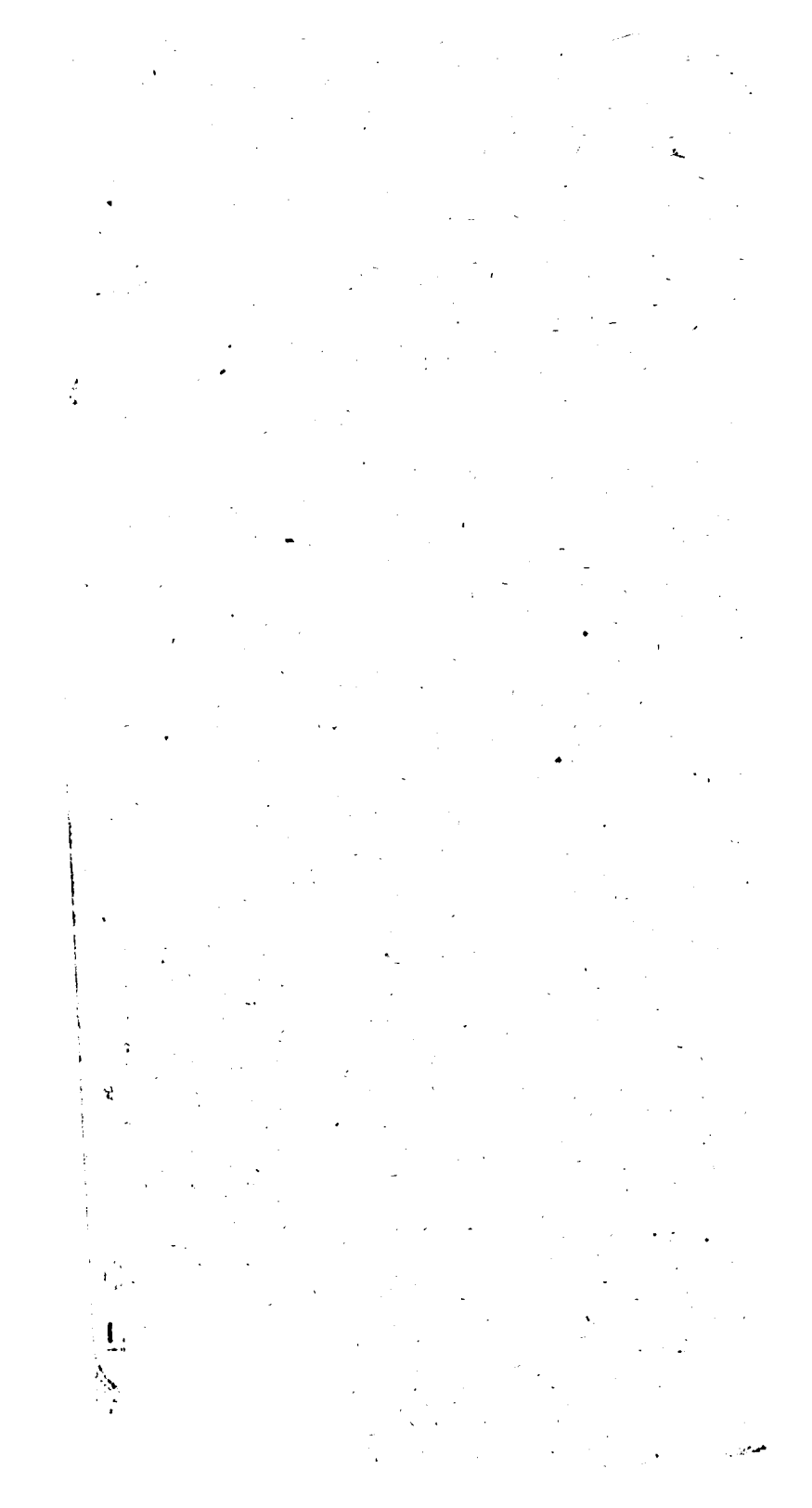


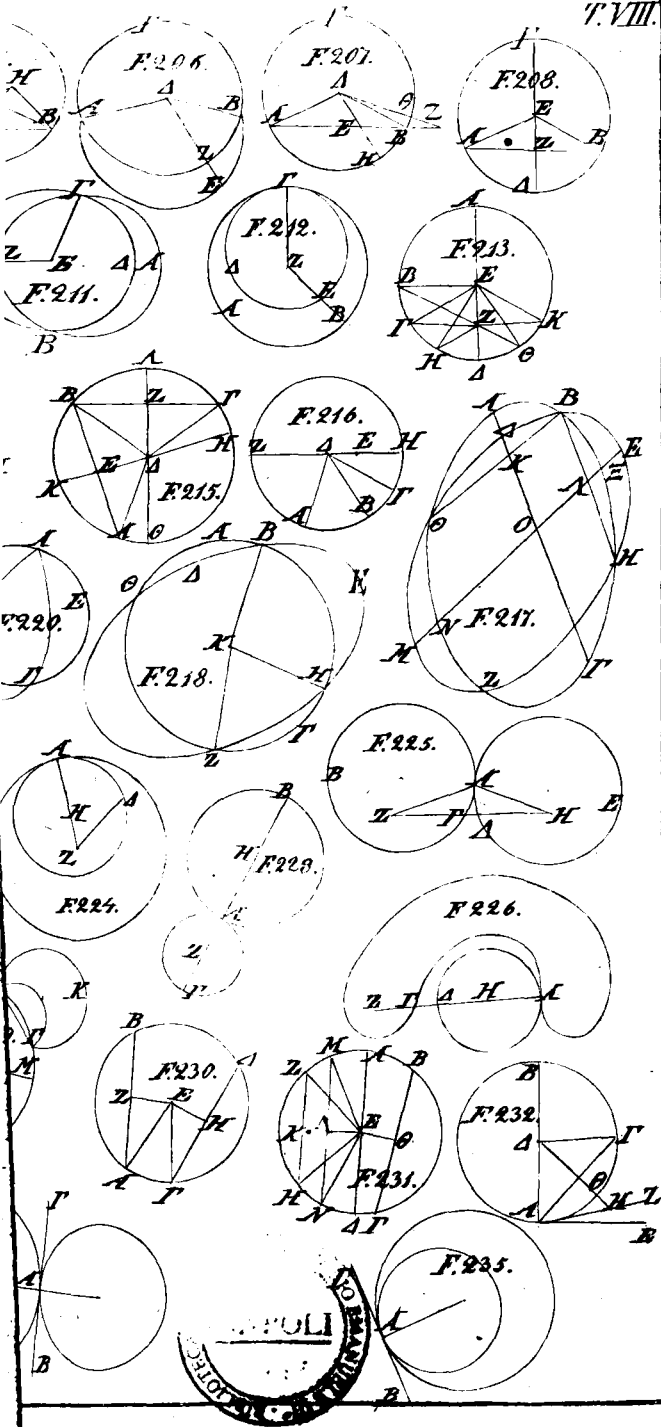
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100



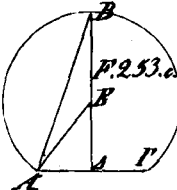
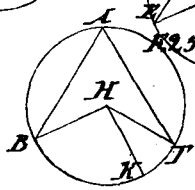
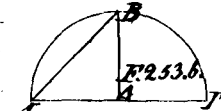
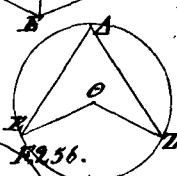
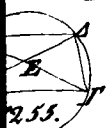
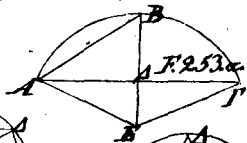
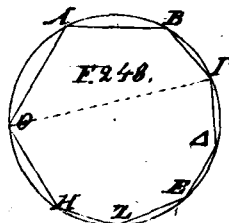
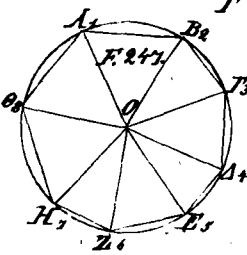
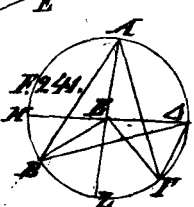
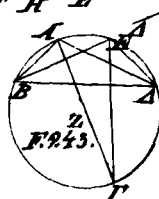
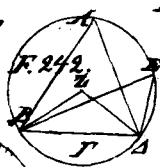
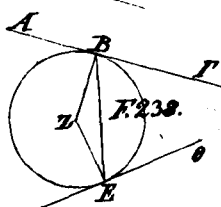
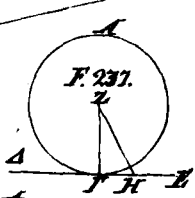
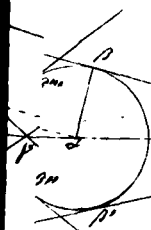




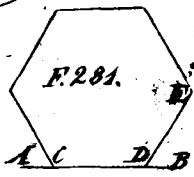
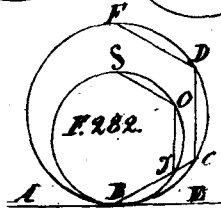
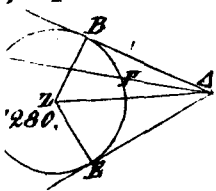
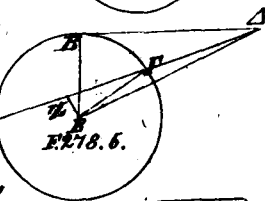
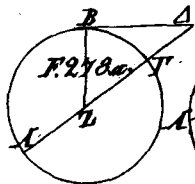
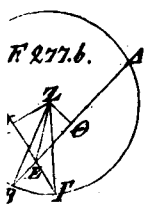
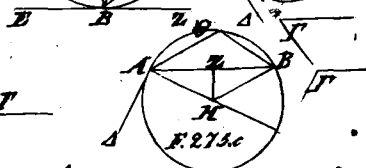
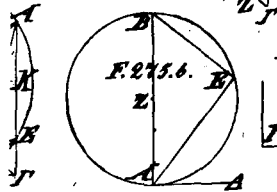
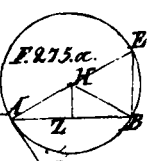
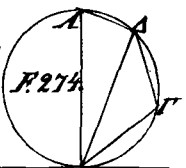
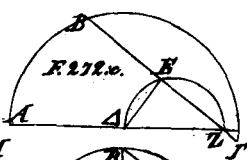
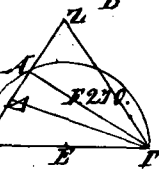
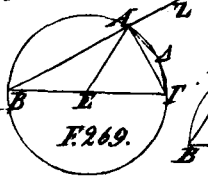
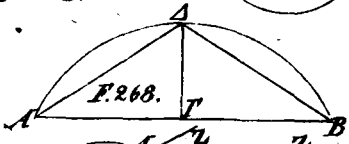
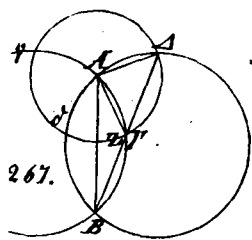
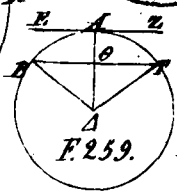
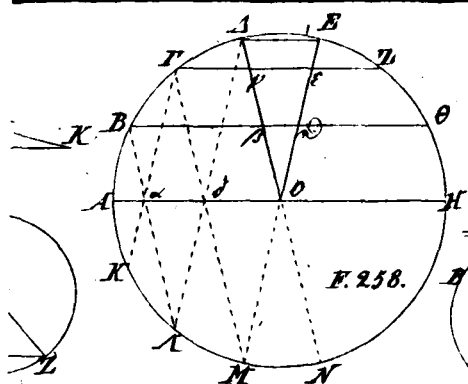




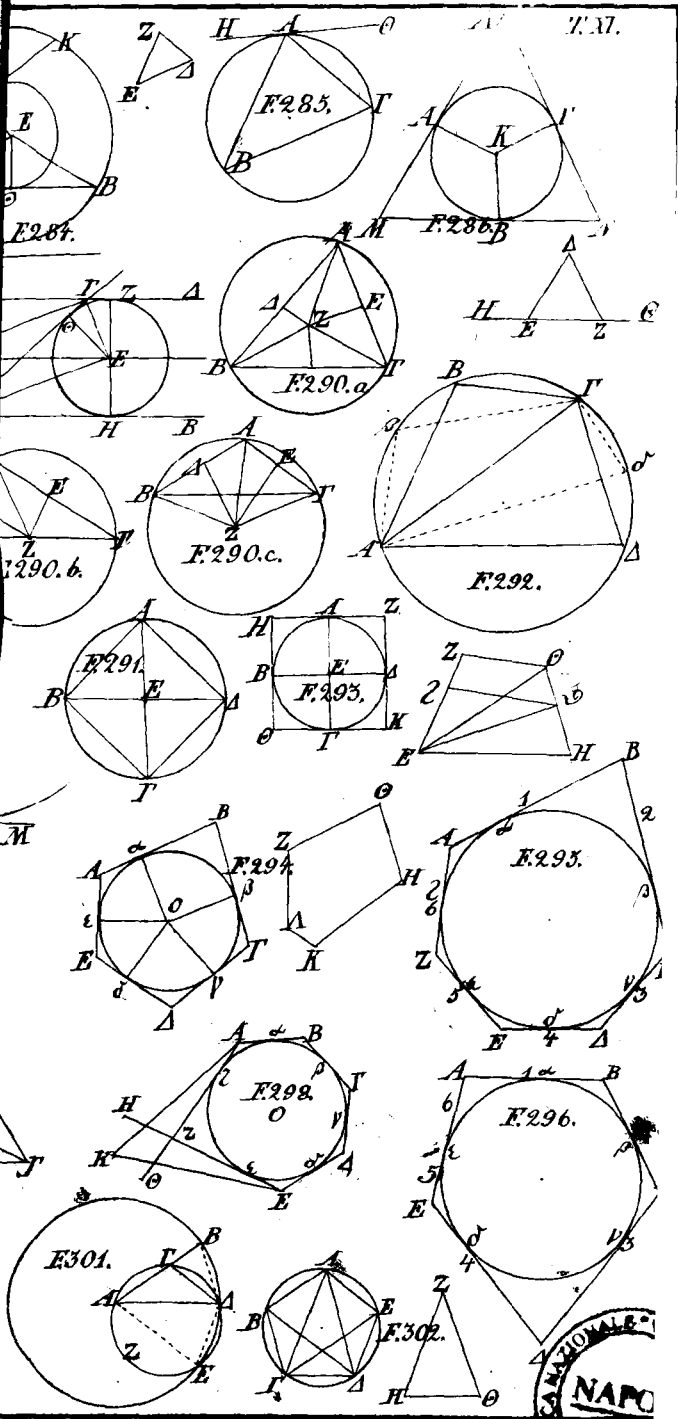




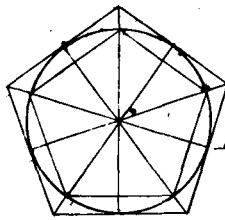
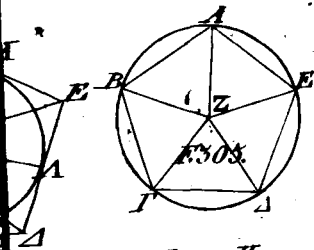








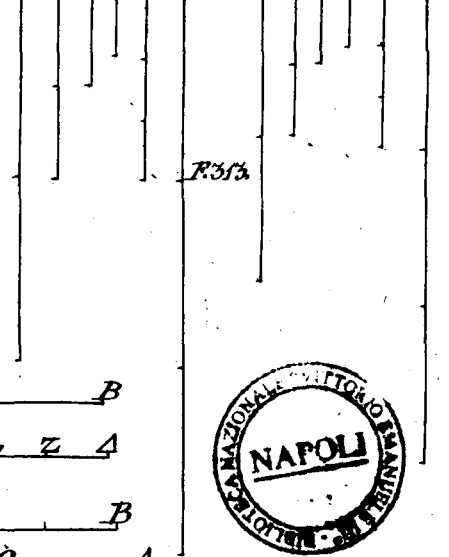
11/11/11



A H B
E
F Z Δ
Z F309.

A B H
F
Δ E Θ
Z F310.

K B A B H M A Z Γ Δ Θ N



F313

A E B
F315. F Z Δ
H B
F Θ Δ
F316b.

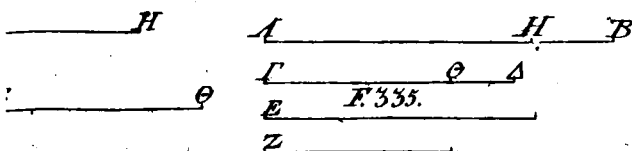
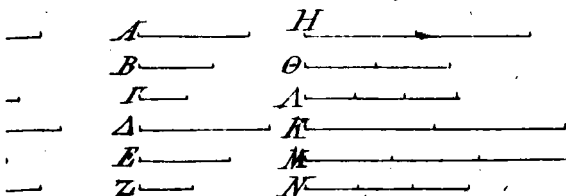
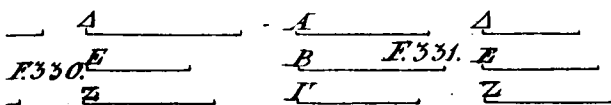
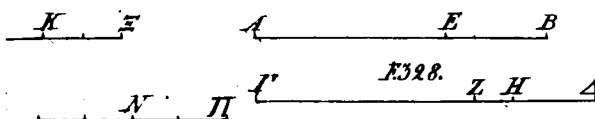
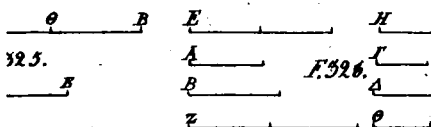
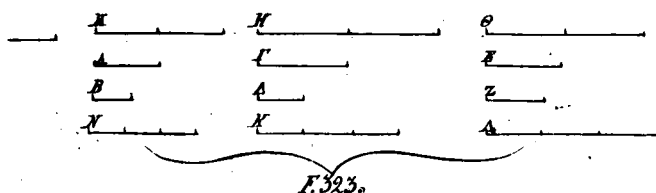
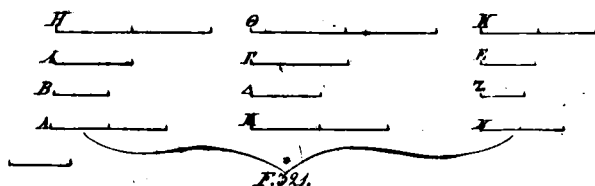


A E B
F
Δ
Z H Θ

Θ
K
A F318b.
M
N

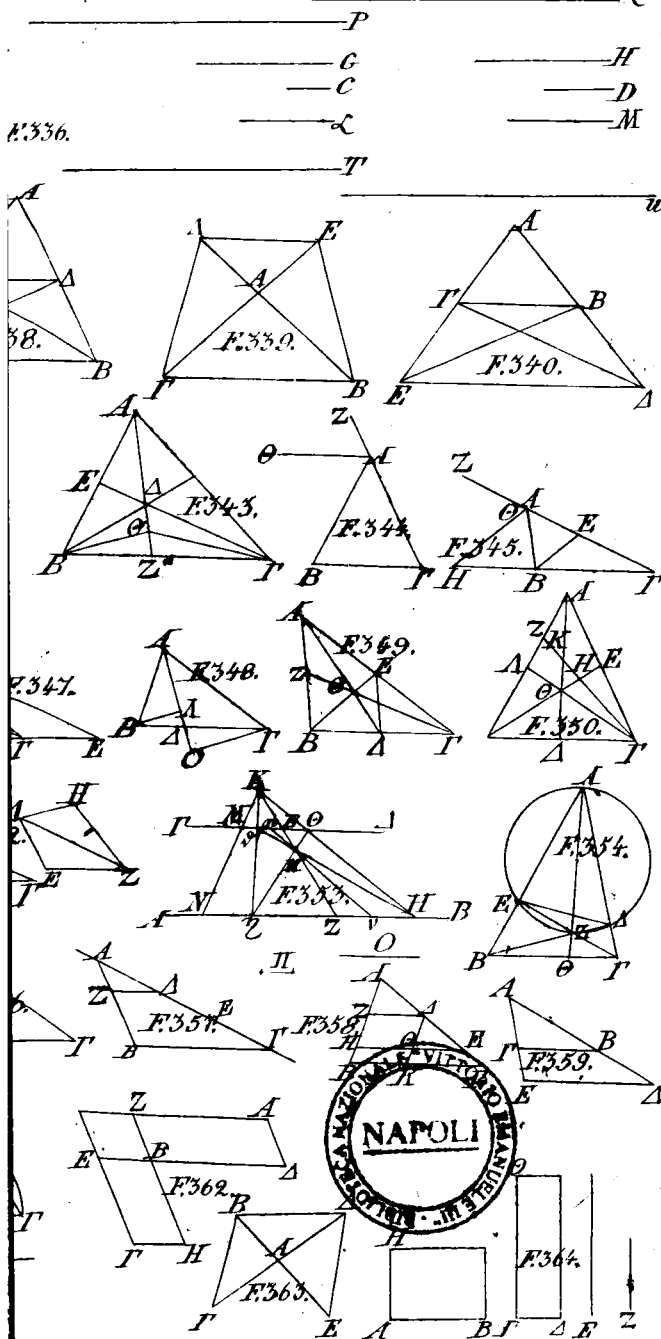
F318a.



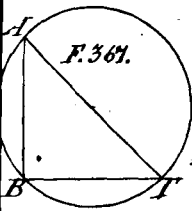




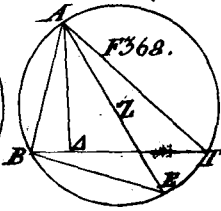
F.336.



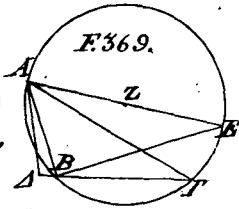




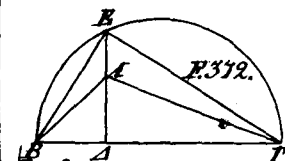
F.367.



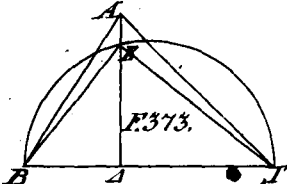
F.368.



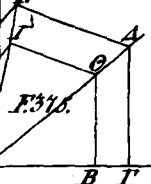
F.369.



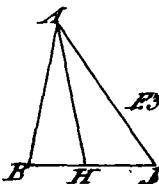
F.372.



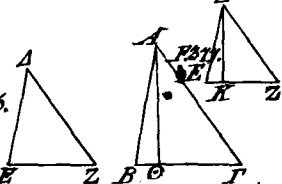
F.373.



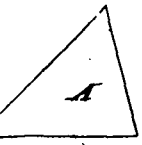
F.375.



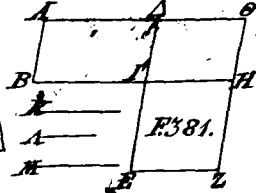
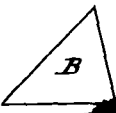
F.376.



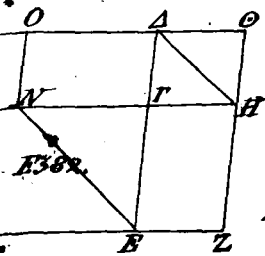
F.377.



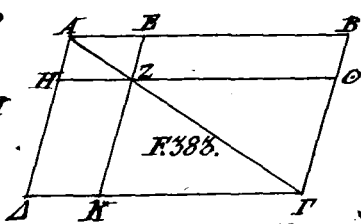
F.379.



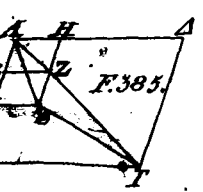
F.381.



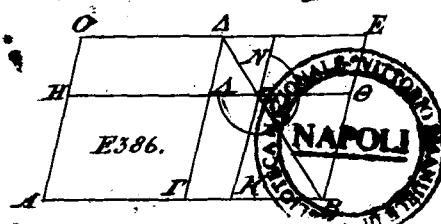
F.382.



F.383.



F.385.



F.386.



2

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

