Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Bibliothèque électronique suisse

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Acceſſit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRAtionibus, accuratiſque ſcholiis illuſtrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum acceßione poſt primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergenſi è Societate IESV.



FRANCOFVRTI
Ex officina typographica Nicolai Hoffmanni, ſumptibus
IONÆ RHODII.

M. DC VII.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verùm antè ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorúmque maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idq; adeò, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quàm solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non rarò pleraq; laterum sunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι, à Latinis Irrationales appellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certè inter se sunt incommensurabiles, atq; adeò sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absq; his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principijs, definit initio vnitatem, docetq; eam esse, secundum quam vnumquodq; eorum, quæ sunt,

Vnum esse dicitur. Nam secundum Vnitatem Vnum lapidem, Vnum animal, Vnum corpus, &c. dicere solemus. Caterùm Vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex Vnitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt Vnitates eum constituentes: Ita vt Vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo Vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. Vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoq; numerus 100. ex centum Vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cùm eos Vna eademq; mensura, nimirum Vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cùm plurima earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissimè lib. 10. ostendetur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hîc partem duntaxat aliquotam definit, cùm hæc solùm propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latiùs explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cùm illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7, cùm 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IV.

PARTES autem, cùm non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cùm eum non metiatur, nisi per suas Vnitates, pars ipsius dici non debeat; aptè tamen congruenterq; partes poterit appellari, quod quinq; contineat Vnitates.

tes, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquidò constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantùm, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quacunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorũ numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cùm vnitas eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc verò per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solùm eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verùm etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantùm eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quòd omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cùm ipsum metitur, partes verò, cùm non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessariò minor aut pars, aut partes est maioris, cùm ea persæpe sint incommensurabiles, vt apertè liber decimus demonstrabit, atq; adeò minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solùm in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Rectè igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hîc autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX verò maior minoris, cùm maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solùm numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodò numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeò vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si verò maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris

non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur: Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes aequales, cùm eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR verò, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certè quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicuè colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeò bifariam diuidi posset. Nam huius impar is 11. dimidia pars essent quinq; vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cùm eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6 metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24 cùm eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum.

fundum, & excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt & triq3 definitioni particulam, tantum, ita & numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, & propositus numerus par 24. neq3 pariter par sit, cùm eum non tantùm metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neq3 pariter impar, quod eum metiatur non tantum, & dictum est, par 8. per imparem 3. Verum etiam par 6. per parem 4. Sed aptè vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam & triusq3, & constat. Itaq3 tria constituentur genera numeri paris inter se maximè diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui à quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamẽ hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, & perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quib. non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. & ubi manifestè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur per parem numerũ, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonstrat q3 omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros verò, qui dimidios impares habẽt, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros deniq3, qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, & sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarũ propositionum, hos postremos numeros, alios q3 similes, & verè esse, secundũ traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici rectè pariter impares, quanquã nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planiùs ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER verò impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq3 hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem vnitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola Vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neq; pariter impar, neq; imparitèr impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos sola Vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

SICVT numerus ille, quem sola Vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos praeter Vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, praeter Vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola Vnitas, mensura communis illos metitur. quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem verò isti 2.4. tamen nullus istorum vtrumque metitur, sed sola Vnitas vtriusq; est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter se dicentur, quod praeter Vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensurã hunc numerum 5. Denig; Vnitas, & quinis numerus, dici possunt, licet improprie; numeri inter se primi: quia sola Vnitas Vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem praeter Vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterq; horum numerorum 3.5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cùm eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, praeter binariũ, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIV.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos praeter Vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodũ & numerus ille, quem praeter Vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur; licet per se sumptus, Primus vocetur.

NVME-

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. ϑnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoq; ϑicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot ϑnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut ϑicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. ϑel è contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantiũ habet ad ϑnitatẽ. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, ϑt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est ϑnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium ϑnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quã alter multiplicantium ad ϑnitatem habet. Itaque Multiplicatio siue ductus ϑnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC ϑides ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. ϑt 8. ad 1. Vel ita ad 8. ϑt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est haec alia docens quid sit numerum diuidere numerum: quippe qua necessaria omnino sit ad ea, qua nos in iis, qua sequuntur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit nu-

rit numerus 8. qui octo ſuis ϑnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque ϑiciſſim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis ϑnitatibus indicat diuidentem numerum 8. in diuiſo 48. contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad ϑnitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, ϑt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis ϑnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus ϑnitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad ϑnitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio ϑnius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuiſus ad diuidentem.

ITA ϑides ex diuiſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1. ϑt 48. ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. ϑt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam

A. 48. B. 8. C. 6. D. 1.

enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, ϑt C, ad ϑnitatem D; Ex definitione autem diuiſionis, ita quoque ſe habet A, ad B, ϑt C, ad ϑnitatem D; perſpicuum eſt, numerum ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, ϑnitatem.

HÆC omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris cum fractis: Id eſt, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſiue fracti adhæreant integris, ſiue non) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante ϑnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiſo continetur: Ita ϑt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad ϑnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad ϑnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$ *multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit com-*

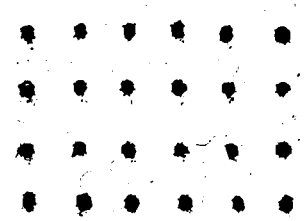
rit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. ℧nitates, procreatusque fuerit numerus 10. Quia enim ℧nitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, quae est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit ℧icies, toties scilicet, quoties ℧nitas est in 20. productusque fuerit idem numerus 10. Vbi ℧ides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. ℧t $\frac{1}{2}$ ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. se mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem ℧nitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$ sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet ℧nitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusque ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. ℧icies contineri in diuiso numero 10. ita ℧t eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. qua numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$ quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$ indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{6}$. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquido constat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{2}$. Caterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, ℧bi omnia haec, quae de multiplicatione, diuisioneque fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas ℧nitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati ℧ocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac rectae lineae angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, ℧t latius lib. 2. explicauimus. Vt



numerus

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius ϑnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius ϑnum latus sex ϑnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras, Euclides solum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ alterâ parte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatemve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem ϑnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. necnon 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

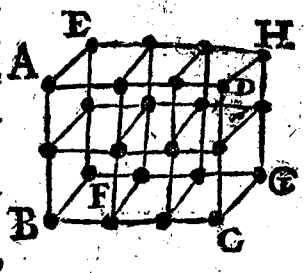
QVIA verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero ϑnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, ϑnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ ϑnitates, quæ multiplicata mutuo ipsam ϑnitatem producunt.

XVII.

CVM verò tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabi-

pellabitur numerus 24. solidus, numeri verò 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, qua Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius verò latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium vnitatum.



At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatum; quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura propositi. Si enim basis sit BCGF, octo vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor vnitates, & BF, latitudo duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo BA, vnitates tres. Similiter si basis sit ABFE, sex vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem BC, habens quatuor vnitatum. Si denique basis sit ABCD, 12. vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis EFGH, constabitque totus numerus solidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.

DENIQVE & vnitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non propriè, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua carum multiplicatione procreantes.

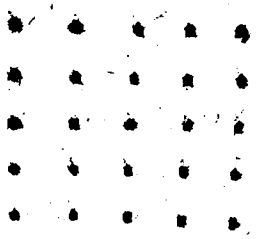
DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam; quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum ϑnitates suas in longum & latum dispositus, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita ϑt omnia latera sint æqualia, ϑel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, ϑocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius ϑnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque ϑnitates, ideoque æqualiter æqualis erit.

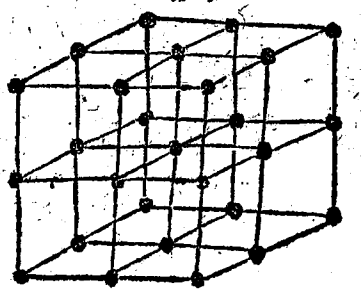


ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, ϑel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix ϑerò quadrata ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

CVBVS verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoq; illum numerum ϑocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius ϑnitates in longum, latum, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita ϑt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius ϑnitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres ϑnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



QVILIBET ϑerò trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, ϑel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi,

undi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; in ſubmultiplici verò, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neque æquè multiplex eſt, neque eadem pars, neque eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemve partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

QVO-

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus conferantur, quod primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et è contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaqualitatis habent. Nam si de proportione aqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, aquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad aquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, aquales esse. Cum enim aquales numeri sint eiusdem, vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem aqualiter contineant, eandemque insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus aqualium sit vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos aqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, vel partes; perspicuum est, aquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eandem habentes eandem proportionem, sunt illius vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum aqualiter continent, eandemque insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem, manifestum est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, aquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad

quem

Quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si rectè hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. *quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationē reuocentur, vt ad* $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$. *& posteriores quoq; ad eandem denominationem, vt ad* $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$. *Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt* $2\frac{7}{8}.4\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. *cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur,* $\frac{23}{8}.\frac{36}{8}$. *& posteriores duo ad hos* $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$. *atque ita de cæteris.*

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quælibet duo illius latera quibuslibet duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HÆC porrò similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tam duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunque, quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $2\frac{2}{3}$. 6. *& alia duo* $1\frac{1}{3}$. 12. *quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent prioria duo numerum planum* 4. *posteriora verò numerum* 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si verò minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur; partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partib. sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, siue eum metiatur, siue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnulla alia, quibus proximè succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. *metiri dicitur numerum* 12. *per* 3. *quia multiplicatus per* 3. *producit* 12. *Eademque ratione numerus* 3. *eundem numerum* 12. *metietur per* 4. *cum ex multiplicatione* 4. *in* 3. *numerus* 12. *produ-*

producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. *metiri dicitur numerum* $13\frac{5}{12}$. *per* $5\frac{3}{4}$. *quia multiplicatus per* $5\frac{3}{4}$. *gignit* $13\frac{5}{12}$.

XXIV.

PROPORTIO numerorũ est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partẽ, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hæc comparatio, habitudo vel, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVÆ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartũ, triplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundũ: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNCIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædē partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV. QVO-

IV.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM ☉nitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito ☉nitates, ipsum constituit: Quamobrem ipsum metitur per ☉nitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerũ ex suis ☉nitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus seipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per ☉nitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus E, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, ☉nitates; A .... B ... C ..... *perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.*

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per ☉nitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3, numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B, producere ipsum C.



Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum B D. Cum enim A, metiatur ipsos B C, C D; erit tam B C, quam C D, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo B C, in partes B E, E C, ipsi A, aquales & ipso C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, aquales; erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, aqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.



XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D; quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D, erit C D, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo C D, in partes C E, E D, ipsi B, aquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D, quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam numero E D, aqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compositum. Quod est propositum.



XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, &

BC, & BD: erit tam BC, quam BD, ipsius A, multiplex, aut certè BD, ipsi A, æqualis erit. Diuiso ergo tam BC, quam BD, in partes ipsi A, æquales: erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipsi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipsi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum DC. Quod est propositum.

A ...
B ..... D ... C
B ..... D C
B ... D C

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt. 1.

SINT duo numeri propositi inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties potest, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, esse inter se primos, hoc est, solam vnitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H, communi mensura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars sit ipsius AE, vel certè ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) a metietur quoque H, ipsum AE: At H, metitur quoque totum AB. b Igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipsum CF. c Igitur & H, ipsum CF, metietur; Ac proptera, cum & totum CD, metiatur, d metietur quoque reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipsum EG; e metietur etiam H, ipsum EG: Metiebatur autem & H, totum EB. f Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrem, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... E .. G. B
C ... F .. D
H -----

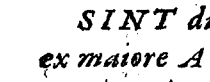
a 11. *pro nun.*
b 12. *pro nun.*
c 11. *pro nun.*
d 12. *pro nun.*
e 11. *pro nun.*
f 12. *pro nun.*

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas.

SINT duo numeri inter se primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB,



a 11. pro nun. *numerum FD, metitur; & FD, ipsum EG, a metietur quoque GB, ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum metiatur, b metietur quoq; numerum EB, ex EG, GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum CF.*
b 10. pro nun. *c Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsam*
c 11. pro nun. *FD, positus sit metiri: metietur d quoque ipsum CD, ex CF, FD, compositum. At verò CD, metitur ipsum AE. e Igitur & eundem*
d 10. pro nun. *AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; f metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB,*
e 11. pro nun. *compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter*
f 10. pro nun. *se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

EODEM modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsq; non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractũ metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, es-
g 1. sept. *sent propositi numeri inter se primi, g vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.*

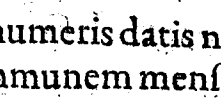
EX his facilè dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem me-
h 1. sept. *tiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, h vt Euclides demonstrauit: Si verò reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB,*

tus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit. eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad vnitatem deueniretur, *a* numeri AB, CD, essent inter se primi; quod est contra hypothesin. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico FD, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD.



Quod enim vtrumque metiatur, ita ostendemus. Quia FD, metitur ipsum EB, & EB, ipsum CF; *b* metietur quoque FD, ipsum CF, atque adeò cùm & seipsum metiatur, *c* metietur & totum CD, ex CF, FD, compositum. At CD, ipsum AE, metitur. *d* Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cùm FD, metiatur quoque ipsum EB; *e* metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

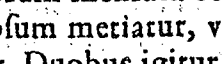
a 1. *sept.*
b 11. *pro nun.*
c 10. *pro nun.*
d 11. *pro nun.*
e 10 *pro nun.*

QVOD autem FD, sit maxima mensura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipsum AE, *f* metietur quoque G, ipsum AE. *g* Igitur & residuum EB: At verò EB, metitur CF. *h* Metietur ergo & G, eundem CF. *i* Igitur & residuum FD; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quàm FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima est mensura numerorum AB, CD.

f 11. *pro nun.*
g 12. *pro nun.*
h 11. *pro nun.*

QVOD si minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cùm & seipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

i 12. *pro nun.*



COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros, metiri quoq; maximam eorundem communem mensuram.

HOC elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD: Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eadem ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ dicta sunt, facilè cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad

A . . . . . *propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter*
B . . . . . *se primi: Qui si fuerint inter se primi, non e-*
C . . . . . *runt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.*

SI verò A, & B, fuerint inter se compositi, a sit

a 2. *sept.* A . . . . . *eorum maxima mensura communis inuenta D;*
B . . . . . *quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est,*
C . . . . . *tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cùm*
D . . . *habeant numerum D, communem mensuram.*

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant numerum communem mensuram; metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cùm eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesin. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C,

b 2. *sept.* A . . . . . *inter se compositi.* b *Inuenta enim numero-*
B . . . . . *rum C, & D, maxima mensura communi E;*
C . . . . . *cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A,*
c 11. *pro.* D . . . . E . . *& B;* c *metietur quoque E, eosdem A, & B.*
pun. Quare cùm idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quàm tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in

qua-

quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. iij.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. *Sit* D, maxima mensura numerorum A, & B; *si* ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C, Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A,B,C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. *Si* verò D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cùm enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quæcunq; illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. *a* *Sit* eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram cõmunem datorum numerorum A,B,C. Quod enim sit eorũ mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipsos A, & B, *b* metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A,B,C, metietur.

A .....
B ..... D ....
C ..... E.. F ----

a 2. *sept.*

b 21. *primi.*

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. *Si* enim fieri potest, sit F, maior quàm E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quàm E, numeros A,B,C, metitur; Atq; adeò E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eadem q3 in cæteris est ratio.

PARI

PARI ratione, pluribus numeris datis, quàm tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua verò omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

iiij. THEOR. 2. PROPOS. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primũ A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

a 2. *sept.* SED iam A, non metiatur ipsum B, *a* inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. *b* Quia igitur C, pars est ipsius B, cùm ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F; ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

A . . D . . E . . F
b 3. *defi.* B .....
C . .

v. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterq; vtriusq; simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est vel A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multi-

A . . . . . I D . . . .
B . . . . . G . . . . . C | E . . . . H . . . F

tudo

tudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quòd eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, simul vtriusque B C, & E F, simul, quæ est A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, $A, \frac{2}{9}$ *numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars est; ac proinde vterque simul A, D, vtriusque B C, E F, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius B G: si nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G, G C; E H, H E, ipsis A, D, æquales, &c.* $B, \frac{2}{9}G, \frac{2}{9}C$ $D, \frac{7}{7}$ $E, \frac{7}{7}H, \frac{7}{7}F$

QVOD si quando contingat, numerum fractum diuidi non posse in partes æquales propositas, propterea quòd numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propositas partes diuidi potest. Vt si fractio $\frac{5}{9}$ *secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones* $\frac{10}{18}.\frac{15}{27}.\frac{20}{36}$. *quarum prima secabitur in has duas partes æquales* $\frac{5}{18}.\frac{5}{18}$. *secunda in has tres* $\frac{5}{27}.\frac{5}{27}.\frac{5}{27}$. *tertia verò in has quatuor,* $\frac{5}{36}.\frac{5}{36}.\frac{5}{36}.\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adsunt integra, reuocanda prius erunt vnà cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $4\frac{3}{7}$ *secandus sit in tres partes, reducemus eũ prius ad hanc vnicam fractionem,* $\frac{31}{7}$. *deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio* $\frac{93}{21}$. *cuius tres partes æquales sunt* $\frac{31}{21}.\frac{31}{21}.\frac{31}{21}$. *Atque hæc in sequentibus quoque propositionibus obseruanda sunt, quando fractionibus accommodantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.*

EODEM modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas,

nitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicuè in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.



POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum D E, F G, H I, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorũ D E, F G, H I, simul eandem esse partem, quæ est A, ipsius D E. Diuisis enim numeris D E, F G, H I, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quàm numeri H I. Quia igitur A, & D K, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & F L, erunt A, B, simul æquales ipsis D K, F L, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & H M; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis D K, F L, H M, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis K E, L G, M I, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in D E, F G, H I, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum D E, F G, H I, simul, quæ A, ipsius D E.

IDEM sequitur, si loco vnius numerorum A, B, C, sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt his videre licet.



THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

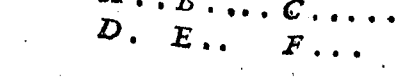
SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æquè multiplices, singuli singulorũ. Dico & omnes A, B, C, simul omniũ D, E, F, simul tam multiplices esse, quàm est A, multiplex ipsius D. Cùm enim tam sit multiplex A, ipsius D, quàm est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quàm est multiplex A, ipsius D.

A . . B . . . . C . . . . . D . . . . E . . . F . .

SI numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fracterum æquè multiplices; quàm multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

QVOD si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.



THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumq; numerum AB, & DE, simul vtriusq; numeri C, & F, simul easdē partes esse, quæ est AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Diuisis enim numeris AB, DE, in par-

A . . . G . . . B | D . . . . H . . . . E
C . . . . . | F . . . . . .

tes

tes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partiū in numero DE; propterea quòd eædem partes est numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG, numeri C, eadem est DH, numeri F; a erit vterque AG, DH, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ AG, ipsius C, vel DH, ipsius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, simul eadem pars vtriusq; C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta; quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, simul vtriusque numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. sept.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propositio locum habet in numeris fractis, & nũ cum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.

$A, \frac{1}{9}G, \frac{1}{9}B$ $C, \frac{3}{9}$ $\quad$ $D, \frac{2}{7}H, \frac{2}{7}E$ $F, \frac{6}{7}$

SED & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim est demonstratio, si modò pro quintæ propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedentis; vt hic perspicuum est.

$A..K..B \mid C...L...D \mid E....M....F$
$G..... \mid H..... \mid I.....$

vij. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem

eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD.

A....E..B
G....C.....F....D

Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC: erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cùm AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD, erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendũ. a 5. sept.

SCHOLIVM.

A, 3/2 E, 2/5 B,
G, 4/5 C 6/8 E 4/5 D

LOCVM etiam habet hæc propositio, vna cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hîc apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm infractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A. E... B | A... E. B | A. E. B.
G ..... C. . F ..... D | G. . C ..... F.. D | G..C..F..D

CÆTERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quàm infractis.

SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æquè multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cùm enim AB, ipsius CD, sit æquè multiplex, atque AE, ipsius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. b Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB, Ac proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex. b 7. sept.

A....E.....B
C..F..D

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF, vel reliqua sit vnitas FD. vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & aliæ reliquæ FD, idem demonstrabitur. vt hæc exempla commonstrant.

A ...E.....
C..F..D | A....E..B | A....E....B
| C..F.D | C. F. D

VIIJ. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB, erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD, & AE, in partes AK, KE, numeri CF, erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quàm IH, ipsius CD, quæ tam AK, quàm KE, ipsius CF. Cùm ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quàm IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quàm KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE, erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cùm totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, a erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quàm IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quàm MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eædem partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia verò si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt; Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

a 7. sep.

A ..... K ..... E .... B
C ..... F .... D
G ..... L .. I ..... M .. H

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{19}$ K, $\frac{2}{19}$ E, $\frac{6}{19}$ B
C, $\frac{6}{19}$ F, $\frac{6}{19}$ D
F, $\frac{2}{19}$ L, $\frac{3}{19}$ I, $\frac{2}{19}$ M, $\frac{3}{19}$ H

IN numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

NON

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum precedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabit hic reliquum numerum E B, alicuius numeri easdem esse partes, quas est numerus A E, numeri C F, ibi verò perspicuum erat reliquum E B, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti G C, vt A E, est submultiplex ipsius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

ix.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

SIT numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, sintque A, B, C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia verò B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quàm E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur; Erit B G, ipsius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F, *a* ac propterea & vterque B G, G C, simul, nimirum B C, secundus vtriusque E H, H E, simul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

a 5. vel 6. sept.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis propositio hæc, vna cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

A, $\frac{3}{11}$
B, $\frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
D, $\frac{14}{22}$
E, $\frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D . . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

x. ## THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DF, numeri F, ſintque A, B, C, ipſis DE, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, quæ numerus C, eſt numeri F.

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quàm GB, eadem pars ipſius C, quæ tam DH, quàm HE, ipſius F. a Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes AG, ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. b Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſque, DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 29. ſept.

b 5. vel 6. ſept.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ G, $\frac{2}{15}$ B
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{7}{10}$ H, $\frac{3}{10}$ E
F, $\frac{9}{10}$

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

xij. ## THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totum CD. Cùm enim ſit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; c erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius

A..E.....B
C.....F...D

c 20. def.

ipsius CF, æquè multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æquè multiplices ipsorum CD, CF. *a* Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æquè multiplex erit. *b* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. a 7. *sept.* b 20. *def. fin.*

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, *c* erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; *d* Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . E . . B
C . . . . . F . . . . D

A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

c 7. *vel* 8. *sept.* d 20. *def. fin.*

CONTINEAT tertiò AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. *e* Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. *f* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. e 8. *sept.* f 8. *sept.*

A . . . . . E . . . B | A . . . . . E . . . . . B
C . . . F . . D | C . . . . . F . . . . . D

QVOD si AB, totus totì CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandū.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

EODEM *modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.*

$A, \frac{6}{9}E\frac{1}{10}B$ | $A, \frac{14}{21}E\frac{8}{29}B$
$C, \frac{4}{9}F\frac{2}{10}C$ | $C, \frac{5}{21}F\frac{10}{29}D$

LEMMA.

QVOD *autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æquali-*

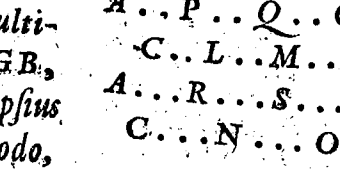
qualiter contineat, eademq; insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partiũ numeri CD, multitudini partiũ numeri CF, æqualis, quod GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoq; multitudo partium numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorũ æquè multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certè numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atq; adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

A..N..O..G..B
C..I..K..D
A...P...Q...H...E
C...L...M...F

CONTINEAT deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterue, &c. eaſdemque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum

æquè

æquè multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Similimodo,



diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certè numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primò propositum.

LAM verò sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem vel partes. Quod secundò est propositum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B, C, D, E, F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico esse quoq; omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primũ A, C, E, minores quàm B, D, F. Quoniã igitur, propter eandem proportionẽ,

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

a 20. def. a eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F, b erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; c erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. d Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

b 5. vel 6. sept.

c 5. sept.

d 20. def.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æquè multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeò vt prius, e erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoq; & è contrario omnes A, C, E, simul omniũ B, D, F, simul, & A, ipsius B, æquè multiplices. f Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem

A.... C.... E.....
B.... D.. F...

e 5. sept.

f 20. def.

sem-

semper demonstratio, vt hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A...C.....E..... | A...C...E..... | A...C...E...
B. D.. E... | D. D. F.. | B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. *a* Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C: ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, eædem partes. Igitur vt prius, A.....C....E..... *b* erunt omnes B, D, F, simul B..... D...F..... omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ ipsius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, simul omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. *c* Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B. a 20. *de fin.* b 6. *sept.* c 20. *de fin.*

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul: quibus si rursum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

A....C...E.....
B....D...F.....

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propositio hæc vera esse eodem modo conuincetur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13. XIV.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, vel partes. *d* Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: *e* Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A... C.....
B....D..... d 9. *vel* 10. *sept.* e 20. *de fin.*

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior

quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, vel partes.

a 9. vel 10. sept.

A ..... C ...
A ..... D ....

a Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, vel partes: Atq; adeo è contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æquè multiplex erit, vel certè, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes. *b* Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

b 20. de fin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æquè multiplex; vel certè A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certè, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. *c* Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, vel partes. *d* Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A .... C .....
B ... D .....

c 9. vel 10. sept.

d 20. de fin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æquè multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo, è contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. *e* Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. *f* Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A ..... C .....
B ..... D .....

e 9. vel 10. sept.

f 20. de fin.

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt; *g* Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A ... C ....
B ... D ....

g 20. de fin.

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam G. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel æquè multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes; *h* erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A .... G ...
B .... D ...

h 20. de fin.

SINT septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint

iores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales. *a* Quoniam igitur, ob eandem proportionem A, ipsius B, & C, ipsius D, æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certè A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

a 20. de fin.

A ..... C .....
B ... D ...

SCHOLIVM.

QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicuè ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis supervacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. XV.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita D, ad E;

a 13. sep. A ..... D ..... B ..... E ..... C .... F ... G ..... H ..... a erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob causam, cum sit, vt B, ad C; ita E, ad F; erit vicissim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni B, ad E, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, vt mox ostende-

b 13. sep. tur.) b Ac proinde vicissim, vt A, ad C, ita D, ad F.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, hanc propositionem eodem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

A . D ...
B .. F .....
C ... F .....
G . G ...

IDEM verum est, si loco vnius numeri vnitas assumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perspicuum est.

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt inter se quoque sint eædem, quales

A ..... B ..... C ....
D ..... E ..... F ...

sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem ostensæ sunt proportioni B, ad E, siue numeri sint integri siue fracti, ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æquè

æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certè B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. a *Quare numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum.* a 20. de fin.

HOC idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xvj.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æquè. Dico viciſſim vnitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æquè metiri. Diuiſo enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatũ numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æquè vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipſum E I, atque vnitas G H, ipſum I K, & vnitas H C, ipſum K F; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, ſimul numerorum E I, I K, K F, ſimul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compoſitus numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compoſitum æquè metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A. D.
B. G. H. C E. I. K. F

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æquè metitur, atque numerus D, numerum E F, erit vnitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, nu-

B C, numeri E F; Ac propterea ℧nitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

HÆC propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si ℧nitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur ℧icissim æquè ℧nitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & a13.*sep.* *secundus integer quartum fractum*; a *sed solum eandem habebit rationem ℧nitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

E.
A . . . B . . . .
D ..... C .....

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; *b* erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æquè metietur. *c* Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æquè. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D: *d* erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æquè metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æquè. Æquè igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo sese multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. *defin.*

c 15. *sep.*

d 15. *defin.*

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, ℧t A, ad E, ℧nitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, ℧t C, ad A, ita B, ad E, ℧nitatem. Sed ex eadem defin. ℧t B, ad E, ℧nitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, ℧t C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E.
A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, aquè metiri. At verò, si numerus B, ipsum A, multiplicet, a etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum aque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, aquè metitur, atque vnitas E, ipsum B.

E.
A . . . B . . . .
C . . . . . .

a 15. *defin.*

QVOD si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; *b* erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A; similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æquè metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit, *c* Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, *d* & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

F.
A . . .
B . . C . . .
D . . . . . E . . . . . .

b 15. *defin.*

c 20. *defin.*

d 13. *sep.*

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR.

xix. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; *a* fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; *b* erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

a16. sep.

A .... B ....
C ...
D ..... E .....

b17. sep.

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & precedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunq; numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F, G, erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

A ...
B ... C ... D ...
E ..... F ..... G .....

c17. vel 18. sept.

xix. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; *a* erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *b* erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. scripsimus.

A . . :
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . . . :
F . . . . . ,
G . . . . . :

a 17. sep.
b 18. sep.

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; *c* erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *d* erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint; &c. Quod erat ostendendum.

c 17. sep.
d 18. sep.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si,

qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C ad D; (siue E, numerus integer sit, siue fractus; siue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9. ostendemus, si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quam E, ad B: ac proinde A, maior erit, quam E. Quare maior numerus fiet ex A in D, quam ex E, in

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

a19. sep. *eundem D: a At qui fit ex E, in D, aqualis est ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.*

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, primi ad B, secundum, quam C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (siue E. numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare

b19. sep. *maior erit proportio A, ad B, quam E, ad B: b At ita est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.*

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc apposito exemplo appareret. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad

A ..... E .....
B ....
C ...
D ..

D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quam ex D, secundo in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quam ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam est demon-

stratum.

Fratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xx.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erũt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur.

Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur. a 19. sep.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . .

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. b 16. sep.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si maior fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundam, quam secundi ad tertium.

Item si minor fuerit proportio primi ad secundũ, quam secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se; minor proportio erit primi ad secundum,

Item si minor fuerit proportio primi ad secundũ,

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . . .

A . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . . . .

dum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æquè metiri ipsos E, F, maiorem quidem A B, ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt A B, ad C D, ita E, ad F; *a* erit vicissim, vt A B, ad E, ita C D, ad F. Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E, F; *b* erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. *c* Erit ergo, vt A G, ad E, ita C H, ad F; *d* & vicissim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D; eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & C D, ipsum F, æqualiter metientur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . G . . B
C . . . H . . . D
E . . . . . .
F . . . . . .

a 13. *sep.*
b 20. *def. fin.*
c 20. *def. fin.*
d 13. *sep.*

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continuè proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundum tertium, vt in hoc appositio exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri continuè proportionales quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem

tas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcireo dixerim, vt propositio 12. *lib* 9. *demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur concedere, tres numeros esse continuè proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primum metiri secundum, ex hac propos. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propos.* 12. *lib.* 9.

PARI ratione, & hoc verum est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit proportio A B, ad

A . . . K . . . B C . . L . D E . . . . M . . . . F
G . . . . . H . . . . . I . . . . . .

C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad secundum sit, vt A B, ad C D, & secundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamnis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. *ad* 2. *vel* 2. *ad* 1 *qui minores sunt ipsis A B, C D, quemadmodum & proportiones numerorum* 16. 20. 25. *qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem* 16. *ad* 20. *in* 8 *&* 10. *proportio verò* 20. *ad* 25. *in* 4. *&* 5. *vel in* 12. *&* 15.) *Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt A B, ad C D, & H, ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æquè. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita G, ad H, a erit viciſsim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum* a 13. *sep.*
sit vt C D, ad E F, ita H, ad I, b erit quoque viciſsim, vt C D, ad H, ita b 13. *sep.*
E F, ad I. c Quare A B, ipsius G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, c 20. *de*
erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. fin.
Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F, atque adeo A K, ipsius G, & C L, ipsius H, eadem pars. d *Erit ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H;* e *& viciſsim vt A K,* d 20. *de*
ad C L, ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemque modo erit, vt C L, fin.
ad F N, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, e 13. *sep.*

E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quam A B, C D, E F. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, aquè metietur. Quod est propositum.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, aquè metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cum sint minimi in proportione A, ad B, aquè metientur ipsos D, E; eademque ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, aquè metiatur, ac B, ipsum E, metientur aquè omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

A .. B ..... C ...
D .... E ..... F .....

CÆTERVM hac propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusuis datis, dari possunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Alia autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, aquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est semel hoc loco monuisse.

xix. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri: & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim

A ..... H ...
B ... D ....
C ..... E .....
G ..... F ..

enim fit vt A, ad B, ita E, ad F; *a* erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, *b* erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D. Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. *c* Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F. a 19. sept. b 19. sept. c 19. sept.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, & constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quadam quinti libri sequentibus theorematibus, qua omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, d erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, e erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

A ..... C ...
B .... D ..

d 13. sept. e 13. sept.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

SIT ℣t AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo esse ℣t AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit ℣t AB,

a13. *sep.* *A ..... C ... B* *ad CB, ita DE, ad FE;* a *erit ℣icissim, ℣t totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, ℣t totus AB, ad*

D .... F .. E

b11. *sep.* *totum DE,* b *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad*

c13. *sep.* *DF, ℣t CB, ad FE.* c *Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, ℣t DF, ad FE. Quod est propositum.*

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, ℣t in lib. 5. Sit enim primum, ℣t AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, ℣t CB, ad AC, ita FE, ad DE. Cum enim sit, ℣t AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, ℣t AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, ℣t CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, ℣t AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, ℣t AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, ℣t AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, ℣t AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, ℣t CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, ℣t AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT ℣t AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, ℣t AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, ℣t AB, ad BC, ita DE,

d13. *sep.* *ad EF;* d *erit ℣icissim, ℣t AB, ad DE, ita*

c12. *sep.* *A ..... B ... C* *BC, ad EF;* e *Ac proinde AB, BC, simul*

f13. *sep.* *D .... E .. F* *ad DE, EF, simul, ℣t BC, ad EF:* f *Et ℣icissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, ℣t DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.*

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostenditur hoc loco, ℣t in lib. 5. Sit enim primum, ℣t AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, ℣t AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est ℣t AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo ℣t BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ℣t AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, ℣t AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, ℣t AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit ℣t AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, ℣t BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, ℣t AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, ℣t AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoq; per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; a *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* b *Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* c *Vicissim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

a 13. sep.
b 11. sep.
c 13. sep.

A.....C...B
D.... F ..E

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum; Item vt BC, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto ad C, secundum, vt est DH, compositum ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cùm enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F: & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex aqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cùm rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH, & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex aqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

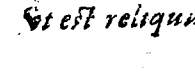
A.....B..G | D.....E...H
C....| F .....

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebũt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex aequalitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cùm rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex aequalitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.

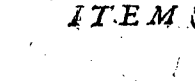


ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cùm enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D: & vt A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex aequalitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH: & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex aequalitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.



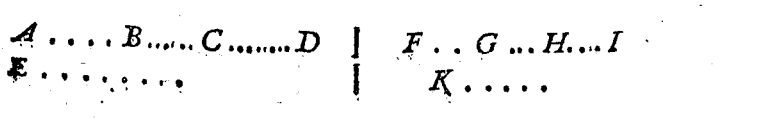
DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoq; illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quoscunq; numeros proportiones habuerit, quas idem alius

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoq; idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunq; numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cùm enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoque vt AC,



primus cum quinto, ad E, secundum, ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunq; AB, BC, CD, proportiones eas dem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, vtpote ad FI. Cùm enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atq; ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM verò his demonstratis, ostendentur nouem vltimæ propositiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuêre; si pro magnitudinibus, intelligantur numeri siue integri, siue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur ijdem modi hoc lib. demonstrati: vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illæ quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eademq; prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR.

xj. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; *a* metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æquè; atque adeò secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cùm vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æquè metiatur; *b* metietur & vicissim æquè vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur: *c* metietur quoque vicissim æquè vnitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeò, cùm idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores; minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....B....
C------ D--
E----

a sep.

b 15. sep.

c 15. sep.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerũ, præter vnitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturq; C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At verò ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, proer at ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B: *d* fit, vt D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. *e* Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E: Ar-

A.....B.....
C-----
D-----E----

d 9 pronun.

e 18. sep.

adeò,

adeò, cùm D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quàm A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunque numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poſſint, quamuis proportio duorũ in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erũt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionũ. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, aquè, per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus: atque adeò ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G: ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, aquè metitur: a metietur quoque vicißim aquè vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, aquè; atque vnitas ipſos E, F: Atque idcirco A, B, C, cùm habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

A ... B ... C ...
D ---- E ------ F ---
G -----

a 15. ſep.

IAM verò ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communis menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D: & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E: & ipſum C, toties quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F: ſit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ

ad pro-

ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus: Atque adeò, cùm D, E, F, minores ſint quàm A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

xxiiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B: & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C: metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipſum A: *a* metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cùm habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.....B.....
C...D----

a11. *pronun.*

xxv. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi: ſit eorum cõmunis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniã igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; *b* fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D: *c* & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idem D, ex A, in B. Igitur cùm ex E, primo in F, quartum, fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; *d* erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; *e* erit E, ad A, primus; Atq; adeò E, & A, cùm ſint inter ſe primi, *f* in ſua proportione minimi erunt. *g* Aequè igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cùm E, metiatur vtrumq; B, & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.....B.....
C.....
D .....
E---- F ----

b9. *pronun.*
c16. *ſep.*
d19. *ſep.*
e25. *ſep.*
f23. *ſep.*
g21. *ſep.*

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvj.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in seipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniã igitur A, & D, ad B, primi sunt, *a* erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C.....
D....

a 26. *septim.*

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D Dico E, & F, inter se primos esse. Cùm enim vterque A, & B, primus sit ad C; *b* erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cùm vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; *c* erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B...
E.....
C... D..
F.....

b 26. *septim.*

c 26. *septim.*

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviij.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque seipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoq; primi inter se erunt: Et semper circa extrèmos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cùm enim A, B, sint inter se pri-

A... B..
C..... D....
E..... F.....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

mi,

a 27. sep. tim. mi, *a* erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atq; eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeò geniti duo C, D, primi inter se erunt.

b 27. sep. RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, *b* erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; *c* Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cùm A, & C, primi sint ad B, *d* erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus. Eademq; ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; *e* erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, *f* erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: nec non & H, ad A. *g* Quare & *I*, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cùm vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . .
C . . . . . D . . . .
E . . . . . F . . . . .
G, 81. H, 16.
I, 243 K, 32.

c 28. sep. tim.
d 26. sep. tim.
e 28. sep. tim.
f 26. sep. tim.
g 28. sep. tim.

xxix. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterq; simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & vtrumque simul A C, primum esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; *h* metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cùm eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad B C, ostendemus eundem esse primum.

A . . . . . B C
D - - - - -

h 12. pro nun.

SED iam vterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; *h* metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cùm eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eo-

i 10. pro nun.

mi. Eodemque argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit: per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos præter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Nõ erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . B . . . . . .
C ----

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuò multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B, si non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur verò ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertiũ; a erit vt D, primus ad A, secundum; ita B, tertius ad E, quartum. b Quia verò primus D, ad A, primus est, cùm eum non metiatur; c erunt D, & A, in sua proportione minimi. d Quare æquè metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemq; modo si D, non

A . . . . B . . . . . .
C .....
D . . . E .....

a 19. sep. b 31. sep. c 23. sep. d 21. sep.

metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quoque ad vnum ipsorum A, B, compositum esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vterq; A, & B, ad D, primus. a *Quare & C; ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cùm D, ponatur vel metiri ipsum G, vel certè ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cùm non sit primus ad vtrumque.*

A... B....
C.....
D.....

a 26. septim.

XXX. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si verò compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: si primus, cùm metiatur ipsum B; & B, ipsum A; *b* metietur quoq; C, primus ipsum A. Si autem C, compositus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atq; adeò ad primum, qui cùm metiatur omnes præcedentes, *c* metietur quoq; compositum A. Quod est propositum.

A.....
B.....C...

b 11. pro nun.

c 11. pro nun.

ALITER. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A. *d* metietur quoq; C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cùm B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus

A.....
B... C---

d 11 pro nun.

tus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod [illegible] demonstrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certè aliquem primum eum metiri. Cùm enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: si verò compositus; *a* metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eũ aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A.....

a 33. *sep.*

PROBL. 3. PROPOS. 35. xxxiiij.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, siue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi, per ea quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si verò non sunt inter se primi, *b* inuenta fit maxima eorũ communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F G; *c* fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A.....B.... C.....
D..
E... F..G....
H--- I---- K----
L-----

b 3. *sep.*

c 9. *prænun.*

QVOD verò E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sint minimi; erunt aliqui alij ipsis minores minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æquè, vt ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito, *d* fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; *e* & vicissim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; *f* erit, vt E, primus ad H, secundum,

d 9. *prænun.*

e 8. *prænun.*

f 19. *sep.*

dum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem F maior quàm H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atq; adeò cùm L, ipsos A, *B*, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, *B*, C. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad *B*, & *B*, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt si proponãtur continuè proportionales A, B, C, D, E,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi; sive non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum E, F, G

A...B.....C.....	A....B..C.....
D...	D..
E. F.. G...	E.. F. G....

per hanc propos. inuentorum esse vnitatem; quando scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, æqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cùm minor numerus dari non possit, quàm vnitas.

xxxvj. ## PROBL. 4. PROPOS. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & *B*, inter se primi, seseq; mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse mini-

minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; *a* metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quòd autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, *b* tam ex A, in E, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium, *c* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cùm ponantur primi inter ſe, *d* & ob id, in ſua proportione minimi) *e* æquè metiuntur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; *f* erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atq; adeò C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

A. . . . B . . . .
C. . . . . .
D ----- ----------
E ------- F ----

a 27. pro nun.
b 9. pro nun.
c 19. ſep.
d 23. ſep.
e 21. ſep.
f 17. ſep.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. *g* Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, *h* fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cùm tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; *i* metietur tam A, quàm B, ipſum E. Quòd verò E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem; metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, *k* fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, *l* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ità H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cùm ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, *m* metientur ipſos H, & G, æquè, nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F, *n* erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cùm D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt, metietur etiam E, numerus numerum

A. . . . B . . . . . .
C. . D. . .
E. . . . . .
F ----------
G ---- H ---

g 35. ſep.
h 19. ſep.
i 17. pron.
k 9. pro nun.
l 19. ſep.
m 21 ſeptim.
n 17 ſeptim.

rum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem, atq; adeò E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem esse minimũ, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

xxxv. THEOR. 33. PROPOS. 37.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D. sitq; alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C D, metiri. Si enim E, ipsum C D, non metitur, ablato E, ex C D, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerum, si fieri potest, F D, minorem se, ita vt E, metiatur ablatũ C F. Quoniam igitur tam A, quàm *B*, ipsum *E*, metitur, & E, ipsum C F; a metietur quoq; tam A, quàm B, ipsum C F. Itaq; A, & B, cùm metiantur totum C D, & ablatum C F; *b* metientur & reliquum F D. Est autem F D, minor quàm E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . B . . .
C . . . . . F ----- D
E . . . . .

a 11. *pro nun.*
b 12. *pro nun.*

xxxvj. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri
c 36. *sep.* A, *B*, C, metiantur. *c* Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiãn-

metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest; A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem.

A . . B . . . . C . . . . . .
D . . . . . .
E ----------

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immo, cùm A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; *a* metietur quoq; D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. a 32. sep.

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. *b* Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cùm A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; *c* metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quòd autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniã igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; *d* metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeò cùm C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quàm E; nõ erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immò cùm C, & D, metiantur ipsum F; *e* metietur quoq; eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A . . B . . . C . . . . .
D . . . . . .
E . . . . . cii. pro-
F -------- nun.
b 36 sep.
c 37. sep. prim.
d 37. sep. prim.
e 37. sep. prim.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sit q; F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiantur eius partem D G,

A . . B . . . C . . . . relinquatq; numerum GE, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum D G,
D ..... G ---- E
F . . . . . a metientur quoq; A, B, C, eundem
a 11. pronun. DG; Acproinde, cùm & totum DE, ponantur metiri; b metien-
b 12. pronun. tur & reliquum GE, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Metitur igitur F, ipsum DE.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

xxxvij. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum
A . . . . . C, & B, ipsum A, æquè metitur; a &
c 15. sep. B . . . C . . . viciſſim vnitas æquè ipsum B, & C, ipsum A, metietur: atque adeò eadem pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A. Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

xxxviij. THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cùm B, pars denominetur à C, sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C,
A . . . . . denominata; metietur vnitas
B . . . C . . . . . ipsum C, & B, ipsum A, æquè,
d 15. sep. d Viciſſim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 41. xxxix.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C, Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; *a* minimusque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, *b* habebit G, partes à D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur à D, E, F. Quod verò G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, *c* metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

D . . A, *Secunda* a38.*sep.*
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H ----------

b39.*sep.*

c40.*sep*

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur aquè vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G, d Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I K, L, ipsum G, aquè, atque adeo vnitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ à D, E, F.

A . . I . . . . .
B . . . E . . . K . . . .
C . . . . F . . . . L . . .
G . . . . . .

d1*sep.*

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM verò, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas par-

eas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cateri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I,

G	A, D ..	
H	B, E ...	
I	C, F	
K ---------- M ------ L		
N ---------- P ------ O		

a 11. pro nun. *& reliquos multiplices ipsius G; a metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G.* b *Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.*

b 39. septim.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; c *metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi aequalem.* d *Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.*

c 40. septim.

d 12. pro nun.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor verò quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, e *metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo aequalem.* f *Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac*

e 40. septim.

f 12. pro nun.

tas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT data partes A, B, C; inueniendus q; sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quaritur.

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Namcum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G: erit eadem ratione F, pars ipsius E, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; a Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; b erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma

a 15. de fin.

b 17. septim.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

} propos.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ. 14. huius lib. & H, ad I, ita Vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

SI verò plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

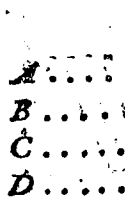
NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omniũ eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini sumuntur, & in eadem ratione, *a* erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: *b* Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur. *c* Igitur tam A, ipsum E, quam D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....	E---	
B.....	F-----	
C.....	G-------	
D	H ---------	a 14. sept.

b 23. sept. c 21. sept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse



C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continuè proportionales, & vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

ij. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, se ipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; *b* erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos: *c* sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; *d* Erunt & C, E, extremi, inter se primi. *e* Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A..
B...
C....D.....E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O. 81.

a 17. *septim.*
b 17. *septim.*
c 24. *septim.*
d 29. *septim.*
e 1. *oct.*

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. *g* Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I,

f 18 *sep.*
g 24. *septim.*

C, & I, ex B, in E, a erunt & F, I, extremi, inter se primi. b Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt. a 29. sep. b 1. oct.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex ijs, qua ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi sint, ostendetur, vt prius. c 18. sep.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A.. B...
C... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N. 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continuè proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea vterque sit æqualiter æqualis æqualiter: ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub aliis denominationibus, quæ in

quæ in Algebra ſolent explicari: Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunque propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt ijs, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hanc propoſ. Si verò dati maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi, quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: ſumptiſque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos a tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eademque ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademque ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quod ſi A, dicatur minor quam F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt, quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si verò A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non ſunt, quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quam F; æqualis omnino erit, ideoque vt oſtenſum eſt & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

A --- B ---- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F,

B, in F, G, H, vt ex demonſtratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM verò tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continuè proportionales ſunt, ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. ſit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continuè proportionalium ſint vltimi tot continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continuè proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continuè proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At verò F, & I, extremos quatuor continuè proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continuè proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continuè proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continuè proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis eſt ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur octo numeri minimi in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt primus, qui nimirum denomi-

nantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, à 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic appareret 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porrò hac arte non possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continuè proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

iij. PROBL. 2. PROPOS. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometrice demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

SCHOLIVM.

HÆC propositio intelligenda est de numeris minimis continuè proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, in-

ueniri

venire non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Imò si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 15. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conuersum, quoad numeros continuè proportionales. Etenim numeri quotcunque continuè proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continuè proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At verò primum theorema, prout spectat ad numeros non continuè proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continuè proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 15. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. IVI.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æquè metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, *b* A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. *c* Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æquè metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ------ K ----- L -----

a 36. *septim.*

b 9. *prop. num.*

c 18. *septim.*

a 21. sep.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ----- K ----- L -----

proportione: a ipsi æquè metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æquè metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum

b 37. sep. B, & C, ipsum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi, F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B, C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps

c 36. sep. proportionales in datis rationibus. c Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æquè metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi; sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione,

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L ---- M ------ N ---- O -----

d 21. sep. d ipsi metientur æquè L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æquè metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M.

e 37. sep. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

f 36. sep. SED iam E, non metiatur ipsum I. f Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æquè

æquè metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipſos H, G: & C, D, ipſos G, I, metiantur æquè.

Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque eſt K, ad N, cum E, F, æquè ipſos K, N, metiantur.

A, 9. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O ---- P ---- Q ---- R ----

Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namq; non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, *a* ipſi æquè metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æquè, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeò cum B, & C, ipſum P, metiantur, *b* metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò oſtenſum eſt, eſſe vt G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q; *c* quod E, F, in ſua proportione minimi æquè metiantur Q, R, eiuſdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipſum Q; *d* metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

a 21. ſept.
b 37. ſeptim.
c 21. ſeptim.
d 37. ſeptim.

QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S, ad T;

inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si verò S, ipſum N, non metiatur, *e* ſumemus

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

e 36. ſept.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P, & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties verò S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris verò E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt laterum vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; a erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F. Quam

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

a 17. *septim.*

F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. *a* Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur. a 27. de fin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, *b* erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E,

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

b 17. septim.

c Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat. c 27. de fin.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam vllum metietur.

SINT continuè proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipsum B, non metiatur, neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. *d* Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. *e* Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium à se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neque

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

d 2. octa. vii.

e 3. oct.

A quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit haec propositio ad hunc modum.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequentium multiplex sit, constat. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D, & D, ad E: non sit autem A, ipsius B multiplex; neq; B, ipsius C; neq; C, ipsius D; neq; D, ipsius E, multiplex erit. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

Quod autem neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum D, per ea, quae in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C, & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; a 6. oct. *neque alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quae in defin. 5. lib. 7. scripsimus.*

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur; & quicumque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C: & C, ipsum D: & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorū quemlibet sequentium A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

metiatur,

metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, a metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, b metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.

a 11. pro nun.

b 11. pro nun.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cùm enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C, ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè insequentis multiplex est. A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex, metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea è contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextum, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundum metietur: Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex; neq; primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cùm neque primus, neque alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur. A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM verò A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neq; alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

vij. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri; a neq; alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atq; idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 6. oct. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio præcedentis propos. demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cuiuslibet à secundo sit multiplex, primus quoq; secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex, neq; alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholij præcedentis. Quod est contra hypothesim.

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continuè C, D; sitq; vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidē numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo vt A, ad B, atque adeò vt E, ad F, ita G, ad K. b Quare cùm G, & K,

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

3. oct.

& K, inter se primi sint; quippe qui extremi sint minimorum numerorum; *a* ac propterea in sua proportione minimi; *b* æquè metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æquè metiantur, singuli singulos. *c* Quia igitur G, H I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continuè proportionales. Igitur & E, L, M, F, continuè proportionales sunt; Atque idcirco, cùm multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B, tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. *Si* igitur inter duos numeros medij continuâ proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

a 23. sep.
b 21. sep.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12 F, 4.

c 9 prom.

SCHOLIVM.

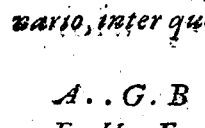
NON solùm ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verùm etiã eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem: Cùm enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis verò inter numeros sola vnitate differentes; superbipartientes denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam neque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros sola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solùm numerus, qui ab vtro-

que

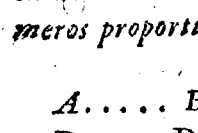
que ϑnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri AB, CD, (ſiue CD, ϑnitas ſit, & AB, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor ϑnitate quàm AB, maior verò quàm CD, ϑnitate quoque.



Dico EF, non eſſe medium proportionalem inter AB, CD. Si enim dicatur eſſe AB, ad EF, ϑt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipſi EF, æquali, ϑt reliqua ſit ϑnitas GB; & ex EF, numero EH, ipſi CD, æquali, ϑt relinquatur etiam ϑnitas HF; erit quoque ϑt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cùm AG, EH, ipſis EF, CD, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum HF, hoc eſt, ϑnitas ad ϑnitatem, ϑt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo EF, medius proportionalis eſt inter AB, & CD.

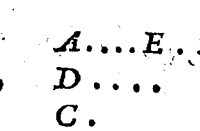
ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt, quod fieri non poſſe, proximè demonſtrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ, quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & ϑnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita ϑt ſit AB, ad D, ϑt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, ϑt D, ad AB. Et quoniam ϑnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AE: a ac proinde & D, numerus metietur reliquam ϑnitatem BE. Quod eſt abſurdum.



a 11. pro nun.

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & ϑnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo, ϑt prius, D, metiri quinarium AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE: b ac proinde & D, numerus reliquam ϑnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum.



b 11 pro nun.

EX quibus fit, neque illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, ϑt Diapaſon, vel, ϑt ϑulgo dicitur, octaua; neque illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt

Tonus,

Tonus, seu Vulgò, secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariã diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc verò in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hîc apparet, 2.3.4. Est enim hîc proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoque Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cùm enim per ea quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorum verò proportio sit duplicata proportionis laterũ; sit, vt proportio quadrati ex diametro descripti, ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cùm ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, qua de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri, quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continuè proportionales C, D. Dico totidem cadere continuè proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, *a* sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec

a 2. oct.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; a erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi B; ne minores minimis dentur. Quia verò, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans verò ipsum G, fecit K, b metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: c Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Aequè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. d Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cùm manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans verò ipsum I, faciat N; e metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundē F; f Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Aequè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. g Proportionales ergo sunt continuè, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proindè cùm tam multitudo E, G, K, quàm F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

a 1. oct.
b 7. pronun.
c 5. pronun.
d 20. defin.
e 7. pronun.
f 5. pron.
g 20. defin.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumq; A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, & B, & vnitatem.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

Quoniã igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D, ad E; & E, ad A; æquè metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: *a* Metitur autẽ vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. *b* Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicãs autẽ D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaq; cùm C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; *c* erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; *d* erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; *e* erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremò, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cùm C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, *f* erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proin-

a 5. pronun.
b 9. pronun.
c 17. sept.
d 17. septim.
e 18. sept.
f 18. sept.

proinde tot medij proportionales cadant inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cùm multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum, & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continuè proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad aliá multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.

I.

SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatã eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continuò ab vnitate proportionales; & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

B, quidem & vnitatem, numerus A: At inter F, & vnitatem numerus E: a eadem quoque inter B, & F, vnus medius proportionalis; atque adeò, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione

210. oct.

tione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continuè proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

XI.

SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continuè proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K. & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremò ex B, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat C. Quibus peractis, erũt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 8. huius lib. Eadem ꝙ ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; nec non & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cùm sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quod tam B, N, quàm F Q, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G,

E, 162.		I, 512.
D, 54.	Vnitas.	H, 128.
C, 18.	1.	G, 32.
B, 6.		F, 8.
A, 2.		
N, 36.	K, 4.	Q, 64.
O, 216.	L, 8.	R, 512.
P, 1296.	M, 16.	S, 4096.

E,81. I,1. duplicata est rationis B, ad F.
D,54. Vnitas. H,2. Eisdem argumentis erit ratio D,
C,36. 1. G,4. ad H, triplicata rationis B, ad F.
B,24. F,8. Nam ratio O, ad L, ex 1. theore-
A, 16. mate, triplicata est rationis B, ad
N,576. K,256. Q,64. A; quod tam B, N, O, quam A,
O,13824. L,4096. R,512. K, L, sint ab Vnitate continuè
P,331776. M,65536. S,4096. proportionales, ex scholio propos. 9.
huius lib. & eiusdem triplicata
est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodem
modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit
proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio
L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, propterea quòd tam A, K, L, quàm L,
Q, R, continuè proportionales sunt ab Vnitate, ex scholio propos. 9. hu-
ius lib. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F; ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R,
sunt continuè proportionales ab Vnitate ex scholio propos. 9. huius lib.
Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non
secùs demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam ratio-
nis B, ad F. Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri Vnius ordinis desi-
nant in Vnitatem, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est
Vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis
ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non
in quotcunque lineis. Vnde multò generalius est hoc in numeris,
quàm illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis ef-
ficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis Vniversalem, hoc
modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter Vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, verò & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter

inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H. Atque adeo cùm inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L: a cadet quoq; vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Similiter modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G. 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

a 8. 8.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, cadantq; tam inter A, & C, quàm inter B, & C, tres numeri continuè proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

THEOR. 9. PROPOS. 11. xj.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratū, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipsum D, multiplicans fecit E, ex con-

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

a 17 sep. A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. ex constructione: *a* erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione: & multiplicans seipsum, b 17. sexti. ex defin. quadrati, fecit B, quadratum: *b* erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continuè proportionalis cadit E. Quia verò, ex eo quod A, E, B, continuè proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cùm hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medii proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeò inter se sunt compositi. Similiter cùm sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cùm & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum verò E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

xj. THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continuè proportionales cadere:

dere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E: & D, seipsum multiplicans faciat F: At C, & D, se mutuò multiplicantes faciant G: Multiplicantes verò G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum & D, multiplicans fecit E, & G: *a* erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cùm D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F: *b* erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea q; E, G, F, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H: *c* erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cùm D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans verò ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; *d* erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B; *e* Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D: Atq; adeò inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam verò, ex eo quod A, H, I, B, continuè sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cùm sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

a 17. *sep.*
b 17. *septim.*
c 17. *septim.*
d 17. *septim.*
e 18. *septim.*

SCHOLIVM.

HIC quoq; manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immò & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atque adeò inter se compositi sunt.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

Similiter cùm sit A, ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B: immò & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Atq; proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hìc est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A, posteriorum verò trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

xij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primùm positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoq; proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT continuè proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F, multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G, H, I, faciāt K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continuè esse proportionales. Multiplicantes enim A, & B, se mutuò faciant N; & B, C, se mutuò multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P. 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

R, S. Simili modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, N, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum fecit N, & E; erit etiam vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continuè proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; *b* erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eadem que ratione, cùm C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea q; & E, O, F, continuè proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cùm D, N, E, in eadem ratione sint continuè proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeò D, E, F, continuè proportionales sunt.

a 17. *septim.*

b 17. *septim.*

DEIN-

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad *B*, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerũt Q, & H; *a* erit quoque, vt A, ad *B*, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. *S*imiliter, quia *B*, multiplicans E, O, F, fecit H, R, *S*; erunt ex demonſtratis ad propoſ. *18*. lib. 7. H, R, *S*, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo cùm B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; *b* erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H, R, S, I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cùm G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continuè ſunt proportionales.

a *18. ſeptim.*

b *18. ſeptim.*

NON diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continuè proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

IAM quoq; numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionem totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeris G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M.

A, 2,	*B*. 4.	*C*, 8.
D, 4.	*E*, 16.	*F*, 64.
G, 8.	*H*, 64.	*I*, 512.
K, 16.	*L*, 256.	*M*, 4096.

Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continuè proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quàm B, E, H, L; & C, F, I, M, continuè ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continuè ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I, eſſe proportionales continuè in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At verò K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorũ; ſecundo verò loco

procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor scholij propos. 10. huius lib elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantùm tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quàm tres. Sint namq; numeri plures, quàm tres A, B, C, D, continuè proportionales, qui seipsos multiplicantes faciant E, F, G, H; postea verò multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M. & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G,

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. F. 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

a 13. oct. *a ex demonstratis, proportionales sunt. Item F, G, H, cùm illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in seipsos: hi verò ex B, C, D, proportionalibus quoque in seipsos. Erunt E, F, G, H, continuè proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M, & alij deinceps eodem modo producti.*

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B, b metietur quoque A, primus secundum E. Quare cùm sit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

b 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A ad E, propterea quòd A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cùm C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus

tus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quonam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, a metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

a 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. XV.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; b metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

b 14. oct.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; c metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

c 14. oct.

THEOR. 15. PROPOS. 17. XV.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neq; latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D;

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

a 15. oct. a metietur quoq; A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. oct.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A.

c 14 & 15. oct. *c Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit: metietur latus D, latus C.

d 14. & 15. oct. *d Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur, Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.*

A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

AT verò si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. e Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

A, 64. B, 8. C, 4. D, 2.

e 16. & 17. oct.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex, non metietur D, latus latus C. f Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum; nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

A, 49. B, 9. C, 7. D, 3.

A, 125. B, 8. C, 5. D, 2.

f 16. & 17. oct.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A, & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B, sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E; fecit A, & G, *a* erit A, ad G, vt C, ad E, hoc est, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; *b* erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9, F, 3.

a 17. *sexti.*

b 17. *sexti.*

QVIA verò, cum A, G, B, sint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum G, E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit

A ad, G,

A, ad G, & C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius verò illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam verò D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; *a* erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; *b* erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, *c* erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; *d* erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. *e* Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continuè ſunt proportionales in

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

a 17. *ſep.*
b 17. *ſeptim.*
c 17. *ſeptim.*
d 17. *ſeptim.*
e 18. *ſep.*

les in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continuè proportionales cadunt.

QVONIAM verò, cum A, M, N, B, sint proportionales continuè; proportio A, B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

Ex ijs, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoq; C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem: quod sit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L, metietur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K, metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M: Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I, a Igitur & C, D, metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, & quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M, consequentes consequentem. Metiuntur verò & F, G, H, ipsum N; (Cum enim factus sit ex H, in L, per constructionem; metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F, G, ipsum N; atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Necnon & ipsum B, nimirum la-

a 11. *pro num.*

A, 30. *M*, 60. *N*, 120. *B*, 240.
I, 6. *L*, 12. *K*, 24.
C, 2. *D*, 3. *E*, 5. *F*, 4. *G*, 6. *H*, 10.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

rum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, & quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducatur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium; ſive primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſive deniq; ſecundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam, propoſitis quotuscunque numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter ſe permutent. Qua quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, a erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem, b ita quoque eſt F, ad A; quod A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, c ita eſt A, ad unitatem; propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, ut E, ad B, ita F, ad unitatem: d atque idcirco numerus ex E, in unitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

a 15. def.
b 15. def.
c 15. def.
d 19. ſeptim.

E, F,
D, A,
B, unitas.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; e erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem, f ita etiam eſt G, ad B, eo quod G, factus eſt ex B, in C. Igitur erit ut E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, g ita eſt B, ad unitatem, propterea quod D, factus eſt ex A, in B. Igitur ex æquo erit, ut E, ad A, ita G, ad unitatem: h ac proinde numerus factus ex E, in unitatem, id eſt, ipſemet nu-

e 15. def.
f 15. def.
g 15. def.
h 19. ſeptim.

E, G,
D, B,
A, unitas.

met numerus E, aqualis erit numero genito ex A, in C, producto ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita vt prater primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11 multiplicationes diuersa producentes eundem semper numerum. Quoniam enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille sit aqualis proximè ostensus primo producto, erit & hic aqualis eidem, quod est tertium.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

QVINTO quoniam, vt demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, &

in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille sit ostensus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod est quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextum.

SEPTIMO quia, vt in tribus ostendimus, idem numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in A; constat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proximè ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & ille, quod est septimum.

OCTAVO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est octauum.

NONO quia, vt demonstratum est in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A, producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, æqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod est vndecimum.

EODEM

EODEM argumentandi modo ostendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A. B. C. D. E.	
A. B. C. E. D.	
A. B. E. D. C.	
B. C. A. D. E.	

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, D. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C, a metientur D, & E, ipsos A, & C, æquè: metiantur per F. Similiter æquè metientur ipsos C, & B: metiantur per G. b Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: c Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B, erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus, cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

a 21. septim.
b 9. prænun.
c 9. prænun.
d 17. septim.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres, E, F, G,

minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, me-
a 20. octaui. dius cadit proportionalis F; *a* erunt E, & G, plani similes: sint
ipsius E, latera H, I, ipsius vero G, latera illis proportionalia K, L.
b 21. septim. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, *b* æquè me-
tiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis, metiantur per M.
c 21 sep. Eodemque modo, *c* quia E, F, G, minimi æquè metiuntur
A, 24. C, 72. D, 216. B, 648. C, D, B, eandem habentes ra-
E, 1. F, 3. G, 9. tionem cum illis; metiantur
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72. per N; *d* ita vt M, multipli-
d 9. pro xun. A, 8. C, 12. D, 18. B, 27. cans E, F, G, faciat A, C, D; &
E, 4. F, 6. G, 9. N, multiplicans eosdem E, F,
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3. G, faciat C, D, B. Factus est
autem E, ex multiplicatione
mutua suorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplica-
tione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua mul-
tiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; at-
que adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M;
& B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, mul-
e 18. septim. tiplicantes F, faciunt C, & D, vt ostendimus; *e* erit C, ad D, vt M,
ad N: *f* Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quod
f 17 sep. N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eam-
dem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter plano
similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos.
19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igi-
tur erit quoq; H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, ad
I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt la-
tera, H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt nume-
ri solidi A, & B. Quam ob rem si inter duos numeros duo medij
proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, Vnitatem E, esse planum numerum, & Vnitates H, & I, eius latera licet improprie, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim Vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem contingeret in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodem primo exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, eamque sine vlla exceptione demonstret.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; *a* erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324. a 20. octaui.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continuè, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; *b* erunt A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125. b 21. oct.

SCHOLIVM.

HÆC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atq; omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4 & 16. proportionalia. Vnde etiam si prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, imò omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoq; æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportiona-

tionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes; cur sine demonstratione ℣lla concedemus, his lateribus prioris aqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, ℣idelicet & inter se aqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter ℣tramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab ℣nitate continuè proportionales, eritque conuertendo A, ad D, ℣t D, ad ℣nitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam ℣nitatem, cadant medij proportionales multitudine aquales, nimirum ℣nus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter ℣nitatem, atque C, numerum, nimirum ℣nus, qui sit E. Quoniam igitur ℣nitas & E, C, numeri sunt continuè proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36.	D; 6.	E, 8.	℣ni-. tas.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, aque, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus,

a 11. oct.	A, 36.	B, 48.	C, 64.	*ex hypothesi;* a *cadet inter A, & D, quadratos medius ℣nus proportionalis, ℣t G,*
	G, 18.		H, 32.	
	D, 9.	E, 12.	F, 16.	*Quia ℣erò est ex aquo, ℣t A, ad C, ita D,*
	L, 64.	K, 8.	I, 4.	*ad F; & permutando, ℣t A, ad D, ita G, ad F;* b *cadet quoque inter C, & F, ℣nus*
b 8. oct.				

proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur c *C, ℣ltimum;* c *metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita ℣t H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem* d *multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K.* d *Itaque quia ratio* d 11. oct. *L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ℣t C, ad F; Ac proinde L, & C, aquales sunt. Existente ergo L, quadrato; ex constructione, & G, quadratus erit.*

c 20. oct. *ALITER.* e *Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita ℣t sit D, ad*

sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, a erunt D, H, E, continuè proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius proportionalis H, b cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continuè proportionales; c idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.
a 20. septim.
b 8. oct.
A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.
c 20. septim.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum tam inter numerum D, quam vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. à nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
vnitas.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, aquè, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi; d cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; e cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, f metietur

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16. L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.
d 12. oct.
e 8. oct.
f 8. oct.

tietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. a Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.

a 12. oct.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitque A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratum. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; b cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; c cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continuè proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus; erit & B, tertius, quadratus. d Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

b 11. oct.
c 8. oct.
d 22. octaui.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, e eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, eſſent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. exiſtente quadrato, f eſſet & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & 0. quod eſt abſurdum. g Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, ſi eſſent quadrati: cum tamen in ſcholio propoſ. 8. huius lib. demonſtratum ſit, inter numeros duplæ proportionis quoſuis non poſſe cadere medium proportionalem.

e 24. octaui.
f 24. oct.
g 11. oct.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, h caderet inter eos medius proportionalis. i Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non poſſe, demonſtratum à nobis eſt in ſcholio propoſ. 8. huius lib.

h 11. oct.
i 18. oct.

xxiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus nu-

bus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum, sitque A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D: *a* cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F: *b* cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H.

a 12. oct.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

b 8. oct.

Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continuè proportionales, & A, primus est cubus: *c* erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

c 23. oct.

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, *d* essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

d 25. octaui.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; *e* cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

e 18. oct.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. f *Quoniam enim inter quadratos C,*

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.

f 11. oct.

D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt
a 8. oct. *A.* 8. *B,* 18. *C, ad D, ita A, ad B;* a *cadet quoque medius pro-*
b 20. oct. *C,* 16. *D,* 36. *portionalis inter A, & B,* b *Quare A, & B, plani similes sunt.*

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

XXV. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,
c 19. oct. B, sunt solidi similes; c cadent inter eos duo medij proportionales, qui sunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet,

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum
d 12. est. *A,* 16. *B,* 54. *sit A, ad B, vt C, ad D;* d *cadant autem inter*
e 8. oct. *C,* 64. *D,* 216. *C, D, cubos duo medij proportionales;* e *cadent*
f 21. oct. *quoque inter A, B, duo medij.* f *Sunt ergo A, & B, solidi similes.*

EX his omnibus perspicuè infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse
g 18. oct. *similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani,* g *caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales. Nam*
h 8. oct. h *alias caderent quoq; duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certo binario tantum inter se distent, vt in scholio prædicto traditum est;*

inter

inter quos certum est, non posse recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cùm non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodò vnitatem, & seipsum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cùm ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quiuis verò numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantùm habet duas vnitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cùm ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; a cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cùm ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cùm nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod absurdum est. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. a 18. & 19. oct.

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; b essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proximè ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes. quod absurdum est, & contra hypothesin. Verum hoc ostensiuè quoq; ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitq; A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cùm A, & B, ponantur plani similes, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, aequalis, quod nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, aequalem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. c Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum, aequalis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit autem ex C, vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. d Quare D, ipsum F, metietur: e Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F. f Igitur

A, 3.	B, 48.
C, 1.	D, 3. E, 4. F, 12.

b 31. sep.

c 19. sep.

d 4. pro nun.

e 4. pro nun.

f 11. pro nun.

tur & D, id est, A, illi aqualis, eundem B, metietur, quod est propositum.

HINC perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, nõ essent inter se primi, sed compositi, quod est cõtra hypothesin.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitq; A, minor primus. Dico A, ipsum C, metiri. Nam cùm A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, aqualis, quòd nullus alius numerus, praeter vnitatem, & numerum D, ipsi A, aqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. a Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum aqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. b Quare D, ipsum G, metietur. c Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. d Igitur & D, hoc est, A, illi aqualis, eundem B, metietur, quod est propositum.

A, 3. B, 24.
B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2. G, 6.

a 19. sep.
b 4. prom.
c 4. prom.
d 11. prom.

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi, quod est contra hypothesin.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem, vel certè duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erunt illi ipsi per ea, qua tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter verò non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes; e haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, f esset & 20. quadratus, quod est absurdum, ponitur enim non quadratus.

e 26. oct.
f 24. oct.

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter verò non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, g haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cùm igitur 27. cubus sit, h esset & 40. cubus. quod est absurdum: ponitur enim non cubus.

g 27. oct.
h 25. oct.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cùm sint plani similes, *b* vnus medius cadit proportionalis. *c* Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D, E, C. Itaq; cùm tres D, E, C, continuè sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; *d* erit quoq; C, tertius, quadratus. *Si* duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuò, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 6. B, 54. D, 36. E, 108. C, 324.

a 17. sep. b 18. oct. c 8. oct. d 22. oct.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; *e* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *f* At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. *g* Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; *h* Ac propterea

A, 6. B, 54. D, 36. C, 324.

e 17. sep. f 11. oct. g 8. oct. h 20. oct.

pterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuò multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuò multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cùm enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; a *erit C, ex eis productus, quadratus.*

A, 4. *B*, 25. *C*, 100.

a 1. noni.

II.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum; sitq; A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cùm enim A, & B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum: b *erunt A, & B, similes plani:* c *atque adeò inter eos unus medius cadet proportionalis; videlicet D.* d *Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

A, 9. *D*, 12. *B*, 16. *C*, 144.

b 2. noni. c 18. oct. d 22. oct

III.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, non quadratum; sitq; A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. *B*, 20. *C*, 80.

IV.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuò multi-

multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cùm producatur ex A, in B, sitq; A, quadratus, esset & B, ex theor. 1. huius scholij; quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: *a* metietur C, ipsum D, per C: *b* Metietur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata à C; Ac proinde *c* vt vnitas ad C, ita C, ad D: Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; *d* metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; *e* ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C, Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeò inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. *f* At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, seipsum multiplicans fecerit B; *g* metitur verò & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; *h* Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cùm inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; *i* cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cùm ergo quatuor numeri A, E, F, B; sint continuè proportionales, & A, primus sit cubus, *k* erit quoque E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus seipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. E, 16. D, 4. F, 32. C, 2. B, 64. Vnitas.

a 7. pronun. b 5. pronun. c 20. def. d 7. pronun. e 20. def. f 7. pronun. g 5. pronun. h 10. def. i 8. oct. k 23. oct.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; *l* eritque D, cubus. Quoniam verò A, multiplicans A; & B, fecit D, & C, *m* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *n* At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. *o* Igitur & inter

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

l 13. noni. m 17. septim. n 12. oct. o 8. oct.

a 23. oct. inter D, & C, duo medij proportionales cadent; a Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; b qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, c erit vt A, ad B, ita D, ad C; d At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent; f Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

b 3. noni. c 17. sep. d 12. oct. e 8. oct. f 22. oct.

SCHOLIVM.

EX his & hac, quæ sequuntur, facilè demonstrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerum.

A, 8. B, 20. C, 160.

C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus, g *& multiplicatus B, cubus erit, quod nō ponitur.*

g 5. noni.

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubum.

A, 8. B, 17. C, 136.

C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, h *& factus cubus C, cubus erit. quod est contra hypothesin.*

h 4. noni.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat; Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cùm A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeò æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; a erit

A, 8. B, 64. C, 512.

a erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum. a 5. huius.

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: b Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. c Quoniam verò est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecerit; d cadent quoq; inter A, & B, duo medij proportionales. e Atqui adeò existente B, cubo, & A; cubus erit. Verùm nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est.

b 12. oct. A, 8. B, 64. C, 512.
c 17. sep. d 8. oct. e 23. oct.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cùm enim A, sit compositus, f metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, g multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cùm ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

f 13. def. g 9. prænum.
A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autē est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinq; intermittētes omnes.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum verò F, cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimi-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

AVM

rum M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metie-
a 5. pro- tur vnitas numerum A, & numerus A, numerum *B*: *a* Metitur
nun. autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, me-
b 9. pro- tietur; *b* Atq; adeò A, multiplicans A, ipsum B, producet. Qua-
nun. re B, quadratus est. Quia verò tres deinceps proportionales sunt
c 22. oct. B, C, D, & est B, quadratus; *c* erit & D, quadratus. Eadem ratio-
ne assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cùm D, sit
d 22. oct quadratus, *d* & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum in-
termittentes.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C, æquè metietur vni-
e 5. pro- tas numerum A, & numerus *B*, numerum C. *e* Metitur autem vni-
nun. tas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, *f* at-
f 9. pro- que adeò B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quæ-
nun. re cùm A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans verò B, fa-
ciat C, vt est ostensum, erit C, cubus. Quia verò quatuor deinceps
g 23. oct. proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, *g* erit & F, cubus.
Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionali-
h 23. oct. bus F, G, H, I, cùm F, sit cubus, *h* & I, cubus erit, atq; omnes
semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est &
quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque
eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque
G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes
quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri
deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstran-
dum.

SCHOLIVM.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunq; numeri ab vnitate continuè pro-
portionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum
in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt
quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proximè nu-
meros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo,
decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius
metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, de-
cimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus,
&c. sunt cubi. Omnes verò qui proximè sequuntur nu-
meros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctа-
uo, vigesimoquarto, & alijs, quæ metitur senarius, qua-
les sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vi-
gesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM

NAM primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate: Numeri denique tertij ordinis quinq; semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui verò post vnitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus, & reliqui omnes cubi èrunt.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus vnitati quadra-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

tus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quòd enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, *a* iam demonstratum est. Quòd verò & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cùm tres

a 8. noni.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

continuè proportionales sint A, B, C; sitque A, quadratus; *b* erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continuè proportionalibus C, D, E, cùm C, sit quadratus; *c* & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continuè proportionales.

b 22. oct.

c 22. oct.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quòd enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermitten-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

tes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, *d* iam est demonstratum. Quòd autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cùm sit vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numeeum A, & numerus A, numerum B: *e* Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur & A, ipsum B, per seipsum metietur; *f* Atq; adeò cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit. & Quare B, cubus est. Quoniam verò quatuor continuè proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, *h* & D, cubus erit. Eademque ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cùm B, cubus sit: *i* & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt: Non secus demonstrabimus, omnes cubos

d 8. noni.

e 5. prænun.

f 9. prænun.

g 3. noni.

h 23. oct.

i 23. oct.

esse, si plures continuè proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicuè hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua verò parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C, sunt q3 A, B, quadrati; erit & C, quadratus;

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, sunt q3 A, C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: At q3 ita deinceps: cùm ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multi-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

a 3. nomi. b 4. nomi. c 4. nomi.

plicans facit B; a erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt q3 A, B, cubi; b erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio A, multiplicans C, facit D, sunt q3 A, C, cubi; c erit quoq3 D, cubus. At q3 ita de cæteris, cùm ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.

X. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati nõ sit quadratus, Dico nec alium vllum esse quadratũ, præter tertium ab vnitate, & vnũ intermittentes omnes, hoc est, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos alius est quadratus, sit quadratus E.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

a Cùm ergo & D, sit quadratus; sitq; vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo, vt E ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: b sed B, tertius ab vnitate est quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse.

a 8. noni.
b 8. noni.
c 24. oct.

SED iam A, proximus vnitati nõ sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. d Cùm ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quòd tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: e sed C, est cubus, cùm sit quartus ab vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesin. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; g cùm & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubũ C, ita C, ad A; existente C, cubo, erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

d 8. noni.
e 8. noni.
f 25. oct.
g 8. noni.
h 25. oct.

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cùm aliquando tertius ab vnitate, aliquando verò quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post vnitatem, cubus quidem, non autem

tem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul, & quadratum; cubum quidem, a quod primo existente cubo, omnes cubi sunt;

a 9. noni. Vnitas. B, 8. B, 64.

b quadratum verò, quod tertius sit ab vnitate.

b 8. noni.

SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul, & quadratum; c Cubum quidem, quod quartus sit ab vnitate: quadratum verò, d quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

c 8. noni.

d 9. noni.

SIT postremò A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, prater septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cùm enim primo non existente

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

quadrato, e nullus alius quadratus sit, prater tertium ab vnitate & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, f nullus alius sit cubus, prater quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodò septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de ceteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt ita quidò constat ei, qui rectè propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

e 10. noni.

f 10. noni.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunq; numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cùm enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) g æquè metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum

g 20. def. fin.

rum G: a Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per E cùm sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. a 5. prop. nun.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus à minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerũ, per quem minor maiorem metitur; propterea quòd eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonstratione apparet. Itaque B, me-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

tietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter G, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti sunt numeri.

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui seipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab vnitate: Si verò minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à maiore distat, quantum minor ab vnitate, propterea quòd si numerum numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, b *producitur ille, quem metitur. Ergo C, seipsum multiplicans gignet F, cùm F, tantum absit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.* b 9. prop. nun.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xj.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; nõ metitur ipsum A: c erit E, cùm primus sit, ad A, primus: hoc est, c 31. sep.

a 9. pronun. A, & E, inter se primi erunt. Metiatur E, ipsum D, per F, *a* atque adeò E, multiplicans F, faciat D. Quia verò & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A,

b 19. sep. primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. *b* Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cùm

c 23 sep. ergo A, & E, sint inter se primi; *c* ac proinde in sua proportione

d 21. sep. minimi; *d* metietur æquè A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E,

e 9. pronun. ipsum C, per G, *e* atq; adeò E, multiplicans G, faciat C. Quia verò & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B,

f 9. pronun. *f* atq; adeò A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium.

g 19. sep.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

g Erit igitur vt A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum,

h 23. sep. Quapropter cùm A, & E, sint inter se primi; *h* ac propterea in

i 21. sep. sua proportione minimi; *i* Metietur æquè A, ipsum G, & E, ipsum

k 6. pronun. B. Metiatur E, ipsum B, per H: *k* ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atq; idcirco A, seipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. appareret. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium,

l 20. def. & ex A, medio in seipsum, *l* Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cùm ergo E, & A, inter se

m 23. septim. primi sint; *m* ac proinde in sua proportione minimi; *n* æquè

n 22. septim. metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesin. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metietur ergo E, ipsum A. Eodẽ argumento ostendemus quoscũq; alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoq; ipsum A; Eademq; erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico &

o 31. sep. E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; *o* erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicans facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat,

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 5.

p 27. septim. *p* erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis

q 26. septim. propos. *q* erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præce-

r 26. septim. dentis propos. *r* erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesin. Metitur ergo E, ipsum A. Si igi-

tur

tur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est, quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hîc est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ æquiuntur. Cardanus quoq; simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriatur q; se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim huius demonstrationis expendisset, vel certè, si expendit, eam in memoriam reuocasset, quandoquidem ipso longè prior Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus. a 12. noni.

CÆTERVM *ex demonstratis perspicuum est, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum.* a *Cùm enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes;* b *quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris* c; *manifestum est, quod & ille omnes metiatur.* b 11. noni. c 11. prænun. xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui verò post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continuè proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; d metietur quoq; ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; e atque adeò cum aliquis numerus primus metie-

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D; 624.
E ---- H ---- G ---- F ----

d 12. noni. e 33. sept.

tui, quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quàm A, metiatur E; cùm E, metiatur extremum D,
a 11 pronun. *a* metietur quoq; ille alius primus eundem D; *b* atq; adeò & ipsum A, primum, numerum vnitati proximum. Quod est absurdum.
b 12. noni. Ergo non alius primus, quàm A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per
c 8 pronun. F; metietur vtiq; E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; *c* & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum
d 11. noni. D, metitur,) metietur D, per E, *d* Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesin. ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam verò E,
e 8. pronun. metitur D, per F, *e* metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum,
f 12. noni. *f* metietur & A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; *g* atque adeò
g 33 sep. eum aliquis numerus primus metietur. quo rursus dico nullum alium esse posse præter

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E---H---G---F---

primum A. Si namque alius primus quàm A, metiatur F, cùm F,
h 11. pronun. metiatur D, extremum; *h* metietur quoque ille alius primus eundem D; *i* atque adeò & ipsum A, proximum vnitati, qui
i 12. noni. primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipsum F, metitur. Iam verò quoniam E, metitur D, per F; *k* fiet
k 9. pronun. D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 17. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C,
l 19. septim. quartum, & ex E. secundo in F, tertium; *l* Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & non primum, sed compositum, quem solus A, primus metiatur: quemadmodũ id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimũ.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ip-
m 8. pronun. sorum A, B; *m* & vicissim aliquis ipsorum A, B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. *n* Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F,
n 11. noni. idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G,

go G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; *a* metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C, *b* metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed composi-tus, *c* ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum, *d* metietur quoque ille alius primus eundem C, *e* atque adeo & ipsum A, vnitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metietur. *f* Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. *g* Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H, diuersum esse ab A, quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

a 8. *pre-nun.*
b 12. *no-ni.*
c 33. *sep.*
d 11. *pre nun.*
e 12. *no-ni.*
f 9. *pre-nun.*
g 19. *se-ptim.*

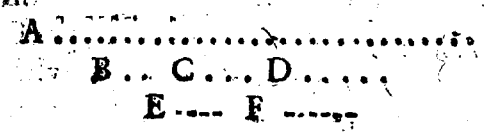
NAM si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A; *h* Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum, ostensum est enim G, non esse eundem, quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. *i* Iam vero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertium, & ex A, medio in se ipsum. *k* Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

h 8. *pre-nun.*
i 9. *pre-nun.*
k 20. *se-ptim.*

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus numerus E, diuer-



a 29. pro-nam.

b 32. se-ptim.

sus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia, igitur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipſum F, faciet A. b Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt quam A: Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

ADDIT hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compoſitus.

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compoſitum eſſe.

c 2. def. *Sit enim H, non primus, ſed compoſitus:* c *ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E.*

A, 16. *B*, 24. *C*, 36. *D*, 54. *E*, 81.
M, 8. *N*, 12. *O*, 18. *P*, 27.
I, 4. *K*, 6. *L*, 9.
H ---- *F*, 2. *G*, 3.

Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreãdi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metitur autem H, ipſum A, erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum: ſi verò ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 21. lib. 8. erit, ex ſcholio eiuſdem propoſ. 32. lib. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi verò ad I, cum I, gignatur ex F, in ſe ipſum, erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. lib. 7. Quod ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

DEINDE metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compoſitus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitum, ſi verò ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem modo

modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum, si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex E, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum, si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se, compositus quoq; erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRÆTEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in E, erit etiam H, compositus vel ad H, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si vero ad L, cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad H; Si vero H, primus sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si vero H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quot-

quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri AB, & C, quorum AB, diuidatur in AD, DE, EB; Fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK, hoc est, toti numero GK, ex, GH, HI, IK, composito. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F,

A ... D .. E . B C ..
F . . . . . .
G ..... H .... I .. K

a 2. pronun. *a metietur AB, ipsum F, per C, hoc est, AB, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione AD, ipsius GH; & DE, ipsius HI; & EB, ipsius IK, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, qua AB, ipsius F. Quia verò per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus AB, totius GK, eadem pars est, quæ AD, ipsius GH; erit quoque AB,* b 4. pronun. *totus totius GK, pars eadem, quæ AB, ipsius F; b Ac proinde inter se æquales erunt F, & GK. Quod est propositum.*

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

NVMERVS enim AB, diuidatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi AB; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex AB, in AC, & in CB, quod est propositum.

D .....
A ....C .. B

IDEM demonstrabitur, si AB, in plures partes, quam in duas secetur, & ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex AB, in singulas partes AC, CD, DB.

E .....
A ...C .. D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est illi, qui

illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, quia prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem esse & ei, qui sub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IV.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . . B

V.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel BC, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CB, per 4. theorema, aqualis sit quadratis partium CD, DB, vna cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero vero comprehenso semel sub CD, DB, vna cum quadrato ipsius DB, aqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vna cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius CB, aqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, vna cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CD, hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, aqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, aqualis erit quadrato ipsius CD, vna cum numero qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vna cum quadrato ipsius CD, aqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.

A ..... C ... D .. B

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim AB, secetur in partes aquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vna cum quadrato dimidij numeri CB, aqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno, hoc est, quadrato ipsius CD. Cum enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, aqualis sit quadratis partium CB, BD, vna cum numero bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratis partium CB, BD, vna cum numeris sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis, numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BC, BD, hoc est, quadrato ipsius BD, aqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; fit vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato partis BD, vna cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, aqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vna cum numero facto ex AD, in BD; hoc est, numerus factus ex AD, in BD, vna cum quadrato ipsius CB, aqualis sit quadrato ipsius CD. Quod est propositum.

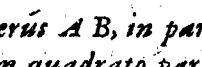
A .... C .... B .. D

SI nume-

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

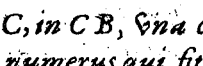
DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliqua partis AC. Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est. qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.



VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compositi ex AB, & BD, siue dicta parte CB, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum AB, BD, vna cum numero qui fit bis ex AB, in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum AB, CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC; fit, vt si pro quadratis numerorũ AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cũ quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.



SI nume-

IX.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos esse quadratorum, qui ex AC, dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) efficiuntur. Cum enim

A . . . . . C . . . D . . B

quadratus numeri AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum AC, CD, & na cum numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, & na cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, & na cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC, & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, & na cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero composito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, vtrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, composito ex CB, dimidio, & adiecto

A . . . . C . . . . B . . D

BD. Cum enim quadratus ipsius AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, & na cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, & na cum

una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales sunt quadrati numerorum CB, CD; & quadrato ipsius CB, æqualis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, una cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc est, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

IAM verò theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, æqualis est quadrato numeri medij AC; a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, æqualis, ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoq; CD, maior quàm AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit æqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum; c erit quoq; vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, æqualis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, æqualis; & sic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

A D E C B

a 20. septim.

b 11. septim.

c 11. septim.

ALITER. Quoniam numerus AB, in C ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, vna

C

A B

k cum qua-



cum quadrato ipsius A C, quintuplus eius quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, una cum quadrato ipsius A C, quadratus; quippe cum aequalis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorema huius. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur sub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuidendo ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, aequalis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.

VERVM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 38. huius lib.

xvj. THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem verò ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicantem facere C. *a* Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; *b* erit & vterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; *c* erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam vno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; *d* Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

a 24. *septim.* b 30. *septim.* c 26. *septim.* d 27. *septim.* e 30. *septim.* f 26. *septim.*

DEINDE quia, vt prius, *e* vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E; efficitur, (cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) *f* numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt,

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

sunt, a atque adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi. a 27. septim.

POSTREMO quia, vt prius, b vterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est: atque adeo è contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E, c erit quoque qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus; d Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem. antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt ostensum est. e Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostensum est; f erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

b 30. septim.
c 26. septim.
d 27. septim.
e 20. septim.
f 30. sept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continuè proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus com-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E---- F, 2. G, 3. H----

munis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; manturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continuè proportionales sunt, & minimi metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque alterum ipsorum F, G, vel certè compositus erit ad alterum ipsorum

F, G, ex scholio propos. 14. huius lib.

A, 8. *B*, 12. *C*, 18. *D*, 27.
E ---- *F*, 2. *G*, 3. *H* ----

Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; a metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum E. Quia verò H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8. b metietur quoque H, medios B, C: c ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus: d metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. e Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

a 11. *pro nun.*
b 11. *pro nun.*
c 10. *pro nun.*
d 12. *pro nun.*
e 3. *oct.*

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum erit scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D: f metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia verò H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C, g metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B, h metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. i metietur & iam H, alterum ipsorum A, D. k. Igitur & reliquum. Sunt ergo, A, D, extremi inter se compositi. l Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.

f 11. *pro nun.*
g 11. *pro nun.*
h 12. *pro nun.*
i 11. *pro nun.*
k 12. *pro nun.*
l 3. *oct.*

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos: nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

xvij. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, *a* atque adeo in sua proportione minimi: *b* ipsi æquè metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . a 23. *septim.*
B . . . . . .
C . . . . . b 21. *septim.*

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continuè proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi, *c* minimi in sua proportione. *d* Igitur æquè metietur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C, Ergo cum A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; *e* atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, *f* metietur quoque ipsum D. Metitur verò & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . . c 23. *septim.*
B . . . . . d 21. *septim.*
C . . . . . e 11. *prop. nun.*
D . . . . . f 11. *prop. nun.*
E . . . . .

PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter

se sunt, aut non. Si sunt inter se primi, a per-

a 16. no. A, 4. B, 7. spicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C, per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, imò ipsum D, esse tertium proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D, b fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui ex medio B, describitur.

b 9. pro nun. c 20. septim. c Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita B, ad D; d erit

d 20. septim. A, 6. B, 4. D ---- C 16. numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; e metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

e 7. pro nun.

XX. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A; ad B. Multiplicans B,

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216. ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur,

A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72. aut nō. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, imò ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, f fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D,

f 9. pro nun. ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio continetur; g Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est

g 19. septim. E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

SED

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo

quatuor numeri A, B, C, E, A, 4. B, 6. C, 9. E ---- D, 54.

proportionales sunt, a erit A, 3. B, 4. C, 10. E ---- D, 40. a 19. septim.

numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; b metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum. b 7. praenun.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. *demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis* 3. 8. *si quadratus numerus secundi* 8. *nimirum* 64. *diuidatur per* 3. *inuenietur tertius proportionalis* $21\frac{1}{3}$. *hoc modo.* 3. 8. $21\frac{1}{3}$. *Quia enim diuisis* 64. *per* 3. *fit numerus* $21\frac{1}{3}$. *producetur numerus diuisus* 64. *ex multiplicatione Quotientis* $2\frac{2}{3}$ *per diuisorem* 3. *vt ad defin.* 15. *lib.* 7. *tradidimus. Cum ergo idem numerus* 64. *factus sit ex medio numero* 8. *in se, erunt* 3. 8. $21\frac{1}{3}$. *continuè proportionales.* c 20. septim.

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. *si numerus* 120. *ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum* 9. *reperietur quartus proportionalis* $13\frac{1}{3}$. *hoc modo* 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. *Cum enim diuisis* 120. *per* 9. *fiat* $13\frac{1}{3}$. *producetur numerus diuisus* 120. *ex multiplicatione Quotientis* $13\frac{1}{3}$ *per diuisorem* 9. *ex ijs, quæ in defin.* 15. *lib.* 7. *scripsimus. Est autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium.* d *Igitur quatuor numeri* 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$ *proportionales sunt.* d 19. septim.

EX his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Com-

cus Commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi, Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicuè in his numeris non continuè proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis aliis infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT *trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt*

A, 3. *B*, 6. *C*, 8. *D*, 16. *E* ----

quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, a *& ob id minimi.* b *Igitur metientur æquè ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At verò & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

a 23. septim.
b 21. septim.

HÆC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Imò hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D,

B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quàm tribus A, B, C, cùm non magis hoc constet in illis, quàm in his. Quapropter cùm ibi id pro concesso assumant, & hic idem fieri non posse, ostendant; liquidò constat, eos petere principium (& cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, & detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione illa exigunt, & detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, & B, secundus ad C, tertium. Hoc verò non posse fieri, facilè demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi & tuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintq; A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, & sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, & B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, & A, ad C, ita C, ad E; Atq; adeò & ipsi ostenderunt, metietur A, A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E---- duos A, & C, primos inter se.

Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, & D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissimè falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM verò membrum perspicuè & apertè ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus. a 17. noni.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxj.

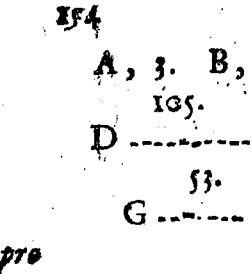
PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros.

b Sumpto enim numero DF, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF. Aut ergo totus DF, primus est, aut non primus. Sit primùm primus Sunt ergo primi numeri A, B, C, & DF, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2.	B, 3.	C, 5.		b 38. septim.
30.		1		
D----------		E	F	

SED iam non sit primus DF. c Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorum c 33. septim.



A,B,C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui vnus ipsorum A,B,C; metiantur autem A,B,C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractũ D E, a metietur quoque E F, reliquum, numerus vnitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorũ A,B,C. Eademq; via plures inuenientur quàm A,B,C,G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

a 11. *primi.*

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

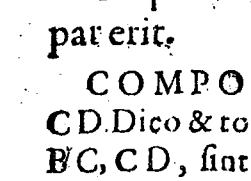
PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A,B,C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videli. et D F, si primus est, vel certè G, qui ipsum D F, metitur. Atq; eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinq; primis alium sextum inueniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

xxij. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B, & F, ipsius B C; & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper sit proportio dupla) b erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem A B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.



b 12. *sep.*

xxiij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COM-

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorũ multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, D E, sint impares: differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. *a* Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. *b* Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . . C . . . . . D . . . . . E

a 21. noni.
b 21. noni.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum, A D, compositum, imparem esse. Cùm enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. *c* Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. *d* Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cùm impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . B . . . C . . . . . E . D

c 12. noni.
d 21. noni.

SCHOLIVM.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cùm ex defin. Impar à pari differat vnitate. *e Quare reliquus ille par cum alio pari dato, vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cùm à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.*

e 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxv.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor.

A . . . . . C . . . . . B

Sit primùm dimidia pars. Cùm igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia, erit & A C, numerus par.

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimi-

dias

dias partes habent, ex definitione, sit D B, dimidia pars ipsius A B, & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cùm sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium: erit permutando vt A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, vt A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cùm bifariam diuidatur, (quòd D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A.....C..D...E.....B

A.....D...C..E..B

SCHOLIVM.

FACILIVS demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile, hoc modo. Si A C, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate A D, erit reliquus D C, par. a *Igitur compositus D B, par quoquè erit: ac proinde, addita vnitate A D, totus A B, impar fiet, quod est absurdum, cùm par ponatur.*

A.D...C.....B

a 23. noni.

xxvj. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; *b* erit & reliquus A D; par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. *Si* igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....C.D....B

b 24. noni.

xxvij. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; *c* erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A....C.....D.B

c 24. noni.

xxviij. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX

EX impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cùm detrahatur CB, par; *a* reliquus DC, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A . D . . . . C . . . . . B

a 24. noni.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cùm B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; *b* Atque adeò par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . . . .
C . . . . . .

b 21. noni.

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cùm tam A, quàm B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsi B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. *c* Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . .
C . . . . . .

c 23. noni.

COROL.

COROLLARIVM.

A . . . B . . .
C . . . . . HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; a erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cùm ponatur par. Est ergo C, par.

A . . . C . . . .
B . . . . . a 29. noui.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dicò C, imparem esse. Si enim sit par; b erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cùm impar ponatur. Est ergo C, impar.

A . . . C . . . .
B . . . . . b 28. noui.

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoq; demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 4. huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstratheros. Secetur enim si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraq; pars A C, C B, impar est; aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contrà, maior A C, par, & minor C B, impar; aut deniq; vtraq; pars A C, C B, par.

A------ C---- B
D --- E--

Sit primùm vtraq; pars A C, C B, impar, c ideoq; totus numerus A B, par. d Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui verò ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cùm ergo numerus ex A B, in C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.

c 22. noui. d 28. noui.

DEINDE sit A C, impar, & C B, par, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. e Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum.

e 28. noui.

TERTIO sit A C, par, & C B, impar; ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. f Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis. quod absurdum est.

f 29. noui.

QVAR-

QVARTO *sit vtraq; pars AC, CB, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione AC, ad CB;* a *erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vter q; impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt AC, ad CB, ita D, ad E;* b *erit conuertendo, vt CB, ad AC, ita E, ad D: Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D:* c *Est autem, vt AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod numerus factus ex AB, in CB, aqualis ponatur quadrato medij AC. Igitur erit quoq; vt totus DE, ad D, ita D, ad E,* d *ac proinde numerus qui fit ex toto DE, in E, aqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D, E, sectus est in partes D, E, quarum vel vtroque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE, in partem E, aqualis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse; tam demonstratum est in numero AB, quando vtraq; pars AC, CB, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.*

a 24. sept.
b 26. sept.
c 20. sept.
d 20. sept.

THEOR. 28. PROPOS. 30. xxxiij.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoq; ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par, Atq; adeò dimidiam partem habebit. Itaque cùm A, metiatur B, per C, *e* metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam verò est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. *f* Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . C . . . .
B . . . . . .

e 8. pronum.
f 40. sept.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiiij.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primũ esse. Si enim A, C, nõ sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D, qui necessariò impar erit. Nã si sit par, cùm metia-

A . . . . B . . . . .
C . . . . . D . . . .

tur

a 28. noni. tur imparem A; *a* erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiens, (est enim

A . . . . . B . . . . . .
C . . . . . D----

b 30. noni. C, par, cùm dimidium habeat B.) *b* metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solùm ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, *c* primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est. Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

c 31. noni.

XXXV. THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantum.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantùm. Quòd enim sint pariter pares, perspicuum est.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

Nam exposita vnitate, cùm A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps

d 11. noni. proportionales, nimirum in proportione dupla. *d* Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cùm omnes sint pares, vtpote dupli à binario: metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantùm, liquidò etiam constat. Cùm enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continuè proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius;

e 13. noni. *e* nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cùm sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par est tantùm. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantùm. Sint enim A, B, C, D, E, F, à bi-

à binario dupli, quiex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantùm. Dico nullum alium esse pariter parem tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantùm inuenirí, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par, (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm.) atq; ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad Vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars Vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli: Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I ---- H ---- G ----

THEOR. 31. PROPOS. 33. xxxvj.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo demonstrabimus. Sit B. dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoq; pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. a Igitur sit A, ex D, in E: sed idem A, sit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, b Ac proptereà erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo

A ..... .
B ..... C ..
D ----- E ----

a 9. præmun.

b 19. sept.

pariter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparem. Quòd autem illi soli sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, praeter duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium praeter ipsos, esse pariter imparem tantùm; sed vel esse pariter parem tantùm, vel certè pariter parem & pariter imparem.

Impares	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	
Pariter impares tantũ	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	

xxxvij. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat

A . . . . . parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem; Alias
a 29. noni. si per imparem metiretur, a cùm impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem; atque adeò vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

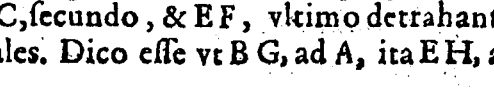
FACILE ex his inuenietur omnes numeros, qui & pariter pares sunt, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

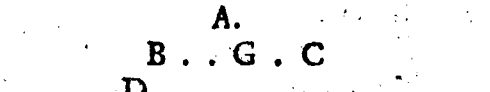
PORRO ex proximis tribus theorematibus apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxviij.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunq; numeri continuè proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo, A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, &





H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat. a 12. sexti

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum continuè proportionalium, si modò primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & vltimo dematur, fiat q; vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: Vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo apposito si primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo, si secundus numerus multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excepto vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1003. procreabitur summa omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

xxxix. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quo a l E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, vltimu faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt nu

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ----- 262. H, 124. I, 248. F ----- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ----- P ----

meri A, B, C, D, tot sumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I;
a 19. septim. erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; *a* Ac propterea numerus fa
ctus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in
b 7. pronun. E, tertium: Factus est autem F; ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex
A, in I; *b* ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc
F, ipsius

ipſius I, duplus erit. Quare E,G,H,I,F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K,L, primo E, æquales, ſintq; reliqui exceſſus M,N. *a* Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E. (Cùm enim G, duplus ſit ipſius E, ablatuſq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E G,H,I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A,B,C,D, numeris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, ſimul. Quare cùm vnitas, & omnes

a 35. nouī.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G----- 62. H, 124. I, 248. F----- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O------ P-----

numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipſum F; (Cùm enim F, factus ſit ex E, in D; *b* metietur D, ipſum F; *c* atq; adeò eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, *d* qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cùm I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, *e* metientur quoque eundem F, numeri E,G,H, *f* qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cùm æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

b 7. pronun.
c 11. pronun.
d 11. pronun.
e 11 pronun.
f 11. noni.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ſita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; *g* atque adeò F, fiat ex O, in P: *ſ*ed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium: *h* ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam verò illum A,B,C,D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, *i* vltimum D, nullus alius, præter A,B,C, metietur: & O, ponitur nõ idem, qui aliquis ipſorum A,B,C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neq; igitur E, ipſum P, metietur. Cùm ergo E, primus ſit, *k* erunt E, & P, inter ſe primi; *l* ideoque in ſua proportione minimi: *m* Ac proinde æquè metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. *n* Nullus verò alius præter A,B,C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B,C,D, tot ab E, ſumantur dupli E,G,H. Erit igitur ex æquo ... ad D, ita E, ad H; *o* Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis

h 19. ſeptim.
i 13. oct.
k 31. ſeptim.
l 23. ſep.
m 21. ſeptim.
n 23 oct
o 19. ſeptim.

fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H,
a 19. septim. a, atque adeò erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B;
Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim
O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I, Non igitur alius nu-
merus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I,
metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri
deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat de-
monstrandum.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 1. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat Quotientes D, E.

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, ex ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet

A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: a erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum. a 19 septim.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse vt B, ad C, ita G, ad F. Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proximè demonstrato. Cùm enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G, erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, diuidentes A, faciant G, H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

A, 15.
B, 1 C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15. G, 7½. H, 3¾. I, 1⅞.

IV.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitq; ℣t A, ad B, ita E, ad F; & ℣t B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, ℣t D, ad B, ita H, ad F.

A, 3. B, 6. C, 20. D, 29. E, 6. F, 12. G, 40. H, 58.

B, C, sigillatim, ita H, ad E F, G, sigillatim. Cùm enim sit, ℣t A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, ℣t A, B, simul ad B, ita E, F, simul ad F: Vt autem B, ad C, ita est F, ad G. Igitur ex æquo, ℣t A, B, simul, ad C, ita erit E F, simul ad G: Et componendo, ℣t A, B, C, simul, hoc est, ℣t D, ad C, ita E, F, G, simul, hoc est, H, ad G.

QVIA igitur est, ℣t D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, ℣t C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, ℣t D, ad B, ita H, ad F.

DENIQVE quia est, ℣t D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, ℣t B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, ℣t D, ad A, ita H, ad E. quod est propositum. Eademq; ratio est de pluribus.

V.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

NAM, ℣t in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summæ priorum ad primum, quæ summæ posteriorum ad primum: ac proinde ℣triusque proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diuisione antecedentis termini per consequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, si ℣traq; summa seorsum per primos numeros, quaque per suum, diuidatur. Eademque ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. diuisio fiat. Constat ergo propositum.

VI.

SI summa quotuis numerorum continuè proportionalium per eos sigillatim diuidatur; Et Quotientum summa per ipsos Quotientes; Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis semper ijdem primi Quotientes ordine conuerso.

SINT continuè proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorum summa E, per ipsos diuisa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum summa K, per eos diuisa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine conuerso, hoc est, F, & O, eosdem esse: Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D. Et quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E ad A, ſic K ad I. Quare cum ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.

A, 1. *B*, 2. *C*, 4. *D*, 8. *E*, 15.

F, 15. *G*, $7\frac{1}{2}$. *H*, $3\frac{3}{4}$. *I*, $1\frac{7}{8}$. *K*, $28\frac{1}{8}$.

L, $1\frac{7}{8}$. *M*, $3\frac{3}{4}$. *N*, $7\frac{1}{2}$. *O*, 15.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A, B, C, D, E, F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum ſumma O. Dico ſummam O, æqualem eſſe numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, ſunt continuè proportionales conuerſo ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vt I, ad H. a Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I, hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H, I, K, L, M, N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N, producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

A, 1. *B*, 2. *C*, 4. *D*, 8. *E*, 16. *F*, 32. *G*, 63.

H, 63. *I*, $31\frac{1}{2}$. *K*, $15\frac{3}{4}$. *L*, $7\frac{7}{8}$. *M*, $3\frac{15}{16}$. *N*, $1\frac{31}{32}$. *O*, $124\frac{1}{2}$.

a 19. ſexti.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè proportiona-

portionales A, B, C, D, E, quorum summa F, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M. Dico summam M, aequalem esse numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim aequalis sit ei qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonstrabimus, vt in prius. Deinde verò

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31.
G, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{1}{1}\frac{5}{6}$. M, $60\frac{1}{1}\frac{5}{6}$.

a 20. septim. quia tres numeri H, I, K, continuè proportionales sunt, a erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, aequalis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorum summa aequalis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis aequaliter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur; erunt Quotientes quaesiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumque summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quaesiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atque mirabile sanè est, posse reperiri quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa aequalis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis aequaliter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in se ipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa aequalis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumque summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quaesitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa aequalis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa aequalis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque summa 11. per vtrumque diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$ sunt numeri quaesiti. Habent enim

proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{5}$ ○

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT dua minutiæ AB, CB, eundem habentes denominatorem, & numerator C, ſit Vnitas. Dico ita eſſe minutiam AB, ad minutiam CB, vt eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim Vnitas C, continetur in A, toties minutia CB, in minutia AB, includitur; propterea quod minutia AB, diuiditur in tot minutias minutiæ CB, æquales, quot Vnitates ſunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B.

$$\frac{A,\ 6.}{B,\ 11.} \qquad \frac{C,\ 1.}{B,\ 11.}$$

Igitur eadem pars eſt Vnitas C, numeri A, quæ minutia CB, minutia AB; ac proinde eſt, vt Vnitas, C, ad A, ita minutia CB, ad minutiam AB: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia AB, ad minutiam CB. quod eſt propoſitum. a 29. de fin.

QVONIAM verò minutiæ ſunt fractiones, ſiue particulæ vel Vnitatis, vel alterius cuiuſpiam numeri, (Neque enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant, eas reſpectu ſolius Vnitatis eſſe accipiendas; propterea quod falſo putant, earum demonſtrationes non poſſe omnes explicari in numeris integris, ſed ſolum in Vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſuis etiam numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarum demonſtrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes, quas afferimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{1}\frac{}{1}$. *&* $\frac{1}{1}\frac{}{1}$. *particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius* $\frac{1}{1}\frac{}{1}$. *eſt 4. &* $\frac{6}{1}\frac{}{1}$. *ſunt 24. perſpicuum eſt, ita eſſe 4. ad 24. vt eſt numerator 1. ad numeratorem 6. vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.*

HANC porrò propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. in Vniuerſum de quibuſcunque duabus minutiis eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat Vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denominatorem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quacunque A, B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, aequalis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit aequalis. Quando enim numerator denominatori est aequalis, minutia suo integro aequiualet: quippe qua tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat.

$A, \frac{3}{B, 5.}$ $C, \frac{1}{B, 5.}$ $D, \frac{5}{B, 5.}$

a 21. huius. a *Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex aequo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, aequalem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum: quod est propositum.*

ALITER. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutia ipsi A B, aequales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, qua minutia A B, integri C. b *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod est propositum.*

$A, \frac{3}{B, 5.}$ $D, \frac{1}{B, 5.}$ $C, \frac{1}{C, 30.}$

b 20. de fin.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutia A B. c *Et quia est vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proximè demonstrauimus; erit ex aquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod est propositum.*

c 1. huius.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 10. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. d *Quoniam enim est, vt A, ad B, nume-*

d 2. huius.

B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad ſuum integrum C, erit permutando, vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore B.) ab ipſo denominatore B, denominata; (Cum enim aquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrum toties acceptum, quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore.) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties eſt vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod eſt propoſitum.

A: 3. C: 1.
B: 5. C: 30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. eſſe huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IV.

DATÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ AB, CB, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam AB, ad minutiam CB, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. a Quia enim eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad ſuum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam b cum ſit, vt C, ad B, ita minutia CB, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB,) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam CB, quod eſt propoſitum.

A: 6. C: 3.
B: 7. B: 7.

a 2. huius.
b 2. huius.

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. ſint huius integri 28. cuius $\frac{6}{7}$. ſunt 24. & $\frac{3}{7}$. ſunt

& 3/7. sunt 12. Vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. Vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, Vt est F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, a erit Vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, b ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, Vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; c erit Vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, Vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam C D, (Nam d cum sit, Vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit conuertendo, Vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque, Vt H, ad G, ita integrum ad minutiam C D. Ex æquo igitur erit, Vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D. quod est propositum.

a 18. septim.
b 2. huius.
c 18. septim.
d 2. huius.

F, 10. A, 2. / B, 3. × G, 12. C, 4. / D, 5. H, 15.

F, A B. H, Integrum. G, C D.

SI duæ minutiæ 2/3. 4/5. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. Vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT

SINT dua minutia AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum AB, CD, vt est H, ad summam numerorum F, G. a *Quoniam enim est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita est G, ad H, (nam* b *vt minutia CD, ad integrum, ita est C, ad D.* c *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quod G, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex aequo erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad summam minutiarum AB, CD, ita H, ad summam numerorum F, G, quod est propositum.*

F, 10.	G, 12.		a 5. huius.
A, 2.	C, 4.		
B, 3. ⋈	D, 5.		
H, 15.			
AB, CD.	F, G,		b 2. huius.
CD.	G.		c 18. septim.
Integrum.	H.		

SINT rursus dua minutia $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad summam numerorum 10.12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT dua minutia AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, fecit D, E; d erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, e ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod est propositum.

D, 105.	E, 35.		d 17. septim.
A, 5.	A, 5.		
B, 7. ⋈	C, 12.		e 5. huius.

DVÆ minutia $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{2}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$ sunt 30. & $\frac{5}{2}$. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. a *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.*

a 2. huius.

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. b *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

b 2. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico minorem esse minutiam AB, quam CD. c *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AC, ad integrum, quam minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quam minutia CD, quod est propositum.*

c 2. huius.

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

VERVM sit iam minutia AB, maior, quam minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quam minutiæ CD, minoris ad idem integrum. d *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod est propositum.*

d 2. huius.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *integer numerus sit 24. cuius tam* $\frac{3}{4}$. *quam* $\frac{9}{12}$ *sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *Ai* $\frac{2}{3}$. *eiusdem numeri 24 sunt 16. Vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoque minutiam* $\frac{3}{4}$. *maiorem esse minutia* $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem nu-

tem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse.

Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: A, 6. C, 2. B, 9. D, 3.

ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum. a 8. huius.

SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. b *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.* b 8. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad A, 6. C, 3. B, 9. D, 5.

B, quam C, ad D, c *ac propterea maior erit minutia A B, quam C D. quod est propositum.* c 8. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quam C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. d *Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum.* d 8. huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. *partes integri numeri* 90. *vbi vides minutiam* $\frac{6}{9}$. *hoc est,* 60. *æqualem esse minutiæ* $\frac{2}{3}$. *id est, numero* 60. *At verò minutiam eandem* $\frac{6}{9}$. *id est,* 60. *maiorem esse minutia* $\frac{3}{5}$. *hoc est, numero* 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, E, 10. F, 9. A, 2. C, 3. B, 3. ⋈ D, 5. G, 15.

quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G, e *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* f *Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* g *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* h *Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.*

e 18. sept. f 8. huius. g 18. septim. h 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. *reducendum ad minutiam cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, aqualis. Dico minutiam B C, ſnitati A, aqualem eſſe.* a *Quia enim eſt, vt B, ad C, ita minutia B C, ad integrum A: Eſt autem B, ipſi C, aqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id eſt, ſnitati, erit aqualis. quod eſt propoſitum.*

A, 1. B, 6. C, 6.

a 2. huius.

DEINDE ſit integer numerus A, reuocandus ad minutiam cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, aqualem eſſe. Supponatur enim integro A, ſnitas D, vt fiat minutia A D, ſnitatibus aqualis, quoties ſnitas eſt in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, ſnitatem. Cum ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, b *ipſæ inter ſe aquales erunt. Quare cum minutia A D, ſit integro A, aqualis, ob denominatorem, qui eſt ſnitas; erit quoque minutia B C, eidem integro A, aqualis. quod eſt propoſitum.*

A, 7. B, 42. D, 1. C, 6.

b 8. huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par eſt, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico ſtramque minutiam C B, A D, duplam eſſe minutiæ A B. Cum enim minutia A B, C B, eundem habeant denominatorem; c *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A B, minutia ad minutiam. Eſt autem C, ipſius A, duplus ex conſtructione. Igitur & minutia C B, minutiæ A B, dupla erit. quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 6. B, 8. B. 8. A, 3. D, 4.

c 4. huius.

RVRSVS quia minutia A B, A D, eundem habent numeratorem; d *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, minutia ad minutiam. Eſt autem B, ipſius D, duplus, per conſtructionem. Igitur & minutia A D, minutiæ A B, dupla erit. quod eſt propoſitum.*

d 7. huius.

DEINDE dimidianda ſit minutia A B. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A. Vel numerator A, quando par eſt, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico ſtramque minutiam A C, D B, dimidium eſſe minutiæ A B. Cum enim minutia A B, A C, eundem habeant numeratorem; e *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad mi-*

A, 6. B, 11. A, 6. C, 22. D, 3. B, 11.

e 7. huius.

ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; a erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum. a 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B. b Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum est E: c Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quod A, B, ipsum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus d quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrũ E: e Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G. Erit quoque vt C D, minutia ad suum integrũ E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cum eius valorem respectu integri E, exprimat.

b 2. huius. c 18. septim. d 2. huius. e 17. septim.

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, 1/2.

A B. F.
C D. H.
E. G.

exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E. a Cum ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K, & F G, ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod est propositum.

a 2. huius.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati, integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquiualet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

SIT primum A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F. b Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, respectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F. quod est propositum.

b 13. huius.

DEINDE sit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita vt C D, sit minutia minutiæ E F; & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse. c Nam minutia G H, æqualis est minutiæ A B, minutiæ C D, respectu minutiæ E F, tanquam integri cuiusdam. d Item minutia I K, æqualis est minutiæ G H, (hoc est, minutiæ A B, minutiæ C D.) minutiæ E F, respectu integri, cuius E F, est minutia, & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

c 13. huius.

d 13. huius.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

DATIS

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT dua minutia A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum: denominatorem verò denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H, a *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* b *ac proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit, F,* c *metietur C, ipsum F, per D:* d *Metietur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, sit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunto3 numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* e *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum (ut ipsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratorib. minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.*

G, 24.	K, 8.	
A, 2.	C, 3.	
F, 12.		
B, 3.	D, 4.	
H, 36.	L, 9.	
C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.		

a 17. *septim.*
b 8. *huius.*
c 7. *pronun.*
d 5. *pronun.*
e 13. *huius.*

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt. Et minoris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis eſt numero F, facto

E, 24.		F, 24.	*ex C, ſecundo in B, tertium,* a *erit & ut A, primus ad C, ſecundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem.* b *Quare minutiæ A B, C D, æquales ſunt. VEL ſic.* c *Quoniam eſt & ut E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod eſt propoſitum.*
A, 2.	⋈	C, 8.	
B, 3.		D, 12.	

a 19. ſeptim.
b 9. huius.
c 5. huius.

SED ſint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum d *erit & ut A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem.* e *Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL ſic.* f *Quoniam eſt, & ut minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales, erunt quoque numeri E, F, æquales, quod eſt propoſitum.*

d 9. huius.
e 19. ſeptim.
f 5. huius.

DEINDE ſit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque A B, maiorem eſſe minutia C D. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignetur E, 24. F, 21. G. 1¾ A, 2 ⋈ C, 7 B, 3. D, 12. minore numero quàm A, in D, numerum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in B, tertium, g *erit, G, primus ad C, ſecundum, ita B, tertius ad D, quartum: Eſt autem maior propertio A, ad C, quam G, ad C; quod A, maior ſit quam G.* h *Igitur maior quoq; erit propertio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia A B, maior erit, quam minutia C D. VEL ſic.* i *Quoniam eſt, & E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, maior quàm F; erit quoque minutia A B, maior quam minutia C D. Quod eſt propoſitum.*

g 19. ſeptim.
h 9. huius.
i 5. huius.

VERVM

VERVM *sit iam minutia A B, maior quam minutia C D. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia A B, quam minutia C D,* a *erit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G.* b *Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quam ex G, in D; propterea quod A, maior est quam G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quam F, ex C, in B, genitus. VEL sic.* c *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F: Est autem A B, minutia maior quam minutia C D, erit quoque E, maior quam F. quod est propositum.*

a 9. huius.
b 19. septim.
c 5. huius.

ATQVE *hac est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.*

XVII.

DATAM minutiã ad minimos terminos reducere.

SIT *minutia A B, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest,* A, 11. C, ∗ / B, 12. D, ∗ *ad minores terminos C, D, ita vt minutia C D, minutia A B, sit æqualis.* d *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; suntque C, D, numeri minores numeris A B; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* e *sunt autem & minimi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.*

d 8. huius.
e 23. septim.

SI *vero A, B, non sint inter se primi;* f *sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A B, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* g *producentur A, B, ex C, in D, E.* h *Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, ac propterea minutiæ A B, D E, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex corroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.*

f 2. sept.
g 9. prop. nun.
h 17. septim.
i 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT *data minutia A B, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum*

A, 3. E, 9.
B, 4. C, 12.
D, 36.

C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, a fiet D; ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. b Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; c ideoq; minutiæ A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.

a 9. pronun.
b 19. septim.
c 8. huius.

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C, æquales sunt; d erit vt A, ad B, ita E, ad C. e Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. f Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

d 8. huius.
e 19. septim.
f 7. pronun.

A, 3. E, ⊢
B, 4. C, 10.
D, 30.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator verò maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. g Quoniam enim est vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.

g 8. huius.

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator verò, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerũ diuidentem, qui maior est. Verbi gratia. h Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. h Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

h 19. huius fin.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primùm addendæ duæ minutiæ A B, C B, eiusdem denominationis.

nationis Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, esse summam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutia eundem habeni denominatorem; a erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam C B. b Vt autem C, ad D, ita quoque est minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex aquo erit, vt A C, simul ad D, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam D B. Cùm ergo A, & C, simul aquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutia A B, C B, simul aquales minutia D B. quod est propositum.

a 4. huius.

b 4. huius.

A, 3	C, 4	D, 7.
B, 10.	B, 10.	B, 10.

DEINDE sint addenda duæ minutiæ A B, C D, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam E F, esse summam ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam. c Quoniam enim est, vt integrum ad summã duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F: d Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, aqualis erit minutiæ E F, ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum.

A, 2	C, 3	E, 17.
B, 3	D, 4	F, 12.

c 6. huius.

d 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, aquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarum A B, C D, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reductæ sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM verò datis pluribus minutijs; addenda primùm erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutia seorsum.

SINT ℣erbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. *minutiæ huius integri 60. cuius* $\frac{2}{3}$. *sunt 40. &* $\frac{3}{4}$. *sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. ℣nitates, quæ faciunt* $\frac{5}{12}$. *integri 60. quemadmodum ex* $\frac{2}{3}$. *&* $\frac{3}{4}$. *collecta est summa* $\frac{17}{12}$. *id est, semel 1. & insuper* $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. *est* $\frac{2}{27}$. *hoc est, in minimis terminis* $\frac{7}{9}$. *Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit* $\frac{1}{3}$. *ipsius 12. at* $\frac{4}{9}$. *eiusdem, 16. Vbi ℣ides ex 12. & 16. confici 28. hoc est* $\frac{7}{9}$. *ipsius integri 36.*

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB detrahenda sit minor CB, sintq; primùm hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, ſupponatur.

A, 7.	C, 3.	D, 4.
B, 10.	B, 10.	B, 10.

Dico minutiam DB, reliquam esse post detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex C, & D. Minutia ergo AB, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum CB, DB, ℣t in prima parte antecedentis propoſ. oſtenſum est. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB quod est propoſitum.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuerſos denominatores, detrahendaq; sit minor CD, ex maiore AB. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat E, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatum ex F, relinquat G, cui ſupponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH esse reliquam post detractionem minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, facit F, H, a *erit ℣t A, ad B, ita F, ad H:* b *℣t autem A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque ℣t F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicans C, D, facit E, H,* c *erit ℣t C, ad D, ita E, ad H:* d *℣t autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque ℣t E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est ℣t E, primus ad H, ſecundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum, quartum numerum:* e *Et ℣t G, quintus ad eundem ſecundum H, ita minutia GH, ſextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. ℣t E, G, primus & quintus ſimul, ad H, ſecundum, ita minutia CD, GH, tertium*

F, 15.	E, 8.		
A, 3	C, 2.	G, 7.	
B, 4.	D, 5.	H, 20.	

a 17. *ſeptim.*
b 2. *huius.*
c 17. *ſeptim.*
d 2. *huius.*
e 2. *huius.*

tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul, ad H, ita est F, ipsis E, G, aqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrum. Cùm ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, G H, simul ad idem integrum: ac propterea aquales erunt minutia A B, & minutia C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod est propositum.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duæ minutiæ eiusdem denominationis minutijs datis aquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliquæ post detractionem minutia C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

IAM verò si dentur integra vnà cum minutijs, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quod si minutia detrahenda, maior sit quàm ea, à qua fieri debet subtractio, a reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adherentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunq; 19. integra. Subtractio ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15 & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. a 11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutia huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. nempe $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, b Eritq; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia verò C, multiplicans A F, facit E H; c erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F;

H, 60. G, 40.
A, 2. C, 4. E, 8.
B, 3. D, 5. F, 15.

b 5. huius. c 17. sep.

erit

a 17. sep. A. G. E. F. B. H.

a erit ℣t E, ad B, ita G, ad F. Ex aqualitate igitur perturbata, ℣t hîc apparet, erit ℣t A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: b Et ℣t A, ad B, ita

b 2. huius.

est minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque ℣t minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod est propositum.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero ℣nitas, ℣t fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem ℣nitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiæ propositæ denominator; propterea quod ℣nitas integro numero suppositæ in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$ per 5. fient $\frac{15}{4}$. ℣t hîc apparet, $\frac{3}{4}.\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

c 11. huius.

SI ℣erò integris minutiæ adhæreant, c reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis ℣nus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{2}{3}\ \frac{39}{32}$.

IAM ℣t multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, ℣t in additione, ac subtractione factũ est, sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cùm comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, ℣t $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdẽ faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquidò constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc est quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita ℣t

A, 12. C, 3. E, 4.
B, 16. D, 8, F, 2.

diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam E F, esse Quotientem diuisionis minutiæ A B,

A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; a gignetur A, ex C, in E, & B, ex D, in F. b Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cùm sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. quod est propositum.

a 9 pronun.
b 22. huius.

A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.

A, 3.	C, 3.	E, 1.
B, 8.	D, 4.	F, 2.

DEINDE numeri C, D, minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B. c Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C D, minutiæ C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, vt iam proposit. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H, erit minutia G, H, Quotiens diuisionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiã C D, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.

c 15. huius.

E, 24.	A, 2.			C, 3.	G, 8.
F, 36.	B, 3.	K, 12.		D, 4.	H, 9.

E, 90.	A, 6.			C, 3.	G, 30.
F, 135.	B, 9.	K, 15.		D, 5.	H, 27.

QVIA verò G, H, numeri minutiæ Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiuscunque minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim, numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet, atq; in hoc apposito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeri A, B, metiuntur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiuntur per L, M: atque adeò tam

E, 48.	A, 8.			C, 2.	G, 4.	L, 24.
F, 54.	B, 9.	K, 6.		D, 3.	H, 3.	M, 18.

minu-

minutia GH, quam LM, Quotiens est minutia AB, per minutiam CD, diuisa.

IAM verò si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in apposito priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

8	1	16
1.	2.	1.

1	8	1
2.	1.	16.

QVOD si minutiæ adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, vel vti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facilè est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit, ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$ permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $2\frac{1}{8}$. vt hîc vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, qua præcipitur numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

3	7	21
4.	2.	8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est, minutiam $2\frac{1}{8}$. quæ proximè inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inferenda, sitq; primum sensus, addendam esse minutiam AB, vel minus particula minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$ vnius septima ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutia in B, denominatorem prioris minutia fiat F, cui addatur A, numerator prioris, &

F, 24.

A, 3.	C, 6.	G, 27.
B, 4.	D, 7.	H, 28.

vis, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam G H, æqualem esse minutiæ A B, respectu ℊnius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniã enim A B, minutiæ ℊnius particulæ minutiæ C D, a reducitur ad simplicem minutiã A H, cuius numerator idem est, qui A, productus nimirum ex ℊnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, ℊt in appositio exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem ℊerò F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; b erit ℊt C, ad D, ita F, ad H; c ac propterea minutiæ C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquã, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, ℊt initio propos. 29. ostensum est; hoc est, summam ex minutia A B, respectu ℊnius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutia A B, ℊnius particulæ minutiæ C D, ℊ minutiæ C D, simul. quod est propositum.

a 14. huius.

b 17. septim.

c 8. huius.

IAM ℊerò si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ, hoc est, si minutia A B, ℊnius particulæ minutiæ C D, ℊnius particulæ minutiæ E F, ℊnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, ℊnius particulæ minutiæ E F, ℊnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, ℊnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiã G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ E F, ℊt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, ℊt fiat M. Producto quoq; ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adiiciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, ℊt fiat P: Atq; ita deinceps ducatur semper ℊltimus numerus conflatus in denominatorẽ proxi-

A, 3.	1	A, 3	
B, 4.	D, 7.	H, 28.	
P, 119.	M, 59.	K, 14.	
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia superstit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, post hæc N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam vt in duabus minutijs ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, in minutiam G H, hoc est, æqualis est summæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, a fecit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, b æqualis est minutia K L; c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cùm per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrabimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator verò N; æqualis quoque erit eadem minutiæ M N, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, d facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator verò idem numerus Q, ex B, in N, productus, e æqualis est minutiæ M N, f quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator verò Q, vt initio propos. 20. monstratum est; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia A B, vnius

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. sep.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. sep.

ℊnius particula minutiæ CD, ℊnius particula minutiæ EF, ℊnius particula minutiæ GH, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam GH, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, a reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, ℊt exemplum appositum demonstrat: b Minutia quoq; FH, æqualis est minutiæ CD; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H. Erit minutia GH, (quæ ex iis, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in loc posteriori sensu. Quod est propositum.

E, 18. F, 24.
A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius.

A, 3 C, 6 E, 18
B, 4. D, 7. H, 28.

b 8. huius.

c 17. septimi.

QVOD si plures sint minutiæ insequentes AB, CD, EF, GH, hoc est, minutia AB, minutiæ CD, minutia EF, minutiæ GH; ℊt minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoq; numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, ℊt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adiiciatur numerus ex C, E, G, factus, ℊt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, ℊt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus ℊltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroq; procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum ℊsq; locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui ℊltimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, ℊt

P, 24. M, 104. K, 20.
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam vt in duabus minutiis demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, a *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus;* b *æqualis eſt minutia K L;* c *quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutiæ C F, minutiæ G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H,* d *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem eſt idem Q, ex B, in N, procreatus,* e *æqualis eſt minutiæ M N; quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoque erit ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H, & ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, quod eſt propoſitum. Eademque de pluribus eſt ratio.*

a 14. huius.

b 8. huius.

c 17. ſeptimi.

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4

B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L, 15.

d 14. huius.

e 8. huius.

f 17. ſeptimi.

DE PRO-

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in iis propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse vero additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicataue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit verè totum quippiam, cuius partes sint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest; quod pars esset vel aqualis, vel maior toto. Nam cum hac compositio intelligenda sit, siue maior quantitas cum minore, siue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. ostendimus, si positis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult. defin. 10. lib. 5. sed verè esset duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duab. proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. aqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorem esse proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem aqualem esse toti? Sic etiam, si, positis his tribus terminis non continuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt iidem auctores contendunt, esset quod ½ pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5 pars toti foret aqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris vero 3. & 16.

Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportio-	24.	48.
nem 24. ad 48 compositam esse ex proportionibus la-	12. 2.	3. 16.

terum, hoc est, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (si hac compositio est vera additio) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. vere totum est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harum ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. eſt proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quod ſi poſteriores numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. aequalis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione aequali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio aequalitatis 12. ad 12. quæ maior eſt quam totum, hoc eſt, quam proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totum non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. verè coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2 ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam. Vt prædicti auctores volunt, quamquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quã agens vt 6.

LIQVET ergo huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur poſitis tribus, quatuor aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius

proportionis, quam primi duo termini habent. Hac autem planius percipientur ex iis, quæ iam iam de vera compositione proportionum diximus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue per proportionum denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligenda duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coacernabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, suppositis prius vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos data proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraq; octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadrupartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $2\frac{4}{7}$ & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quã 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$ reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.

3	×	5	12	×	40
1		5	4		8
8			256		
1			32		
18	×	3	54	×	6
7		2	21		4
57			342		
14			84		

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.

8 × 3 / 1 × 1	256 × 12 / 32 × 4
5 / 1.	40 / 128.
57 × 3 / 14 × 2.	342 × 6 / 84 × 4
72 / 28	864 / 336

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. Vel quod idem est per proportionem duplam: Item proportio sesquialtera per superpertripartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur que ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3	2	6	12	10	120	3	8	24	9	16	144
1	1	1	4	5.	20.	2	5.	10.	6	10	60

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio

6	1	6	120	4	480	24	2	48	144	6.	864
1	3.	3.	20	12.	240.	10	3.	30.	60	9.	540

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis.

IAM verò multiplicationem proportionum à nobis præscriptam, quam auctores additionem falsò nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeo compositionem illam Euclidis vere esse multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducatur q. A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex consequente verò B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionib. duabus A, ad B, & C, ad D, ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt

A, 6. C, 12.	A, 3 C, 6
B, 2. D, 4.	B, 2. D, 5.
E, 72. F, 8.	E, 18. F, 10.
G, 24.	G, 12.

vult defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C,

B, in C, fiunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F, b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

a 18. septimi.

b 17. septimi.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam idem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit?

A, 9.	C, 3.		A, 4.	C, 6.	
B, 1.	D, 1.		B, 2.	D, 3.	
E, 9.	F, 3.		E, 8.	F, 12.	
G, 27.			G, 24.		

c 1. sept.

d 17. septimi.

Atque hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ, tum planæ, neque perfectè intelligi possunt, neque cum res tulerit, in opus atque vsum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes rectè intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Imò contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest,

abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum perceptarum, quàm qui illarum omnino sit ignarus, propterea quòd ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic verò nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cùm enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius effusuri, quàm lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrorum, ac multiplicationē, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo ferè sit, qui ignoret. Huc accedit, quòd qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per seipsos, quando volunt, præsertim cùm iam hoc ipsum non multò antè a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accuratè.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit: declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura, C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 15. palmorum: quia eas linea tam vnius palmi, quàm dimidiati palmi, quàm tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

A
B
C

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt pro-

positione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurima alia lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarũ multas hoc lib. Geometra explicat, docetq;, quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTÆ lineæ potentia commensurabiles sunt, cùm quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam verò longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earum quadratæ sint commensurabilia; aliæ verò ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarum quadratæ sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusque lineæ quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine: respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cùm huiusmodi lineas vna communis mensura metiatur, vt dictum est: At verò quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodò earũ quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

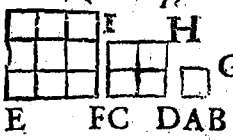
IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt li-

Vt lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita & vt nullæ lineæ dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint, quoniam quadratum ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoq; quadratum AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quatamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles; sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles potentia, cùm multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cùm tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. huius libri.



V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias verò potentia solùm. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam verò potentia tantùm. Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantùm, quædam verò longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquã ipsius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solùm indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantùm, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis verò Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliæ verò cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ eorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cùm qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

ET

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunq; appellari quoq; Rationales, non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles, vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. *vel* 1000. *&c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est* 20. *vel* 1000. *&c. dicitur Rationalis; cùm potentia sit commensurabilis lineæ Rationali; (est enim tam numerus* 20. *quàm* 1000. *commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt* 16. 100. *&c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergò Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.*

VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantùm sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquidò constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantùm. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. *vel* 1000. *&c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est* 20. *vel* 1000. *&c. non posse appellari Irrationalem, cùm non sit longitudine & potentia, sed longitudine tantùm Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.*

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensurabiles, vel

vel incommensurabiles: quemadmodum etiam linea, quæ Rationali linea quomodocunque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM verò lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia, quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si verò non fuerint quadrata, sed alia quæcunq; figura rectilinea, appellentur recta, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum suprà ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstratur q; in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantùm: apponere ferè semper vocibus istis: commensurabiles ac incommensurabiles: Vix autem, & rarissimè his: Rationales, & Irrationales: Rectè enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine

dine & potentia, vel potentia tantùm; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantùm: Minùs verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantùm, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantùm. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt variè, & obscurè in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq3, nec non Rationalibus, Irrationalibusq3 sint locutus.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cùm maior infinitæ non sit, minor verò infinitè posse sit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONUNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cùm sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quòd frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quòd ad verbum huc possint transferri, mutata solùm voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

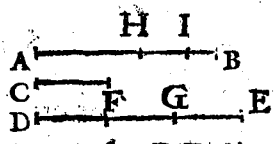
CÆTE-

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, & ad prop. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, & docuimus ad initium primi libri; curauimus, & duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si vnus tantùm numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

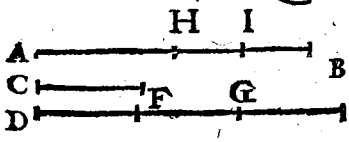
THEOR. 1. PROPOS. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITÆ sint duæ magnitudines inæquales A B, & C, quarum A B, sit maior. Dico si ex A B, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quàm dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quàm C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta D E, maior sit quàm A B, ita vt D E, sit multiplex ipsius C, proximè maior quàm A B. Diuisa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipsi C, æquales, detrahatur ex A B, maius quàm dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quàm dimidium H I; atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius A B, multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot sunt ipsæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior est quàm A B; At ex D E, ablatum est D F, minus quàm dimidium, vel certè dimidiũ, si D E, ipsius C, sit duplex; ex A B, verò maius quàm dimidium A H. Erit reliquum F E, reliquo H B, maius. (Cùm enim D E, maior sit quàm A B; si ex D E, dimidium auferretur, nec nõ & ex A B, dimidium, esset quoq; reliquum ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quàm dimidiũ, vel certè dimidium, & ex A B, maius quàm dimidium; erit reliquum ex D E, maius reliquo ex A B.) Rursus quoniam F E, maior est quàm H B, auferturque ex F E; dimidium F G, vel certè minus quàm dimidium, si F E, maior sit quàm duplex ipsius C; at ex H B, maius quàm dimidium H I; erit eodem modo reliquum G E, maius reliquo I B: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius D E, qualis hic est G E, ma-

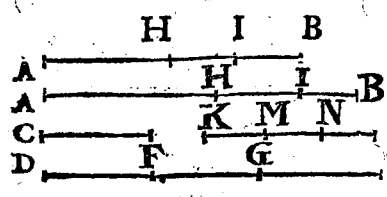


GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cùm ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quàm IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cùm ex maiori DE, ablatum sit DB, minus quàm dimidium, vel certè dimidiũ; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur KL, multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam verò AH, maior est quàm HB, vel certè illi æqualis sit, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quàm IB; erit quoque AH, maior quàm IB, hoc est, quàm KM. Rursus quia HI, maior est quàm IB, vel certè illi æqualis, est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quàm MN, vel illi æqualis; atque adeò tota AI, maior, quàm tota KN.



Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quàm tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quàm AB. Multò ergo maior erit DE, quàm KL. Quare cùm sit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quàm multiplex est DE, ipsius C,) *a* erit quoque C, maior quàm IB. Ac proinde relicta est IB, minor quàm C. Quod erat demonstrandũ.

a 14. *quinti.*

SCHOLIVM.

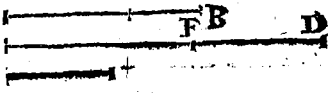
LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 5. monuimus, cùm de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVA-

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi A B, vel minor. Detracta autē A B, ex C D, quoties potest, relinquat F D, se minorem, ita vt A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minorem G B, ita vt F D, metiatur ipsam A G; atque hoc semper fiat. *a* Relinquetur ergo tandem ex C D, vel A B, magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm A B, ablata ex C D, relinquat F D, se minorem, erit C F, ablata maior, quàm dimidia ipsius C D; aliàs si esset dimidia, vel minor quàm dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quàm dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cùm semper auferatur maius, quàm dimidium, *b* relinquetur tandem magnitudo quædam minor quàm E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur C F; *c* metietur quoq; E, ipsam C F. Metitur autem E, & totam C D. *d* Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G; *e* quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: *f* ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendū.



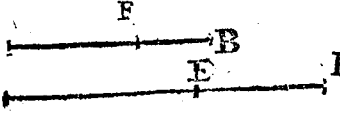
a 1. *dec.*
b 1. *dec.*
c 2. *pro-nun.*
d 3. *pro-nun.*
e 2. *pro-nun.*
f 3. *pro-nun.*

SCHOLIVM.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

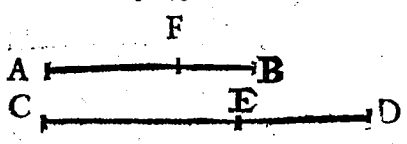
SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturque minor A B, ex C D, & reliqua sit E D, item E D, ex A B, auferatur, relinquaturque F B, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquā reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; g metietur quoque F B, ipsam A F; Metitur autem



g 2. *pro-nun.*

a 1. pro- *autem & seipsam.* a *Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur*
nun. *autem A B, ipsam C E.* b *Igitur &*
b 2. pro- *F B, ipsam C E, metietur. Ponitur*
nun. *autem & F B, metiri ipsam E D;*
c 1. pro- *c Igitur & F B, totam C D, metie-*
nun. *tur. Ostensa est autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, vtramq;*
A B, E D, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim A B, C D, in-
commensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præce-
dentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.



SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

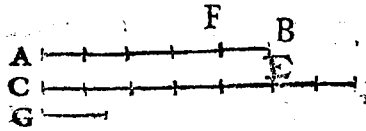
NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

ITAQVE facilè ex his dignoscemus, an duæ quacunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramq; magnitudinem propositam, vt constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij. Ex eo enim quòd reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, ostensum est, eandem reliquam F B, metiri vtramq; magnitudinem A B, C D. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximã earum communem mensuram inuenire.

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint A B, C D, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam A B, C D, commensurabiles sunt, fit vt si minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties potest, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractione, tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentem E D. Dico F B, esse maximam mensuram communem magnitudinem A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita ostendo.



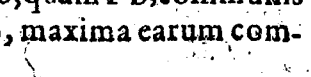
oſtendemus. Quoniã F B, metitur E D; & E D, metitur A F; *a* metietur quoq; F B, ipſam A F: At metitur F B, & ſeipſam. *b* Igitur F B, totam A B, metietur; *c* atq; adeò & ipſam C E, quam A B, metitur. Cùm ergo & ipſam E D, metiatur; *d* metietur quoq; F B, totam C D, Metitur ergo F B, vtramque A B, C D. Quare vtriuſq; A B, C D, communis menſura eſt F B.

a 2. pronun.
b 1. pronun.
c 2. pronun.

QVOD autem F B, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quàm F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarũ communis menſura, maior quàm F B. Quia igitur G, metitur vtramq; A B, C D; metitur autem & A B, ipſam C E, *e* metietur quoque G, ipſam C E: At metitur quoq; totam C D, *f* Igitur G, reliquam quoq; E D, metietur: Metitur autem E D, ipſam A F. *g* Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cùm G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquã F B, maior minorẽ. *h* Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D, Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

d 1. pronun.
e 2. pronun.
f 3. pronun.
g 2. pronun.
h 3. pronun.

QVOD ſi minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa A B, ambarũ maxima menſura communis: cùm & ſeipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.



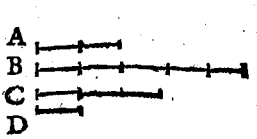
COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt F B, eſſe maximam menſuram communem ipſarum A B, C D. Demonſtratum enim eſt ibi magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoq; maximam menſuram F B. Eademq; eſt ratio de cæteris.

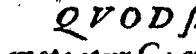
SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad propoſ. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuum eſt, omnes tres A, B, C, eſſe incommenſurabiles, quòd nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.



SI verò A, & B, fuerint commenſurabiles, ſit earum maxima communis menſura inuenta D; quæ ſi metiatur quoq; magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cùm habeant communem menſuram D.

QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earũ maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinis A, & B, per coroll. huius propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



SI verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles. a *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; &* b *ipsas A, & B; b metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum tres magnitudines E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C. Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

a 3. dec.

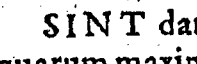
b 2. pronun.

SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudine, quàm tres, sint commensurabiles, necne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliquum autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

iiij. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensurã communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. *c* Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximã esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quàm D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem, quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. *d* Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quòd enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; *e* metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.



c 3. dec.

d 3. dec.

e 2. pronun.

QVOD

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eadem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quàm E, magnitudines A, E, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensurã communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua verò omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

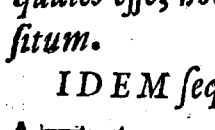
LEMMA.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT *quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D,* A —— E, 3.
B —— F, 4.
C — G, 1.
D —— H, 2.
componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perspicuum est, cùm proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt,

nunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, aequales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.

IDEM *sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H, & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.*



SCHOLIVM.

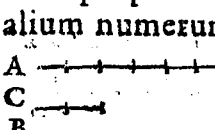
QVONIAM praecedenti lemmate & in propositione, quae sequitur, & in alijs multis, ostendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cùm non facilè videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: at proportio ex aequalitate in praecedentibus libris ostensa tantùm est in quantitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libri verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cùm omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certè demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quae proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. *a* Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, aequè metitur; continebit aequaliter magnitudo A, magnitudinem C, atq; numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; vnitas numerum E, aequè metiatur. Igitur per lemma praecedens, erit ex aequo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

a 3. *dec.*



SCHO-

SCHOLIVM.

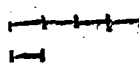
CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinũ commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, & rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atque adeò in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantùm commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem quam numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atque eidcirco menſuram habent communem, ipſisq; demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cùm ſint, communis menſura ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porrò eiuſdem huius theorematis liquidò conſtat, commenſurabilium magnitudinũ proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æquè, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quamcunque communem earum menſuram, nihilominùs hoc theorema demonſtrabimus eodem argumento.



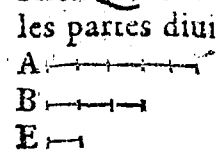
D, 6.
Vni. tas.
E, 4.

Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniãtur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniam verò in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omniũ eandem cum ipſis proportionem habentium; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

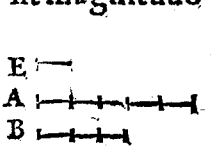
SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A,B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarum partium vni



æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita
a 9. quinti. A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, *a* ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsum F, metiatur, metietur quoque eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur:
b 1. def. *b* Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æquè metiantur; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, *c* commensurabiles
c 1. def. sunt. Quod est propositum.

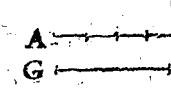


COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione thorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita

ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea E, ex iis, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D. *a* Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C, ad D, sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.



a 13. sexti.

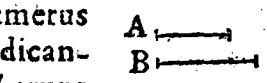
SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. o.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum: *b* erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.



b 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines. o.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse:

a 5. decimi. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles; a erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. pronuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

A ——— B ———

SCHOLIVM.

QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; imò nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non: sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.

A ——— D, 49.
B ——— E, 42.
C ——— F, 36.

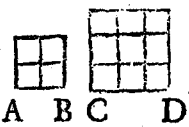
IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplica-

plicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ A B, C D, longitudine ſunt commenſurabiles; *a* erit A B, ad C D, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt A B, ad C D, vt E, numerus ad numerum F: *b* habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: *c* Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.

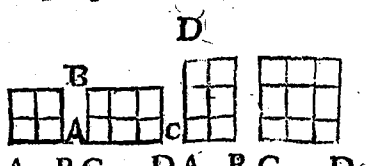


a 5. *decimi.*

b 20. *ſexti.*

c 11. *octa.*

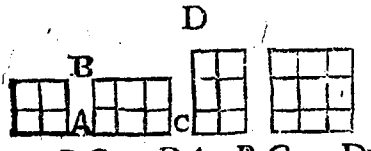
ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectangulum B D, ſub rectis A B, C D. Et E, F, ſe mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdem propoſ. Quoniam igitur eſt



AB, ad

a 1. *sex.* AB, ad CD, vt E, ad F: *a* Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, & CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum, ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad

b 1. *sex.* F. *b* Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.



SIT secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine commensurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex BD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: *c* Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD. *d* Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ AB, CD, proportionem habeant, quam numeri E, F, *e* ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

c 20. *sexti.*

d 11. *oct.*

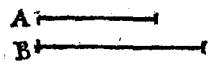
e 6. *decimi.*

f 1. *sex.* ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. *f* Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rursum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt supra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD. Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt supra ostendimus; ponitur que quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc est, vt E, ad F; *g* ideoq; AB, CD, rectæ proportionem habentes, quã numeri E, F, cõmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositũ.

g 6. *decimi.*

SINT

SINT tertio rectæ A,B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.



QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod est absurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: *a* ipsa commensurabilia erunt; *b* Ac præterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

a 6. *dec.*
b 3. *def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commensurabiles sunt, *d* cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine neutiquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.

c 3. *def.*
d 6. *decimi.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse,

les esse, solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum
a 4. de- quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a po-
fin. tentia quoque incommensurabiles sunt, b cum earum quadrata incom-
b 8. de- mensurabilia sint.
cimi. POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino &
longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine es-
sent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ve
patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim po-
tentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensu-
rabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

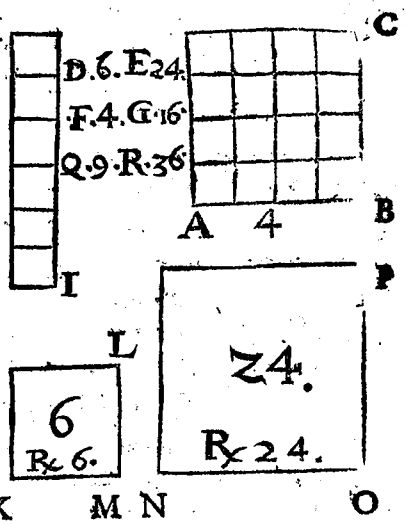
SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali propositæ comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ; (erant enim rectæ AB, 2, & CD, 3.) Verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde è contrario, quadratæ inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt Vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum Vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt Vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe enim numero lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris Vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. *Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem,* c *vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus*
c 26. octaui. *numerus F, ad quadratum numerum G, nempe* 4. *ad* 16. *Deinde su-*

matur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; a atque ipsi H I, quadratum æquale constituatur K L, cuius latus K M. Postremo per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem; continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadratum K L, æquale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum N P, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntque lineæ Rationali A B, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. b Quare longitudine commensurabiles sunt rectæ K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cum lineæ Rationali comparentur. Quod si considerentur eadem lineæ K M, N O, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis A B, imò illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.

a 14. secundi.



b 6. decimi.

RVRSVS,

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, resolvitur, quam vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale est sex huiusmodi mensuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata KL, NP, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter, ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, qui pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadem quadrata KL, NP, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali lineæ AB, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam si recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem lineæ secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensura nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resolvitur.

IDEM dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumq; lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sit sensus: Quadrata quæ describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpenumero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationa-

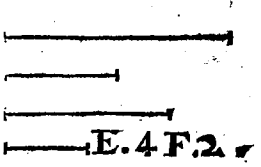
Rationalis linea, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi linea Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT *Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, & vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, qua quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis; & vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.*

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit. xj. x.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt, *a* habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. *b* Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt.



a 5. decimi.

b 6. decimi.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, *c* non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. *d* Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c 7. decimi.

d 8. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia

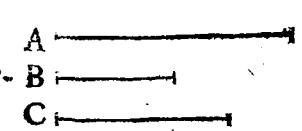
quarta longitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secunda fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis potentia ipsi B, a erunt earum quadrata commensurabilia, b ac proptereà proportionem habebunt quam numerus ad numerum. c Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterque descriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. d Quare commensurabilia erunt; e Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

a 3. def. b 5. decimi. c 22. sexti. d 6. decimi. e 3. def.

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea ipsa potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, & A, B, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; Ac ideirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; f atq; adeo commensurabiles erunt. Si verò lineæ longitudine incommensurabiles sint, sive potentia commensurabiles existant, sive non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, &



f 6. decimi.

rum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. a Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum. a 8. dec

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solidæ, posteriores verò duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sint, b habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si verò plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. b 5. dec cimi.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sume-

mus quotcunq; numeros primos, A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad

quadratum numerum, non rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes quia sæpenumero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius. qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

x. PROBL. 3. PROPOS. 11.

xj. PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum.

A —— B, 10.
E
D —— C, 6.

Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerū quadratum.

Igitur

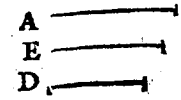
Igitur a rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. a 9. dec.
Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, b ipsa commensurabilia erunt. Sunt b 6. de-
ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. cimi.
Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. c Inueniatur recta E, inter c 13.
rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media sexti.
proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum: d erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, d 10. decimi.
E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. eum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CÆTERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, sint longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A. Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. c *Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*



c 10. decimi.

IN codicibus vulgatis praponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur. vt ex dictis apparet.

xij. viij. THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVÆ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, *a* habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, *b* sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, *c* inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

a 5. dec.
b 4. oct.

A ——— D, 10. E, 8.
C ——— F, 2. G, 3.
B ——— H, 5. I, 4. K, 6.

c 6. dec.

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, d erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G. e Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. f Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt atque

d 5. dec.
e 4. oct.
f 6. dec.

atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia verò tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus posteà in scholio 2. propos. 19. huius lib.

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

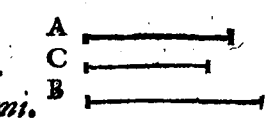
A ----------
C --------
B ----------

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis sue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraque B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at verò B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

THEOR. 10. PROPOS. 13. xij. o.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensu-



a 12. decimi.

rabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint linea, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, b *ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

b 12. decimi.

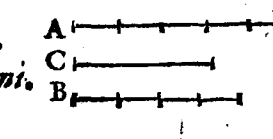
QVONIAM vero hæc propositio 13. *apud Theonem lemma est, visum est, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.*

xiij. viij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles; altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; c erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.



c 12. decimi.

SCHOLIVM.

HIC quoq; si magnitudines A, B, C, sint linea, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue lon-

siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, a *essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, vtraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantùm, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles;* b *& A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, vtraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.*

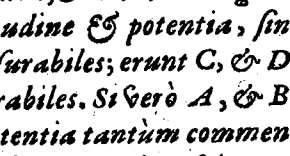
a 12. decimi.

b 12. decimi.

COLLIGVNT *porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.*

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; c *erit quoq; reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis;* d *erit & reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.*



c 14. decimi.

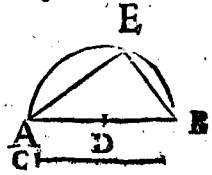
d 14. decimi.

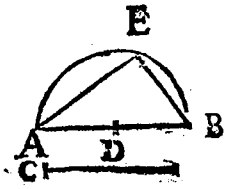
SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si verò A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, nõ inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteat q; inue-





a 1. quarti. *nire, quo AB, plus possit quàm C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quàm C, quadrato*

b 31. tertij. c 47. primi. *rectæ EB.* b *Cùm enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* c *erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quàm AE, hoc est, quàm C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. Similiter*

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

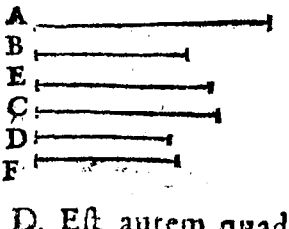
HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad an-

d 47. primi. *gulum rectum E, poterit eas recta ducta AB,* d *quippe cùm quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.*

xiv. xij. THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quàm B, secunda quadrato rectæ E; & C, tertia plus possit quàm D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si verò E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothe-



22. sexti.

potheſin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; *a* Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. a 22 ſexti.

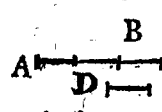
SCHOLIVM.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantùm commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantùm ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16. xv. ix.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarũ commenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtriq; ipſarum A B, B C, commenſurabilem eſſe. *b* Sit enim ipſarum A B, B C, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas A B, B C, metitur, *c* metietur quoq; D, totam A C, ex ipſis compoſitam. Cùm ergo D, metiatur A C, & A; erunt A C, A B, commenſurabiles: Similiter cùm D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, B C, commenſurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipſarum A B, B C, commenſurabilis erit.



b 3. decimi. c 1. prænum.

SED iam tota A C, ex A B, B C, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum A B, B C, nempe ipſi A B. Dico & A B, B C, inter ſe commenſurabiles eſſe. *d* Sit enim D, communis menſura ipſarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; *e* metietur quoque D, reliquam B C. Quare cùm D, metiatur A B, B C; commenſurabiles erunt A B, B C, inter ſe. Eodem argumento oſtendemus A B, B C, eſſe commenſurabiles, ſi A C, ipſi B C, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

d 3. decimi. e 9. prænum.

COROL-

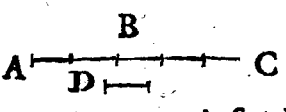
COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarũ, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si A C, ipsi A B, sit commensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cùm metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositum.

xvj. ix. THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri



a 3. dec. potest, nempe ipsi A B, *a* sitque D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B;

b 3. pronunc. *b* metietur quoque D, reliquam B C; Ac propterea cùm D, metiatur vtramque A B, B C, erunt A B, B C, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est A C, ipsi A B: Eademque ratione neq; ipsi B C, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilis est.

SED iam tota A C, composita ex A B, B C, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi A B. Dico quoq; A B, B C, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles,

c 16. decimi. *c* erit quoque tota A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim A C, alteri ipsarum, nempe ipsi A B, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt A B, B C. Eodem argumento ostendemus A B, B C, incommensurabiles esse, si A C, ipsi B C, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi B C, foret commensurabilis, esset quoq; A C, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ A B, commen-

commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solùm linea longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

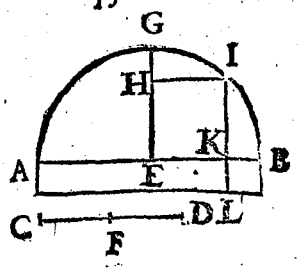
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

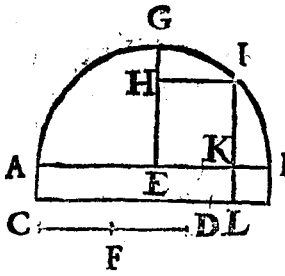
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6 quòd quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficiente q3 figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficit q3 figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AC, CD, quarum AB, maior sit, oporteat q3 ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-



mum



mum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta C D, descripti. Sectis rectis A B, C D, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo E A, vel E B, semicirculus A G B; & ex E, perpendicularis ad A B, ducatur E G. Et quia tota A B, maior ponitur quàm tota C D, erit quoque A E, dimidia ipsius A B, hoc est, E G, ipsi A E, æqualis, maior quàm C F, dimidia ipsius C D. Posita igitur E H, æquali ipsi C F, agatur per H, ipsi A B, parallela H I, demittaturq; I K L, ad A B, perpendicularis, & sit K L, ipsi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammum, A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata B L, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ C D. Quoniam enim K I, media proportionalis est inter A K, K B, vt in scholio propos. a 17. *sexti.* 13. *lib. 6. tradidimus;* a *erit rectangulum sub A K, K B, hoc est, rectangulum A L, æquale quadrato ex K I, hoc est, quadrato ex* b 34. *primi.* E H; b (*est enim K I, ipsi E H, æqualis, ob parallelogrammum E I,*) *hoc est, quadrato ex C F: Est autem quadratũ ex C F, quarta pars quadrati ex C D; quòd quadratum ex C D, per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum deficiensq; quadrato B L, æquale est quartæ parti quadrati ex C D, descripti. Quod est propositum.*

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.

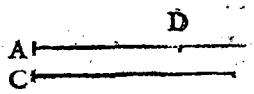
SIT enim recta data A B, & rectilineum quodcunq;, cui aquale ponatur quadratum ex C F, non maius quàm quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius sit latere A E. Educta ergo ad A B, perpendiculari E G, sit E H, æqualis ipsi C F. Deinde acta H I, parallela ipsi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus A K, K B, æquale

æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atq; adeò & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quàm quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quàm recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta AD, DB, inæqualia esse.



Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB, deficiensq; figura quadrata ex DB, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, DB, sit autem quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipsius AB, descriptum; atque adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atque rectæ AB, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD, DB. Quod est propositum.

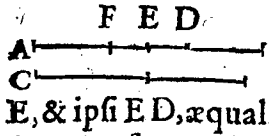
HOC facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ductaque HI, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis IK, vt partes factæ ex applicatione sint AK, KB; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cùm AB, in E, secta sit bi-

sit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij. xiij. THEOR. 15. PROPOS. 18.

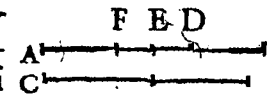
SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, D B, faciatque segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã enim per 3. lemma præcedentis propos. A D, maior est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D, *a* erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadratum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B, Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D, (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cùm F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B, (quod quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B:



a 5. secundi.

ex AB: Ac proinde recta AB, plus potest quàm recta C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB. Quoniam rectæ AD, DB, longitudine ponuntur commensurabiles: *a* erit quoque tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis; (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius DB,) Igitur cùm vtraque AB, & composita ex DB, AF, longitudine sit commensurabilis ipsi DB, *b* erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm AB, composita ex AF, DB, tanquam vna, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quàm C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.



a 16. decimi.

b 12. decimi.

SED iam AB, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quàm C, quadrato rectæ FD. Quare cùm AB, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm vtraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositæ ex AF, DB; *c* erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeò cùm tota AB composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; *d* erunt ipsæ AD, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

c 12. decimi.

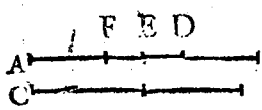
d 16. decimi.

THEOR. 16. PROPOS. 19. xviij. xiv.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum

est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus



posse quàm C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ suprà constructis, similiter ostendemus A B, plus posse quàm C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; *a* erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: *b* erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B, erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quàm C, quadrato rectæ E D, longitudine sibi incommensurabilis.

a 17. *de cinii.*

b 14. *de cinii.*

IAM verò A B, plus possit quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt priùs, rectam A B, plus posse quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incom-

incommensurabilis: Est autem composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex AF, DB, componitur, & DB, ipsa composita ex AF, DB, longitudine incommensurabilis sit rectæ AB, *a* erit & reliqua DB, eidem AB, longitudine incommensurabilis: Ac proinde cùm tota AB, composita ex AD, DB, incommensurabilis sit ipsi DB, longitudine; *b* erunt & ipsæ AD, DB, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. de cimi.

b 17. de cimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantùm ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

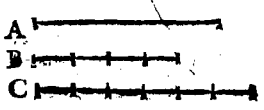
EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solùm commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales;

commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia vel potentia solùm: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsa Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si verò potentia inter se solùm sunt commensurabiles: dicuntur ipsa quoq; Rationales potentia solùm inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

*ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera aqualis est expositæ Rationali; ac proinde vtraque Rationalis commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expositæ aqualis est, longitudine tamen ei vtraq; est commensurabilis: Aut denique vtraque expositæ Rationali commensurabilis est solùm potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expositæ Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quampiam aliam E. Item quoties vnitas est in C, totiesdam aliam E. Item quoties vnitas est in C, totiesdam aliam E. Item quoties vnitas est in C, totiesd

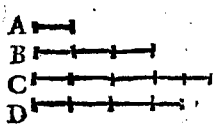
partes æquales, & sumatur C, composita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solùm esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quòd B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeò & potentia; a Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarũ rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; b erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solùm potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia verò tantùm commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.



a 12. decimi.

b 14. decimi.

QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facilè hoc modo demonstrabimus. c Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; d quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.

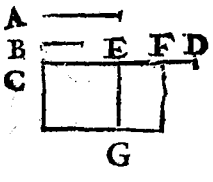
c 6. definitionis.

d 12. sexti.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex



quantacunque enim linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturq; rectangulum GF, contentum sub CE,
a 1. sext. *& EF, hoc est, sub A, & B.* a *Quoniam igitur est vt CE, ad EF, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratum Rationale, cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quo-



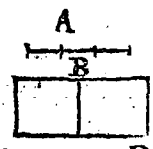
nimirum ab exposita Rationali describitur. Quo-
b 9. def. *niam igitur B, Rationale est,* b *erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cùm commensurabilia sint ipsi B,*
c 12. decimi. c *inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea exposita descripta commen-*
d 6. def. *surabile,* d *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

THEOR. 17. PROPOS. 20.

xix. xv. QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorũ, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum BD, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorum, (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propos. explicuimus; ita vt vel altera ipsarum BC, CD, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantùm. Dico BD, re-

BD, rectangulum Rationale esse Describatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm: *a* erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile: *b* Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. *c* Igitur & B E, illi commensurabile, Rationale est. Quia verò B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt, (pronuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine commensurabiles,) *d* & est vt E C, ad C D, ita E B, ad B D; *e* erunt quoque E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

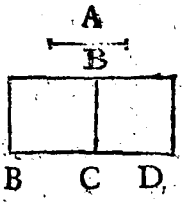


a 3. *def.*
b 8 *def.*
c 9. *def.*
d 1. *sext.*
e 10. *decimi.*

THEOR. 18. PROPOS. 21. xx. xvj.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, *f* ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; *g* Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: *h* Est autem vt B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine; *i* sed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atque ideirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.



f 9. *def.*
g 12. *decimi.*
h 1. *sext.*
i 6. *def.*

LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt, quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

A

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolùm commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantùm inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, a inueniatur C, longitudine tantùm incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantùm commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B quidem, quòd ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quòd inuenta ſit potentia tantùm incommenſurabilis ipſi B, atque adeò ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potẽtia ſolùm commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantùm commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

A B C

a 11. decimi.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantùm incommenſurabilis b inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantùm incommenſurabilis C, maior aut minor quàm A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

A B C

b 11. decimi.

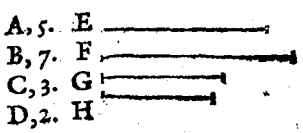
Quòd

Quòd enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraque B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis; a erunt B, C, Rationales. Inuenti ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles. a 6. defin.

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H. Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At verò, ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D) b erunt ipsa inter se commensurabilia; ac propterea & rectæ ipsa potentia sunt commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. c Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.



b 6. decimi.

c 9. decimi.

QVOD si propositis quotcunq; Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositæ duæ

A C, 10.
B D, 6.
F E, 7.

Rationales potentia tantũ commensurabiles A, B, quarum quadratum proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D, primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur) fiat & D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, a *commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, & ad finem lib. 8. ostendimus; (quod D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cum E, primum nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoque plani non similes, ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) b erunt recta B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, & t C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, & t idem demonstrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.*

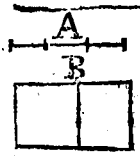
a 6. decimi.

b 9. decimi.

xxj. xix. THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non) Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi B D, æquale est, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonstratione propos. 20. diximus. c Et quoniam est vt E C, hoc est, B C, ad C D, vt B E, ad B D: Est autem B C, ipsi C D, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipsi B D, in-



c 1. sex.

BD, incommensurabile. a Quare cum BE, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A, sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; b erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, c Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis. a 9. *decimi fin.* b 14. *decimi.* c 10. *defin.*

VOCETVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, d propterea quod media proportionalis est inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat. d 17. *sexti.*

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. e Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus: si dicamus eam esse lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantū inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur. e 17. *sexti.*

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocatur-que Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint continuè proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, qua Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterq; descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum medium proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe

Mediis

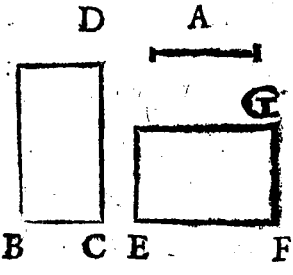
Mediis longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersè tamen omne spatiũ Medium æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles,

VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso æquale est, ita vt ipsum possit linea recta, qua Media in hoc theremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

xxij. THEOR. 20. PROPOS. 23.

xx. QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit expositæ commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum a appliceturque ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilem.



Quoniam enim A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duab. rectis Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D, æqualia erunt B D, & E G, b lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos,

a 45. primi.

b 14. sexti.

gulos, nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; *a* Ac propterea quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F, ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum) Igitur *b* & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D: propterea que & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est expositæ Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam enim E F, F G, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub E F, F G, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. *c* erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeo rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex E F, commensurabile est quadrato ex C D. (quod E F, C D, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles) Igitur cum quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex E F, at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommensurabile; *d* incommensurabilia erunt quadratum ex C D, & rectangulum B D. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt recta C D, ad rectam B C. *e* Incommensurabiles ergo sunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. sexti.
b 10. decimi.
c 10. decimi.
d 13. decimi.
e 10. decimi.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis B C, & A, f sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A, & C D, proportionales sint; g erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum æquale quadrato media proportionalis A.

f 11. sen.
g 17. sexti.

HAC arte etiam ostendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

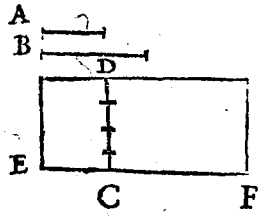
PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale,

tionale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim (a) Rationalis C D, ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; (b) erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem (c) applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. (d) Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. (e) Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. (f) Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commensurabiles, (g) Ac proinde recta B, potens rectangulum D E, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.
b 23. decimi.
c 45. primi.
d 1. sex.
e 10. decimi.
f 14. decimi.
g 22. decimi.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium, nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commen-

commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

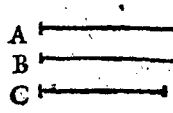
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, siquidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; a erit vtraque B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erunt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.



a 24. decimi.

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis lineæ rectæ Mediæ commensurabilis, Mediæ sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inuenienda sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles.

THEOR.

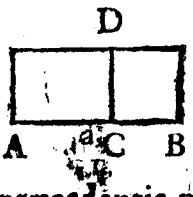
xxiv. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum A D, sub Mediis A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Medium esse. Describatur ex C D, Media quadratum B D, quod erit Medium. a Et quoniam est vt A C, ad C B, ita A D, ad D B: Sunt autem A C, C B, hoc est, A C, C D, longitudine commensurabiles; erunt A D, D B, commensurabilia. Quare spatium A D, Medio D B, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sex.



xxv. xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehensum sub Mediis A B, B C, potentia tantum commensurabilibus. Dico A C, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex A B, B C, quadrata A D, C E, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus, cum rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G, b ad quam applicetur rectangulum F H, quadrato A D, ex A B, descripto æquale; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C, æquale; & deniq; ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato C E, ex B C, descripto; eritque totum F M, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia vero A D, C E, Media sunt, erunt & F H, L M, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales F G, K L, (c est enim & K L, Rationali F G, æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis) faciantque latitudines G H, K M, d erunt rectæ G H, K M, Rationales, ipsi F G, seu K L, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeo & ipsis æqualia rectangula F H, L M, commensurabilia: e Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. f Igitur G H, K M, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare G H, K M, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali vero F G, solum commensu-

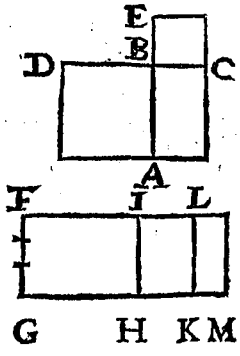
b 45. primi.

c 34. primi.

d 23. decimi.

e 1. sex.

f 10. decimi.



mensurabiles potentia, cum ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; a Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Rationale est. Et quoniam est, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, BC, ipsis AB, BE, sint æquales, vtraque vtrique) b & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoque vt AD, ad AC, ita AC, ad CE, atque adeo AD, AC, CE, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: c Habent autem rectæ GH, HK, KM, easdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales sunt; d propterea què rectangulum sub GH, KM, quadrato ex HK, æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale est; ideoque & recta HK, Rationalis erit: e & ob hoc ipsi FG, Rationali expositæ, hoc est, ipsi HI, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel solum potentia. Et si quidem HK, ipsi HI, longitudine sit commensurabilis, f rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipsi HI, potentia solum commensurabilis sit, g erit rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 20. *decimi.*
b 1. *sexti.*
c 1. *sexti.*
d 17. *sexti.*
e 6. *defi.*
f 20. *decimi.*
g 22. *decimi.*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. *propos. lib.* 1. *applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale,* h *si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur pro latere HK.* i *Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub mediis AB, BC.*

h 12. *sexti.*
i 16. *sexti.*

HAC eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM verò in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propos. 28. quanam ratione inuenienda sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propos. verò 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, k rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationales; l Sub duabus verò Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellarique Medium,

k 20. *decimi.*
l 22. *decimi.*

& rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat, a rectangulum comprehensum sub duabus Mediis longitudine
a 25. decimi. commensurabilibus esse Medium; b Rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus comprehensum esse Ra-
b 26. decimi. tionale, vel Medium.

QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe æquale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

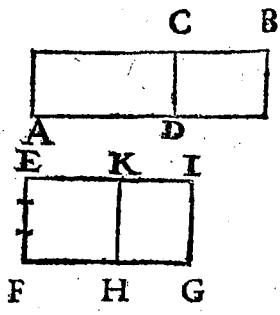
SIT enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus Mediis AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FH,
c 1. sex. LM, incommensurabilia. c Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH,
d 10. ad rectam KM. d Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter se sunt
decimi. incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensæ Rationales, sunt po-
c 22. tentia tantum inter se commensurabiles; c Ac propterea rectangu-
decimi. lum sub ipsis GH, KM, Irrationale est, quod Medium appellatur,
f 17. & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. f Potest autem
sexti. rectangulum sub ipsis GH, KM, recta HK; (Nam & prius ostendemus, tres GH, HK, KM, esse proportionales) Igitur HK, Irrationalis est, & Media. Quare IK, Rationale non est: si enim Rationale
g 21. esset, g faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem
decimi. HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est HK, Irrationalis, ac Media. Eodem
h 23. modo neque IK, medium est; si enim esset Medium, h faceret ipsum
decimi. applicatum ad Rationalem HI, latitudinem HK, Rationalem, ipsi HI, longitudine incommensurabilem. quod est absurdum. ostensa est enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cum IK, neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque AC, illi æquale, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Media continetur, cum HI, Rationalis sit, & HK, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur AB, BC, comprehensum posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod est propositum.

xxvj. xxij. THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPE

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, *a* ad ipsam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata, *b* erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK, (*c* est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) *d* erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; *e* erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. *f* Igitur quadratum ex FH, incõmensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratum ex HG, (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) *g* atque adeo & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis *h* Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG. *i* At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, *k* erit quadratum ex FG, Irrationale, *l* ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.



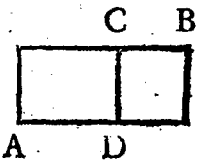
a 45. *primi.*
b 23. *decimi.*
c 34. *primi.*
d 21. *decimi.*
e 14. *decimi.*
f 10. *decimi.*
g 16. *decimi.*
h 17. *decimi.*
i 4. *secundi.*
k 10. *defin.*
l 11. *defin.*

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale. Quoniam enim AB, AC, Rationalia sunt; a *erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* b *atque adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB, compositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC, erit quoque idem AB, reliquo DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*

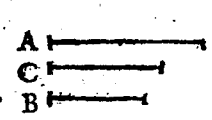


a 29. defin.
b 12. decimi.

xxvij. PROBL. 4. PROPOS. 28.

o. MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, *c* inter quas media proportionalis sumatur C, *d* fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; *e* erit rectangulum sub ipsis contentum, Rationale, quod Medium vocatur; atque adeo *f* cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, suntque A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. *g* Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis. Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, *h* poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.



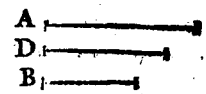
c 13. sexti.
d 12. sexti.
e 22. decimi.
f 17. sexti.
g 24. decimi.
h 17. sexti.

xxviij. PROBL. 5. PROPOS. 29.

o. MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPO-

EXPONANTVR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, *a* & inter A, B, media proportionalis inuenia- a 13.
tur D. *b* Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse *sexti.*
potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. b 12.
Quoniam enim A B, Rationales sunt potentia *sexti.*



solum commensurabiles: erit rectangulum c 17.
sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, *c* quod *sexti.*
illi æquale est, *d* Irrationale, quod Medium di- d 22.
citur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, *decimi.*
ad C; ita D, ad E, sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum
commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commen-
surabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est.
Cum ergo D, Media sit, *e* erit & E, illi potentia solum commen- e 24.
surabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tan- *decimi.*
tum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quo-
niam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D,
ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoq; vt D, ad A, ita
C, ad E. *f* Rectangulum igitur sub D E, æquale est ei, quod sub A, f 16.
C: Est autē quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commen- *sexti.*
surabilibus *g* Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub g 22.
D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum *decimi.*
cōmensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

IN iis quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quando quidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.	*C*, 12.
B, 4.	*D*, 8.
E, 24.	*F*, 96.

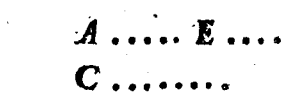
QVONIAM autem in lib. 9. h *ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, si impar multiplicet imparem, perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorum vterque par sit, vel impar; vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.* h 28. & 29. noui.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. a Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto BD, ex AB, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariam in E; Dico numerum factum ex AB, in BD, b qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.

a 24. & 26. noni.



b 1. noni.

COROLLARIVM.

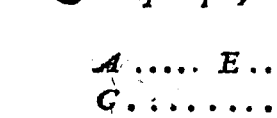
EX his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumantur AB, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum BE, ED. quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, non erit quadratus. Si enim quadratus esset, c numeri AB, BD, hoc est, AB, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

c 2. noni.

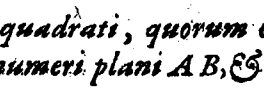
SCHOLIVM II.

ITAQVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterque par, vel impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nimirum quadrati numeri ex BE, ED, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratum ex BE, quadratum ex ED, numero, qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus est.



SI quis

SI vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam similiter ostendemus quadratum ex BE, aequalem esse quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE, ED, est numerus factus ex AB, in BD, qui cum non sit quadratus, (Si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

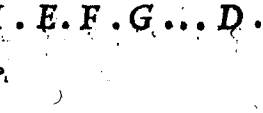


HOC posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cateris.

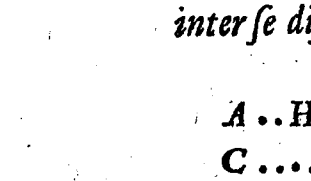
LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes AB, & C, pares, vel impares, vt in lemmate praecedenti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, aequalis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipsius maius latere BF. Erit



ergo latus ipsius vel æquale numero BE, *vel maius.* (*Minus enim non erit, quoniam inter numeros* BE, BF, *sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur: Esset autem*



dictum latus inter ipsos medius, si maius ponere-tur quam BF, *minus vero quam* BE.) *Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex* BE, *æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex* AB, *in* BD, *& ex quadrato numeri* DE, *cum eidem quadrato ex* BE, *sit ostensus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE; *erit, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DF, *æqualis ei, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE. *Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex* AB, *in* BD; *erit reliquus quadratus ex* DF, *æqualis reliquo quadrato ex* DE; *Ideoque & latus* DF, *lateri* DE, *æquale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in se fit, æquale est numero* BE. *Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius æquale numero* BI, *qui maior sit, quam* BE, *ita vt quadrato ex* BI, *æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex* BI, *latere maiore, maior est quadrato ex* BE, *latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in se fit,* (*cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex* BI,) *maior quadrato ex* BE. *Est autem quadrato ex* BE, *ostensus in lemmate præcedentis æqualis numerus, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE: *Ablato ergo communi, qui fit ex* AB, *in* BD; *erit reliquus quadratus ex* DF, *reliquo quadrato ex* DE, *maior; ac proinde latus* DF, *latere* DE, *maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in se, maius est latere* BE. *Sed neque æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex* BF.

SIT

SIT iam, si fieri potest, A..H..I.E.F.G..D.....B numerus qui fit ex AB, in BD, C..... vnà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus vnitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus est, (diuisus enim est AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablatæ vnitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui BD, duplus, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis est ei, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cùm HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipsi AB, æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. septimi.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod sit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis est ei, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex

IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF.

A..H..I.E.F.G...D.....B
C.....

Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

SCHOLIVM III.

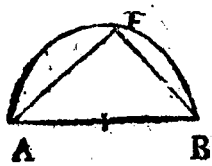
EX hoc facilè inuenietur duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

xxix. xvij. PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi cõmensurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, nõ sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB. a Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; b erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc est recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, c erunt quadrata ex AB, AF; commensurabilia; atque adeò cùm quadratum ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB; descriptum; erit & quadratum ex AF, Rationale; propterea q; & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF, atq; adeò commensurabiles saltem potentia.



a 31. ter ej.
b 47. primi.
c 6. dec.

Quia

Quia verò quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cùm neque quadratus numerus C D, ad non quadratũ D E, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs & D E, quadratus esset, *a* vt in Arithmeticis est demonstratum, quod non ponitur) *b* erunt rectæ A B, A F, longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur A B, A F, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles.

a 74. oct.

b 9. decimi.

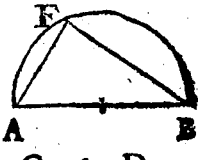
IAM verò, quoniam est vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A F; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratũ numerum C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B. (sicut enim C D, superat D E, quadrato C E, ita etiam quadratũ ex A B, superat quadratum ex A F, quadrato ex F B.) *c* Quare rectæ A B, F B, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit, quàm minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

c 9. decimi.

PROBL. 7. PROPOS. 31. xxx. xviij.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectę lineę sibi longitudine incõmensurabilis.

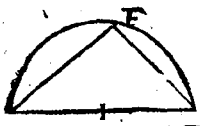
EXPONATVR Rationalis linea A B, inueniantur q; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos numeros nõ quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus C D, ad neutrum ipsorum C E, E D, proportionem habebit, quam qnadratus ad quadratum, aliàs secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus; iuxta posteriorem verò, quilibet ipsorum C E, E D, quadratus quoque, *d* vt in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quàm A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales potentia solum commensurabiles. Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti



C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C. . . . . E . . . D

d 24. octaui.

propos



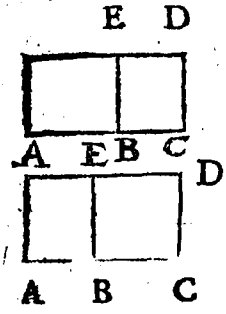
C,144. E,16. D C,160. D.
C.....E... D

propoſ. Quoniam verò rurſus, vt priùs, eſt per conuerſionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB. Non habet autem CD, ad CE, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. a Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit quàm minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod erat faciendum.

29. dec.

LEMMA.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum conſtitutæ, quarum AB, maior ſit. Dico eſſe, vt AB, ad BC, ita rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturq; rectangulum AD; eritq; rectangulum AE, ſub AB, BC, contentum; quòd BE, ipſi BC, ſit æqualis,

b. 1. ſext. b *perſpicuum autem eſt, eſſe vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.*

EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua AB, minor eſt, quàm BC.

xxxj. xxiv. xxv.

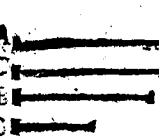
PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

c 30 decimi.

c REPERTÆ ſint duæ Rationales A, B, potentia tantùm commenſurabiles: ita vt A, maior plus poſſit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolùm commenſurabiles;

les, a erit rectangulum sub A,B, Irrationale,& recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A,& B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. b Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C,D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoq; vt C, ad B, ita B, ad D; c Ac propterea rectangulum sub C,& D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C,D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; d poterit quoque C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias, C,D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.



a 22. decimi.

b 24. decimi.

c 17. sexti.

d 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A; plus possit quàm B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt priùs, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C,D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facilè iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Interim rectas C,D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius libri.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum



lum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiaturq; rectangulum AF. Eritq; AE, contentum sub AB, BC; & CF, sub BC, CD; quòd BE, CD, ipsi BC, æquales sint.

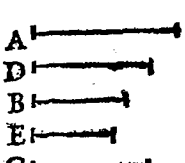
a. 1. sexti. a Perspicuum autem est esse AB, ad CD, vt AE, ad CF. Quod est propositum.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

xxxij. xxvj.

INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commensurabilibus, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 11. huius lib. demonstrauimus) c Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C; e Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D, sed rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solùm commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solùm commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. g Quia verò D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Irrationalis est; & Media; h erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, i quod Medium est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantùm commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; k poterit etiam



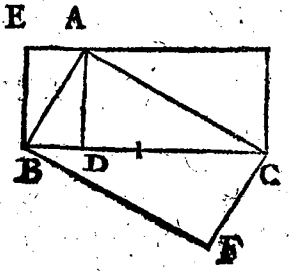
b 30. decimi.
c 13. sexti.
d 12. sexti.
e 17. sexti.
f 16. sexti.
g 21. decimi.
h 24. decimi.
i 22. decimi.
k 15. decimi.

tam D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt priùs, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facilè apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C, & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum deniq; sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.



QVONIAM *ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter C D, B D;* a *erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.* a 17. sexti.

EADEM *ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis est inter B C, C D.*

RVRSVS *quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D.*

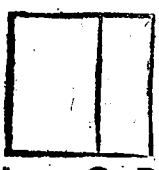
POSTREMO, b *quia triangula A B C, A B D, similia sunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* c *Quare rectangulum sub B C, A D, æquale est rectangulo sub A B, A C. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum sub B C, A D: item rectangulum A F, sub A B, A C, contentū.* d *Quoniā igitur rectangulum C E, duplū est trianguli A B C, nec nō & rectangulum* b 8. sexti. c 16. sexti. d 41. primi.

gulum A F, *eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt interſe æquales rectangula* C E, A F. *quod eſt propoſitum.*

LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales; erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta A B, *non bifariam in* C, *ſit q3 maior pars* A C. *Dico eſſe vt* A C, *ad* C B, *ita rectangulum ſub* A B, A C, *ad rectangulum ſub* A B, C B. *Deſcribatur enim ipſius* A B, *quadratum* A B D E, *ducatur q3* C F, *ipſi* A E, *parallèla; eritque* A F, *contentũ ſub* A B, A C, *&* C D, *contentum ſub* A B, C B; *quod* A E, C F, *ipſi* A B, *æquales ſint.* a *Quoniam igitur eſt vt* A C, *ad* C B, *ita* A F, *ad* C D; *conſtat propoſitum.*



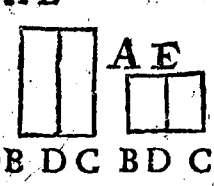
a 1. *ſext.*

EADEM ratione erit, vt minor pars B C, *ad maiorem* C A, *ita* B F, *contentum ſub* A B, B C, *tota, & minore parte, ad* C E, *contentum ſub* A B, C A, *tota, & maiore parte.*

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, *angulum rectum conſtituentes* A B C, *ſecetur q3 minor* B C, *bifariam in* D. *Dico rectangulum ſub* A B, B C, *duplum eſſe rectanguli ſub* A B, B D. *Compleatur enim rectangulum* A C, *ſub* A B, B C; *ducatur q3* D E, *ipſi* A B, *parallela, erit q3* B E, *contentum ſub* A B, *&* B D, *dimidia minoris.* b *Quoniam igitur eſt* A C, *ipſius* B E, *duplum eſt, quòd & baſis* B C, *dupla ſit baſis* B D, *conſtat propoſitum.*



b 1. *ſext.*

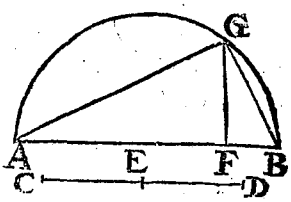
EODEM modo, ſi B C, *ſecta bifariam, ſit maior, erit quoq;* ſub

sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore, & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

PROBL. 10. PROPOS. 34. xxxiij. xxvij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.

REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solùm commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; a 31. decimi.
secetur quæ CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; c quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cùm AF, FB, longitudine sint incommensurabiles; d erũt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. e Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, f æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quòd quadrato ex CE, æquale est factum, & æquale est quadrato ex FG, (propterea quòd angulus AGB, rectus est & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB,



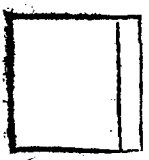
b 19. decimi.
c 31. tertij.
d 10. decimi.
e 4. def.
f 47. primi.
g 17. sexti.

CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia
a 22. de cimi. minoris CD.) a Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus po-
tentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est. Ig-
tur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm
eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui
rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis
æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG,
GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex
earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG,
GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum
quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò
sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum AE: Non habet autem C, ad D, proportionem, quam



b 9. decimi. *quadratus ad quadratum*; b *erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliquæ*
c 1. sext. d 10. decimi. *EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib.* c *Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cùm AB, AE, incommensurabiles sint longitudine,* d *erunt quadratum ex AE, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur, erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodem argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia verò AE, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus conflari posse Rationale. Quod est propositum.*

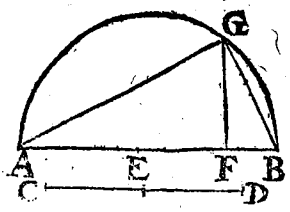
AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim vtrumq; AF, FB, Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia.
e 16. decimi. e *Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB,*
f 9. def. f *Rationale quoque est. Quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35. xxxiij. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

a REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, b æquale existens quadratis rectarũ AG, GB, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ ostensæ sunt potentia incommensurabiles, faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum verò sub ipsis contentũ, Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. decimi.

b 47. primi.

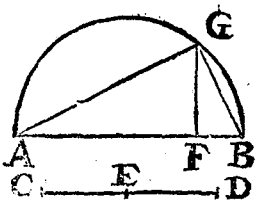
PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

a REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas AG, GB, potentia incommensurabiles esse.

a 33. decimi.

les esse. Et quia quadratum ex Media AB, Medium est, a & quæ
247. primi. dratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compositum ex quadra-



tis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm ex constructione, rectangulum sub AB, CD, Medium sit: erit quoque rectangulum sub AB, FG, hoc est, sub AG, GB, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam verò AB, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD: Est autem eidem CD, ipsa CE, longitudine commensurabilis; quòd illa huius sit dupla;
b 13. decimi. b erunt AB, CE, longitudine incommensurabiles. Sed vt AB, ad CE, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, CE, hoc est, ad rectangulum sub AB, FG; hoc est, sub AG, GB. (sunt enim rectangulum sub AB, FG, & sub AG, GB, per 1. lemma propos. 33. huius lib. æ-
c 10. decimi. qualia.) c Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub AG, GB. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc verò problemate facilè illud absoluemus, quod ad propos. 24 huius lib. nos demonstraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, & commensurabiles tam longitudine, quàm potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabilia. quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB, inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

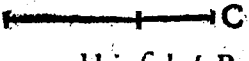
PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj. xxx.

SI duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia solùm commensurabiles, inuentæ per 2. lemma propos. 21. huius lib. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim AB, longitudine incommensurabilis est ipsi BC: & vt AB, ad BC, ita est rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propos. 31. huius lib. *a* erit rectangulum sub AB, BC, quadrato ex BC, incommensurabile. Sed rectahgulo sub AB, BC, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB, BC, continetur; & quadrato ex BC, commensurabile est quadratum rectæ AB; (omnia enim sunt Rationalia) *b* atq; adeò & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub AB, BC, & ex composito quadratorum rectarum AB, BC, hoc est, quadratum ex tota AC, (*c* Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis) composito ex quadratis rectarum AB, BC, *d* incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quòd commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rationali. Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommensurabile, *e* Irrationale est; atque adeò & recta ipsa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia solùm commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. *decimi.*

b 16. *decimi.*

c 4. *secundi.*

d 17. *decimi.*

e 10. *decimi fin.*

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, f *Irrationalis est, quæ Media* Go- *catur. At verò compositæ ex ipsis,* g *Irrationalis est, quæ ex binis nominibus accipitur.*

f 22. *decimi.*

g 37. *decimi.*

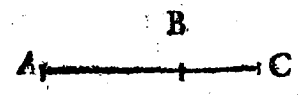
xxxvij. xxxj.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

a 28. decimi.

COMPONANTVR duæ Mediæ *a* superiùs inuentæ AB, BC, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia enim AB, est ad BC, vt rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propos. 31. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; *b* erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositũ ex quadratis rectarũ AB, BC. (Nam cùm AB, BC, potentia sint cõmensurabiles, *c* erunt ipsarũ quadrata commensurabilia, atq; adeò & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit. Habetur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratũ ex AC, *d* quod huic composito æquale est, *e* incommensurabile quoq; est rectangulo sub AB, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, commensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cùm hoc sit illius dimidium. *f* Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autem rectangulum sub AB, BC, Rationale. *g* Irrationale ergo est quadratum ex AC, *h* & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



b 10. decimi.

c 16. decimi.

d 4. secundi.

e 17. decimi.

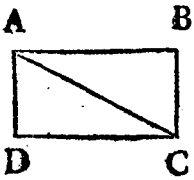
f 13. decimi.

g 10. def fin.

h 11. def fin.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.



CONTINEATVR *rectangulũ ABCD, sub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, i faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est ab-*

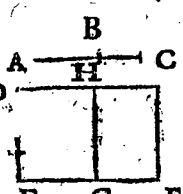
i 21. decimi.

est *absurdum. ponitur enim* B C, *Irrationalis. Non ergo* A C, *Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ *a* superiùs inuentæ A B, B C, potentia tantùm commensurabiles, quæ Mediũ contineant. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, *b* ad quam applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C; & composito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum D F, *c* æquale est duobus quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis sub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub A B, B C, continetur. Quoniam verò ex hypothesi, rectangulum sub A B, B C, Medium est; erit & rectangulum bis sub A B, B C, ei commensurabile, hoc est, H F, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; *d* erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorum ex Mediis A B, B C, Mediũ est. Igitur & D G, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (*e* est enim G H, Rationali D E, æqualis) *f* erunt eorum latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia A B, B C, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, B C, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex A B, incommensurabile rectangulo sub A B, B C, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est. Atqui quadrato ex A B, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarũ A B, B C; & rectangulo sub A B, B C, commensurabile est, quod continetur bis sub A B, B C, cùm hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositũ ex quadratis rectarũ A B, B C, hoc est, rectangulum D G, incommensurabile rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, rectangulo H F. *g* Cùm ergo sit vt D G, ad H E, ita E G, ad G F; *h* erit E G, ipsi G F, longitudine incommensurabilis: Ostensum autẽ iam fuit E G, G F, esse Rationales. Rationales igitur sunt E G, G F, potentia tantũ cõmensurabiles,



a 29. decimi. b 45. primi. c 4. secundi. d 16. decimi. e 34. primi. f 23. decimi. g 1. sext. h 10. decimi.

a 37. decimi. a ac propterea & tota E F, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex A C, ipsi D F, æquale, Irrationale est. Quare & recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

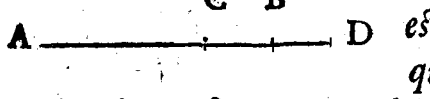
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantùm commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam. Hic verò lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantùm commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta A D, in B, non bifariam, sitq; maior pars A B; in qua sumatur B C, minori B D, æqualis, vt sit A C, excessus, quo A B, superat B D, hoc est, B C, ipsi B D, æqualem. Dico quadrata rectarum A B, B D, simul maiora esse rectangulo bis sub A B, B D, quadrato rectæ A C.



b 7. secundi. *Quoniam enim quadrata ex A B, B C, b æqualia sunt rectangulo bis sub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C, estq; B C, ipsi B D, æqualis: erunt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectangulo bis sub A B, B D, vnà cum quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora sunt, quàm rectangulum bis sub A B, B D, quadrato rectæ A C. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

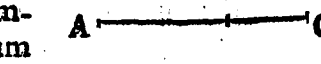
EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiij. THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur,

tinetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ *a* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Dico totam A C, esse Irrationalem. Quoniam enim rectangulum sub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub A B, B C, illi commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. *b* Incommensurabile ergo est rectangulum bis sub A B, B C, composito ex quadratis rectarum A B, B C. *c* Igitur & rectangulum bis sub A B, B C, vna cum quadratis ex A B, B C, hoc est, quadratũ ex A C, incommensurabile est compositio ex quadratis rectarum A B, B C. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; *d* erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; *e* Ac propterea recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia *f* cum possit duo quadrata ex A B, B C; & rectangulum bis sub A B, B C; compositum ex quadratis rectarum A B, B C, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub A B, B C. Quare cum compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale sit, rectangulum vero bis sub A B, B C, Medium; recte vocabitur A C, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



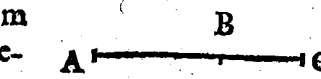
a 34. *decimi.*
b 10. *defin.*
c 17. *decimi.*
d 10. *defin.*
e 11. *defin.*
f 4. *secundi.*

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

xl. xxxiv.

COMPONANTVR duæ rectæ *g* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Medium est; quod vero continetur bis sub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub A B, B C, semel continetur, Rationale ponatur, *h* erit compositum ex quadratis rectarum A B, B C, in-



g 35. *decimi.*
h 10. *defin.*



commensurabile rectangulo bis sub AB, BC. a Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; b erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; c Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

a 17. *decimi.*

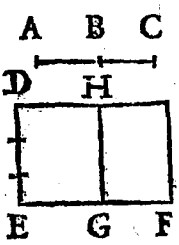
b 10. *defin.*

c 11. *defin.*

xlj. xxxv. THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. *decimi.* COMPONANTVR duæ rectæ *d* superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositũ ex ipsarũ quadratis Mediũ, & rectangulum sub eisdem Mediũ, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum. Dico totã AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, *e* ad quã applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarũ AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Etquia quadratũ ex AC, hoc est, rectangulum DF, *f* æquale est composito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, quam rectangulum sub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis sub AB, BC, nempe ipsum HF, (cum illi sit commensurabile.) Medium ponitur, *g* facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB, BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB, BC: Eidem autem rectangulo sub AB, BC, commensurabile est ipsius duplum, nempe quod



e 45. *primi.*

f 4. *secundi.*

g 23. *decimi.*

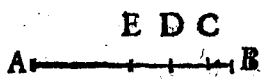
quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F; a erunt & D G, H F, incommensurabilia. Quare b cum sit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; c erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles; Atqui E G, G F, ostensæ sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; d Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est; e ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. decimi.
b 1. sex.
c 10. decimi.
d 37. decimi.
e 11. defin.

LEMMA.

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

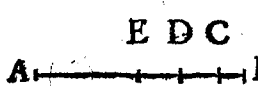
SECETVR *recta* A B, *inæqualiter in* C, *& rursus inæqualiter in* D, *sintque priores partes* A C, C B, *magis inæquales, quam posteriores* A D, D B. *Dico quadrata ex* A C, C B, *simul maiora esse quadratis ex* A D, D B, *simul.*



Diuisa enim A B, *bifariam in* E, *cadet punctum* D, *vel inter* E, C, *vel inter* A, E. *Cadat primum inter* E, C. *Quoniam igitur rectangulum sub* A C, C B, *vna cum quadrato ex* E C, *æquale est quadrato ex* E B: *Item rectangulum sub* A D, D B, *vna cum quadrato ex* E D, *æquale est eidem quadrato ex* E B; *erit rectangulum sub* A C, C B, *vna cum quadrato ex* E C, *æquale rectangulo sub* A D, D B, *vna cum quadrato ex* E D. *Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium* E C, E D, *cum quadratum ex* E C, *maius sit quadrato ex* E D, *erit reliquum rectangulum sub* A C, C B, *minus reliquo rectangulo sub* A D, D B; *ac propterea & rectangulum bis sub* A C, C B, *minus erit rectangulo bis sub* A D, D B. *Quoniam vero quadratum ex* A B, *æquale est tam rectangulo bis sub* A C, C B, *vna cum quadratis ex* A C, C B, *quam rectangulo bis sub* AD, DB, *vna cũ quadratis ex* AD, DB; *erit rectangulum*

f 5. secundi.
g 4. secundi.

gulum bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB.



Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

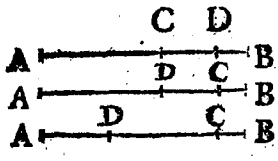
SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cum AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaque quia rectangulum 25. secundi. *sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

xxxij. xxxvj.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantum commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quam partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora



sunt

sunt quadratis ex A D, D B, vel maiora. (Neque enim partes A D, D B, vbicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraq; vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis sub A D, D B, quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex A B; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarū A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (Cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus: eademq; ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. *b* Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. *c* Quare cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

a 4. *secundi.*

b 22. *decimi.*

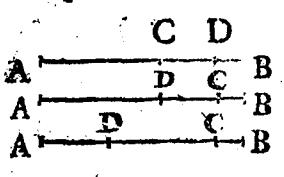
c 27. *decimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 44. xliij. xxxvij.

QVÆ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt A C, C B, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet

ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub A C, C B, id quod continetur ſemel ſub A C, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub A D, D B. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus: perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. [a] Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B. [b] Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam obrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.



a 16. *decimi.*

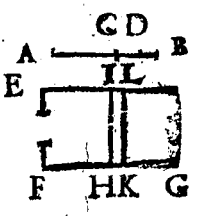
b 27. *decimi.*

xliv. xxxviij THEOR. 33. PROPOS. 45.

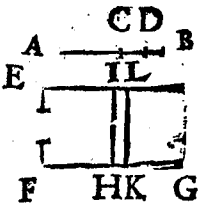
QVÆ ex binis Mediis ſecunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis ſecunda A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuiditur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex A C, C B, maiora eſſe

esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis EF, *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, *b* æquale est quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipsius FH. Eadem ratione ostendemus FK, maiorem esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. *d* Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC, CB, ponatur Medium, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IG, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, *e* erit HG, Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL; longitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine, sunt incommensurabiles, & est vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, *f* erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; *g* erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 14 huius libri,



a 45. primi.
b 4. secundi.
c 16. decimi.
d 23. decimi.
e 23. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.



libri, rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, ipsi I G. Quocirca *a* cum sit, vt E H, ad I G, ita F H, ad H G, *b* erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. *c* Igitur F G, tota Irrationalis est quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum G. Eodem modo ostendemus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, *d* vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

a 1. *sex.*
b 10. *decimi.*
c 37. *decimi.*
d 43. *decimi.*

xlv. THEOR. 34. PROPOS. 46. xxxix.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis Medium, vt vult propos. 40. huius lib. Dico A B, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quę scilicet lineæ incommensurabiles quoq; sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exciterit, demonstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarū A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, eum esse, qui rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum vtrumque compositum ex hypothesi si sit Rationale, erit quoq; eorum excessus spatium Rationale, vt in scholio propos. 27. huius lib. ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub A C, C B, Mediū ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis sub A D, D B. *e* Igitur cum Medium non superet Medium Rationale, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale; Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum



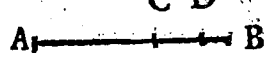
e 27. *decimi.*

vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47. xlvj. xl.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt A C, C B, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico A B, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri



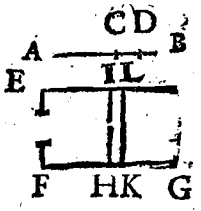
potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B. Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: *a* Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

a 27. *decimi.*

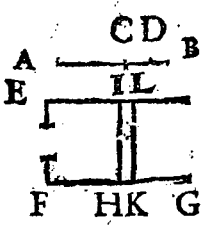
THEOR. 36. PROPOS. 48. xlvij. xlj.

BINA Media potens, ad vnum dunta xat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita vt A C, C B, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri.



Dico A B, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum



sub ipsis Medium, incommensurabileque cōpo-
posito ex earum quadratis. Nam si potest fieri,
diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicun-
que hoc punctum D, existat. Constructio autem
eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque ut
ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæqua-
les esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex qua-
dratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi com-
posito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub A C, C B,
ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium,
ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est. Iac-
tur Media E H, I H, applicata ad Rationalem E F, (est enim I H,
a 23. decimi. ipsi E F, æqualis) *a* faciunt latitudines F H, H G, Rationales lon-
gitudine ipsi E F, incommensurabiles. Eadem quoque ratione
probabimus, & rectas lineas F K, K G, Rationales esse, longitudi-
ne incommensurabiles ipsi E F. Quia vero compositum ex qua-
dratis rectarum A C, C B, descriptis, hoc est, rectangulum E H, in-
commensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub A C, C B,
b 1. sex. nempe rectangulo I G; *b* estque vt E H, ad I G, ita F H, ad H G,
erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles, vt in scholio
propos. 10. huius lib. ostendimus: Sed ostensæ sunt Rationales.
Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabi-
les. Igitur tota F G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus ap-
pellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demon-
strabimus & *F G*, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina
c 43. decimi. ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, *c* iam ante demonstra-
tum est. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud
punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duta-
taxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in
nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadra-
to rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali com-
mensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis no-
minibus prima.

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitu-
dine

dine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit vtrumque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (alias enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (alias enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus aliæ tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

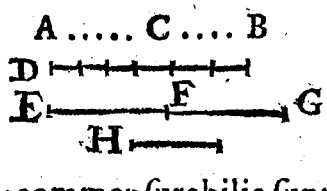
PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum exposita Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

xlviij. xlij. PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex iis quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico FG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC,



a 6. decimi. a commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionē quam numerus quadratus ad quadratum.

b 9. decimi. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles;

c 37. decimi. c Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, sit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate pro-

pos. 14.

posf. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est vt A B, numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit quoque, per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, videlicet ad excessum, quo antecedens A B, superat consequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G: Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac proinde rectę E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E F, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primã. Quod faciendum erat.

a 9. decimi.

PROBL. 14. PROPOS. 50. xlix. xliij.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, *b* commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia vero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; *d* Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex E F: Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; sit autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque minus nomen F G, expositæ Rationali D, commensu-

b 6. decimi.

c 9. decimi.

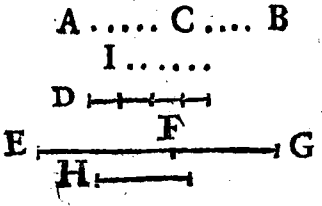
d 37. decimi.

rabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam A C. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum.



Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel sola vnitate ab A C, vel binario. (Vnitate quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad A C, quadratum facit. Vt si A C, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si A C, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, ad A C, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F. *a* Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, E F, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Quia vero I, ad A B, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *b* erunt D, & E F, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. *c* Erunt vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. ergo quadrata ex E F, F G, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ E F, F G, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum E F, ostensa sit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad A C, hoc est, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *d* erunt E F, F G, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo E F, F G, Ra-

L. xliv.

L. xvij.

a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 6. decimi.

d 9. decimi.

tiona-

tionales potentia tantum commensurabiles; a Atque idcirco to- a 37. decimi.
ta E G, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; Et vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit ex æqualitate vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex F G: Non habet autem I, ad A C, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur neq; quadrata ex D, & F G, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; b ac propterea re- b 9. decimi.
ctæ D, & F G, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; Est autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum E F, F G, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit E G, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 52. lj. xlv.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt compositus ex ipsis A B, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, cum Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, totam E G, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionē rationis est, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H: Non est autem A B, ad C B, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex E F, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratū. c Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ E F, c 9. decimi.
& H. Itaq; cum maius nomen E F, plus possit, quā minus F G, quadrato



drato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius nomen E F, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

liij. xlvj. PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

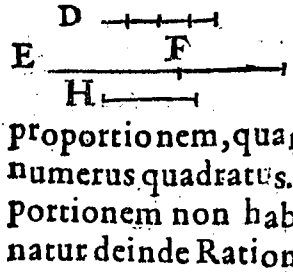
REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur F G, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. E G, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex E F, maius esse, quam quadratum ex F G: Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis est vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

liij. xlvij. PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos

a 30. *septim.*



numeros inter se primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finem lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunq; I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius lib. & reli-

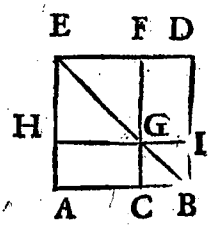
& reliqua fiant, vt in propoſ. 51. oſtendemuſque vt ibi, rectas D & E F, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam E G, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & F G, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit ergo maius quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49. per conuerſionem rationis, eſſe vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ad C B, atque adeò quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaq; cùm maius nomen E F, plus poſſit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutrum ipſorum nominum E F, F G, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

a 29. dec.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta A B, vtcunque in C. Deſcribatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipſi B D, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; vtrumque autem rectangulorum D G, G A, comprehenſum eiſdem partibus: At verò rectangula C D, A I, ſub tota A B, & parte C B, contenta. Dico D G, medium proportionale eſſe inter quadrata F H, C I: At C D, medium eſſe proportionale inter quadrata A D, C I. Quoniam enim b *vt H G, ad G I, ita eſt tam F H, ad D G, quàm A G, ad C I; erit vt F H, ad D G, ita A G, ad C I: Eſt autem A G, ipſi D G, æquale. Igitur erit quoque vt F H, ad D G, ita D G, ad C I; Atq; adeò D G, medium proportionale eſt inter quadrata F H, C I.*



b 1. ſext.

c 43. primi.

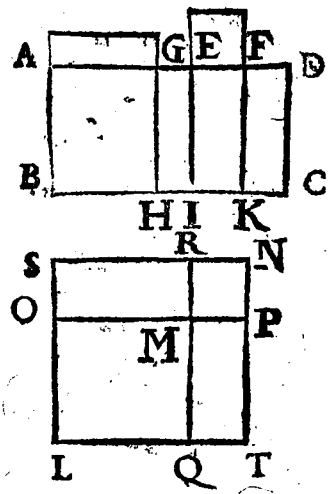
a1.sext. RVRSVS quia est, a vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quàm AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoq; CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.

liiij. xlviij.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum sub AG, GE, contentum, per 2. lemma propos. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; b in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. c Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, coniungantur q; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnam rectam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnam rectam QR, vt demonstratum est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quòd anguli OMQ, PMR, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cùm rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint; ideoq; & tota OP, toti QR, d sit autem OP, ipsis SN, LT, & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoq; quadratum.



b18. decimi.

c14. secundi.

d34. primi.

Q v O-

QVONIAM verò rectangulum ſub AG, GE, æquale eſt, per conſtructionem, quadrato ex EF, *a* erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE, *b* Ac propterea & vt AH, ad *EK*, ita EK, ad GI. Quare *EK*, medium proportionale eſt inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale eſt TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur eſt TM, ipſi *EK*. *c* Cùm ergo ipſi TM, æquale ſit MS, *d* & ipſi *EK*, æquale ſit FC, erit & MS, ipſi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale eſt; atq; adeò recta OP, poteſt ſpatium AC, contentum ſub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

a 17. ſexti. *xti.* b 1. ſext. c 43. primi. d 36. primi.

QVONIAM enim AG, GE, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles, *e* erit & tota AE, vtrique ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem AE, cùm ſit maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commenſurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atq; adeò cùm AB, ſit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula AH, GI, ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus contenta Rationalia ſunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectę OM, MP, Rationales erunt.

e 16. decimi. f 20. decimi.

ET quoniam AE, ipſi ED, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis AG, & ipſi ED, commenſurabilis eſt longitudine EF, eius dimidia; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & AG, EF, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & AH, *EK*, *g* eandem proportionem habentia, quam AG, EF, *h* incommenſurabilia ſunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. *i* Igitur rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, *k* cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales oſtenſæ. Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. *l* Quapropter tota OP, potens ſpatium AC, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

g 1. ſext. h 10. decimi. i 10. decimi. k 1. ſext. l 37. ſexti.

THEOR. 38. PROPOS. 56. lix. xlix.

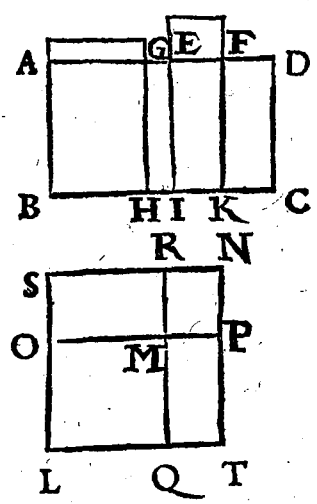
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineã, quæ poteſt ſpa-

tium

tium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quàm ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua construantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secundæ AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; *a* erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antetedēti propositione longitudine commensurabiles; *b* erit quoque tota AE, vtrique ipsarum commensurabilis. Quare cùm AE, maius nomē existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cùm ergo vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at verò AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; *c* erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quàm AB, GE, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. Igitur *d* rectangula AH, GI, Media sunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.



a 13. decimi.

b 16. decimi.

c 14. decimi.

d 22 decimi.

QVIA verò AG, GE, lougitudine sunt commensurabiles; *e* erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommeusurabiles sunt; ipsi verò AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles: Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, *f* incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt; *g* Ideoque & rectæ OM, MP, longitudi-

e 10. decimi.

f 10. decimi.

g 10. decimi.

tudine sunt incommensurabiles, *a* cùm eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cùm ergo ostensum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles, erũt O M, M P, Mediæ potentia solùm commensurabiles. Quoniam denique E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoque longitudine commensurabilis; *b* erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cùm E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. *c* Quare E K, rectangulum, Rationale est; Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, Rationaleq; continentes; *d* atque adeò O P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

a 21. sext.

b 12. de cimi.

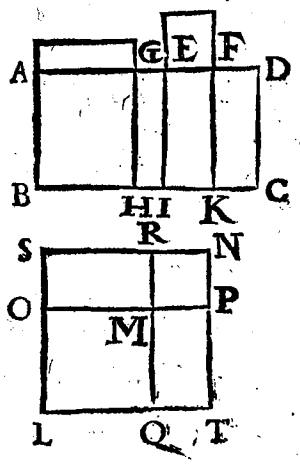
c 20. de cimi.

d 38. de cimi.

THEOR. 39. PROPOS. 57. LVj. L.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex definitione, Rationales potentia tantùm cõmensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum A E, E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam O P, posse spatiũ A C: Et vt in antecedenti propos. 56. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantùm commensurabiles; propterea quòd A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipsi A B, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam verò E D, E F, sunt commensurabiles longitudine; estq; E D, ipsi A B, Rationali, hoc est ipsi E I, longitudine incommensurabilis; *e* erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommensurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quòd E F, dimidia sit ipsius E D, Ra-



e 14. de cimi.

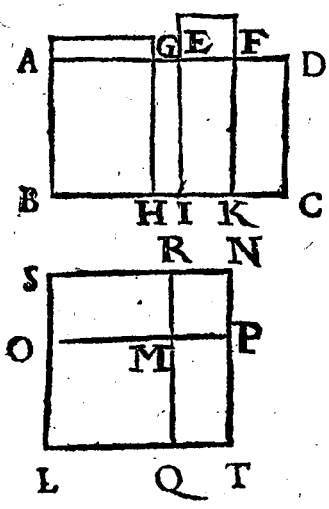
ED, Rationalis; & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EI,
a 22. de cimi. EI, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; a AE, propterea EK, Medium est: ideoque & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Medijs OM, MP, continetur. Itaq; cùm OM, MP, Mediæ sint potentia solùm commensurabiles, contineant-
b 22. de cimi. que spatium Medium; b erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominib. tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

lvij. lj.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur.



Sit enim AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudini sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in
ex. de cimi. propos. 55. c Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommensura-
d 10. de cimi. biles sunt; d erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeò & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommensurabiles. Quia verò AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB;
e 20. de cimi. erit & AE, Rationalis; e & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM, MN. Rationale est.

ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, longitudine incommensura-

surabilis; Et est E F, Rationalis, cùm sit Rationali E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solùm commẽsurabiles. a Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illi æquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cùm O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis M T, Medium; b Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quartæ, &c. Quod erat ostendendũ.

a 22. de cimi.

b 40. de cimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59. lviij. lij.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Sunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus potest, quàm E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: & deniq; E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 55. c Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Et quia A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali A B; erunt A E, A B, Rationales potentia tantùm commensurabiles. d Quare rectangulum A I, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem A I, æquale composito ex quadratis L M, M N. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia E D, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali A B, cùm sit minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, commensurabilis longitudine, & Rationalis. e Quare E K, sub Rationalibus E I, E F, longitudine commensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & M T, sub O M, M P, contentum Rationale erit, cùm ipsi E K, sit æquale. Quamobrem cùm rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Medium; Rectangulum verò M T, sub ipsis contentum, Rationale; f Irrationalis erit tota O P; quæ dicitur potens Rationale, & Mediũ. Si igitur spatiũ continea-

c 19. decimi.

d 22. decimi.

e 20. decimi.

f 41. decimi.

tineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

lix. liij.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & AE, plus poterit, quàm AD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus, *a* eruntq; AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Iam verò oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ED, hæc verò eidem commenſurabilis; *b* erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. *c* Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt. *d* cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis, *e* erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

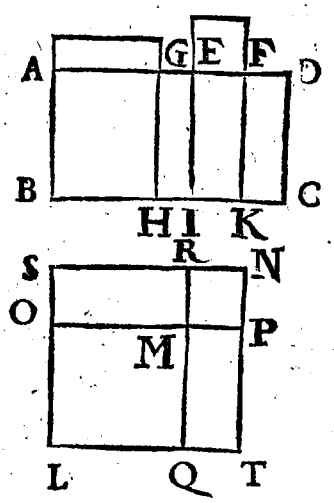
a 19. *decimi.*

b 13. *decimi.*

c 10. *decimi.*

d 1. *ſext.*

e 42. *decimi.*



lx. liiij.

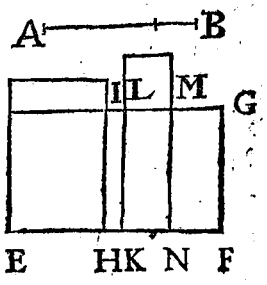
THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nomini-

bus,

bus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; *a* & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cùm quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis sub AC, CB, *b* æqualia sint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale est, per constructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipsis LK, GF, parallela agatur, MN: eritque vtrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur. *c* Et quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, quòd tota AB, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; *d* quorum vtrique cùm etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cùm applicatũ sit ad Rationalem DE, faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine cõmensurabilem.



RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solùm potentia commensurabiles, *e* erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeò, & quod bis sub ipsis, cùm sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem, *f* facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. *g* Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantùm cõmensurabiles; *h* Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primã esse.

QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, CB, medium proportionale est inter quadrata ex AC, CB; erit quoq; LN, medium proportionale inter DH, IK, atq; adeò *i* cùm rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeant, quam DH, LN, IK; erit quoq; recta LM, media proportionalis inter DI, IL. *k* Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commensurabilia sunt, quòd AC, CB, ponantur potentia commensurabiles;

a 45. primi.
b 4 secundi.
c 37. decimi.
d 16. decimi.
e 22. decimi.
f 23. decimi.
g 13. decimi.
h 37. decimi.
i 1. sext.
k 17. sexti.

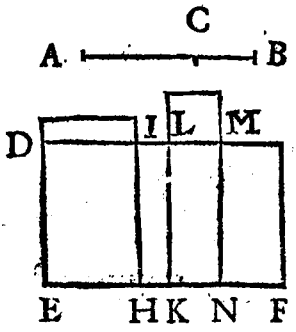
a10.decimi. erunt & DH, IK, ipsis æqualia commensurabilia. a Igitur & ipsæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK, maius est, quàm LF, quòd & quadrata ex AC, CB, maiora sint, per lemma propos. 39. huius libri, quàm rectangulum bis sub AC, CB; erit & recta DL, maior quàm LG, b cùm DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam DL, maior est, quàm LG, & ad DL, applicatur rectangulum sub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI, IL, æquale quadrato ex LM) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commensurabiles, vt est demonstratum; c poterit DL, maior plus quàm LG, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm DG, ostensa sit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus posse, quàm LG, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

b11.sext.

c18.decimi.

lxj. lv. THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.



d45.primi. SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC, d & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. Constituantur enim eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes e Medias sunt potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. f Cùm ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium, quod cùm applicatum sit ad Rationalem DE, g erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis.

e38.decimi.

f16.dec.

g23.decimi.

bilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est, erit & eius duplum, nempe L F, Rationale, quod cùm applicatum sit ad Rationalem L K, *a* erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; *b* erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cùm D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solùm commensurabiles; *c* ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam verò, vt in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quàm minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cùm ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quàm minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

a 22 1. decimi.
b 13. decimi.
c 37. decimi.

THEOR. 45. PROPOS. 63. lxij. lvj.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Mediis secunda A B, cuius maius nomen A C, *d* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis secundam A B, componentes, *e* Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeò rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, & Media. *f* Cùm ergo propterea & totum D K, vtriquè ipsorum D H, I K, sit commensurabile, erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem D E, *g* erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, C B, Medium est; erit & eius duplum L F, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem L K; *h* erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, longitudine est incommensurabilis; estque vt A C, ad C B, ita per lemma 5. propositionis 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, *i* erit quoque quadratum ex A C, rectangulo sub A C, C B, incommensurabile. *k* Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis

d 45. primi.
e 39. decimi.
f 16. decimi.
g 23. decimi.
h 23. decimi.
i 10. decimi.
k 16. decimi.

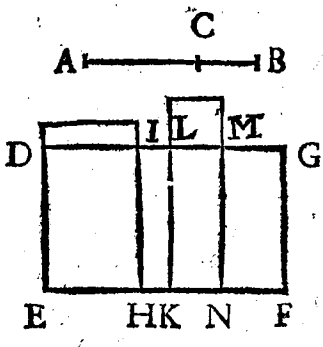
dratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex A C, C B, commensurabilia sint, quippe cùm rectæ ipsæ potentia ponantur cõmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub A C, C B. Igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, rectangulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habentes a longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm cõmensurabiles; b ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam verò vt in propos. 61. ostendemus D L, esse maius nomen, posseq; plus, quàm minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cùm D L, maius nomen plus possit, quàm L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum D L, L G, Rationali expositæ D E, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

a 10. *decimi.*

b 37. *decimi.*

lxiij. lvij. THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



c 45. *primi.*

d 45. *decimi.*

SIT maior A B, cuius maius nomen A C, c & ad Rationalẽ D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, d potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum verò sub ipsis, Mediũ; erit quoq; D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At verò L F, duplum eius quod sub A C, C B, continetur, Mediũ. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; e erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cùm L F, Medium sit applicatum ad Rationalem L K, f erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, D E, longitudine incommensurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitudine: hæc verò eidem D E, longitudine incommensurabilis; g incommensurabiles e-

e 21. *decimi.*

f 23. *decimi.*

g 13. *decimi.*

les erunt longitudine D L, L G: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L H, Rationales potentia tantùm commensurabiles; a ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam verò vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quòd rectæ A C, C B, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommensurabilia, b atque adeò & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam verò vt in propos. 61. ostendimus, D L, maior est, quàm L G, & ad D L, applicatum est rectangulum sub D I, I L, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles, c poterit D L, plus quàm L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cùm & ipsa D L, (maius nomen ipsius D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 37. de cimi.

b 10. de cimi.

c 19. de cimi.

THEOR. 47. PROPOS. 65. LXIV. LVIIJ.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomen A C, d & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ A C, C B, componentes A B, potentem Rationale ac medium, e potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit D K, æquale composito ex quadratis rectarum A C, C B, Mediũ, & L N, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur, atque adeò ipsius duplum, L F, Rationale. Igitur Medium D K, applicatum ad Rationalem D E, f facit latitudinem D L, Rationalem, & longitudine Rationali D E, incommensurabilem: At verò Rationale L F, ad Rationalem L K, applicatum, g facit latitudinem L G, Rationalem longitudine ipsi L K, hoc est, ipsi D E, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum D L, L G, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali D E, illa verò longitudine incommensurabilis, h erunt D L, M G, longitudine incommensurabiles. Quare D L, L G, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, i Ac propterea D G, est ex binis nomi-

d 45. primi.

e 41. de cimi.

f 23. de cimi.

g 21. de cimi.

h 13. de cimi.

i 37. de cimi.

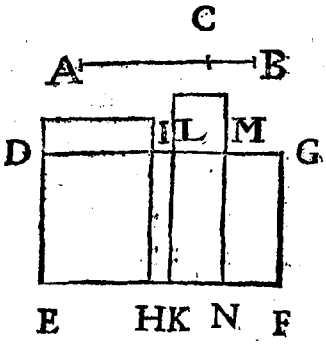
nibus. Iam verò, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M, & vt in antecedenti propos. D L, maius nomen esse, atq; posse plus, quàm L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen L G, ostensum sit expositæ Rationali D E, longitudine commensurabile; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

lxv.
lix.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina Media potens recta A B, cuius maius nomen A C, & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ A C, C B, componentes ipsam A B, potentem bina Media, *b* potentia incommensurabiles sunt, faciuntque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam D K, illi composito æquale, quàm L F, rectangulo bis sub A C, C B, æquale, Medium. Et quia Media D K, L F, applicata sunt ad Rationalem D E; *c* erunt eorum latitudines D L, L G, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. *d* Quoniam verò compositum ex quadratis rectarum A C, C B, incommensurabile est rectangulo sub A C, C B; eidem verò rectangulo sub A C, C B, commensurabile est rectangulum bis sub A C, C B, cùm hoc illius sit duplum; *e* Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, D K, incommensurabile rectangulo bis sub A C, B C; hoc est, ipsi L F. Ac propterea rectæ D L, L G, eandem rationem habentes cum D K, L F, *f* longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt D L, L G, potentia solùm commensurabiles; *g* Ac proinde D G, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus D L, esse maius nomen, possèq; plus quàm L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm ergo ostensum sit neutram ipsarum D L, L G, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus sexta. Quadratũ igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum



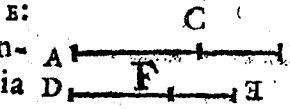
a 45. primi.
b 42. decimi.
c 23. decimi.
d 42. decimi.
e 13. decimi.
f 10. decimi.
g 37. decimi.

THEOR.

THEOR. 49. PROPOS. 67. lxvj. lx.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque A B, diuisa in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitq; recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B. *a* Fiat enim vt tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. *b* Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; *c* erit & D E, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: *d* Sunt autem A C, C B, cùm sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad F E:



Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles; *e* erunt & D F, F E, potentia solùm commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; *f* Ac propterea D E, ex binis est nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; *g* poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt A B, sit ex binis nominibus prima; *h* erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cùm vtraque, & Rationalis, & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt A B, sit ex binis nominibus tertia; *i* erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

AT si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; *k* poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A E, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

a 12. *sexti.* *b* 19. *quinti.* *c* 10. *decimi.* *d* 37. *decimi.* *e* 10. *decimi.* *f* 37. *decimi.* *g* 15. *decimi.* *h* 12. *decimi.* *i* 12. *decimi.* *k* 15. *decimi.*

quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si recta D E, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, & loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantùm:) & D E, esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At verò D F, potentia tantùm, ex hypothesi. Immò verò, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt D E, illi potentia tantùm commensurabilis, sit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C, sitq; ei commensurabilis potentia tantùm D E, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq; esse in sua nomina ad F, & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirum illas ad has eadem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, vt D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit vtraq; ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumq; maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expositæ commensurabile longitudine. a *Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt A C, ad D F, ita A B, ad D E,* b *erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Non enim D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraq; A B, D E, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim vtrumq; nomen minus C B, F E, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq; adeò & inter se. Igitur & totæ A B, D E, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

a 12. decimi.

b 10. decimi.

SEMPER tamen verùm est, si A B, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit A C, plus quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E, c *poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt A C, plus*

c 15. decimi.

posit

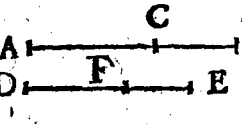
possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; a poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB. a 15. decimi.

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

THEOR. 50. PROPOS. 68. lxvij. lxj.

TEI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, sitque ei recta DE, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem. *b* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *c* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine cõmensurabilis DE; *d* erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. *e* Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: *f* Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; *g* erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; *h* Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. *i* Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; *k* atque adeo & DF, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FD, ei



b 12. sexti. c 19. quinti. d 10. decimi. e 24. decimi. f 38. decimi. g 10. decimi. h 38. vel 39. decimi. i 10. decimi. k 18. decimi.

commensurabile, Medium, ex corollario propos. 24. huius libri.
a 39. decimi. a Ac propterea & D E, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine commensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

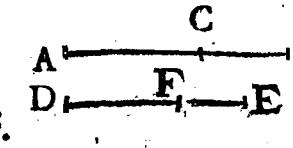
EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam D E, quæ potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi A E, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

lxviij. lxij.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem habeant rationem, quam tota A B, ad totam D E.



b 10. decimi. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *b* erunt quoq; tam A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando vt A C, ad C B, ita
c 22. sexti. D F, ad F E, *c* erit vt quadratum ex A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compositum ex quadratis rectarum D F, F E, ad quadratum ex F E; Et conuertendo, vt quadratum ex C B, ad compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E; Et permutando vt quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E. Commensurabile est autem quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, quadrato ex F E, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.
d 10. decimi. *d* Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile est
e 40. decimi. composito ex quadratis rectarum D F, F E. *e* Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, componant Maiorem
f 9. defin. A B. *f* Igitur & hoc Rationale est.

RVRSVS quia est vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; Vt autem A C, ad C B, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, & vt D F, ad F E, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E,

ex lem-

ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E: Et permutando vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, C B; ad rectangulum sub D F, F E: Est autem quadratum ex A C, quadrato ex D F, commensurabile, quod rectæ A C, D F, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum sub A C, C B, rectangulo sub D F, F E, commensurabile est. *b* Est autem rectangulum sub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum sub D F, F E, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt A C, ad C B, ita D F, ad F E, *c* sunt quæ A C, C B, potentia incommensurabiles, cum componant Maiorem A B; *d* Erunt quoque D F, F E, potentia incommensurabiles. Itaque cum D F, F E, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; *e* erit tota D E, Maior. Maiori ergo commensurabilis & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

a 10. decimi.
b 40. decimi.
c 40. decimi.
d 10. decimi.
e 40. decimi.

THEOR. 52. PROPOS. 70. lxix. lxiij.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT (repetita figura antecedentis propos.) recta A B, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem quæ supra, ostendemus, vt in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, F E: *f* Est autem illud compositum Medium, cum rectæ A C, C B, componant ipsam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub A C, C B, *g* quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub D F, F E, atque adeo & rectangulum sub D F, F E, Rationale est, ex 9. defin. Denique vt in eadem superiori propos. erunt D F, F E, potentia incommensurabiles. Quare cum D F, F E, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demonstratum est; *h* erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

f 41. decimi.
g 41. decimi.
h 41. decimi.

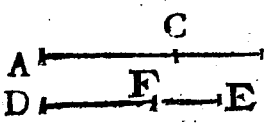
THEOR.

lxx. lxiv.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis D E, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & D E, esse bina Media potentem. Cõstructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum A B, C B, composito ex quadratis rectarum D F, F E, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub A C, C B, esse commensurabile rectangulo sub D F, F E. a Cum ergo tam compositum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum sub A C, C B, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius lib. tam compositum ex quadratis rectarum D F, F E, quam rectangulum sub D F, F E, Medium. Sed & D F, F E, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremo b quia compositum ex quadratis rectarum A C, C B, & rectangulum sub A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest; Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; c erit D E, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.



a 42. decimi.

b 42. decimi.

c 42. decimi.

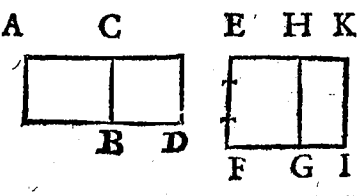
lxxj. lxv.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, vel maius quam C D, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo maius

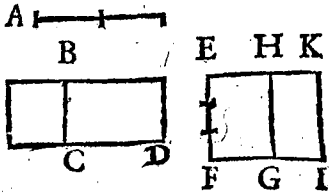
maius, *a* & exposita Rationali E F, applicetur ad eam rectangu- a 44. *primi.*
lum E G, æquale ipsi A B, & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, vt
totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, &
C D, Medium, erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium; quæ
cum applicentur ad Rationalem E F, *b* erit E H, Rationalis, & ipsi b 21.
E F, longitudine commensurabilis; *c* At vero H K, Rationalis, & *decimi.*
eidem E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia E G, H I, c 23.
incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus; quod E G, *decimi.*
Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Medium; *d* erunt E H, d 10.
H K, eandem cum illis habentes ra- *decimi.*



tionem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles; *e* Ac propterea E K, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque E H, e 37. *decimi.*
maior quam H K, *f* cum D H, H K, eandem rationem habeant, f 1. *sext.*
quam E G, H I. Iam vero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, *g* Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur. g 55. *decimi.*

SI vero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit E A, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque h 58. *decimi.*
adeo & spatium A D, *h* Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

SIT deinde A B, minus quam C D, & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, *E* K, ex binis nominibus & *E* H, ipsi *E F*, longitudine commensurabilis. Et quia A B, minus est quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rursus H K, maius nomen ipsius *E* K, quæ est ex binis nominibus, plus quam E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit H K, quam *E* H, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit *E* K, ex binis



nomini-

nominibus ſecunda; cum E H, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali E F, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus ſecunda E K, atque adeo & ſpatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compoſitum, *a* Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Mediis prima.

a 56. *decimi.*

SI vero H K, plus poſſit quam E H, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atque adeo & ſpatium A D, *b* Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

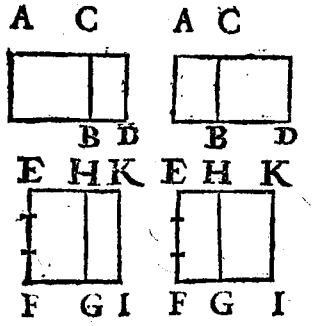
b 59. *decimi.*

lxxij. lxvj.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

SI duo media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommenſurabilia A B, C D. Dico rectam quæ poteſt totum ſpatium A D, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media potentem. Erit enim rurſus A B, vel maius, quam C D, vel minus: Æquale ſiquidem non erit; alias eſſent A B, C D, commenſurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia A B, C D, ponuntur Media, & incommenſurabilia; erunt & ſpatia E G, H I, Media & incommenſurabilia; cum illis ſint æqualia. *c* Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles ſunt; & vtraque (cum E G, H I, Media ſint, applicenturque ad Rationalem E F,) *d* Rationalis eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Rationales ergo ſunt E H, H K, potentia ſolum commenſurabiles; *e* ac propterea E K, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit vt in antecedenti propoſ. E H, maius nomen ipſius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit E H, quã H K, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum



c 10. *decimi.*

d 23. *decimi.*

e 37. *decimi.*

enim vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, a Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. a 57. decimi.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, b Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. b 60. decimi.

QVOD si AB, minus sit, quam CD, non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se commensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se eadem esse.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, c latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. c 23. decimi.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61. decimi.

ET quadratum eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, e latitudinem facit ex binis nominibus secundam. e 62. decimi.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, f latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. f 63. decimi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, g latitudinem facit ex binis nominibus quartam. g 64. decimi.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, h latitudinem facit ex binis nominibus quintam. h 65. decimi.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, i latitudinem facit ex binis nominibus sextam. i 66. decimi.

ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus: perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senariis.

IN primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit totum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis se-

diis secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quænam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

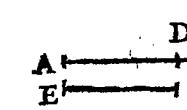
IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.

SIT enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel DB, æqualis sumatur E.



Dico E, mediam esse secundum Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & esse quoq; ex binis nominibus. Quoniam enim AC, superat dimidiam AD, rectâ DC, & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem rectâ DB; perspicuum est, dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commensurabilis est longitudine toti AB, cum hæc illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, & in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

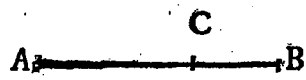
SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus septem senariis de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. lxxiij. lxviij.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulũ sub AB, AC; Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; *a* erũt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. decimi.

b 16. decimi.

c 7. secundi.

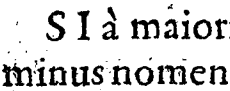
SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; a erit compositæ ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, & relinquatur Apotome BC.

a 37. decimi.

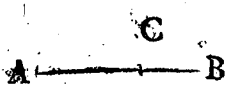


lxxiv. lxix.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia, *b* atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *d* Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt: Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.



b 16. decimi.

c 7. decimi.

d 17. decimi.

SCHOLIVM.

POTVISSET hac propositio proponi hoc modo. SI à

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim A B, A C, sint Media potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, vt relinquatur B C, Media Apotome prima. a 38. decimi.

THEOR. 58. PROPOS. 76. lxxv. lxx.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media A B, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B, sitque rectangulum sub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex A B, A C, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; *b* erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumq; ipsorum Medium, quod & rectæ A B, A C, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis vtriq; commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub A B, A C, Medium ponitur; erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub A B, A C, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarū A B, A C, æquale sit rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C; superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium est, rectangulum bis sub A B, A C, quod etiam Medium est, quadrato ex B C. *d* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta B C, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.



b 16. decimi.

c 7. secunda.

d 27. decimi.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

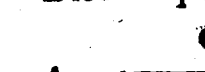
QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum
a 39. *decimi.* *commensurabiles, continentque Medium; a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome secunda.*

lxxvj. lxxj.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale;



b 10. *decimi.* *b* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC.
c 7. *secundi.* *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale.
d 10. *defin.* *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

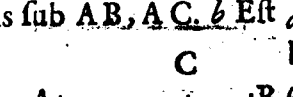
NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium:
e 40. *decimi.* *e erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, cuius maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur*

Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, & relinquatur Minor B C.

THEOR. 60. PROPOS. 78. lxxvij. lxxij.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, A C, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub A B, A C, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub A B, A C, Rationale; *a* erit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, incommensurabile rectangulo bis sub A B, A C. *b* Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C. Igitur & rectangulum bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, incommensurabile est rectangulo bis sub A B, A C. *c* Sunt ergo rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub A B, A C, Rationale sit; *d* erit quadratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub A B, A C, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. *defin.* b 7. *secundi.* c 17. *decimi.* d 10. *defin.*

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totũ efficiens.

CVM enim A B, A C, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; c *erit composita ex ipsis Irratio-*

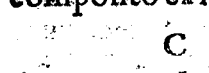
c 41. *decimi.*

nalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est A B, minus autem A C. Aufertur igitur minus nomen A C, à maiori A B, vt B C, cum Rationali Mediũ totum efficiens relinquatur.

lxxviij. lxxiij. THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. *a* Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale est rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub A B, A C, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio quod sub A B, A C, continetur, sit commensurabile) quadrato ex B C. *b* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub A B, A C, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.



a 7. secundi.

b 27. decimi.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

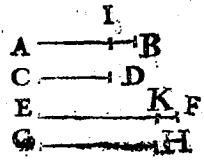
QVONIAM cum A B, A C, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Aufertur igitur minus nomen A C, ex maiori A B, vt relinquatur B C, cum Medio Medium totum efficiens.

LE Mo

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitque IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessui erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.



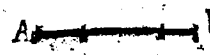
COROLLARIVM.

EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

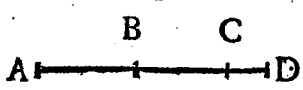
THEOR. 62. PROPOS. 80. lxxix. lxxiv.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalem nõ congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; erit AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantũ commensurabiles. Eodem



modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex



quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulū bis sub A D, B D; (superat enim compositū ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; a quod compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Eodem modo compositum ex quadratis rectarum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodem ex A B; b cum & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D, vna cum quadrato ex A B,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, D B. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrumque Rationale sit. (Nam cum A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata Rationalia, & commensurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtrique illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium Rationale est. d Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. e Medium autem non superat Medium Rationale. Igitur excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Rationalis non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 7. secundi.
b 7. secundi.
c 16. decimi.
d 22. decimi.
e 27. decimi.

lxxx. lxxv.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipsi congruat A C, Media toti A C, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C,

A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media est potentia solùm ipsi A C, commensurabilis; *a* erit & A C, Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt A C, B C, potentia tantùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositũ ex quadratis rectarum A C, C B, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumque sit Rationale. (cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D.) Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile est, atque adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. *c* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

a 24. decimi.

b 16. decimi.

c 27. decimi.

THEOR. 64. PROPOS. 82. lxxxj. lxxvj.

MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

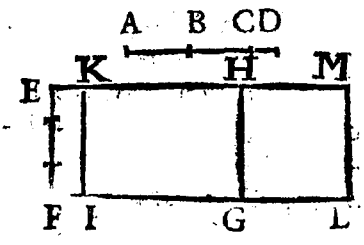
SIT Mediæ Apotome secunda A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantùm commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia

B D. Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, sit quæ rectangulum sub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, a ad quam applicetur rectangulum E G, æquale compositorum quadratis rectarum A C, B C, & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et deniq; aliud E L, æquale compositorum ex quadratis rectarum A D, B D. b Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, vnà cum quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur sub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Media sunt, & potentia commensurabiles; (cùm enim B C, Media ponatur, c erit & A C, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia.

a 45. primi. b 7. sec. c 24. decimi.

Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtriquæ eorum; atq; idcirco & Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. d Igitur & E G, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cùm applicetur ad Rationalem E F, e erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est, & erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium; quod cùm applicetur ad Rationalem K I, f erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. g erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G, (cùm enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commensurabiles, h erunt & earum quadrata commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtriquæ ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplum, videlicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. i Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationem cum E G, K G, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles. Quapropter cùm ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solùm commensurabilis ipsi E H, k erit E K, Apotome, & illi congruens K H. Similiter demonstrabimus E K, Apotomen esse, & illi congruentem K M. Non igitur Apotomæ vna tantùm congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens

d 16. decimi. e 23. decimi. f 23. decimi. g 10. decimi. h 16. decimi. i 10. decimi. k 74. decimi.



existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantùm congruere, * demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum. a 80. *decimi.*

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82. 77.

MINORI vna tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; at rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum sub A D, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. b Quare vnum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

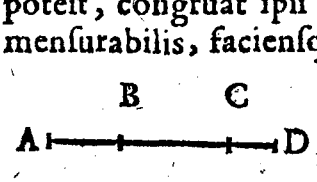
b 27. *decimi.*

THEOR. 66. PROPOS. 84. 83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensq;

cienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò ſub A C, B C, Rationale. Dico ipſi A B aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò ſub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarū A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cùm vtrumque ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi A B, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

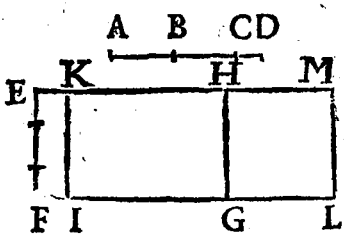


a 27. de cimi.

lxxxiv. lxxix.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipſi verò congruens B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſque & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Mediū, & rectangulum ſub A C, B C, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, ita vt & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium ſit, & rectangulum ſub A D, B D, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium eſt; erit etiam E G, illi æquale, Medium,

dium. *a* Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. *b* Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniam KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cùm illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC: *c* erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, *d* longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solùm commensurabilis ipsi EH; *e* erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod est absurdum. *f* Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. *decimi.*
b 23. *decimi.*
c 14. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 74. *decimi.*
f 80. *decimi.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

SI

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

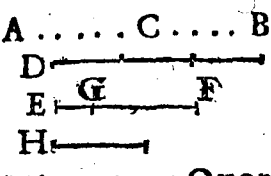
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superiùs numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

85. 80. PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus A C, non sit quadratus; ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E F. Eritque E F, cùm commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad numerum A C, ita per coroll. prop. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, esse primam Apotomen. *a* Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt, Etunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo E F, ostensa sit Rationalis; erit & G F, Rationalis. Quia verò A B, A C, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. *b* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantùm commensurabiles; *c* atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E F, plus quàm recta G F, quadrato ex H. Et quia est, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati.



a 6. dec.

b 9. dec.

c 74. dec. 1.

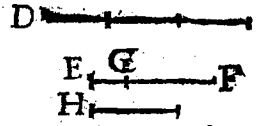
Igitur

Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; a Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 9. decimi.

PROBL. 20. PROPOS. 87. 86. 81.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis G F, eritque G F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico E G, esse secundam Apotomen. Quoniam b enim quadrata ex G F, E F; proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ G F, E F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo G F, sit ostensa Rationalis; erit quoque E F, Rationalis. Quia verò numeri A C, A B, atque adeò & quadrata ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; c erunt G F, E F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt G F, E F, potentia solùm commensurabiles; d Ideoque E G, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta E F, plus quàm G F, quadrato ex H Quoniam ergo est vt A C, ad A B, ita quadratũ ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: Ostendemus iam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi E F, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cùm tota E F, plus possit, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens G F, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit E G, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundã Apotomen. Quod erat faciendum.



b 6. decimi.

c 9. dec.

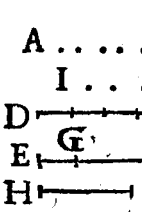
d 71. decimi.

PROBL. 21. PROPOS. 88. 87. 82.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propositione 86. sumatur alius numerus I, vt in propositione 51. huius libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum

a 6. decimi. tum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. a Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB commensurabilia; atque adeò & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent,



b 9. dec. quam numeri quadrati; b erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario propos. 6. huius lib. Dico EG, esse tertiam Apotomen. c Quoniam enim quadrata ex EF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cùm illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia AB, AC, atque adeò & quadrata ex EF, GF, proportionem nō habent, quam numeri quadrati; d Erūt rectæ EF, GF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea cùm ex EF, auferatur GF, potentia illi solùm commensurabilis; e reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est, vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. f Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H; Ostendemusque, vt in propos. 86 rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cùm tota EF, plus possit quàm congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

c 6. dec.

d 9. dec

e 74. decimi.

f 9. dec.

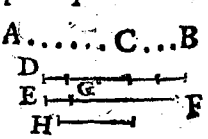
88. 83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib.

sus lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F; eritque propterea & E F, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H. Et quia est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex H. Cùm ergo A B, & C B, proportionẽ non habeant, quã numeri quadrati; a erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



a 9. dec.

PROBL. 23. PROPOS. 90. lxxxix. lxxxiv.

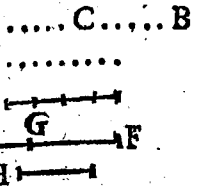
INVENIRE quintam Apotomen.

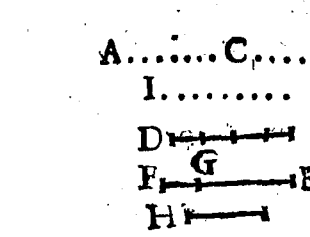
REPERTIS (repetita figura proximè antecedentis propositionis) duobus numeris A C, C B, vt in propositione præcedenti fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt A B, ad C B, ita quadratum E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91. xc. lxxxv.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeò neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D.





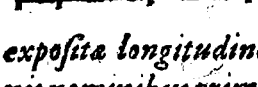
nali D. Possit iam E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi E F. Igitur cùm tota E F, plus possit, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextã Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

SED & expeditiùs sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

a 49. decimi. *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.* a *Reperiantur prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen A C, & minus C B. Abscissa igitur ex A C, recta C D, qua aqualis sit ipsi C B: Dico A D, esse primam Apotomen. Quoniam enim A C, C B, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erunt etiam A C, D C, Rationales potentia tantùm commensurabiles.* b *Est ergo A D, Apotome. Et quia A B, plus potest, quàm C B, hoc est, quàm D C, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est A C, Rationali exposita longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ A D, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta, sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.*

b 74. decimi.



xcj. lxxxvj. ## THEOR. 68. PROPOS. 92.

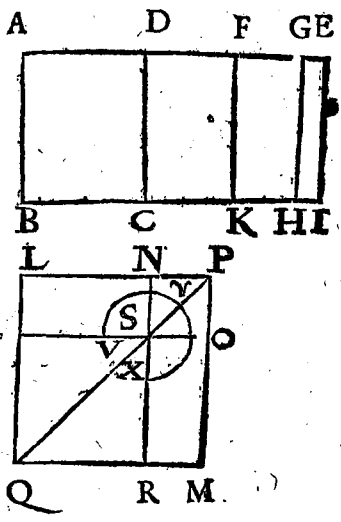
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotomæ prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Apotomen esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solùm commensurabiles; & tota A E, longitudine commensurabilis Rationali A B; & deniq; eadem A E, tota plus poterit, quàm congruens D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc est, quarte parti quadrati ex D E, applicetur ad A E, rectangulum æquale sub A G, G E, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. huius lib. Et quia A E, plus potest, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: c erunt rectæ A G, G E, longitudine commensurabiles; d Ac propterea & vtraque toti A E, longi-

c 18. decimi.

d 16. decimi.

longitudine commensurabilis erit: Est autem A E, Rationali A B, longitudine commensurabilis. *a* Igitur & vtraq; A G, G E, ipsi A B, longitudine est commensurabilis; atque ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis G H, E I, ipsi A B, parallelis, quæ ipsi B C, productæ occurrant in H I, *b* erit vtrumque rectangulum A H, G I, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraque D F, F E, longitudine commensurabilis est ipsi D E; & D E, longitudine incommensurabilis est Rationali A B; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cùm & A E, sit eidem A B, longitudine cõmensurabilis; *c* essent A E, D E, longitudine quoq; commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solùm potentia commensurabiles;) *d* erit etiam vtraq; ipsarum D E, F E, ipsi A B, longitudine incommensurabilis. Et quoniã vtraq; D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quare ducta F K, ipsi A B, parallela, *e* erit vtrumque rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Medium.



a 12. decimi.

b 20. decimi.

c 12. decimi.

d 14. decimi.

e 22. decimi.

IAM verò ipsi A H, *f* fiat quadratum æquale L M, & ipsi G I, æquale fiat quadratum N O, communem habens cum L M, angulum L P M. *g* Erunt igitur quadrata L M, N O, circa eandem diametrum, quæ sit P Q. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum sub A G, G E, per constructionem, æquale est quadrato ex F E, *h* erunt tres rectæ A G, F E, G E, proportionales; *i* Ac propterea cùm A H, F I, G I, eandem cum ipsis habeant rationem; erit F I, medium proportionale inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, N O, illis æqualia. Est autem inter eadem L M, N O, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale L O. Igitur rectangula F I, L O, æqualia sunt: *k* Sed ipsi F I, æquale est D K, & ipsi L O, æquale est M N. Est ergo totum D I, toti gnomoni V Y X, cum quadrato N O, æquale. Est autem & totum A I, per constructionem, æquale quadratis L M, N O. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato T R, est æquale; Ac propterea recta T S, potest spatium A C. Dico T S, Apotomen esse.

f 14. secundi.

g 26. sexti.

h 17. sexti.

i 1. sext.

k 36. decimi.

QVONIAM enim spatia A H, G I, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt L M, N O, erunt quoque quadrata L M, N O, Ra-

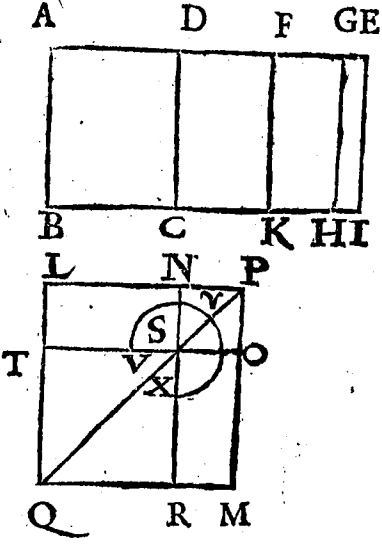
NO, Rationalia, atque adeò & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cùm vnum sit Irrationale, alterum verò Rationale. Igitur rectæ TO, SO, *a* eandem rationem habentes cum LO, NO, *b* longitudine incommensurabiles sunt; *c* Atque idcirco reliqua TS, Apotome est Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. *sext.* b 10. *decimi.* c 74. *decimi.*

XCII. lxxxvij. THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia construantur, vt in propositione præcedenti. *d* Eruntque rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine commensurabiles; *e* Ac propterea & vtraq; toti AE, longitudine commensurabilis. Est autem AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi AB, longitudine, cùm DE, eidem AB, ponatur longitudine commensurabilis; *f* essent AE, DE, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantùm commensurabiles.



d 18. *decimi.* e 16. *decimi.* f 12. *decimi.*

g Igitur & vtraque ipsarum AG, GE, longitudine incommensurabilis est eidem AB. Est autem vtraque AG, GE, Rationali AB, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam AB, AG, quàm AB, GE, potentia solùm commensurabiles; *h* Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Medium est. Rursus quia vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est; &

g 14. *decimi.* h 22. *decimi.*

est; & ponitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoque vt in scholio propositionis 12. huius lib. ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis vtraque D F, F E; atque adeò & Rationalis. *a* Vtrumque ergo rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam.

a 20. *de cimi.*

QVONIAM enim A G, G E, longitudine sunt commensurabiles, *b* erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeò & L M, N O, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ T O, S O, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quòd quadrata L M, N O, Mediis A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse) Media sint. Et quoniam F I, atque adeò sibi æquale L O, Rationale est, propterea que Medio N O, incommensurabile; *c* erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantùm commensurabiles. Cùm ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; *d* erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

b 10. *de cimi.*

c 10. *de cimi.*

d 75. *de cimi.*

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

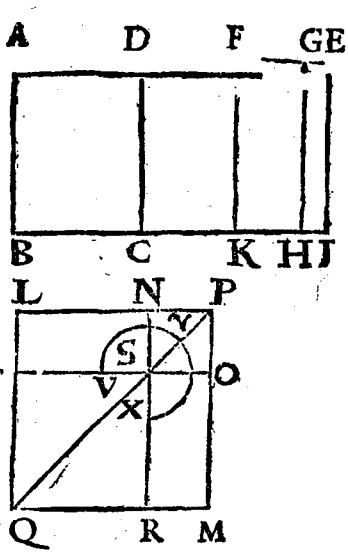
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, A G, G E, longitudine inter se commensurabiles; *e* Ac propterea & vtraque toti A E, longitudine commensurabilis erit. Est autem A E, posita incommensurabilis longitudine Rationali A B. *f* Igitur & vtraque A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cùm ergo vtraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam A B, A G, quàm A B, G E, Rationales potentia solùm commensurabiles;

e 16. *de cimi.*

f 14. *de cimi.*

a 22. decimi.



b 14. decimi.

c 22. decimi.

rabiles; a Ac propterea vtrumq; rectangulum AH, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine potentia incommensurabilis Rationali AB; erit quoq; vtraq; DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis exiſtens, b eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cùm ergo vtraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis ſit Rationalis; erunt tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tantùm commensurabiles; c atq; propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.

d 10. decimi.

QVONIAM enim AH, GI, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas oſtendimus commensurabiles eſſe, d commensurabilia ſunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles ſunt, ſaltem potentia. At verò quia AE, DE, potentia ſolùm ſunt commensurabiles, hoc eſt, longitudine incommensurabiles, eſtq; ipſi AE, longitudine oſtenſa commensurabilis GE, ipſi verò DE, commensurabilis eſt longitudine FE; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. &

e 10. decimi.

GE, FE, longitudine incommensurabiles; e ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, hoc eſt, illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo ſunt TO, SO, potentia ſolùm commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cùm enim LO, æquale ſit ipſi FI, vt conſtat ex propoſ. 92. quod Mediũ eſſe oſtendimus; erit LO, Medium.)

f 76. decimi.

erit TS, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatiũ contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

xciv. lxxxix.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Minorem eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Ra-

DE, Rationales potentia solùm commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. *a* Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; *b* erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis, *c* erit DI, atq; adeò & eius dimidium FI; Medium. Amplius cùm AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; *d* incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam verò similiter demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse minorem.

a 10. de cimi.
b 20. de cimi.
c 22. de cimi.
d 10. de cimi.

QVONIAM enim ex constructione, rectangulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia F, Mediũ est ostensum; erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam AH, GI, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeò rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cùm TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum verò sub ipsis, Medium; *e* erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. de cimi.

THEOR. 72. PROPOS. 96. xcv. xc.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proximè antecedente) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & DE, Rationali AB, cõmensurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo

rursus, vt in antecedenti propos. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali A B, vt in propos. 93. diximus; a erit rectangulum A I, Medium. Item quia D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine commensurabilis; b erit D I, atque idcirco & eius dimidium F I, Rationale. Rursus erunt, vt in præcedenti propos. A H, G I, incommensurabilia; poteritque, vt ostensum est in propos. 92. recta T S, spatium A C. Dico T S, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

a 22. decimi.
b 20. decimi.

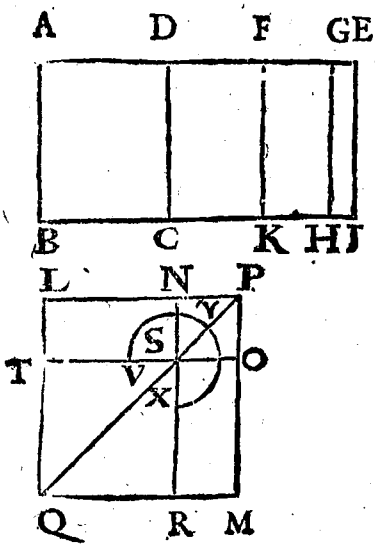
QVONIAM enim ostensum est A I, Medium esse; erit & compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus F I, Rationale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, contentum, cùm illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demonstratum. Igitur cùm T O, S O, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum verò sub ipsis, Rationale; c erit reliqua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

c 78. decimi.

xcvj. xcj.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma sexta A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua construantur, vt suprà. Erunt ergo rursus, vt in propos. 95. A G, G E, longitudine incõmensurabiles. Et quia tam

tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AE, longitudine incommensurabilis; *a* erit tam AI, quam DI, atque adeo huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propos. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; *b* Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commensurabilia sint, *c* erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam vero demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

a 22. *decimi.*
b 10. *decimi.*
c 14. *decimi.*

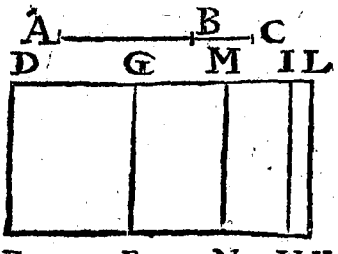
QVONIAM enim AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoq; LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO, propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarũ quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; *d* erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

d 79. *decimi.*

THEOR. 74. PROPOS. 98. xcvij. xciij.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; *e* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primam. Adeandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad EH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totũ DK, æquale sit composito ex quadratis rectarũ AC, BC. *f* Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; si auferantur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam in



e 45. *primi.*
f 7. *secundi.*

riam in M, ductaque M N, ipsi D E, parallela, erit M K, æquale rectangulo sub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales sunt, erunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia; ideoq; commensurabilia. a Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale D K, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, b erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem G F; c erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; d erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; e Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

a 16. decimi.
b 21. decimi.
c 23. decimi.
d 10. decimi.
e 74. decimi.

QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continuæ proportionales; atque adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. f Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia D H, I K, commensurabilia sunt, g erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensque figura quadrata; atque sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; h poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

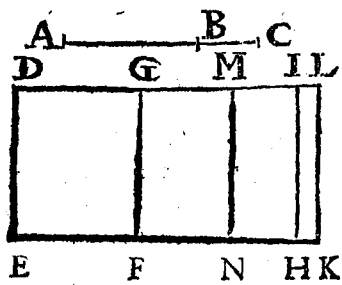
f 17. sexti.
g 10. decimi.
h 18. decimi.

xcviij. xciij. THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, continentque Rationale: *a* Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secundam esse. Constituantur enim eadem, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commensurabilia; *b* ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, *c* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, *d* erit GL, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; *e* erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; *f* Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.

b 16. decimi.

c 23. decimi.

d 21. decimi.

e 10. decimi.

f 74. decimi.

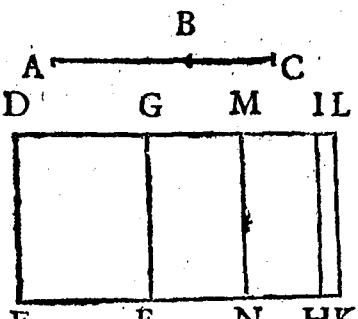
THEOR. 76. PROPOS. 100. XCIX. XCIV.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentq; Medium: *g* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apoto-

g 45. primi.

Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostendemus iam, v
a 23. *decimi.* propos. præcedenti D K, Medium esse, *a* atque adeo rectam
Rationalem ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Er
rectangulum sub A C, B C, Medium est, atque ob id & eius
b 23. *decimi.*



plum G K, *b* erit quoque G L, Ratio
nalis ipsi D E, longitudine incom
mensurabilis. Quia vero A C, B C,
longitudine sunt incommensurabi
les, estque vt A C, ad B C, ita per lem
ma 3. propos. 19. huius lib. quadratum
ex A C, ad rectangulum sub A C, B C,
c 10. *decimi.* *c* erit quadratum ex A C, incommen
surabile rectangulo sub A C, B C, *d* Est
d 16. *decimi.* autem quadrato ex A C, commensu
rabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C; quod qua
drata ex rectis A C, B C, potentia commensurabilibus descripta
commensurabilia sint; rectangulo vero sub A C, B C, commen
surabile est rectangulum bis sub A C, B C. Igitur ex scholio pro
pos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc
est, D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc
e 10. *decimi.* est, ipsi G K. *e* Atque adeo rectæ D L, G L, eandem habentes ratio
nem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt
autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, po
f 74. *decimi.* tentia solum commensurabiles; *f* Ac proinde reliqua D G, Apo
tome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. de
monstrabimus D L, totam plus posse, quam G L, congruentem,
quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo
neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commen
surabilis, vt demonstratum est; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

6. XCV. THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia incommensurabiles sint, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationales; rectangulum vero sub
g 45. *primi.* A C, B C, Medium: *g* & ad Rationalem D E, applicetur spatium D F, quadrato ex A B, æquale latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus.
h 21. *decimi.* Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, Rationale est; *h* erit D L, Rationalis ipsi D E, lon-

DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium est; *a* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium incommensurabilia sunt; *b* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles; *c* Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; *d* Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; *e* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. decimi.
b 10. decimi.
c 74. decimi.
d 10. decimi.
e 19. decimi.

THEOR. 78. PROPOS. 102. CI. XCVI.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: *f* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur enim eadem, quæ supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale DK, Medium est; *g* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum GK, Rationale est; *h* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt: *i* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensura-

f 45. primi.
g 23. decimi.
h 21. decimi.
i 10. decimi.

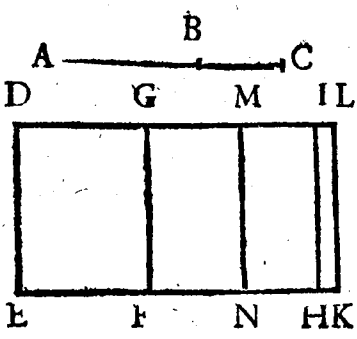
mensura-

mensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo
a 74. decimi. go sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; a Atque circo reliqua D G, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrabimus D L, tam plus posse quam G L, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens G L, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

xcvij. QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C, Medium, incommen-
b 45. primi. surabileque composito ex quadratis ipsarum. b Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato, ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciés D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quam rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; c Erit tam
c 23. decimi. D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C. Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum G K, commen-
d 14. decimi. surabilia; d Erit & G K, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incom-
e 10. decimi. mensurabile; e propterea q; rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, po-
f 74. decimi. tentia solum commensurabiles; f Atq; idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter vt propos. 101. totam D L, plus posse, quam congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit longitudine Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

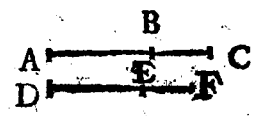


THEOR.

THEOR. 80. PROPOS. 104. ciij. xcviij.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, longitudine commensurabilis D E. Dico & D E, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi A B; *a* Fiat enim vt A B, ad D E, ita B C, ad E F, *b* Erit ergo tota A C, ad totam D F, vt A B, ad D E, vel vt B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, longitudine ponuntur commensurabiles; *c* Erunt quoque A C, D F, nec non & B C, E F, commensurabiles longitudine. Et quia A C, B C, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles D F, E F, Rationales. Rursus quia est, vt A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt A C, ad B C, ita D F, ad E F; & sunt A C, B C, potentia solum commensurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, D F, E F, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, *d* reliqua D E, Apotome est. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Possit enim primum A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, *e* poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt A B, sit Apotome prima; *f* erit quoque D E, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam D F, eidem A C, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque D E, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi A B. Si vero B C, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque A B, D E, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum A C, B C, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; *g* erit quoque neutra ipsarum D F, E F, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque A B, D E, ex defin. erit Apotome tertia.



a 12. *sexti.*
b 12. *quinti.*
c 10. *decimi.*
d 74. *decimi.*
e 15. *decimi.*
f 12. *decimi.*
g 14. *decimi.*

POSSIT iam A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, *h* poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus D E, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

h 15. *decimi.*

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de linea

lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta D E, commen-
surabilis sit ipsi A B, potentia tantum, eodem modo demonstrari po-
(si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potenti
tantum commensurabilis) & D E, Apotomen esse: At non posse
ferri, illam esse ordine eandem ipsi A B. Non enim sequitur, si tot
A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & D F, e
dem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraq
nempe Rationalis expositæ, & D F, eidem A C, longitudine commen
surabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudin
At vero D F, potentia tantum ex hypothesi. Imò vero; si A B, sit Ap
tome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest,
vt D E, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem
ordine.

SIT enim A B, prima Apotome, secunda, quarta vel quinta, et
que congruens B C, & sit D E, ipsi A B, potentia tantum commensura
bilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, et
que congruentem E F, & partes A B, B C, ad partes D E, E F, eandem
proportionem habere cum totis A C, D F. Dico nulla ratione D E,
Apotomen esse ordine eandem ipsi A B. Nam si fieri potest, sit vtraque
Apotome prima. Quo posito, erit tam A C, tota, quam tota D F, ex
definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis lon-
a 12. decimi. gitudine: a atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt
A C, & D F. Quare cum sit vt A C, ad D F, ita A B, ad D E; b erunt
b 10. decimi. quoque A B, & D E, longitudine commensurabiles. Quod est absur-
dum. ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solum commensurabilis.
Non ergo vtraque A B, D E, Apotome prima est. Eodem modo neque
quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtra-
que congruens B C, E F, ex defin. longitudine commensurabilis Ratio-
nali expositæ, atque adeo & ipsæ inter se. Quocirca & A B, D E, inter
se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si A B, est Apotome prima, vel se-
cunda, vel tertia, rectam D E, qua ipsi A B, potentia solum est com-
mensurabilis, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem
sit. Nam hoc posito, poterit A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi
longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt A C, ad B C, ita D E,
c 15. decimi. ad E F, c poterit quoque D F, plus quam E F, quadrato rectæ longitu-
dine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, Apotome prima,
vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, est Apotome quarta, vel
quinta, vel sexta, ita vt A C, plus possit, quam B C, quadrato rectæ sibi
longitudine incommensurabilis; erit quoque D E, Apotome quarta,
vel quinta, vel sexta, quamuis ordine non eadem ipsi A B: quia rur-
d 15. sus, cum sit vt A C, ad B C, ita D E, ad E F, d poterit quoque D F,
decimi. plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis.
Quare ex defin. erit A B, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.

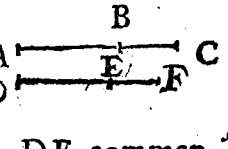
IN

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. CIV. & CIX.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen esse, & ipsi AB, ordine eandem. *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, *d* erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ, *e* erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniam enim est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles; *f* erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; *g* atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. *b* Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.



a 12. *sexti.*
b 12. *quinti.*
c 10. *decimi.*
d 24. *decimi.*
e 75. *vel* 76. *dec.*
f 10. *decimi.*
g 75. *decimi.*
h 76. *decimi.*

ev.cxvj c. THEOR. 82. PROPOS. 106.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Minorem esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; a erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratũ ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. b Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium: Erit quoque rectangulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, sintque AC, BC, potentia incommensurabiles; c erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub iisdem DF, EF, Medium; d erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. sexti.

b 10. decimi.

c 10. sexti.

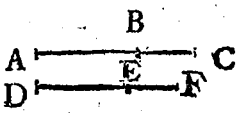
d 77. decimi.

cvj. cxvij. cj. THEOR. 83. PROPOS. 107.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT

SIT recta A B, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; at rectangulum sub A C, B C, Rationale: Sit autem D E, ipsi A B, commensurabilis quocunque modo. Dico & D E, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse compositio ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex definitione 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectæ D F, E F, potentia incommensurabiles. Igitur cum D F, E F, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; a erit D E, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



a 78. *decimi.*

THEOR. 84. PROPOS. 108. cvij. cij.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoq; & adhuc incommensurabile compositio ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomodolibet commensurabilis. Dico & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse compositio ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles. Postremo quia compositio ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile est compositū ex quadratis rectarum D F, E F, vt dictum est; & rectangulo sub A C, B C, commensurabile rectangulum sub D F, E F; Sunt autem compositum

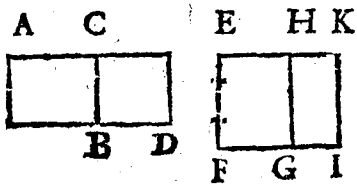
ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex schol. propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; a erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Rectangulum igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

a 79. decimi.

cviij. THEOR. 85. PROPOS. 109.

ciij. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, b ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est; c erit EK, Rationali EF, longitudine commensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est, d erit HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque cum EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis, e erunt EK, HK, lõgitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; f propterea quæ reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota EK, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc est, spatium AB, sibi æquale, g Apotome est. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota EK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc



b 45. primi.
c 21. decimi.
d 23. decimi.
e 13. decimi.
f 74. decimi.
g 92. decimi.

EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *a* Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat. a 95. *decimi.*

THEOR. 86. PROPOS. 110. CIX. CIV.

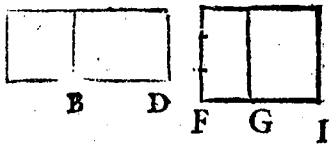
RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim constituantur, quæ supra. Et quia EI, Medio AD, æquale, Medium est; *b* erit EK, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale est; *c* erit HK, Rationalis ipsi EF, longitudine commensurabilis. Itaque cum HK, quidem ipsi EF, sit commensurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommensurabilis; *d* erunt HK, EK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles; *e* Accipiendo reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quã HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *f* Mediæ est Apotome prima. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc est, spatium illi æquale AB, *g* est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quam ob rem Rationali à Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat. b 23. *decimi.* c 21. *decimi.* d 13. *decimi.* e 74. *decimi.* f 93. *decimi.* g 96. *decimi.*

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX. CV.

MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR à Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spa-



tium A B, poteſt, eſſe vel Mediæ
potomen ſecundam, vel eam, q
cum Medio Medium totum eſſ
Conſtructis enim iiſdem quæ ſup
quoniam E I, H I, Mediis A D, C
æqualia Media ſunt, a erunt E K,
a 13. decimi. H K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Et quia
b 10. decimi. A D, C D, hoc eſt, E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; b erunt
E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine in
commenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt po
c 74. decimi. tentia tantum commenſurabiles; c Ac propterea reliqua E H, Ap
potome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quam
H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut no
commenſurabilis. Si plus poteſt E K, quam H K, quadrato rectæ
ſibi longitudine commenſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K,
Rationali E F, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit E
defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G,
contentum ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc eſt, ſpa
d 94. decimi. tium A B, illi æquale; d Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si vero E K,
plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incom
menſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, ſit lon
gitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin.
E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium E G,
contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpa
e 97. decimi. tium A B, illi æquale, e eſt ea, quæ cum Medio Mediũ totum efficit.
Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

cxj. cvj.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita autem Rationali B C, f applicetur ad B C, re
f 45. primi. ctangulum C D, æquale quadrato ex A. Quoniam
g 98. decimi. igitur A, Apotome eſt; g erit latitudo B D, Apoto
me prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur
ex defin. Apotomæ primæ B E, D E, Rationales
potentia tantum commenſurabiles, poterit q: B E,
plus quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſura
bilis, & ipſa B E, Rationali B C, commenſurabilis erit longitudi
h 61. decimi. ne. Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus; h erit
latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo malus
ipſius nomen B F. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nomi
nibus

nibus prima est, B F, F D, Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine sit commensurabilis eidem B C; *a* erunt quoque B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, sit longitudine commensurabilis parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B F, longitudine incommensurabilis est ipsi D E; (quod B E, D E, Rationales sint potentia solum commensurabiles) *b* erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua F D, *c* Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

a 12. decimi.

b 14. decimi.

c 74. decimi.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, *d* latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

d 23. decimi.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, *e* latitudinem efficit Apotomen primam.

e 98. decimi.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, *f* latitudinem efficit Apotomen secundam.

f 99. decimi.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, *g* latitudinem efficit Apotomen tertiam.

g 110. decimi.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem efficit Apotomen quartam.

h 101. decimi.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem efficit Apotomen quintam.

i 102. decimi.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Media Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *k* latitudinem efficit Apotomen sextam.

k 103. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur,

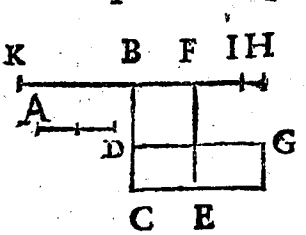
ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ac ſextam; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quam obrem cum & tam illæ, quam hæ à Media differant; efficitur, Rationali quadam expoſita, tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

exij. o.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



ã 45. primi.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F, Dico B F, eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus B D, D C, ipſius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, eſſe ordine eandem ipſi B C, ex binis

binis nominibus. *a* Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A, atq; adeò rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt B E, C G; *b* erit vt B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D, ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D, maior quàm D C. Igitur & I F, maior est quàm F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; *c* & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. Ostensum est autem esse vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles. *d* Igitur & F K, B K, potentia solùm commensurabiles sunt.

a 45. *primi.*
b 14. *vel* 16. *sexti.*
c 12. *sexti.*
d 10. *decimi.*

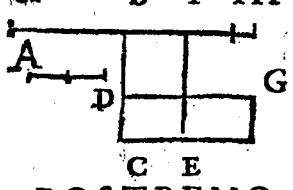
RVRSVS quia est vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, *e* erunt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, vt F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia verò C G, cùm Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem D C, applicatum *f* facit D G, latitudinem Rationalem ipsi D C, longitudine commensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K, ad F K. *g* Igitur vt quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, commensurabile est quadrato ex D C, (quòd rectæ B D, D C, sint Rationales potentia commensurabiles, cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) *b* Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K, ad quadratum ex F K; ita recta H K, ad B K. *i* Igitur longitudine commensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeò & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis. Igitur & H K, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & B K, ipsi H K, commensurabilis, Rationalis existit. Cùm ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solùm commensurabilis, erit quoque F K, Rationalis. Quare cùm F K, B K, Rationales sint, & potentia tantùm ostensæ commensurabiles, *k* erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.

e 12. *quinti.*
f 21. *decimi.*
g 22. *sexti.*
h 10. *decimi.*
i 10. *decimi.*
k 74. *decimi.*

QVONIAM verò ostensum est esse rectam H K, totam parti B K, longitudine commensurabilem, *l* erunt propterea & l 16. *decimi.*

B K, B H, longitudine inter se commensurabiles. Cùm ergo B H, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi D C; erit quoq; B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando vt B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modo D C, B K, ostensæ longitudine commensurabiles;

a 10. decimi. a Erunt quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque cùm F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



ITEM quia demonstrauimus esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadem ratione cum B D, D C, nominib. ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO vel B D, plus potest, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest B D, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine com-

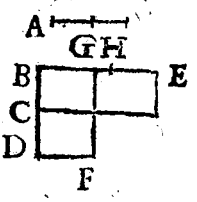
b 15. decimi. mensurabilis; cùm sit vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; b poterit quoq; F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus potest quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si verò D C, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra

c 14. decimi. ipsarũ B D, D C, sit Rationali longitudine cõmensurabilis; c erit quoq; neutra ipsarum F K, B K, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertijs. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

cxiij. o. QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinẽ facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinẽ, quem ipsa Apotome.

SIT Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, *a* & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc ipsam B E, ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomæ ordine eandē. *b* Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale, eidem quadrato ex A, h.e. ipsi C E, latitudinem faciens B G. Et quoniam B F, C B, æqualia sunt; *c* erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoq; E G, ad H, secundum proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoq; B H, reliqua ipsius B E, ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoq; vt B H, ad H E, ita E H, ad G H; atq; adeò H E, media proportionalis est inter B G, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia verò fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cùm sint nomina Apotomæ B C, Rationales potētia tantùm commensurabiles. *d* Erunt quoq; B H, H E, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandē habentes rationem cum quadratis ex B H, H E, vt demonstrauimus, e longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoq; longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. *16.* huius lib. At verò cùm B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; *f* erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeò Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia verò B H, H E, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantùm, & B H, Rationalis; erit quoq; H E, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solùm commensurabiles: *g* Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.



a 45. primi.

b 45. primi.

c 14. vel 16. sexti.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 21. dec.

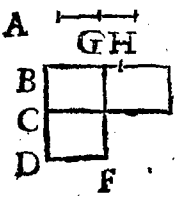
g 37. decimi.

QVONIAM verò ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D, atq; adeò permutando B H, ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; *h* erit quoque

h 10. decimi.

que HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod est secundum.

IMMO & in eadem proportione, cùm demonstratum sit esse BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod est tertium.



POSTREMO vel BD, plus potest quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. *Si* plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, *a* poterit quoque BH, plus quàm HE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Et si BD, plus potest, quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quàm HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. *Si* verò CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si verò neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; *b* erit quoque neutra ipsarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 15. decimi.

b 14. decimi.

1

THEOR. 91. PROPOS. 115.

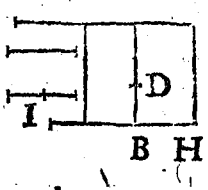
SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ; & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATVR spatium AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Possit autem recta F, spatium AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, *c* applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato

c 45. primi.

CX.

ex G. a Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B, & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, vt C D, ad D B; atq; adeò vt C E, ad A E, & permutando, vt tota H I, ad totam C E, ita ablata B I, ad ablatam A E, b Erit ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, vt tota H I, ad totam C E; c Commensurabilis autem est longitudine H I, ipsi C E, quòd vtraque H I, C E, commensurabilis fuerit longitudine ipsi C D. d Igitur & B H, ipsi A C, longitudine est commensurabilis; e Atque idcirco & H C, ipsi B A, commensurabile erit, f cùm sit vt H B, ad A C, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale Rationale est. Igitur & B A, illi commensurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipsum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.



a 113. *de cimi.*
b 19. *quinti.*
c 12. *de cimi.*
d 10. *de cimi.*
e 10. *de cimi.*
f 1. *sext.*

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub A C, C E, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

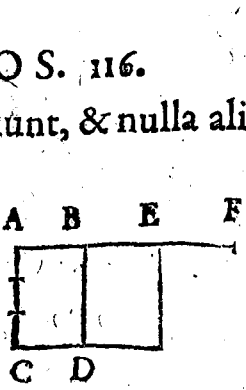
IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotoma nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori verò, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina C D, D B, nominibus C E, A E, potentia tantùm commensurabilia ponantur. Id quod facilè ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

ex v. cvij.

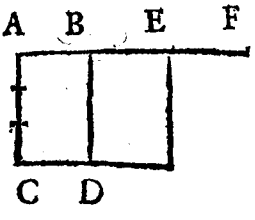
A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Expositâ enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatiũ A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum,



tentum, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſſit ipſum recta B E, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico B E, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. huius lib. collegimus. Nam cùm quadratum Mediæ ad Rationalem A C, a applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipſi A C, longitudine incommenſurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſtat ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66 98 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At verò quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

a 23. de comm.



QVOD ſi compleatur rectangulum B D, & erit & hoc contentum ſub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propoſ. 38. Poſſit ergo ipſum recta E F, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus E F, non eſſe eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi B E. Hoc autem manifeſtum eſt, cùm quadratum ipſius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius B E, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes à B E, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

cxviij. vij.

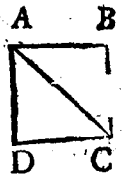
THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri A B. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; b ac propterea A C, A B, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G; ſintque numeri E F, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt A C, ad A B, ita numerus E F, ad numerum G, Erit quoq; vt quadratum

b 5. dec.

dratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G. *a* (Cùm enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cùm sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cùm dimidium habeat, atq; adeò bifariam possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cùm seipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; *b* cò quòd impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia verò EF, & G, in sua proportione minimi, *c* inter se primi sunt; & EF, ostensus est par; erit G, impar. (Si enim par esset, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeò non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH, *d* & quadrati habent proportionem latetum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cùm quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cùm illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt suprà de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.



a 20. sext. & 11. octaui.

b 29. noni.

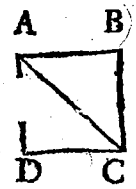
c 24. septimi.

d 11. octaui.

ALITER. Sit si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeò inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cùm enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeò & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex FF, duplus

duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex EF, a ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cùm ergo & G, seipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudine lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

a 14.o-ctaui.



SCHOLIVM.

SED & affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. b *solùm tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnà intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solùm hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui verò 2. 8. 32. non quadrati. Quare cùm 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum (*c *aliàs & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* d *Incommensurabilis ergo est diameter longitudini ipsi lateri. Quod est propositum.*

b 10.nouni.

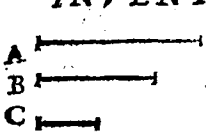
c 24.octaui.

d 9. decimi.

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem definit. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CÆTERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometricis libris pendet, vt meritò omitti posset. Verùm quia in ea continentur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometria, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hac.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & aliæ quàm plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ AC, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad C, ita est figura rectilinea quauis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem,



milem, similiterq; positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; a erunt rectilinea illa figura super A, & B, incommensurabiles. a 10. decimi.

RVRSVS b quoniam circuli; quorum diametri A, B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B, descripta: Quadrata autem hæc, cùm sint figura rectilineæ similes, similiterq; positæ, proportionem habent, quam recta A, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. c Habebunt quoque circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam recta A, C. Sed recta A, C, incommensurabiles sunt longitudine. d Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. b 2. duo decimi. c 11. quinti. d 10. decimi.

IAM verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, B, e habebunt pyramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cùm rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, vt modò est demonstratum; f incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata. e 5. 6. vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

QVOD si coni, vel cylindri æquè alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, g habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cùm ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, h Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solùm linea, & superficies incommensurabiles, verùm etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum. g 11. duodecimi. h 10. decimi.

EADEM autem ratione, si recta A, & B, longitudine commensurabiles sint, i ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, nec non & ipsarum circulos, commensurabiles esse, k atque adeò & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modò eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est. i 10. decimi. k 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus seu libris abundè de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibique nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus verò libris diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissimè in libro decimo deinde exposuit, & constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissimè disseritur, perfectiùs posset cognosci. Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, propriòque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam verò secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinémve, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantùm habens, linea; quæ verò longitudini latitudinem adijcit, superficies vocatur, &c.

POR
in prim[illegible]us.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hac enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quòd punctum omnis est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hac enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum verò propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quòd & linea illius sit expers: Ita quoq; vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consulunt, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum verò seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hac ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neq; verò alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quòd triplex tantùm dimensio possit assignari, vt perspicuè in commentarijs, quos in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.

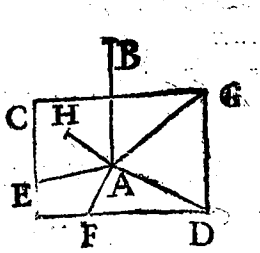
II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

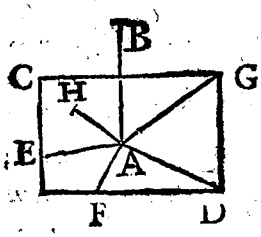
QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies verò lineas recipit, vt in I. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cùm enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

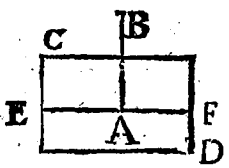


VT linea recta A B, plano C D, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum C D, cùm rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes plano ipsam tangũt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in vnam partem, quàm in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cùm angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque dem-



deinceps B A H, rectus, ideoque illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano C D, faciet A B, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, vt A B, cum vna linea ex A, in plano C D, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt rectè concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

VT autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis; ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuò secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc rectè colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnã: quia si duæ lineæ componant vnam rectã lineam, non necessariò efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim A B,



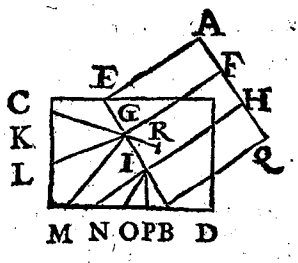
insistat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam vnam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos constituere; atque idcirco non esse rectam ad planum C D. Hoc autem perspicuum est, cùm A B, circa E F, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominùs tamen ipsa cum E F, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem A B, cum duabus angulum componentibus, quales sunt A C, A D, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod diluciùs demonstrabitur propos. 4. huius lib.

IV.

PLANVM ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

INSISTAT planum A B, plano C D, ita vt linea A Q, sit in

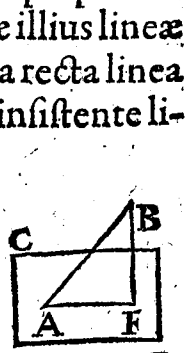
sublimi, hoc est, extra planum subiectum CD, at E B, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB, qua, & demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quàm in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cùm angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoq; illi æqualis. Eadem quoque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contrà, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.



V.

RECTÆ lineæ ad planum inclinatio est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum verò A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi recta AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritq; necessariò angulus EAE, acutus, a cùm in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ



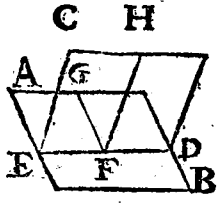
a 17. primi.

AE, ad dictum planum CD; Ita & tanta dicatur esse inclinatio li-
nea AB, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus BAE.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO namq; AB, insistat planum CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum CFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtususve: quanquam propriè solùm angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potiùs aquabilem eleuationem vnius plani supra alium, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus verò recessum quodammodo vnius ab altero. Verùntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit à pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cùm dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atq; adeò à recto magis recesserit.

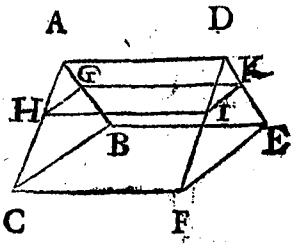
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTEL-

INTELLIGE, *in quamcunq; partem, etiam infinitè, produ-*
cantur: hoc est, siue ad dextram, siue ad sinistram: & siue sursum, si-
ue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec
ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt di-
cenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem
coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur
abscissum, remanentia duo plana nō conuenient, quamuis producan-
tur infinitè ad dextram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum pro-
tensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT *enim tectum quodpiam* ABCDEF, *contentum duobus*
planis ABED, ACFD, *cuius basis* BCFE, *auferatur q3 fastigium*
AGHDKI. *Quo facto, perspicuum est, re-*
liqua plana GBEK, HCFI, *non conueni-*
re inter se, si ad partes GB, HC, *vel ad par-*
tes KE, IF, *producantur; nec tamen idcirco*
parallela dicentur, cùm producta ad partes
GH, KI, *conueniant in fastigio* AD. *Vt igi-*
tur plana aliqua dicantur parallela, ne-
cesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut au-
tem linea in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produ-
ci possunt, nempe ad sinistram, & ad dextram: ita duo plana in qua-
tuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum,
sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quacunq;, vel sunt parallela,
vel ad aliquam partem producta coeunt; linea verò recta, vel sunt pa-
rallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, si nimirum in
eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallela, neq; vnquam
conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum po-
sita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. *lib. additum*
fuit: quæ cùm in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ
nunquam conueniunt.



IX.

SIMILES *solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis*
continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET *Euclides similes figuras solidas definire per an-*
gulos æquales, & proportionalitatem laterū circa æquales angulos, vt
fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudica-
uit, vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine aqua-
libus describeret; præsertim quòd ex similitudine planorum statim
consequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11. *pate-*
bit, cùm illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitu-
dine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales,
propter planorum similitudinem.

X.

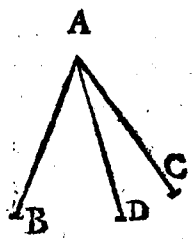
ÆQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur: eiusmodi figura solida non solùm similes, verùm etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuò huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem verò æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuò congruent: ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quàm duarum linearum, quæ se mutuò contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVÆ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum incidentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus B A C, contentus duabus lineis A B, A C, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea A D, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet angulí quantitas variaretur. Dixit autem Euclides lineas angulum solidum constituentes nõ debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ A B, A C, A D, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis B A D, D A C, compositus. Quod si A D, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt A B, A C, iam non componetur angulus planus totus ex B A D, D A C, immò circa punctum A, tres plani consistent anguli B A D, D A C, C A B, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.



ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

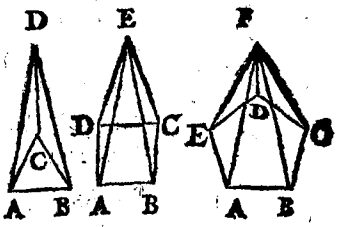
Si ABC

HÆC definitio secunda anguli solidi facilis est, praecedenti rectè intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, & vt angulus solidus efficiatur, & ex superiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano est, in quo rectæ AB, AD, & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque verò satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Habit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porrò solidi exemplum clarissimum nobis prabent duo parietes cum pauimento domus, vel laquear, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanere que tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his verò perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera verò curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.



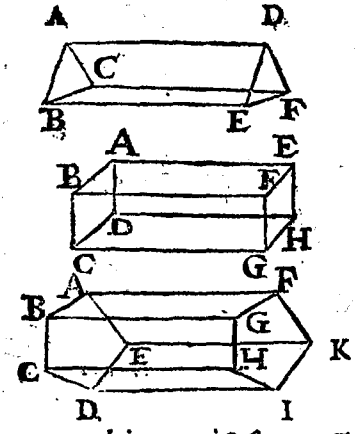
VIDELICET figura solida à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel

triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, prater basin, triangula sunt A B D, A C D, B C D: Quadrangula vero A B E, A D E, B C E, C D E: Pentagona denique A B F, A E F, B C F, C D F, E D F.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ scilicet solida, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula A B C, D E F: vel quadrangula A B C D, E F G H: vel pentagona A B C D E, F G H I K, &c. Parallelogramma vero A C F D, A B E D, C B E F: vel A B F E, A D H E, C D H G, C B F G: vel A B G E, A E K F, D E K I, D C H I, B C H G; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quam columna quadam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figura indicant.



EX his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurima demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem forte hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. septima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositæ

oppositorum, eo quod tali prismati solum demonstratio illa conuenit. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Imò in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismatea omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

SPHÆRA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHÆRA est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de Vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosum est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

AXIS

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

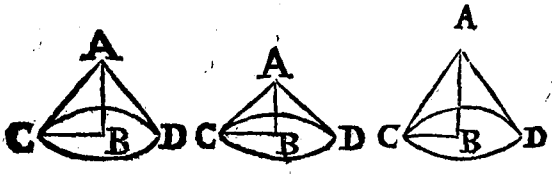
HÆ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circa eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumducto triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC, circa latus quiescens AB, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quædam figura, qua continetur duabus superficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus propè verticem A, rectus est. Cum enim latera

latera AB, BC, ponantur aequalia; a erunt & anguli BAC, BCA, aequales, qui cum aquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus est, erit angulus BAC, semirectus. Eodemq; modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; b erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo aquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circumducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC, c erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto aquiualeant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

a 5. primi.

b 18. primi.

c 18. primi.

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergaeo adducere generalem coni descriptionem, qua & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, qua Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto,

puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cæpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

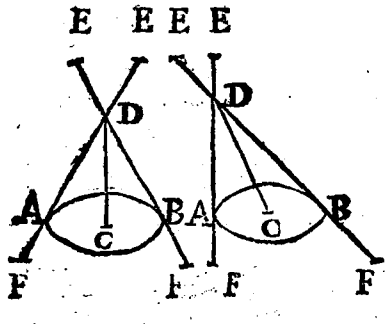
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentariis, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaque D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur eousque in circuli A B, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, à quo cæpit moueri: describit superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C.



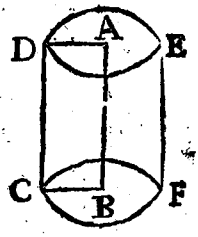
Conum vero appellat figuram contentam circulo A B, & ea superficie, quam D B, sola describit. Coni verticem punctum D. Axem D C. Basim A B.

sim AB, circulum. Quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

XXI.

CYLINDRVS est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumassumpta figura.

VELVTI si rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quiescens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, qua quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, describunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositis descripti. EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theorematæ, ex aliis Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quã Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt completur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad finitum primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos

ex ea-

ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum lo
cum restituatur, à quo moueri cæpit: Superficies, qua
circumlata recta linea describitur, cylindrica superficie
vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, li
nea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistan
tibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta con
tinetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

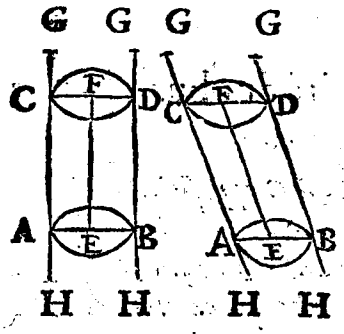
AXIS, recta linea, quæ per circulorũ centra ducitur

LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, &
in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit;
quam & circumlatam, cylindri superficiem describere
antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui
axem habent ad rectos angulos existentẽ ipsis basibus;

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exi
stentem ipsis basibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque AB, CD: iunctaque recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G,



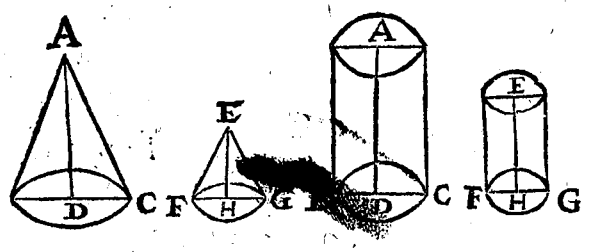
H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorũ semper æquidistantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cæperunt; describetur à linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos ABCD. Axem, rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

XXIV.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, &
basium diametri proportionales sunt.

RECTE

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni A B C, E F G; Item duo cylindri; in conis autem axes A D, E H, & basium diametri B C, F G; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis A D, ad axem E H, ita B C, diameter basis ad F G, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula A D B, E H F, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, nec non rectangula A B, E F, quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt A D, ad E H, ita B C, ad F G; Sit autem vt B C, ad F G, a ita dimidia B D, ad dimidiam F H: erit quoque vt A D, ad E H, ita D B, ad H F: & permutãdo vt A D, ad D B, ita E H, ad H F. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erunt: Triangula quidem, b propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt; c ideoq; latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, d eo quod reliqua duo latera duobus lateribus A D, D B, sunt æqualia, oppositis oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



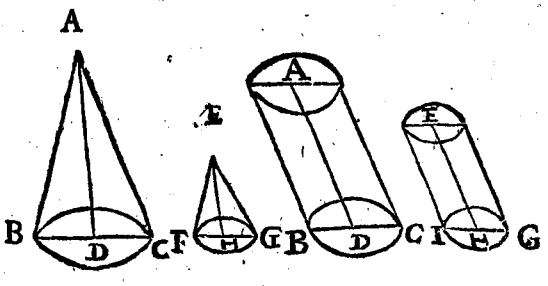
a 15. quinti.

b 6. sex.

c 5. sex.

d 34. primi.

QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri A B C, E F G: In conis autem axes sint A D, E H, & basium diametri B C, F G; similiter & in



cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintque anguli inclinationum ADB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni inter se, & cylindri quoq; inter se similes; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Eadem enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponuntur æquales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆC sunt quinq; corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. At nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia à philosophis nuncupantur, nempe Cælum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autem propos. 17. Icosaedri denicq; propos. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt vera eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen propriis in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet fa-

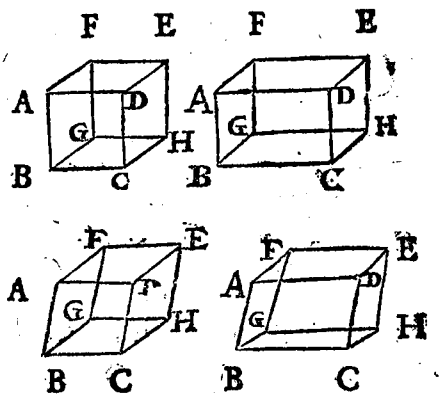
ter secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque verò aliud corpus regulare prater quinque illa dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt contenta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum opposita AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallela, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur prop. 24. huius. lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint aquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitque quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia aquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint aquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, aquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia aquilatera, quamuis duo sint rectangula, & aquilatera, vel rectangula tantum, vel aquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi,

quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

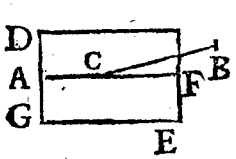
NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

VERVM duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibuſque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

I. THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTÆ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

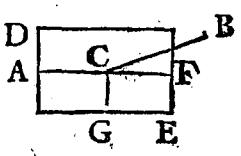
SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari

DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, qua ex aequali suas interiacet lineas, hoc est, qua rectè, & aequaliter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F; erit CF, recta recta AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometricè, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quae cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat AB, esse quoque rectam, eiusque partem AC, in plano DE, partem verò CB, in sublimi esse positam. a Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione; b erunt AC, & FC, in directum & continuum posita. Quamobrem etiamsi quis contendat AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quae cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeo duae rectae AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.



a 11. pri.

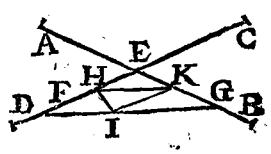
b 14. primi.

HINC fit omnes partes cuiusuis rectae lineae, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duae rectae lineae se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

RECTAE lineae AB, CD, se mutuo secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quaedam, nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quaedam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra; Existent quoq; rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra; quod fieri non posse, iam supra c demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in



c 11. vndecimi.

FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Et denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur eſſe plano, pars vero EHK, in ſublimi, vel contra; erunt quæque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in ſublimi, vel contra. Quæ omnia abſurda ſunt, a vt eſt demonſtratum. Quare triangulum EFG, in vno plano exiſtit; eademque eſt ratio in omni alio triangulo.

a 1. Vndecimi.

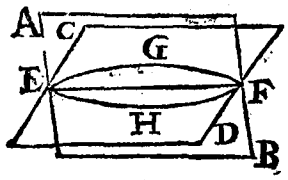
QVIA vero, in quo plano eſt triangulum EFG, in eodem exiſtunt eius latera EF, EG: In quo autem ſunt rectæ EF, EG, b in eodem ſunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, conſiſtere demonſtrauimus Quocirca ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atq; triangulum omne in vno eſt plano. Quod erat demonſtrandum.

b 1. Vndecimi.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.

SECENT ſe mutuo plana AB, CD, ſitque communis eorum ſectio EF. Dico EF, eſſe lineam rectam. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eoſdem habeant terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, vt in 14. pronunciato 1. lib. oſtendimus. Communis ergo ſectio EF, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat oſtendendum.



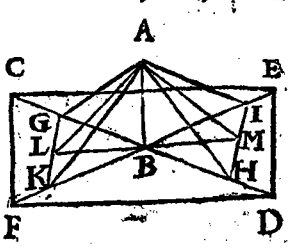
ALITER. Secent ſe rurſus plana AB, CD, ſintque termini ſectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroq; plano exiſtit, conſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rurſus duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem, cum eoſdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano eſſe credatur, tunc ſi in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum ſectio eſt.

iv. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, in

bus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; *a* erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; *b* & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales. *c* Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.



a 2. *Undecimi.*

b 15. *primi.*

c 4. *pri.*

RVRSVS *d* cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. *e* Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

d 15. *primi.*

e 26. *primi.*

PRÆTEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, *f* erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

f 4. *pri.*

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; *g* erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

g 8. *pri.*

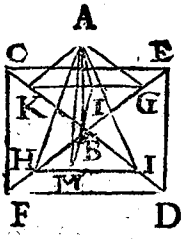
ITA QVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; *h* erunt quoque bases AL, AM, æquales.

h 4. *pri.*

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; *i* erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erũt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq;



i 8. *pri.*



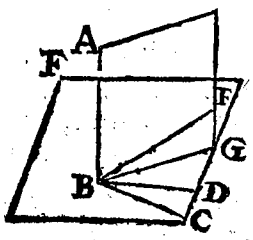
ratione ostendetur, rectam A B, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta, G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ G I, K H, iungantur: vel certe literæ disponantur, prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen L M, non ducitur à siniſtra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta A B, plano C E D F, quod per rectas C D, E F, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in vno plano esse.

a 2. 11. decimi. a Cum enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B, sint B C, B D, in plano F C; Et si fieri potest, recta B E, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. b Quoniã vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B, sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E, sibi mutuo occurrunt in B,



b 2. 11. decimi.

c 3. 11. decimi. necessario producta se mutuo secabunt. c Sit ergo eorum communis sectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D; d erit propterea & plano F C, per ipsas ductæ ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit recta B G, quæ ipsam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, B E, ductæ æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in vno plano F C, existentibus, non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

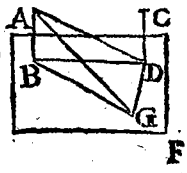
d 4. 11. decimi.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint anguli; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturque æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B D, trianguli B A D, æqualia sunt lateribus G D, D B, trianguli G D B, ex constructione; & anguli quoq; ipsis contenti A B D, G D B; æquales, nempe recti; *a* erunt bases æquales A D, G B. Rursus quia latera A B, B G, trianguli A B G, æqualia sunt lateribus G D, D A, trianguli G D A. Est autem & basis communis A G, *b* erunt anguli A B G, G D A, æquales: Est autem A B G, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & G D A, rectus erit. Quoniam verò ex eadem defin. D A, D C, ad angulos rectos. *c* Quare rectæ D B, D A, D C, in vno erunt plano, hoc est, C D, erit in plano per rectas D B, D A, ducto: *d* Est autem A B, in eodem plano, in quo D B, D A. Recta igitur C D, in eodem erit cum A B, plano. Quocirca cùm anguli interni A B D, C D B, sint recti; *e* erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

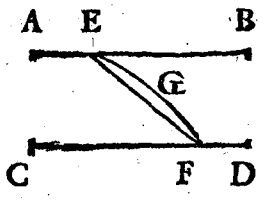


a 4. primi.
b 8. primi.
c 5. vndecimi.
d 2. vndecimi.
e 28 primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraq; sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis A B, C D, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur E F. Dico rectam E F, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarũ, sunt parallelæ A B, C D. Si enim recta E F, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra; secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum E G F, *f* quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ E F, E G F, cùm habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum A B, C D, erit recta E F. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



f 3. vndecimi.

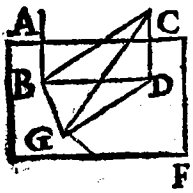
SCHOLIVM.

HÆC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD parallelæ non sint, dummodò in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

viij. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: *a* Sunt autē duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturq; æquales BG, CD. Coniungantur deindę rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione; & anguli quoq; ipsis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti; *b* Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & basis est communis CH; *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuò secantibus in B, (si namq; producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existēt; *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; *e* propterea quòd rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cùm puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cùm AB, recta sit ad rectas BG, BD; *f* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat ostendendum.



a 29. primi.

b 4. primi.

c 8. primi.

d 4. vndecimi.

e 7. vndecimi.

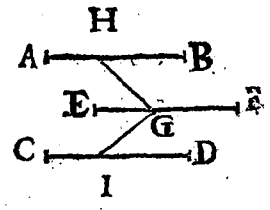
f 4. vndecimi.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eo

in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuò in G; *a* erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cùm sint parallelæ AB, EF, & EF, sit recta ad planum per GH, GI, ductū; *b* erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cùm sint parallelæ CD, EF, sit autem EF, recta ad planum per GH, GI, ductum; *c* erit etiam CD, recta ad idem planum; *d* Atq; proinde rectæ AB, CD, cùm rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.



a 4. *Vndecimi.*

b 8. *Vndecimi.*

c 8 *Vndecimi.*

d 8. *Vndecimi.*

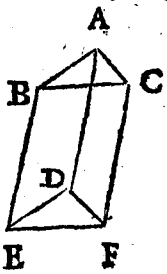
SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DE, inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; *e* erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cùm BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD, *f* erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales; *g* Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modò demonstrauimus; *h* Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat ostendendum.



e 33. *primi.*

f 9. *Vndecimi.*

g 33. *primi.*

h 8. *primi.*

SCHO-

SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ rectæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Si enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano, sit q3 AB ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallelæ. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturq3 rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniam igitur parallelæ sunt

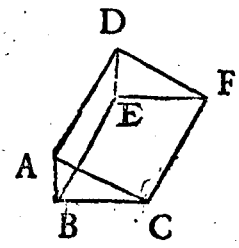


a29.primi. AB, DE, a æquales erunt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC

b32.primi. æquales sunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. b Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.

NON sint iam BC, EF, in vna recta linea constitutæ. Ducta

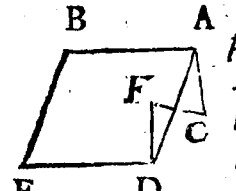
c33.primi. rectis AD, BE, CF, cùm AB, DE, sint parallelæ & æquales; c erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ



d30.primi. e33.primi. erunt & æquales, eò quòd AC, DF, parallelæ pernuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD, parallelæ existentes & æquales, d inter se parallelæ erunt & æquales; e Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaque cùm duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, & basis

f8.primi. BC, basi EF, f erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.

CÆTERVM vt conclusio huius theorematis rectè ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas (sive omnes sint in eodem plano sive non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione se mutuò secent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam aliàs conclusio vera non erit.



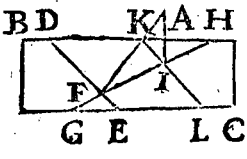
SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non sunt æquales, cùm ille sit acutus, hic verò obtusus. Hoc autem ideo euenit, quòd AD, CF, se mutuò secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quòd eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, desiciente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT à puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta vtcunq; D E, *a* ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F: Et in plano B C, per F, ad D E, perpendicularis ducatur G H, *b* ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum B C. *c* Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, parallela K L, cùm D F, ad *d* rectos angulos ſit duabus F A, F H, ex conſtructione, *e* ac proinde recta ad planum per F A, F H, ductum, *f* erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H, ductum recta. *g* Quoniam verò A I, in eodem eſt cum rectis F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A: rectus; atque adeò A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. *h* Igitur A I, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam diximus. Quod faciendum erat.



a 12 *primi.*
b 11 *primi.*
c 12 *primi.*
d 31 *primi.*
e 4. *undecimi.*
f 8 *undecimi.*
g 12. *undecimi.*
h 4. *undecimi.*

SCHOLIVM.

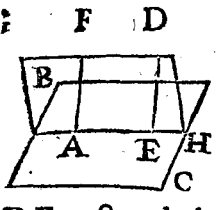
QVOD ſi quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, qua A F, ad D E, ducta perpendicularis, i erit ipſa A F, ab initio ad D E, ducta perpendicularis, ad ſubiectum planum B C, perpendicularis, cùm perpendicularis ſit ad vtramque D E, G H.

i 4. *undecimi.*

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

DATO plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. *k* Ex quouis puncto D, in ſublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, *l* ducatur per A, ipſi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectâ eſſe ad planum datum B C. Cùm enim D E, A F, parallelæ ſint; & D E, recta ad planum B C, ex conſtructione: *m* erit quoque A F, ad idem planum B C, recta. Itaq; dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciendum erat.

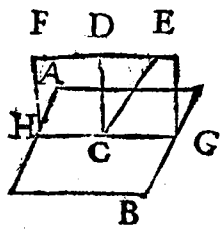


k 11. *undecimi.*
l 31. *primi.*
m 8. *undecimi.*

THEOR.

xiij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



SIT datum planum AB. Dico à dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planũ AB, & per CD, CE, a quæ in vno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecans planum AB, per rectam lineam GH. Cùm igitur EC, DC, rectæ ſint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datũ eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes. Quod erat demonſtrandum.

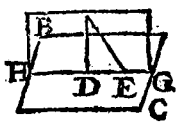
a 2. Vndecimi.

ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cùm igitur duæ DC, EC, rectæ ſint ad idem planum AB; b erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

b 6. Vndecimi.

SCHOLIVM.

EODEM modo à puncto in ſublimi ad ſubiectum planum ductæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubiectum planum BC, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, c quæ in vno plano ſunt, planum FG, ſecans planum BC, per rectam GH. Cùm igitur AD, AE, rectæ ſint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod eſt abſurdum: d cùm ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis aſſumpti.



c 2. Vndecimi.

d 17. primi.

ALITER. Si AD, AE, rectæ ſunt ad planum BC, ipſæ e erunt inter ſe parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.

e 6. Vndecimi.

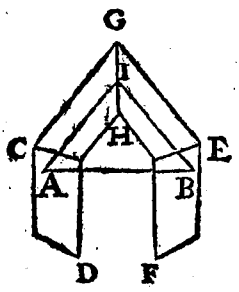
XIV. THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela eſſe plana CD, EF. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe conuenient. Conueniant ad partes C, E, e & faciant communem ſectionem rectam lineam GH; In qua ſumpto puncto vtcunq; I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur

e 3. Vndecimi.

igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin.3. huius lib.duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. a Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



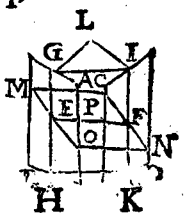
a 17. primi.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, Videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoq; recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK, eruntq; anguli GEF, HEF, recti per defin.3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atq; adeò & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; b cùm tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB, producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cùm EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta c quoq; erit EF, ad planum CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.



b 1. vndecimi.

c 4. vndecimi.

THEOR. 13. PROPOS. 15. XV.

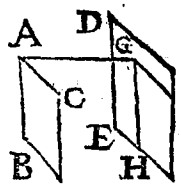
SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, d enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. e Deinde in

d 11. vndecimi.

e 31. primi.

plano



a 9. Undecimi. b 29. primi.

plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AG, GH, parallelæ sunt ipsi DE; *a* erunt & AG, GH, inter se parallelæ; *b* Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. *d* Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

c 4. Undecimi. d 14. Undecimi.

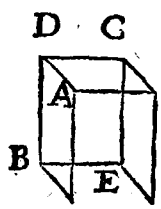
SCHOLIVM.

QVOD si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non sunt ducenda alia parallelæ. Vt si lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema subsequens, videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

DATVM planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunque duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, ei æquetur CE, ipsi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusq; in alio cum illis plano parallelæ sint, parallela erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.



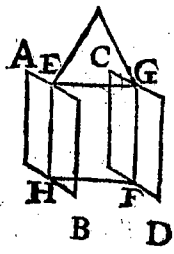
e 31. primi. f 15. Undecimi.

xvj. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas

neas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F secante. Conueniant igitur in puncto I. *a* Quia ergo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in vno quoq; est plano, videlicet in C D, producto; conueniens etiam plana A B, C D, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 1. 9n decimi.

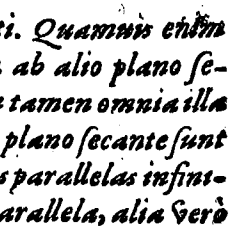
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, & hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. *lib.* 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana A B, C D, plano E F, parallela. Dico & A B, C D, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano G H, sintq; communes eorum sectiones recta G I, K L, M H. Secentur rursus alio plano N H, sintq; communes eorum sectiones recta N I, O L, P H, hac tamen lege, & duo plana secantia G H, N H, se quoque mutuò secent, quorum sectio communis sit linea recta H I. Quia igitur parallela plana A B, E F, secantur plano G H, b *erunt communes sectiones G I, K L, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt M H, K L,* c *atque adeò parallelæ erunt inter se G I, M H. Non aliter ostendemus, parallelas esse N I, P H. Itaque cùm I G, I N, se mutuò tangentes in I, parallelæ sint rectis H M, H P, se tangentibus in H, existentibusq; in alio plano;* d *erunt plana A B, C D, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.*



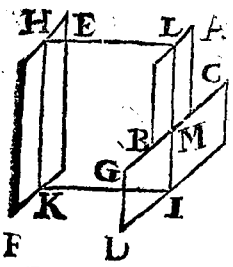
b 16. 9n decimi.
c 9. 9n decimi.
d 15. 9n decimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano E F, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum E F, linea recta perpendicularis, occurrens plano A B, in puncto H, & plano C D, in puncto I. Quoniam igitur linea H G, recta est ad



planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum; per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta a 14. &n decimi. *HI, sit recta ad plana AB, CD; a parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.*

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, vt ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI.

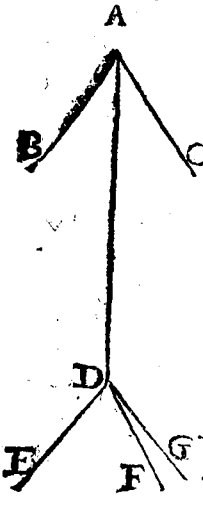


b 16. &n decimi. *Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF, b erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cùm rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existanteq; in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient;* c 1. &n decimi. *c propterea quòd recta LI, in vno iaceat plano. Quod est propositum.*

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certè si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuersum quoque propos. 10 facilè demonstrabimus hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vtrius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modò ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.



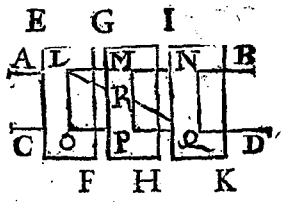
IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitq; AB, ipsi DE parallela; & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoq; esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, sint communes sectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. d *Hinc erit rectus* d 16. &n decimi. *tur, sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namq; planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, facilè* e 16. &n decimi. *sectiones AC, DG, e quæ parallelæ erunt. f Igitur* f 10. &n decimi. *angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angulo EDF,*

RDF, *æqualis erit. quod est absurdum, cùm vnus sit totum, & alter pars.*

THEOR. 15. PROPOS. 17. xvij.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non; existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta carum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, *a* Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano triangulí LNQ, *b* erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. *c* Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



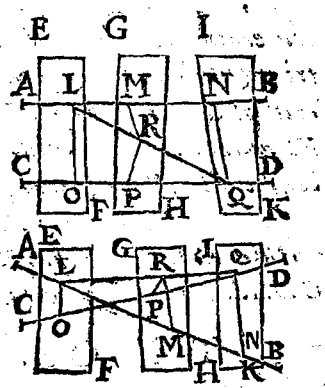
a 2. vndecimi.

b 16. vndecimi.

c 2. sexti.

SCHOLIVM.

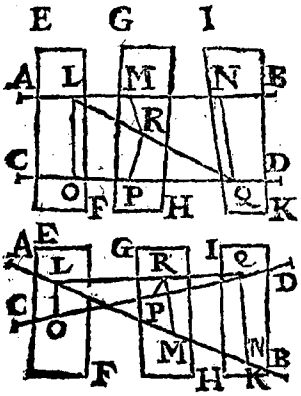
QVOD, si datæ rectæ AB, CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto, (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.



d 16. vndecimi.

SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia e cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa

e 2. vndecimi.



a 1. Vndecimi.

triangula in vno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesin.) erunt rectæ RM, RP, in directum: sic illis planis triangulorum; ac proinde vna rectam non constituent; a aliàs in vno essent plano. quod est absurdum.

EADEM hac propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc RMP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quàm tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones triangulorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ; rectas lineas constituent, si recta AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

EX demonstratione porrò perspicuum est, si quotlibet lineæ in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum lineariũ inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunq; in vno plano dispositæ, quas secent tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ, iuxta enim rectam LQ, b *erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, quàm triangulum LOQ, quàm LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademq; ratio est de pluribus. Vt autem rectè demonstratio procedat in quibusuis duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis vnius recta ad vltimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rectæ CD. Idemq; seruatum est in figuris huius propos. 17.*

b 2. sext.

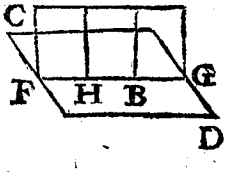
xviij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, c ducatur in pla-

c 31. primi.

in plano E F, ipsi A B, parallela H I. Quoniam igitur A B, I H, parallelæ sunt, & A B, ponitur recta ad planum C D; *a* erit quoque I H, ad idem planum C D, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionē F G, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano E F, ipsi A B, ducentur parallelæ, erunt ad planum C D, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem F G, perpendiculares. Quare rectum erit planum E F, ad planum C D, per defin. 4. huius libri. Similiq; argumento ostendentur omnia alia plana per rectam A B, ducta, ad planum C D, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



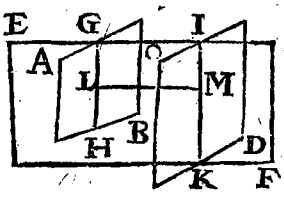
a 8. 11. decimi.

SCHOLIVM.

Ex his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana A B, C D, ad planum E F, recta, facientia sectiones G H, I K, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim E F, ducatur ad G H, perpendicularis L M, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum A B, recta erit: b *eademq; perpendicularis erit ad I K, ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoq; C D, recta erit. Quia igitur L M, ad vtrumq; planum A B, C D, recta est,* c *ipsa parallela erunt.*



b 29. primi.

c 14. 11. decimi.

SED iam parallela sint plana A B, C D; sitque A B, rectum ad planum E F. Dico & C D, rectum esse ad idem planum E F. Sint enim communes sectiones plani E F, & planorum A B, C D, rectæ G H, I K; d quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano E F, ad rectam G H, linea perpendiculari L M; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad A B, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem L M, ad planum C D, recta quoq; erit. e *Quare planum E F, per rectam L M, ductum ad planum C D, erit rectum; ideoq; vicissim planum C D, ad planum E F, erit quoq; rectum. Quod est propositum.*

d 16. 11. decimi.

e 18. 11. decimi.

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.

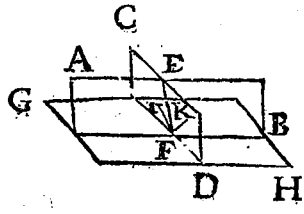
SIT data recta F G, in plano C D, vt in figura huius propos. oportet q;

teatq; per F G, planum ducere, quod ad planum C D, rectum sit. Et
a12. 9n. decimi. *quouis puncto B, recta F G, a erigatur ad planum C D perpendicula-*
ris B A, & per rectas A B, F G, planum ducatur E F. b *quod ad pla-*
b18. 9n decimi. *num C D, rectum erit. Quod est propositum.*

XIX. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuò secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana A B, C D, se mutuò secantia per lineam rectam E F, ad planum G H, recta. Dico communem illorum sectionem E F, rectam quoque esse ad idem planum G H. Aut enim E F, ad B F, D F, communes sectiones planorum A B, C D, cum



c4. 9n. decimi.

plano G H, recta est, aut non. Si recta est E F, ad B F, D F, c recta quoque erit ad planum G H, quod per ipsas ducitur. Si verò E F, concedatur recta ad alteram rectarum B F, D F, tantùm; sit ea recta ad B F. Quoniam igitur planum A B, ad planum G H, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur perpendicularis, ad planum G H, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si E F, concedatur recta ad D F. Erit enim & tunc E F, ad planú G H, recta ex defin. 4. huius lib. cùm perpendicularis ponatur ad D F, communem sectionem plani C D, cum plano G H, ducaturq; in plano C D, ad planum G H, recto. Si deniq; E F, ad neutram B F, D F, esse credatur recta; d ducatur ex F, in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F I; Item in plano C D, ad D F, communē eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F K. Quoniam igitur planum A B, rectum ponitur ad planum G H, erit quoq; perpendicularis I F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur, recta ad planum G H, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit K F, ad idem planum G H, recta; Ac proindè à puncto F, ad planum G H, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse suprà e demonstratum est. Quare E F, recta erit ad planum G H. Si duo igitur plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

d11. primi.

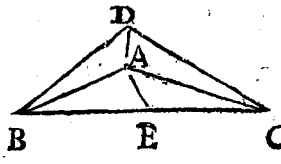
e13. 9n. decimi.

XX. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis

planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si verò duo tantùm sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto *a* fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniungantur rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; *b* erunt bases BC, BE, æquales. *c* Quia verò latera DB, DC, maiora sunt latere BD; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quàm CE. Cùm igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior basi CE; *d* erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multò maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 23. primi.

b 4. primi.

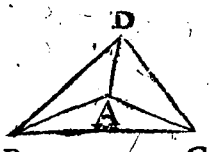
c 20. primi.

d 25. primi.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xxj.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, verò, sub CDA, ADB, BDC. *e* Quoniam verò duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBB, BCD, CDB, maiores. *f* Hi autē tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis



e 20. & undecimi.

f 32. primi.

rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vnà cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAE,
a 32. primi. a (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur quatuor ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorúmve, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum

b 32. primi. *triangulorum, (b cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cùm omnes anguli horum triangulorum propè basin maiores sint angulis basis; (propterea, quòd propè basin constituantur anguli solidi,*
c 20. vndecimi. *quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem propè basin, minoribus quàm quatuor rectis. Cùm ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.*

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemq; plano, videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum solidũ A. d *Quia verò omnes anguli*
d 32. primi.

quinq;

quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, aequales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, aequales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis aequales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis. a 20. 9 ndec.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

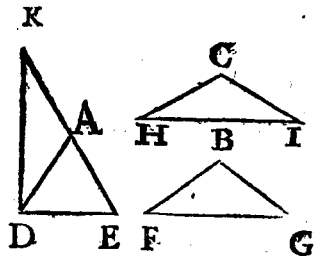
SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, *b* ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur: *c* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus: quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; *d* erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; *e* erit & basis EK, maior basi HI: *f* Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK,



b 22. primi. c 23. primi. d 4. primi. e 24. primi. f 20. primi.

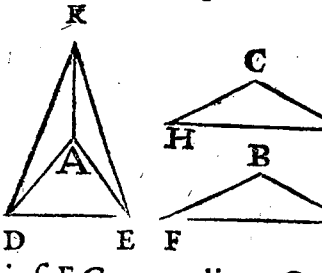
oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta KD. *a* Erit, igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. *b* Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores ſunt recta KE; & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoq; ED, DK, maiores duabus CH, CI: *c* Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.



a 4. *pri.*
b 20. *primi.*
c 20. *primi.*

CADAT poſtremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus rectus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturque rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. *d* Erit igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. *e* Quoniam vero duæ DE, DK, maiores ſunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoq; DE, DK, maiores quam CH, CI: *f* Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoq; DE, FG, maiores quam HI. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores eſſe, quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, ſi angulo C, ad FB, conſtituatur angulus æqualis, &c. *g* Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonſtrandum.

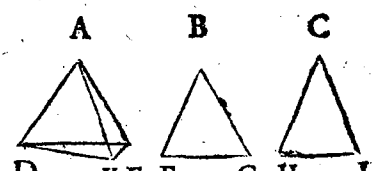


d 4. *pri.*
e 21. *primi.*
f 20. *primi.*
g 22. *primi.*

ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; *h* erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius minor; *i* erunt quoque duæ illorum baſes æquales, *k* & baſis tertij vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus, ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales; *l* erit quoque baſis DE, omnium

h 4. *pri.*
i 4. *pri.*
k 24. *primi.*
l 24. *primi.*

omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. *a* Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; *b* erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; *c* erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: *d* Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

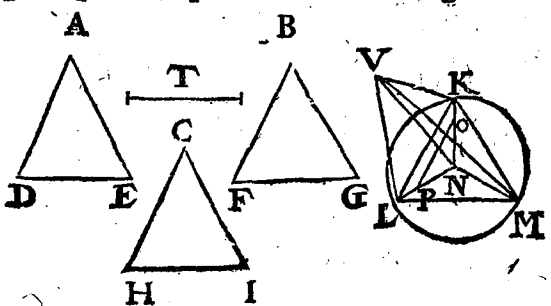


a 23. *primi.*
b 4. *pri.*
c 24. *primi.*
d 20. *primi.*

PROBL. 3. PROPOS. 23. xxiij.

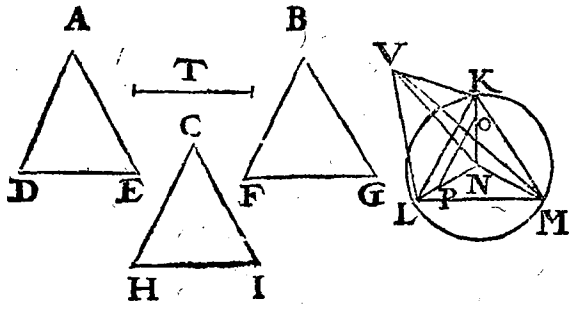
EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponãtur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque bases DE, FG, HI. *e* Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulũ KLM, *f* latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. *f* Describatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum N,



c 22. *Vndec.*
f 5. *quarti.*

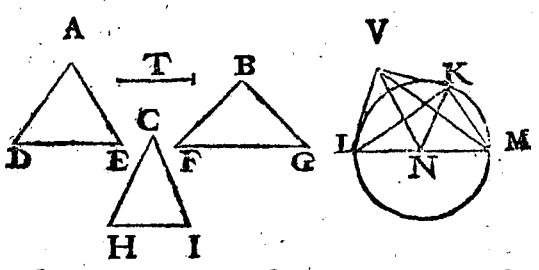
trum N, à quo ducantur rectæ N K, L N, N M. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe A D, A E, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostenditur. Cadat primo centrum N, intra triangulum K L M; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. prop. 5. lib. 4. constat. Si igitur A D, A E, maiores non credantur, quam N K, N L, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera A D, A E, trianguli A D E, æqualia sunt lateribus N K, N L, trianguli N K L, & basis D E, basi K L, æqualis: *a* erit angulus A, angulo K N L, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N K, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt A D, A E, ipsis N K, N L. Dico quod neque minores. Si enim minores sint A D, A E, quam N K, N L, abscindantur N O, N P, ipsis A D, A E, æquales, ducaturque recta O P. Quoniam igitur est vt N K, ad N O, ita N L, ad N P, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera N K, N L, trianguli N K L, secta proportionaliter; *b* ac proinde O P, ipsi K L, parallela erit. *c* Quare anguli N O P, N P O, angulis N K L, N L K, æquales erunt, & triangulum N O P, triangulo N K L, æquiangulum. *d* Igitur erit vt N K, ad K L, ita N O, ad O P. Est autem N K, maior quam N O. *e* Igitur & K L, hoc est, D E, quæ æqualis est ipsi K L, maior erit, quam O P. Quocirca cum latera A D, A E, trianguli A D E, sint æqualia lateribus N O, N P, trianguli N O P, & basis D E, maior basi O P, *f* erit & angulus A, maior angulo O N P. Eadem ratione angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N K, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt A D, A E, quam N K, N L; sed neque æquales. Igitur maiores.



CADAT deinde centrum N, in latus L M; quod tum continget, quando triangulum K L M, angulum L K M, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur A D, A E, dicantur esse æquales ipsis N K, N L; erunt quoque B F, B G,

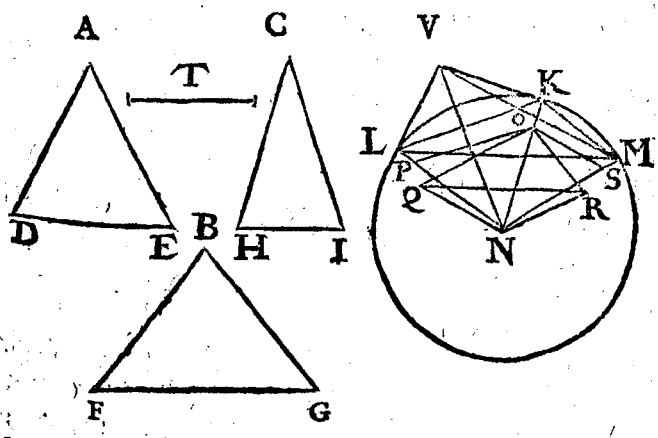
a 8. *primi.*
b 2. *sex.*
c 29. *primi.*
d 4. *sex.*
e 14. *quinti.*
f 25. *primi.*

BF, BG, æquales eiſdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Poſita autẽ fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur

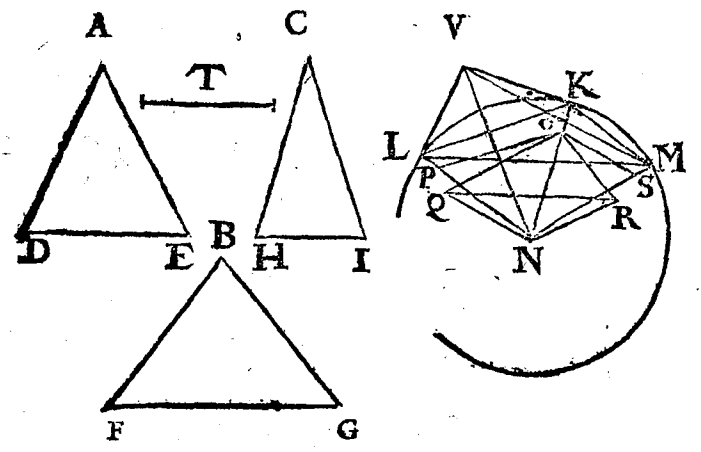


BF, BG, æquales quoque ſunt rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF, BG, quam FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, *b* cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores. *a* 20. *primi.* *b* 20. *primi.*

CADAT poſtremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtuſus, vt ex coroll. dicto propoſ. 5. lib. 4. ſiquet. Si igitur dicãtur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis; *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis; *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quam NK, NL; ſi abſcindantur NO, NP, ipſi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. *e* Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipſis



c 8. *pri.* *d* 8. *pri.* *e* 23. *primi.*



les ipſis AD,
AE, & con-
nectantur
OQ, OR,
cadetque
OQ, infra
OP, prop-
terea q
per puncta
O, P, Q
tranſit cir-
cumferen-

tia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta, cum æquales ſint
a 29. primi. rectæ NO, NP, NQ. *a* Quare cum angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem;
b 4. pri. *b* erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus.
c 24. primi. *c* erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſunt lateribus NQ, NR,
d 25. primi. trianguli NQR; & baſis FG, maior baſe QR; *d* erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A, & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſunt AD, AE, quã NK, NL; ſed neq; æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat; poſſit recta AD, plus quam rectã NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. *e* Excen-
e 12. Sundec. tro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque
f 47. primi. eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM, *f* ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtruc-

tione,

ctione, eisdem quadratis rectarum K N, N V, æqualia erunt inter se quadrata rectarum V K, & A D. Ac propterea æquales erũt rectæ V K, A D. Rursus quia latera V N, N K, trianguli V N K, æqualia sunt lateribus V N, N L, trianguli V N L; & anguli ipsis contenti V N K, V N L, recti; a erit basis V K, æqualis basi V L; Atq; eadem ratione rectæ V M. Quare tres rectæ V K, V L, V M, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta V K, æqualis rectæ A D. Tres ergo rectæ V K, V L, V M, æquales sunt rectæ A D, & ob id, rectis A E, B F, B C, C H, C I. Quamobrem, cum latera V K, V L, trianguli V K L, æqualia sint lateribus A D, A E, trianguli A D E; & basis K L, basi D E: b erit angulus K V L, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum L V M, angulo B; & angulum K V M, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis K V L, L V M, M V K, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

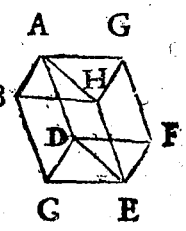
a 4. *prim.*

b 8. *prim.*

THEOR. 21. PROPOS. 24. XXIV.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum A B E F, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin 30. huius lib. sex figuris quadrilateris A C, C F, F H, H A, A F, B E, quarum aduersæ quælibet sunt parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cum enim parallela plana B G, C F, secentur plano A C; c Erunt communes sectiones A B, C D, parallelæ. Similiter cum plana parallela A F, B E, secentur plano A C; erunt communes sectiones A D, B C, parallelæ; As proinde parallelogrammum est figura quadrilatera A B C D. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ A B, B H, parallelæ sint rectis D C, C E, & non in eodem plano, sed in oppositis; d erunt anguli A B H, D C E, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi B G, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi C F. e Quoniam vero A B, ipsi D C, in parallelogrammo A C; & B H, ipsi C E, in parallelogrammo B E, æqualis est; erit vt A B, ad B H, ita D C, ad C E; Ac propterea vt B H, ad H G; ita C E, ad E F, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum B G, C F, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris A H, D E, f cum latera A B, B H, trianguli A B H, æqualia sint lateribus D C, C E, trian-



c 16. *Vndec.*

d 10. *Vndec.*

e 34. *primi.*

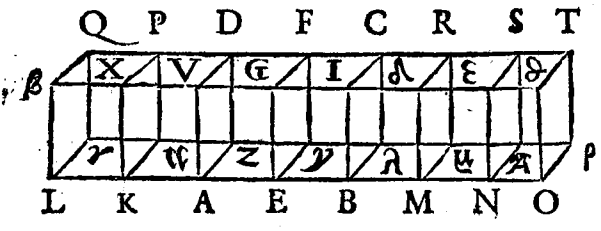
f 34. *primi.*

a 10. CE, trianguli DCE; *a* & angulus ABH, angulo DCE, æqualis
9ndec. vt ostensum est; *b* erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se,
b 4.pri. *c* Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogram-
c 34. morum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqua-
primi. lia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelo-
gramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo paralle-
lis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt,
similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

XXV. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis
planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim,
ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo
oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita
esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim pa-
rallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quan-
tumlibet, sumanturq; in AB, protracta quotcunq; rectæ AK, KL,
ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales.
Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR,
NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15.
huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis
parallelis ex hypothesi; ipsum parallelepipedum erit, ex definitio-
d 24. ne, *d* habebitq; pla-
9ndec.



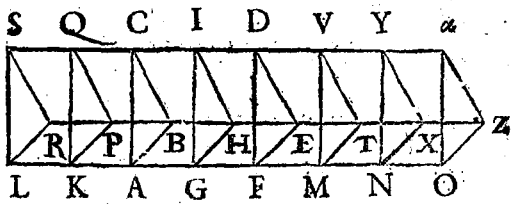
na opposita, paralle-
logramma similia, &
æqualia. Eodem mo-
do erunt parallelepi-
peda AKPD, KLQP;
EBCF, BMRC,
MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana opposi-
e 36. ta, parallelogramma similia, & æqualia. *e* Quoniam vero paralle-
primi. logramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AK,
f 29. KL, æqualia sunt; & similia quoq; *f* cum anguli vnius sint æqua-
primi. les angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia latera-
bus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque
ratione æqualia & similia sunt parallelogramma AY, KZ, LΛ.
Cum igitur æqualia quoq; sint, & similia parallelogramma AD,
KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AE, FD, æqua-
lia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus
g 24. planis LX, LΛ, LQ, solidi KLQP: *g* Sunt autem tria in vno-
9ndec. quoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eo-
dem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c.

Igitur

igitur per defin. 10. huius lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD; Et quam multiplex est basis OG, basis BH, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BC, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis maior est base, solidum quoq; solido maius est; & si minor, minus; in quacunq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinem, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY, ad basin CY, & vt basis AY, ad basin BY, & vt basis DG, ad basin CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

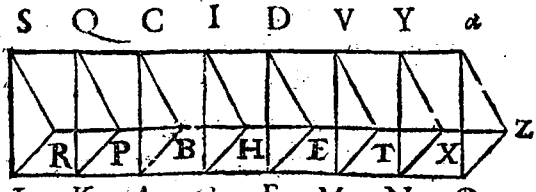
HÆC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim prisma ABCDEF, cuius plana aduersa sint triangula ABC, DEF, secetur que plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin EI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productum, & ex AF protracta vtrinq; capiantur quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZα; parallela planis ABC, GHI, FED, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI, a erunt communes sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH; b erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogram-



a 16. Vndec.

b 16. Vndec.

grammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB trianguli ABC, aequalia sunt lateribus GI, GH, trianguli GHI,
a 34. primi. a cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit aequale: b & anguli CAB, IGH, sunt quoque aequales, eo quod rectae CA, AB, parallelae sunt rectis IG, GH, & non in eodem plano; c Erunt triangula ABC, GHI,
b 10. Vndec. aequalia inter se, & aequiangula. d Quare latera circa aequales angulos proportionalia habebunt: Atq; idcirco similia erunt. Igitur solidum
c 4. pri. d 4. sex. ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, aequalibus & similibus, atq; parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eodem arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG,

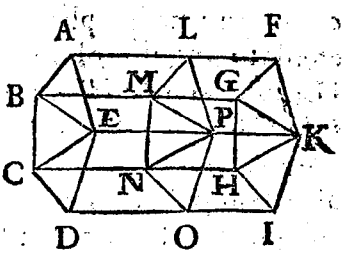


FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, ΘZαIHG. Quoniam vero parallelogramma AI, KC, LQ, aequalia sunt, & similia; nec non AH, KB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana prismatis ABCIHG, aequalia & similia omnibus planis prismatum ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. aequalia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione aequalia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG, & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magnitudinis) aequalis est basi OI, (multiplici basis FI, secundae magnitudinis,) aequale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiae magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartae magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus aequalibus, aequalia quoq; sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est basi OI, prisma quoq; prismate maius est, & si minor, minus, in quacunq; multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartae tam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma ut est basis AH, ad basin FH, & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, seceturque plano LMNOP. Dico rursus ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quo-

ā, quorum plana oppoſita ſunt triangula, reſolutum. Quare erit ℔t baſis B P, ad baſin M K, ita priſma A B E P M L, ad priſma L M P K G F, per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit ℔t baſis C P, ad baſin N K, ita priſma B C E P M N, ad priſma M N P K G H, & priſma C D E P N O, ad priſma N O P K H I. a Vt autem B P, ad M K, & C P, ad N K, ita eſt recta E P, ad rectam P K, hoc eſt, ℔t C N, ad N H: & ℔t C N, ad N H, ita eſt C M, ad N G. Igitur priſmata A B E P M L, B C E P M N, C D E P N O, ad priſmata L M P K G F, M N P K G H, N O P K H I, eandem habent proportionem ei, quam habet C M, ad N G, ac proinde eandem inter ſe. b Vt autem ℨnum ad ℨnum, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur erit ℔t priſma B C E P M N, ad priſma M N P K G H, hoc eſt, ℔t baſis C M, ad baſin N G, ita priſma A B C D E L M N O P, ex tribus compoſitum ad priſma L M N O P F G H I K, ex tribus conflatum. Quod eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.

a 21. ſex.



b 12. quinti.

POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtendi demonſtratione, qua ℔ſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in ℔tramq; partem, erunt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe æqualia, & ſimilia, c propterea quod latera eorum ſunt parallela, nempe communes ſectiones parallelorum planorum, d ac proinde angulos æquales ℨndec. comprehendunt, &c. Vnde, ℔t prius, oſtendetur priſmata ex ℨna parte inter ſe æqualia, nec non & priſmata ex altera parte, &c. ℨndec.

c 16.

d 10.

COROLLARIVM.

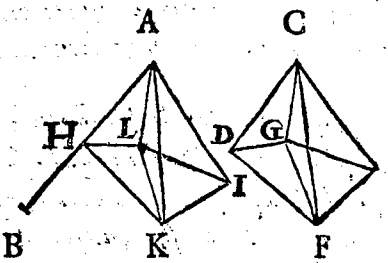
EX his infertur, ſi priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectionem eſſe figuram æqualem & ſimilem planis oppoſitis: Veluti demonſtratum eſt in priori priſmate, triangulum G H I, æquale eſſe & ſimile triangulo A B C, atque adeo triangulo D E F. Eadem enim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvj.

AD datam rectam lineam, eiuſque punctum angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta A B, conſtituendus angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, contento tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, non in eodem plano exiſtentibus. e Du- e 11. catur ex F, ad planum per C D, C E, ductum perpendicularis F G, ℨndec. connectanturque rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde abſcindatur A H, æqualis ipſi C D, f fiatque angulus H A I, f 23. angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis. primi.

Rursus in plano per A H, A I, ductum constituatur angulus H A L, æqualis angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto existit; & a 12. *Vndec.* recta A L, rectæ C G, æqualis. *a* Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres A H, A L, A I, erigatur perpendicularis L K, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta κ A. Dico angulum solidum A contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis H K, H L, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia sint lateribus C D, C G, trianguli C D G, & anguli H A L, D C G, æquales, per b 4 *pri.* constructionem; *b* Erunt bases H L, D G, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui æquales sunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli A L I, æqualia sint lateribus C G, C E, trianguli C G E, c 4. *pri.* per constructionem; *c* æquales quoq; erunt L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia sunt lateribus G D, G F; & anguli H L K, d 4. *pri.* D G F, recti ex defin. 3. huius lib. *d* erunt & bases H K, D F, æquales.



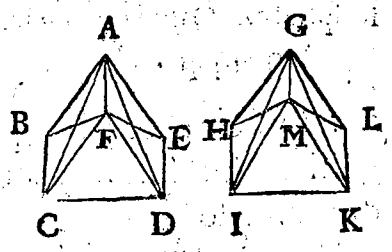
Quare cum & latera A H, A K, trianguli A H K, sint æqualia lateribus C D, C F, trianguli C D F, ex cōstructione. (cum enim A L, L K, latera lateribus C G, G F, æqualia sint ex constructione, comprehendantq; angulos æquales, nimirum e 4. *pri.* rectos; ex defin. 3. huius lib. *e* erunt bases A K, C F, æquales.) *f* Erunt f 8. *pri.* quoque anguli H A K, D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, sunt æqualia lateribus G E, G F, & anguli I L K, E G F, recti g 4. *pri.* ex defin. 3. huius lib. *g* Erunt bases I K, E F, æquales: Cum igitur latera A I, A K, trianguli A I κ, lateribus C E, C F, trianguli C E F, h 4. *pri.* sint æqualia ex constructione; *h* Erunt quoq; anguli I A κ, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli plani H A I, H A κ, K A I, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, angulum solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in eodemque existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectæ secent planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygoniam constituant, pyramisque quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides triangula, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulus solidus

lis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

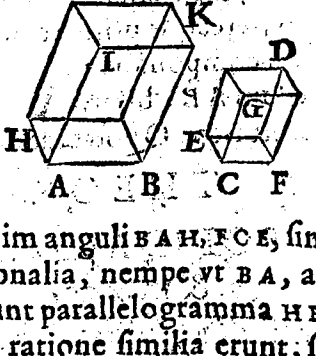
VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendenda sunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27. xxvij.

ADATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, a 26. eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vndec. vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt est CF, ad CG, *b* sic fiat b 12. AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt *sexti.* CF, ad CE, ita AB, ad AH. Post hæc, perficiatur parallelepipedũ AK, complétis nimirũ parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, similè esse similiterque positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia; similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur



plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. *a* Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD. Ac proinde ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

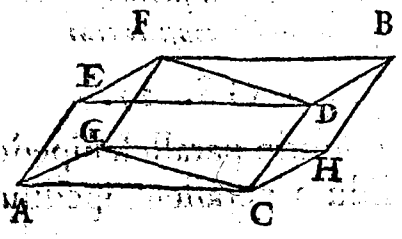
a 24. Vndec.

b

XXVIII. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF, AE, cum sint parallelogramma CE, GE; *c* erunt & interse parallelæ, & æquales CD, GF. *d* Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. *e* Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED, BBF, proportionalia. *f* Igitur similia quoque erunt dicta triangula. *g* Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis AC GFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF. Quæ propterea quæ prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



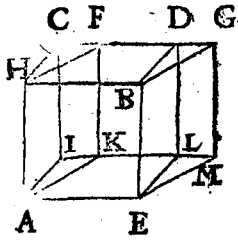
c 9. Vndecimi.
d 33. primi.
e 24. Vndec.
f 6. sex.
g 24. Vndec.

XXIX. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana

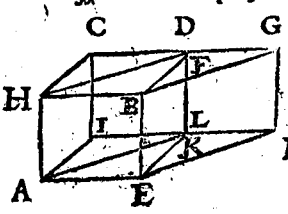
plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; *primi.* a 35.

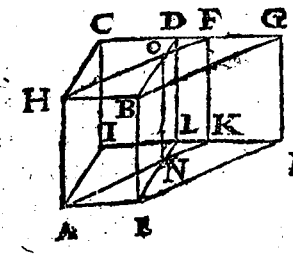


erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & LF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales. (*f* Nam cum rectæ, IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM,) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum. b 34. *primi.* c 4. *sex.* d 24. *vndec.* e 26. *primi.* f 4. *pri.*

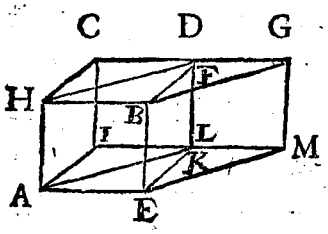
SCHOLIVM.

HÆC propositio persimilis est propositioni 35. lib 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, & ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit; vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. Vnde vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.

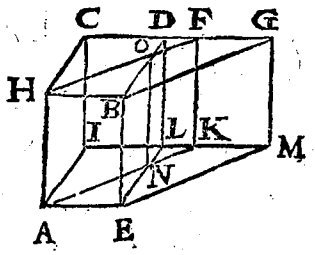




IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus si adda-



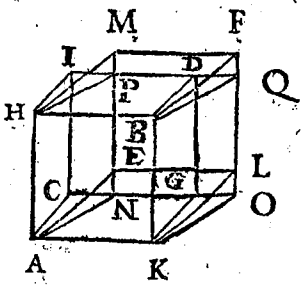
datur triangulum commune KLN, totaque triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, & prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB, à quibus si auferatur prisma commune KLNODE, (Nam communis sectio planorum AE, DE, est recta NO,) remanebit solidum comprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur utrique prismati commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.



XXX. THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia.



Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarũ CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, eadem in punctis P, Q; adiunganturq; rectæ PQ, AN, KO, HP, BQ. *a* Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. *b* Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoq; parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQR. *c* Quamobrem parallelepipe-

a 34. primi.
b 33. primi.
c 29. primi.

lelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

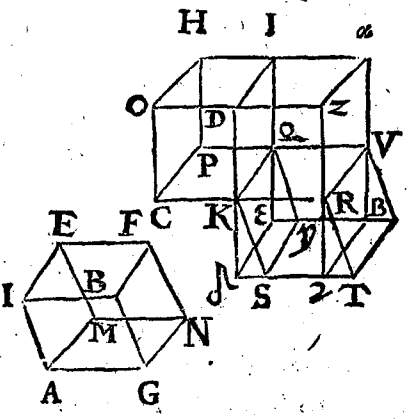
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si omnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum. a *Cùm igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.* a 29. vel 30. vndecimi.

THEOR. 26. PROPOS. 31. xxxj.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases cõstituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se. xxxij.

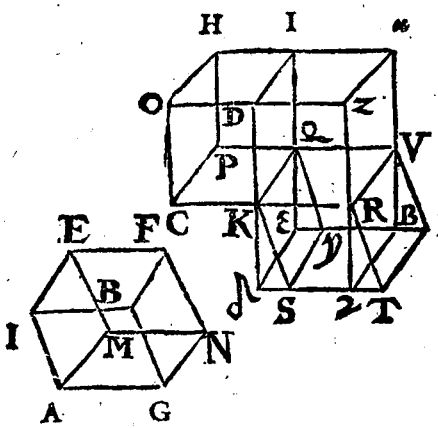
SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primùm insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitq; KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, constituatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt paralle-



gramma K T, L G, æqualia & similia; Rursus quia latera K Q, K S, æqualia sunt lateribus L E, L A, & anguli Q K S, E L A, recti, per defin. 3 huius lib. eo quod K Q, L E, rectæ ponantur ad plana K T, L G, erunt & parallelogramma Q S, E A, æqualia & similia. Eodem modo cum latera K R, K Q, æqualia sint lateribus L B, L E, & anguli Q K R, E L B, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma K V, L F, æqualia & similia. Quare cum tria plana, K T, Q S, k V, parallelepipedi Q S T V, æqualia sint & similia; a tribus planis L G, E A, L F, parallelepipedi A E F G, b tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: c Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda Q S T V, E A G F; inter se æqualia.

a 24. Vndec.
b 24. Vndec.
c 29. Vndec.

CONVENIANT rectæ D k, T S, productæ in δ; & I Q, X Y, in ε, compleaturq; parallelepipedum Q δ γ V. Item H I, β V, protractæ conueniant in ω, & O D, γ R, in Z, perficiatur q; parallelepipedum I k R α. Quoniam igitur parallelepipeda Q S T V, Q δ γ V, eandem habent basin k V, sunt que in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela k V, δ X, & insistentes ipsorum lineæ k S, k δ, R T, R γ, Q Y, Q ε, V X, V β, collocantur in eisdem rectis δ T, ε X, c ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum Q S T V, parallelepipedo E A G F, æquale: Igitur eidem parallelepipedo E A G F, æquale erit parallelepipedum Q δ γ V.



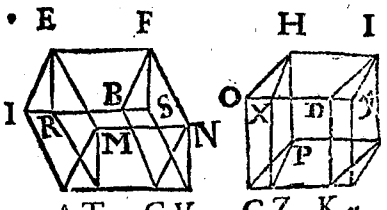
d 35. primi. e 7. quinti. f 25. Vndec. g 9. quinti.

d QVONIAM vero parallelogramma k T, k γ, æqualia sunt inter se; & K T, æquale est ipsi L G, erit & k γ, ipsi L G, hoc est, ipsi C D, æquale; cum bases L G, C D, ponantur æquales. e Quare erit vt C D, ad D R, ita k γ, ad D R: f Vt autem C D, basis ad basin D R, ita est solidum C H I k, ad solidum k I α R; cum parallelepipedum C H α R, secetur plano I k, planis oppositis, C H, α R, parallelo: Et eadem ratione vt k γ, ad D R, ita est solidum Q δ γ V, ad solidum I k R α; cum & parallelepipedum I δ γ α, secetur plano k V, oppositis planis D α, δ β, parallelo. g Igitur æqualia erunt parallelepipeda C H I k, Q δ γ V, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum I k R α, nimirum eandem, quam habent bases æquales C D, k γ, ad eandem basin D R. Quare cum parallelepipedum Q δ γ V, sit ostensum æquale parallelepipedo A E F G; æqualia quoq; erũt parallelepipeda A E F G, C H I k. Quod est propositum.

SINT iam neque insistentes lineæ A M, G N, L E, B F, ad basin A B, neque C P, k Q, O H, D I, ad basin C D, perpendiculares. Et

Et à punctis E, F, M, N, demittantur E R, F S, M T, N V, ad planum, in quo basis A B, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis C D, perpendiculares H X, I Y, P Z, Q α. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ R S, S V, V T, T R: Item rectæ X Y, Y α, α Z, Z X, vt fiant parallelepipeda E T V F, H Z α I, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantq; insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. b Sed parallelepipedum E T V F, æquale est parallelepipedo A E F G, cum hoc eandem cum illo habeat basin E N, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum H Z α I, æquale est eadem ratione parallelepipedo C H I K; cum hoc eandem cum illo basin H Q, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

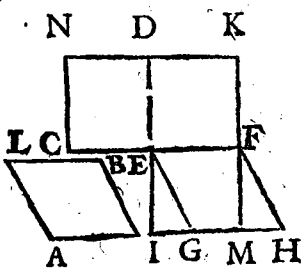
a 11. Vndec.



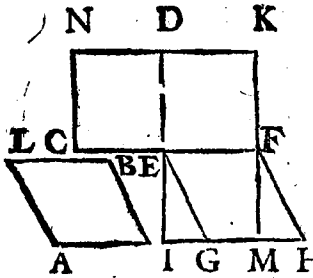
b 29. Vel 30. Vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases A B, C D, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B, & rectæ E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum E H, quod æquale erit, & simile parallelogrammo A B. Conueniat autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum I K. Iam vero intelligantur super bases E H, I F, E K, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super A C, C D, constructis; sintq; insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super E H, æquale esse ac simile solido super A B, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia



sint



a 29. &11. decimi. *sint & similia planis huius, per constructionem.* a *Sunt autem & aequalia parallelepipeda super E H, I F, cùm habeant basim eandem, cuius infimum latus E F, erectam super planum I K; Item plana basi opposita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus H M, atque insistentes lineas E G, F H, E I, F M, &c. in eisdem rectis lineis I H, &c. Igitur aequale erit parallelepipedum super I F, parallelepipedo super A B.* b *Quoniam verò parallelogramma E H, I F, aequalia sunt; & E H, aequale est ipsi C D; aequalia erunt I F, C D.* c *Erit igitur, vt I F, ad E K, ita C D, ad E K.* d *Est autem vt I F, ad E K, ita solidum super I F, ad solidum super E K, quod solidum super I K, secetur plano super E F, erecto parallelo planis super D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita solidum super C D, ad solidum super E K, cùm solidum super C K, secetur plano super D E, erecto parallelo planis super C N, F K, erectis. Quare erit vt solidum super I F, ad solidum super E K, ita solidum super C D, ad solidum super E K.* e *Ac proinde aequalia erunt parallelepipeda super I F, & C D. Ostensum est autem parallelepipedum super I F, aequale parallelepipedo super A B. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda super A B, C D. Quod est propositum.*

b 35. primi.

c 7. quinti.

d 25. &11. decimi.

e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque haec propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin.

SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, f *fient aequalia abſciſſum, & alterum. Cùm ergo & totum ponatur aequale alteri; aequale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

f 31. &11. decimi.

QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis aequalis altera, & ſuperior abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis: demonſtrabimus eodem modo partem toti eſſe aequalem. Quod eſt abſurdum.

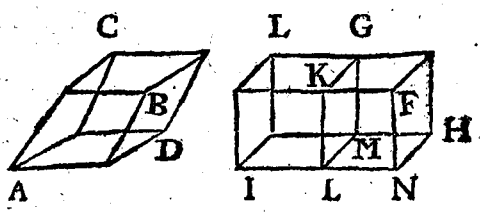
xxxiij. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiuſdem altitudinis ſuper baſes A B, E F. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. g Super rectam enim E K, conſtituatur parallelogram-

g 45. primi.

grammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, qui sit æqualis angulo E N F. Cõstituent autem parallelogramma E F, I K, totum parallelogrammum vnum F I; vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi E F G H, producantur ad partes E G, perficiaturque totum vnum parallelepipedum I F L H; a erunt parallelepipeda A B C D, I K L M, æqualia, cùm habeant æquales bases, per constructionem A B, I K, & eandem altitudinem, ex hypothesi. b Quare erit vt solidum I K L M, ad solidum E F G H, ita solidum A B C D, ad idem solidum E F G H: c Est autem solidum I K L M, ad solidum E F G H, vt basis I K, hoc est, illi æqualis basis A B, ad basin E F. Igitur & solidum A B C D, erit ad solidum E F G H, vt basis A B, ad basin E F. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.



a 31. 6. decimi.
b 7. quinti.
c 25 6. decimi.

SCHOLIVM.

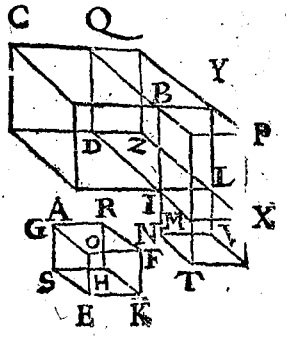
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori æqualis, & ducatur planum d *basi parallelum, eritq; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum.* e *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

d 32. 6. decimi.
e 9. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvj.

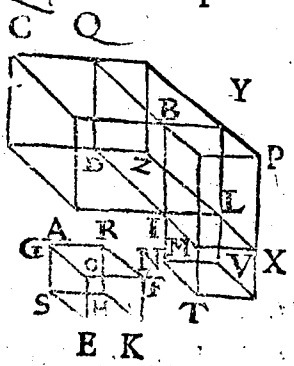
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes & similiter positas, in quibus latera homologa sint A I, E K. Dico proportionem parallelepipedi A B C D, ad parallelepipedum E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorũ A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & sit I L, æqualis ipsi E K, vel G R; Item D I, ad M, & sit I M, æqualis ipsi H K, vel G O; Item B I, ad N, & sit I N, æqualis ipsi K F, vel G S. Deinde compleatis parallelogrammis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam verò latera I L, I M, æqualia sint lateribus G R, G O; f & anguli contenti æquales, cùm angulus I L M,



f 15. prim.

L I M, sit æqualis angulo A I D, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo E k H, seu R G O; erunt parallelogramma I X, G F, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt & æqualia L N, R S; item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T parallelepipedi T X I V, similia sunt, & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi E F G *H*: *a* Sunt autem tria cuiusq; similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10 huius lib. Rursus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D I, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum A B C D, E F G H, est vt A I, ad E k, hoc est, ad I L, ita D I, ad H k, hoc est, ad I M; & B I, ad F k, hoc est, ad I N. *b* Vt autem A I, ad I L, ita est parallelogrammum A D, ad D L; Et vt D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; & vt B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit vt A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. *c* Sed vt A D, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q: & vt basis D L, ad basin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P; & vt basis B L, ad basin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, vt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Ac proinde quatuor quantitates sunt continuè proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoq; proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc est, ad E F G *H*, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad secundam D L Y Q, ex defin. 10. lib. 5. *d* Vt autem A D C B, ad D L Y Q, ita est basis A D, ad basin D L; *e* Et vt A D, ad D L, ita est recta A I, ad I L, hoc est, ad E k. Igitur proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E k. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.



a 24. 11ndec.

b 1. sex.

c 32. 11ndec.

d 32. 11ndec.

e 1. sex.

COROLLARIVM.

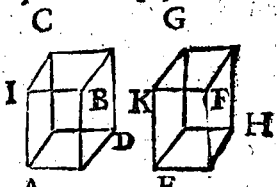
EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THEO-

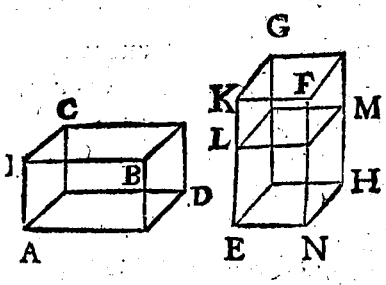
THEOR. 29. PROPOS. 34. XXXIV. XXXV.

ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim priſmum inſiſtentes lineæ AI, Ek, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, Ek, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, Ek, ſunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo Ek; ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines AI, Ek, inæquales fuerint; ſit Ek, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; *a* erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: *b* Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponãtur altitudines AI, EL. Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione baſis kM, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur kN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela kN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis kN, ad baſin LN: *c* Sed vt kN, ad LN, ita eſt recta Ek, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo Ek, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.



a 7. *quinti.*

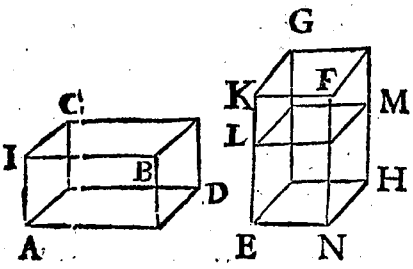
b 32. *vndec.*

c 1. *ſex.*

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines Ek, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo Ek, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. *d* Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

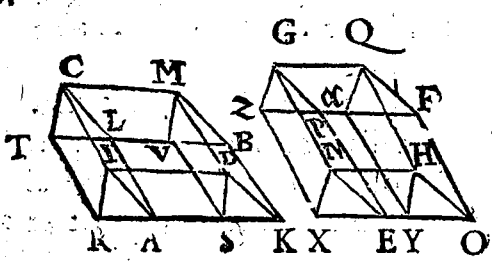
d 31. *vndec.*

QVOD



QVOD si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinẽ AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; a vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cùm altitudines AI, EL, æquales ponantur. b Et vt EK, ad EL, ita est KN, ad LN; c Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML; cùm solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; d ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

a 32. 6m decimi. b 1. sext. c 32. 6m decimi. d 9. quinti.



SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorũ insistentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, nõ sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Itẽ à punctis N, H, O, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Oα, GZ, Qβ, connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα, Eβ, eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, vt basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. e Cùm enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quòd habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale solido Xα GH; Erunt & parallelepipeda RVCD, Xα GH, æqualia. Quare cùm habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH, erit, vt iam demonstratum est, vt basis CD, ad basin GH, hoc est, vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

e 29. vel 30. 6m decimi.

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt priùs; Cùm sit vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; f sit autem AB, ipsi CD, & EF, ipsi GH, æqualis; erit quoque vt basis CD, solidi RVCD, ad basin GH, solidi Xα GH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cùm XN, RI, sint insistentes li-

f 24. 6m decimi.

neæ

næ perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt, vt iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. a Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idemque oſtenderetur, ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius verò non. Quam ob rem, Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 29. vel 30. vndecimi.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædictæ hypotheſes ſeruentur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtentia. b Quare æqualia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.

b 29. 30. vel 31. vndecimi.

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis adijciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis. c Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt baſis ad baſin; d Atq; adeò priſma ad priſma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certè vt triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.

c 32. vndecimi. d 15. quinti.

PRÆTEREA, ſi duobus priſmatis prædictis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, e quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia, f cùm eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.

e 33. vndecimi. f 15. quinti.

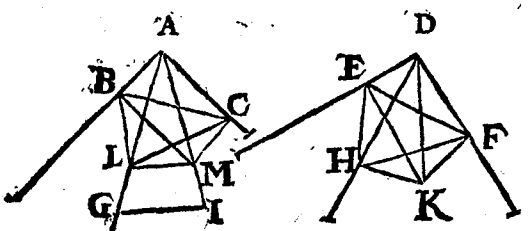
DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum priſmatis. g Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eædem ſint, vel certè triangula earum dimidia h eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.

g 34. vndecimi. h 15. quinti.

xxxvij. THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum vertibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique, In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum vertibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG angulo FDH, sit æqualis: à sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nam si AG, DH, sunt inæquales, auferatur à maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipsi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ sunt GI, LM, & est GI, ad planum anguli BAC, recta; a erit quoque LM, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. huius lib. b Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; c Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit per constructionem. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML: d At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CL; e Ac proinde angulus ACL, rectus erit. f Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: g Est autem quadratum rectæ AM, æquale



a 8. Undecimi.
b 47. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.
e 48. primi.
f 47. pr.
g 47. pr.

æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: *a* At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; *b* propterea quoque angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera AL, DH, æqualia; *c* Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; *d* erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DE*K*, DF*K*, æquales: cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, K FE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; *e* erunt latera BM, CM, lateribus EK, F*K*, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, F*K*, trianguli DF*K*, & anguli ACM, DFK, sunt recti; *f* erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: *g* Quia vero quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, K*H*, quod anguli BML, EK*H*, recti sint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, K*H*. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqualis; *h* erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

a 47. primi.
b 48. primi.
c 26. primi.
d 4 pri.
e 26. primi.
f 4. pri.
g 47. primi.
h 8. pri.

COROLLARIVM.

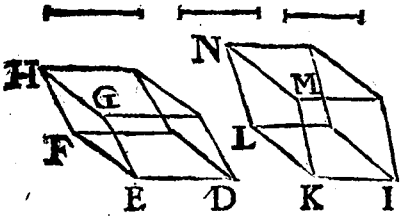
ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis

extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primò poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quòd anguli ni B A C, E D F, ponuntur æquales & ſublimes æquales A L, D H, continuunt angulos æquales L A B, H D E. Item L A C, H D F: demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares L M, H K, eſſe æquales.

xxxviij. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Conſtituatur angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque D E F, D E G, F E G, ita vt recta D E, ipſi A; & E F, ipſi B, & E G, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis D F, F G, G D, perficiatur parallelepipedum D H: quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. a Deinde ad rectam I K, eiuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis I K L, I K M, L K M, qui æquales ſint tribus D E F, D E G, F E G, ita vt rectæ I K, K L, K M, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis verò parallelogrammis I L, L M, M I, perficiatur parallelepipedum I N, quod contineri dicitur ſub linea B, ſe ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum D H, æquale eſſe ſolido I M. Cùm enim ſit vt D E, ad I K, ita K M, ad E G, (quod D E, ipſi A; & I K, K M, ipſi B; & E G, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli D E G, I K M, æquales: b Erunt parallelogramma D G, I M, æquilia, propterea quòd latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam verò anguli plani D E G, I K M, ſunt æquales, quorum verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales E F, K L, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primò poſitis, ex conſtructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium D G, I M, demiſſæ, nimirum altitudines parallelepipedorum D H, I N, ſi baſes ſint D G, I M, inter ſe æquales, per c 31. vn roll. propoſ. præcedentis. c Quare parallelepipeda D H, I N, cùm habeant baſes D G, I M, æquales, & æquales quoque altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 26. vn decimi.

b 14. ſexti.

SCHOLIVM.

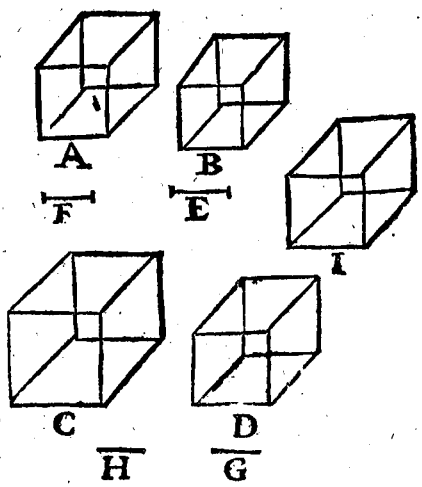
VICISSIM quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media linea de-

lon. descripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, ipsi aquiangulo parallelepipedo I N, descripto à media B. Dico tres A, B, C, esse continuè proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex F L, demissæ esse æquales. Quare cùm & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum baſes D G, I M, æquales per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. demonſtrauimus. Quæ baſes cùm anguloſ habeant æquales D E G, I K M, ex conſtructione: a habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, vt D E, ad I K, ita K M, ad E G. Quapropter cùm D E, ipſi A; & I K, K M, ipſi B; & E G, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

a 14. ſexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. XXXII.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituantur que ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta; item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia, ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B, Et vt C, ad H, ita ſolidum C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.

SINT iam è contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoq; proportionales. *b* Tribus enim rectis

b 12. ſexti.

a 27. Vndec. A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, a super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidum

b 9. quinti. C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. b Atqui circo æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectã D. Dico esse quoq; vt

c 33. Vndec. solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. c Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectã B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt

d 33. Vndec. solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. d Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim mediæ lineæ, eiusq; solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demõ-

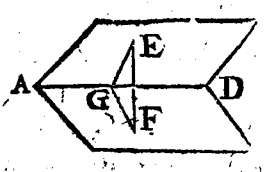
stratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ, & lineæ secundæ æqualis tertia linea; perspicuum est, q proponitur.

TOTA vero hæc propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia sunt triangula, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. a Cum igitur, prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur. a 15. quinti.

THEOR. 33. PROPOS. 38. xiij.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC, sitq; eorũ communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD.



Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex B, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. b 12. primi. c 17. primi.

SCHOLIVM.

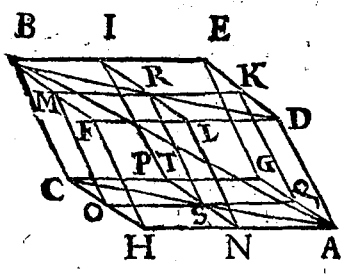
HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem, d ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC Quare ex puncto E, extra planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus. d 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxix.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & soli-

di parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorũ sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuò secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, a & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cùm sint parallelogramma AS, HS,) b & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: c Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales, d Adeò qui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: e Ac propterea AS, CS, vnam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, f ipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. g Quare & rectæ AC, BD, earum extremas coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia verò AC, BD, parallelæ sunt; h erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuò secabunt, in puncto videlicet T. i Cùm autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: k Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuò secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.



a 34. *primi.*
b 29. *primi.*
c 4. *primi.*
d 13. *primi.*
e 14. *primi.*
f 9. *vndecimi.*
g 33. *primi.*
h 7. *vndecimi.*
i 29. & 15. *primi.*
k 26. *primi.*

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuò bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

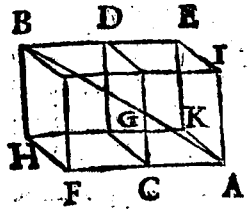
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum:

centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

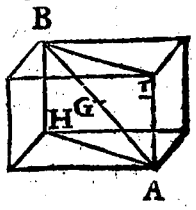
SECETVR *parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planum CD, oppositis planis AE, BF, parallelum.* a *Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem BA, bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifariam.* b *Cum igitur sit vt basis KC, ad basim CH, ita solidum AD, ad solidum CB, erit parallelepipedum AB, sectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*



a 17. Vndec.

b 25. Vndec.

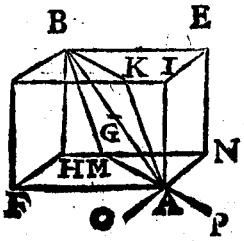
TRANSEAT *secundo planum secans AI, BH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, imo per totam diametrum AB,* c *cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI.* d *Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.*



c 7. Vndecimi.

d 25. Vndec.

TERTIO *planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM;* e *erunt communes sectiones AM, BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, facta a plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM;* f *ideoque tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, inter se erunt æquales. Quæ ergo latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ;* g *ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK.* h *Cum igitur OAP, æqualis sit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.)* i *Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN,* k *cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, rectæ MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua IK, reliquæ HM; & reliquus an-*



f 34. primi.

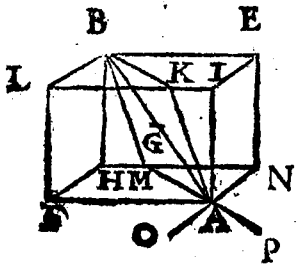
g 10. Vndec.

h 15. primi.

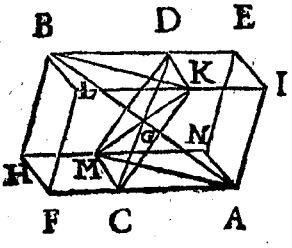
i 4. pri.

k 4. sex.

gulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF aqualis. (Est enim tota LI, toti NH, aqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis aquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, aqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, aqualia; & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogrammorum LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & aquilaterum, & aquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea aquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo aqualia erunt & similia triangula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter se sint & aquilatera & aquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, aquale erit solido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & aqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.



POSTREMO planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per illorum angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK, esse aquales.



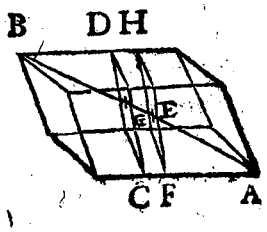
Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectanturque rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, inter se sunt parallelæ; b Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, rectæ AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. c Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, aqualis est; d Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem aqualis; & latus BG, lateri AG, aquale, quod AB, bifariam secetur in G, centro. e Erit & latus DG, lateri CG, aquale. Cum ergo per ea, quæ adpos. 34. lib 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, aqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; f & angulus BGD, aqualis angulo AGC; g Erit & basis BD, aqualis basi AC. Eodem argumento aquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, aqualia sint tribus lateribus AG, GM, MA, trianguli

a 29. vndecimi.
b 7. vndecimi.
c 29. primi.
d 15. primi.
e 26. primi.
f 15. pr. 1.
g 4 pr. 1.

trianguli A C M; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus D B L, toti C A N, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum B I, A H. Igitur & reliquus K B L, reliquo M A N, erit æqualis. Quoniam igitur latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis; a Erit & basis K L, basi M N; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis B K L, A M N, æquales addantur anguli B K D, A M C, fient toti anguli D K L, C M N, æquales. Quare quadrilaterum B D K L, quadrilatero A C M N, & æquilaterum est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota L I, toti N H, est æqualis, erit & reliqua I K, reliquæ H M, æqualis. Eademque ratione reliqua D E, reliquæ C F, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum D E I K, æquilaterum est quadrilatero C F H M: Sed & æquiangulum; cum anguli D E I, E I K, æquales sint angulis C F H, F H M, propter similitudinem parallelogrammorum B I, A H; & anguli E D K, I K D, angulis F C M, H M C, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni L K D, B D K, angulis N M C, A C M. Igitur quadrilatera D E I K, C F H M, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia & quadrilatera A C K I, B D M H; Item D E N M, C F L K, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis C K L F, F H M C, C K D M, M H B D, D K L B, B H F L, per 10. defin. huius lib. æquale est solido contento planis D M N E, E I K D, D M C K, K I A C, C M N A, A I E N; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur A B, sectum est per centrum G, plano C D, bifariam.

a 4. pri. mi.

SED secetur iam parallelepipedum A B, plano C D, bifariam. Dico planum C D, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum C D, secat diametrum A B, diuidere diametrum A B, bifariam. Si enim diameter A B, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum F H, plano C D, parallelum, secabitur parallelepipedum A B, bifariam plano F H, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam secari plano G D; Igitur solida C B, F B, cum sint dimidia parallelepipedi A B, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum A B, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.

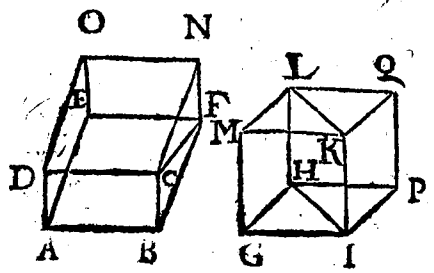


THEOR.

xlj. THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitq; parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta



erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. a Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum; æqualia erunt parallelogramma AC, GP. b Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (c Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 34. primi.

b 31. Vndec.

c 32. Vndec.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

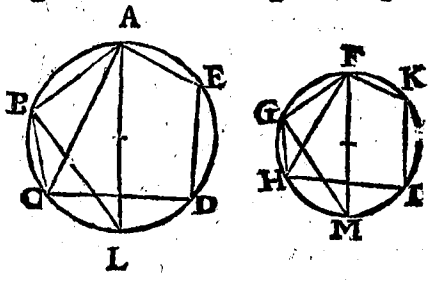
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et ſolidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; *a* erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: *b* Eſt autem angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, *c* nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; *d* erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. *e* Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. *f* Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ. Quæ itaque



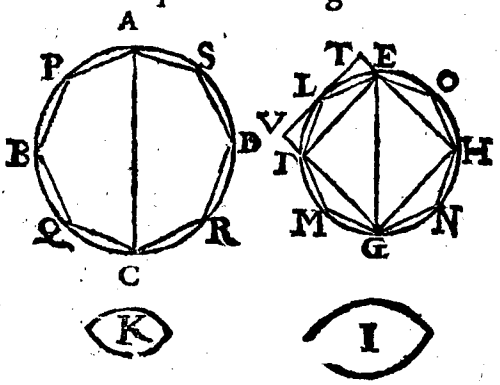
a 6. ſex.
b 21. tertij.
c 31. tertij.
d 32. primi.
e 4 ſex.
f 22. ſexti.

itaque in circulis polygona similia, inter se sunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Sit enim
a 7. *quinti.* esset æqualis, *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in



circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quidem dimidiū est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 1 ostendimus, occurrat-
b 41. *primi.* que rectis HE, GF, productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG,
c 1. *dec.* &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur

tandem

tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonũ ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. *a* Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. *b* Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

a 1. *duodecimi.*

b 14. *quinti.*

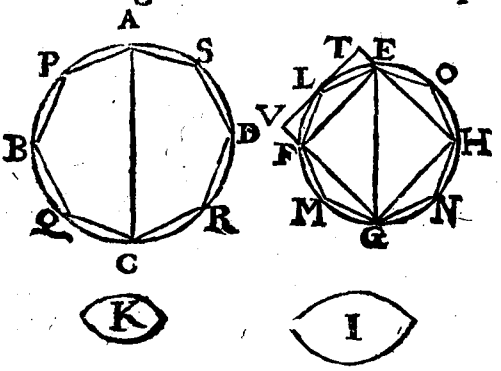
QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFG*H*, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratũ diametri minoris EG, ad quadratũ maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, *c* maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

c 14. *quinti.*

Quam-

Quamuis autem circulus A B C D, maior est, & E F G H, minor, eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli E F G H, ad quadratum diametri circuli A B C D, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circulo A B C D, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri A C, ad quadratū diametri E G, eandem habere proportionē, quam habet circulus A B C D, ad magnitudinem circulo E F G H, minorem: quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandē habere possit proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinē posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; a sit autem vt circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, siue circulus A B C D, circulo E F G H, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.



a 7. quinti.

COROLLARIVM.

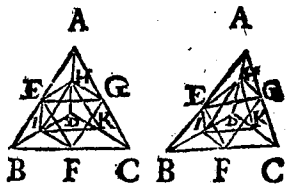
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

iij. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum A B C, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ

rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo solida EBF-GHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; huius vero basis est triangulum CFG, cui oppositum triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, nec non eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter; *a* erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC.



b Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ; *c* erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB, *d* proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; *e* erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI; ACB. *f* Quare latera trianguli *H*Ik, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum *HIK*, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula D*H*I, DIk, DkH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HI-*K*D, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDk, cum

a 2. sex.
b 9. vn. decimi.
c 10. vndec.
d 4. sex.
e 10. vndec.
f 4. sex.
g 21. sexti.

similia sint ostensa triangulo A D C, & constituta super æquales rectas A H, H D. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula A E G, H I K, cum similia sint ostensa triangulo A B C, & super rectas posita A E, H I, a quæ æquales sunt, ob parallelogrammum A E I H. Non secus æqualia erunt & similia triangula E H G, I D K, cum sint ostensa similia triangulo B D C, & habeant rectas H E, D I, b quæ æquales sunt, ob parallelogrammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales sunt & similes, per 10. def. fin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi. RVRSVS, c quia rectæ E H, H G, G E, æquales sunt, & parallelæ rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B, F G H I, B F G E; erunt triangula E H G, B I F, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: d Sunt autem & parallela cum E H, H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ sint rectis B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur solidum B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G, B I F, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum C F G H I K. e Cum enim rectæ F C, C G, G F, æquales sint, & parallelæ rectis I K, K H, H I, ob parallelogramma C F I K, C G H K, F G H I, erunt triangula C F G, H I K, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: f Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, per quas ducitur planum C F G, parallelæ sint rectis K I, K H, per quas planum K I H, ducitur. Igitur solidum C F G H I K, contentum duobus triangulis C F G, K I H, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H, G C, I F G H, prisma est. Quoniam vero prismata E B F G H I, G H I K, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K; & parallelogrammum E B F G, basis illius, duplum est trianguli C F G, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. g Ipsa inter se æqualia erunt.

d 15. 9ndec.

e 34. primi.

f 15. 9ndec.

g 40. 9ndec. DENIQVE quia prisma E B F G H I, maius est pyramide E B F I, totum parte; Est autem pyramis E B F I, æqualis & similis pyramidi A E G H, nec non pyramidi H I K D, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata E B F G H I, C F G H I K, pyramidibus A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis A B C D, excedent, hæ vero à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor vero

uer vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares A B C, E F G, duæ pyramides A B C D, E F G H, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, k, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ I L, L k, k N, N O, O M, M N, L M, M I; P R, R Q, Q T, T V, V S, S T, R S, S P, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in A I L M, M N O D; E P R S, S T V H; & in bina prismata æqualia I B k L M N, C k L M N O, P F Q R S T; G Q R S T V; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ A I L M, M N O D; E P R S, S T V H; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide A B C D, ad omnia prismata generata in pyramide E F G H, illis multitudine æqualia, vt est basis A B C, ad basin E F G. Cum enim sit vt



a C, ad c k, ita F G, ad G Q, eo quod vtraque linea diuisa est bifariam; sint autem triangula A B C, L k c, similia similiterque posita; Item triangula E F G, R Q G, ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum A B C, ad triangulum L k c, ita triangulum E F G, ad triangulum R Q G. Et permutando, vt A B C, ad E F G, ita L k c, ad R Q G. Vt autem L k c, ad R Q G, ita est prisma c k L M N O, ad prisma G Q R S T V, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma I B k L M N, ad prisma P F Q R S T, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet I B k L M N, ad vnum prisma P F Q R S T. b ita sunt duo prismata I B k L M N, c k L M N O, ad duo prismata P F Q R S T, G Q R S T V. Igitur erunt quoque, vt basis A B C, ad basin E F G, ita duo prismata in pyramide A B C D, ad duo prismata in pyramide E F G H. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in

a 22. sexti.

b 12. quinti.

pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bi
prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFG
vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, ST
harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione
Sed vt illæ bases ad has, ita est LK, basis quæ illis est æqualis &
milis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præce



denti est demonstratum, hoc est, ita est ba
sis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quo
que, vt basis ABC, ad basin EFG, ita pr
smata cuiuslibet pyramidis factæ in pyra
mide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyra
midis factæ in pyramide EFGH: Ac pro
pterea erunt quoque vt prismata pyramidis ABCD, ad prisma
pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prisma
ta pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad pris
smata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum sint, vt duo
prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH,
a 12. *quinti.* ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, ad
simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH
&c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque
basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD
ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ
pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases,
Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

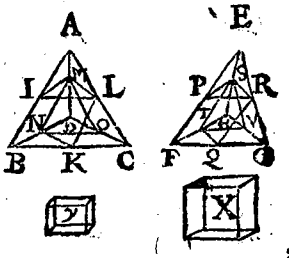
QVOD autem sit LKC, *ad* RQG, *ita prisma* CKLM
NO, *ad prisma* GQRSTV, *ita ostendemus. Intelligantur* D
verticibus D, H, *ad basis* ABC, EFG, *demissæ perpendiculares*
quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH.
b 17. *Vndec.* *Quoniam igitur plana parallela* ABC, MNO, b *secant duæ*
rectas, nempe DC, *& perpendicularem ex* D, *demissam* propo
tionaliter; secatur autem DC, *bifariam in* O; *secabitur quoque*
perpendicularis ex D, *demissa bifariam in puncto, cui plano*
MNO, *occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex* H, *demissa*
bifariam secabitur à plano STV. *Quare cum totæ perpendicu*
lares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum al
titudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQR
STV, *cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases*
LKC, RQG, *per ea, quæ ad propos.* 34. *lib.* 11. *demonstra*
uimus.

THEOR

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis A B C D, E F G H, quarum bases triangula A B C, E F G. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur vt basis A B C, ad basin E F G, ita pyramis A B C D, ad solidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide E F G H. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis E F G H, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide E F G H, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata P F Q R S T, G Q R S T V; *a* quæ maiora sunt dimidio pyramidis E F G H: Item à reliquis pyramidibus E P R S, S T V, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis E F G H, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis E F G H, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide E F G H, maiora solido X. Diuidatur pyramis A B C D, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides A I L M, M N O D, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. *c* Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide A B C D, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide E F G H, vt basis A B C, ad basin E F G, hoc est, vt pyramis A B C D, ad solidum X. Sunt autem omnia prismata in pyramide A B C D, minora, quam tota pyramis A B C D; *d* erunt quoque omnia prismata in pyramide E F G H, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide E F G H.



SIT deinde solidum X, pyramide E F G H, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis A B C D, ad solidum X, vt basis A B C, ad basin E F G: Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem A B C D, vt basis E F G, ad basin A B C. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem A B C D, ita pyramis E F G H, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide E F G H; *e* erit & pyramis A B C D, maior solido Y. Quare erit, vt basis E F G, ad basin A B C, ita py-

a 3. *duo decimi.*

b 1 *dec.*

c 4. *duo decimi.*

d 14. *quinti.*

e 14. *quinti.*

ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X,

a 9. quinti. a sit autem pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sunt, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque

b 9. quinti. *erat ad totam pyramidem.* b *Pyramis ergo constituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.*

COROLLARIVM.

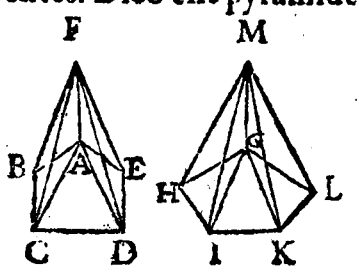
HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certo vna & eadem.

ITEM sequitur è conuerso, pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin.



e 5. duo decimi. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. c Quia vero est, vt basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt basis ABCD, ad basin

basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: a Sed rursus est, vt basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt basis GHIKL, ad basim GKL, ita pyramis GHIKL, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. b Rursus quoniam est, vt basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionib. cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit vt basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

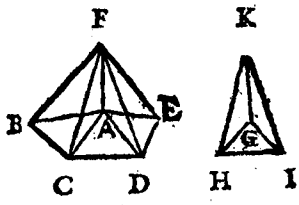
a 5. *duodecimi.*

b 5. *duodecimi.*

ABCDE	ABCDEF
ADE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM.

SCHOLIVM.

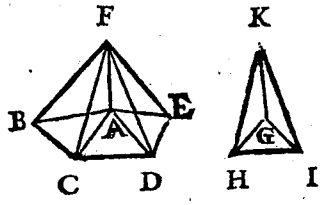
QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygona latera habent multitudine aqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. c *Quoniam vero est, vt basis ABG, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* d *Erit vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHI, secundam*



c 5. *duodecimi.*

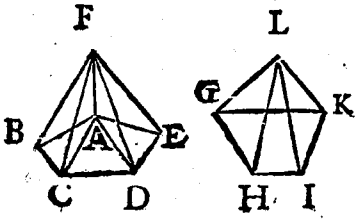
d 24. *quinti.*

cundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, & vt modo est ostensum,
a 5. duodecimi. a & vt basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; b Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem,
b 24. quinti. ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum.



Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides qualibet, quarum vna basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere à triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDE, GHIKL, quarum bases sint polygona, sintque plura latera in vna basi quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratum, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem;



c 24. quinti. c Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proximè demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante

vt ante est ostensum; a *Erit etiam vt basis A B C D E, prima quanti-* a 24.
tas cum quinta, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyra- quinti.
mis A B C D E F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi A B C D E.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

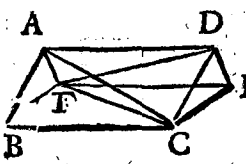
PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vj.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma A B C D E F, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia A B F, D C E. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe A C, in A B C D; C F, in B C-E F; F D, in A D E F. *b* Quoniam igitur triangula A B C, A D C, æqualia sunt; *c* estque vt basis A B C, ad basin A D C, ita pyramis A B C F, ad pyramidem A D C F, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum A B C D, demissam; Erunt & pyramides A B C F, A D C F, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, E F D C, super æquales bases A D F, E F D, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum A D E F, demissa. Est autem pyramis A D C F, eadem pyramidi A D F C, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi A D C, & triangulis A D F, A C F, D C F; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi



b 34. primi.
c 5. duo decimi.

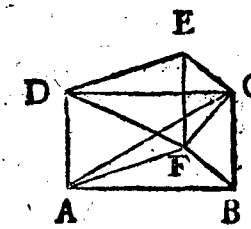
ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, vt perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF, in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

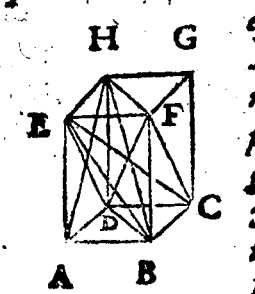
HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin & altitudinem.

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABFC, CFADCF, CDEF, a vt demonstratum est. Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, imò eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum.

a 7. duode.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, quibus prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, erit, vt demonstratum est, pyramis ADBH tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; b Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam



b 12. quinti.

tiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt aquales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione aquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, aqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basim ABCD, constituta, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertia partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides aquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

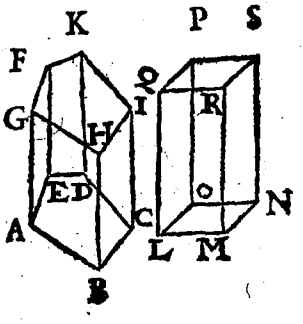
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis aqualem. Nam eiusmodi pyramis, aqualis est pyramidi illi, qua eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

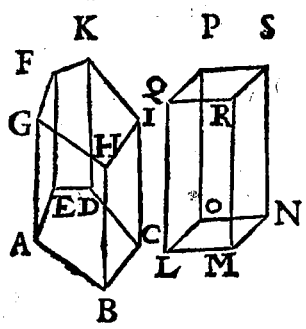
SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases, inter se sunt, vt bases.

QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & aqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero linea recta: nec non de parallelepipedis, qua nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIKLMNOPQRS, quorum bases



sint

ſint figuræ multilateræ. Dico & eſt baſis ABCDE, ad baſim L M N O, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis trium que baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, li



nea recta ducantur, conſurgent duæ pyrami des ſub eadem altitudine cum priſmatis hu bentes eaſdem baſes; Ac proinde per coroll. prædictum huius propoſ. qualibet pyramis a 15. quinti. *tertia pars erit ſui priſmatis. a Quam obrem erit, & pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt & baſis ad baſin, & oſtenſum eſt propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque & baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.*

CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, & baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eo dem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

SCHOLIVM II.

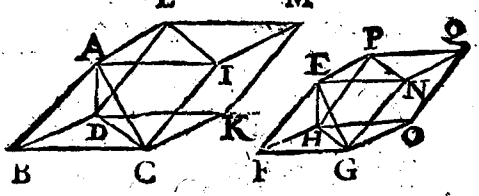
CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelliguntur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo priſma dici ab Euclide, & in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis vnum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia pars ipſius priſmatis, & in corollario 1. demonſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, & in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis contineatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem: ſed tertia eius pars, ſed duæ tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, & parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex corolla-

corollario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, duæ tertiæ partes prismatum, vt modo demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

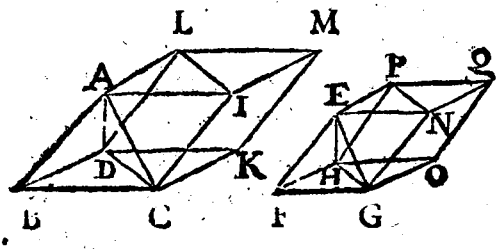
SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares A B C D, E F G H, ita vt bases A B C, E F G, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G. Extendantur enim plana triangulorum A B C, C B D, D A B, perficianturque parallelogramma B I, B K, B L. Deinde ducantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta K M. Erit igitur completum parallelepipedum B M, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi B M, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, sunt æquales, estque vt A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, similia. Eodem modo cum anguli A B D, E F H, sint æquales, sitque vt A B, ad B D, ita E F, ad F H; Item anguli D B C, H F G, æquales, & vt D B, ad B C, ita H F, ad F G: erunt & parallelogramma A L, B K, parallelogrammis F P, F O,



similia.

a 24. Vndec. similia. a Sed tam tria BI, Bk, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, b sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia



sunt sex planis solidum FQ ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, c prismata DBCIKL, HFGNPE, habent eandem

c 15. quinti.

proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla, & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

d 11. quinti.

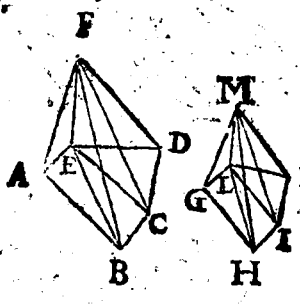
c 33. Vndec.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos recta EB, EC, LH, LI, f diuisa erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE similia erunt trian-

f 20. sexti.



gulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad FA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH: Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita LH ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM,

g 5. sex. *erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. g Quare æquian-*

gula

ula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. a Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; b Atque idcirco erit vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, c cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

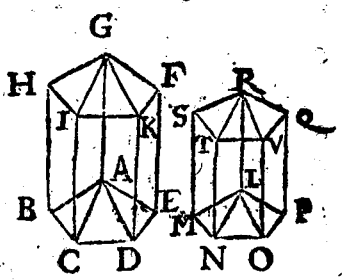
a 8. duo decimi.

b 12. quinti.

c 8. duo decimi.

SCHOLIVM.

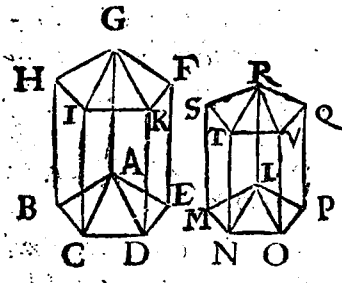
EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, d erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM; Vt autem CB, ad CA; ita quoq; est NM, ad NL, ob similitudinem trianguli BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniã angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinẽ prismatũ; si ille huic superponatur, omnia inter se cõuenient, nimirũ angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD; Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo q; anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL,



d 20. sexti.

æquales sunt, Ac propterea cũ latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia,

nalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelo-
gramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC,
GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata AB
CIGH, LMNTRS, similia sunt, ex defin. solidorum similium.
Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOL
TV; nec non prismata AEDKGF, LR
OVRQ. Quapropter prismata ABC
GH, CDAGIK, AEDKGF, ad pri-
smata LMNTRS, NOLRTV, LR
OVRQ, per ea, quæ demonstrauimus ad
propos. 34. lib. 11. triplicatam habent pro-
portionem singula ad singula, laterum ho-
mologorum BC, CD, DE, ad MN, NO,
OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstra-
mus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportio-
nem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quæ
paulo ante ostensa est ad idem demonstrandum in pyramidibus multi-
tangulis.



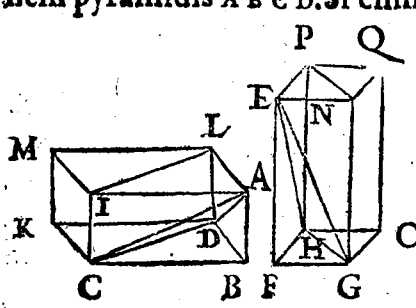
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes di-
uidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homo-
logas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis
tis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in
prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia
& homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

vij. THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, FQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectantur quæ rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint



sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. a Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: b Vt autem basis BI, ad basim FN, ita est triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

a 34. undec.
b 15. quinti.

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; c cum sit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ; d Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

c 14. quinti.
d 34. undec.

SCHOLIVM.

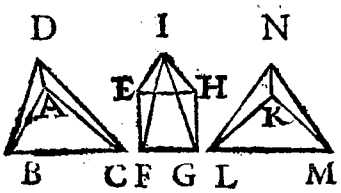
EADEM ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, basin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; e erit vt basis ABC, ad basin KLM, hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis



e 9. duodecim.

ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium bases & altitudines reciprocantur.

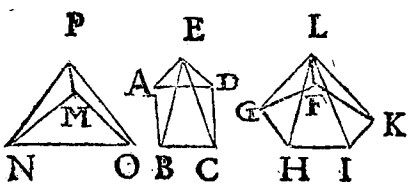
SED reciprocentur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo



cum basis KLM, æqualis sit basi EFG, & altitudo pyramidis KLMN, eadem quæ pyramidis EFGHI, ponatur autem esse vt ABC, ad EFG, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt basis ABC, ad basin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. a *Quamobrem æquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis sit pyramidi EFGHI, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod erat propositum.*

a 9. duodecimi.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL; quarum bases sint multangulæ. Fiat rursus triangulum MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide



BCDE. Eritque ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE. Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis erit pyramidi FGHIKL. Quare, cum nunc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, ad æqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constitutæ enim eodem modo figura, cum basis MNO, æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIk, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante ostendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIkL. Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis ex scholio propos. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, æqualis erit. Quod est propositum.

OMNIA hæc facile quoq; demonstrabuntur conuenire prismatis quibuscunque. Nam si prismata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides

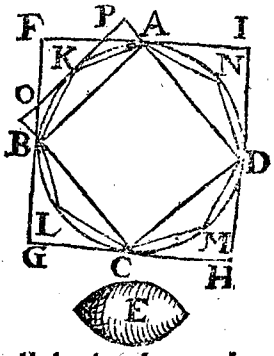
pyramides earundem altitudinum cum ipsis, & super easdem bases, aequales; cum sint eorum tertia partes, ex coroll propos. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorum vertices, linea recta, vt in scholio eiusdem propos. ostensum est. Quare, vt modo demonstrauimus, bases harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

RVRSVS, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, vt demonstratum est, pyramides aequales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, vel certè sesquialtera, aequalia quoq; sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. IX.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

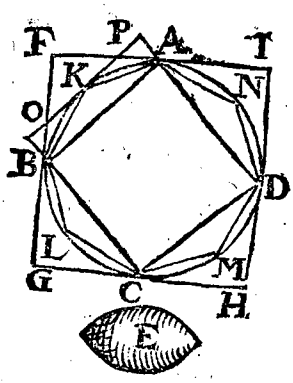
HABEANT conus & cylindrus basin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturq; super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib 4. ostendimus; & estq; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedum basis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius basis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per k, recta OP, tangēs circulum in k, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad prop. 27. lib. 1. ostendimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AkB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulum AkB, dimidiū est parallelogrammi ABOP; erit quoq; prisma basis AkB, dimidium prismatis, seu



a 32. Vndec.

b 41. primi.

parallelepipedi basis A B O P: cum sit prisma ad prisma, vt ba
ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrau
mus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium
segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta AB, &
peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases
reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, qua
coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri
quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata si-
mul maiora sunt, quam dimidia omnium



segmentorum cylindri simul. Quod si
rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur
bifariam, & adiungantur rectæ lineæ,
cõstituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro,
quæ maiora erunt simul, quam dimidia
omnium segmentorum cylindri simul,
quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam vero si à cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus
quam dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium
AKB, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio,
a 11. dec. a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium
AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum
triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit
conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum.
Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelligaturque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine
b 6. duo decimi. coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, b est-
que vt

que vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiungantur-que rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratque rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A k B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo trian- a 41. gulum A k B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque *primi.* pyramis super basin A k B, dimidium pyramidis super basin A B O P, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam ba- b *6 duo* ses; ac proinde pyramis super basin A k B, maior erit dimidio se- *decimi.* gmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A k B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ A k, k B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quã dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium A k B, B L C, C M D, D N A; atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tan- c 1. *dec.* dem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A k, k B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex eo-dem detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A k B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in co-

rollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demonstra-
tum, erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est
absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque
maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propter-
eaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia
pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem
æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

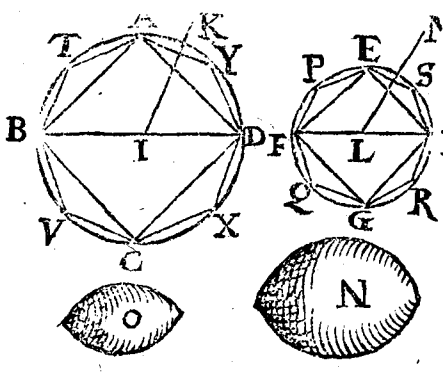
*QVAMVIS propositio hæc solum intelligatur de conis & cylin-
dris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus ta-
men conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspi-
cuum est eius demonstrationem diligenter tuenti. Itaque propositio
vniuersè ita proponi poterit.*

OMNIS conus siue rectus, siue scalenus, tertia pars
est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem
cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit
idem axis coni & cylindri.

xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri,
inter se sunt, vt bases.

SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases
circuli A B C D, E F G H, altitudines vero æquales I k, L M. Dico
vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad
cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit vt basis A B C D, ad ba-
sim E F G H, ita conus A B C
D k, ad aliquam magnitudi-
nem, nempe ad M, quæ vel
maior erit, vel minor cono E
F G H M. Si enim esset æqua-
lis, *a* haberet conus A B C D k,
ad conum E F G H M, & ad N,
proportionē eandem; ac pro-
pterea esset conus ad conum,
vt basis ad basin: quod non
conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M,
magnitudine O, ita vt conus E F G H M, æqualis sit magnitudi-
nibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo E F G H, quadratum
E F G H, diuidanturque peripheriæ E F, F G, G H, H E, bifariam
in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ E P, P F, F Q, &c. Quoniam igi-
tur si ex cono E F G H M, detrahatur pyramis super basin E F G H,
eiusdem



a 7. *quinti.*

eiusdem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; *a* relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EPGH, ita ponitur conus ABCDk, ad magnitudinem N, *b* & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYk, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDk, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYk, minor sit cono ABCDk, pars toto, *c* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

a 1. *decimi.*

b 6. *duodecimi.*

c 14. *quinti.*

SIT Secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDk, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDk. Ponatur vt N, ad conum ABCDk, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDk, quam O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDk. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque minor est ostensa; Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDk, ad N; *d* Sit autem, vt conus ABCDk, ad N, ita idem conus ABCDκ, ad conum EFGHM, erit quoq; vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDκ, ad conum EFGHM. *e* QVONIAM autem, vt conus ABCDk, ad conum EFGHM,

d 7. *quinti.*

e 15. *quinti.*

ita est cylindrus A B C D k, (qui triplus est coni A B C D k,) ad cylindrum E F G H M; (qui triplus est coni E F G H M,) Erit quoque vt basis A L C D, ad basin E F G H, ita cylindrus A B C D k, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo vsi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, cipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, oratione superius tradita, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifeste indicat, ita vt propositio vniuersè proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

CONVERTETVR hac propositio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum prop. 32. lib. II. ostendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

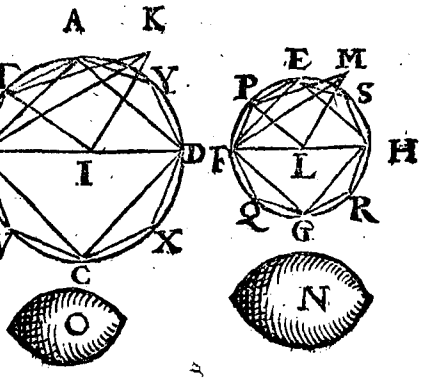
ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. II. demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

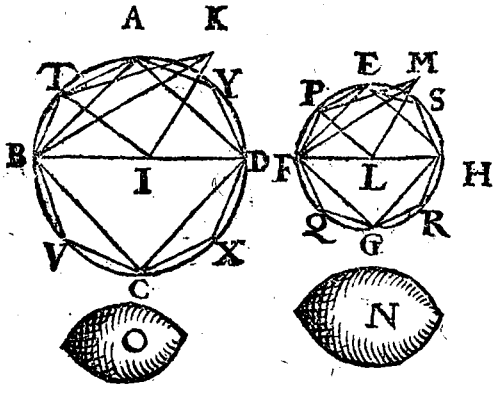
SINT similes coni, & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F G H, axes vero L k, L M, & diametri basium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non creditur, habeat conus A B C D k, ad aliquam magnitudinem N, propor-

proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Erit-
que N, vel minor, vel maior cono E F G H M. Si enim esset æqua-
lis, a haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, pro- a 7.
portionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad co- quinti.
num E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri
B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum
N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatque ea-
dem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis E P F Q G R H S M, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T, M F, M P, vt habeantur duo triangula B K T, E M P, pyramidum A T B V C X D Y K, E P F Q G R H S M; & connectantur rectæ T I, P L. Quoniam igitur coni A B C D K, E F G H M, similes ponuntur; erit ex 24. defin. lib. 11. vt diameter B D, ad diametrum F H, b ac propterea vt semidiameter B I, ad semidiametrum F L, b 15.
ita axis I K, ad axem L M; Ac permutando vt B I, ad I K, ita F L, ad quinti.
L M. Cum igitur anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorum bases; c Erunt triangula B I K, F L M, æquiangula; d Ac propterea vt c 6. sex.
K B, ad B I, ita erit M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad d 4. sex.
F P, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P. (Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus arcubus B T, F P, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitque vt B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æqualitatem tam linearum B I, I T, quam F L, L P; e erunt triangula B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, vt K B, e 6. sex.
ad B T, ita M F, ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sunt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis I K, rectus ponatur ad circulum A B C D, f erunt bases K B, K T, æquales. f 4. pri.
Eodem modo æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erunt, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. g Quoniam vero vt K B, ad B T, ita K T; g 7.
ad eandem B T; Item vt M F, ad F P, ita M P, ad eandem F P: Erat quinti.
autem vt K B, ad B T, ita M F, ad F P: Erit quoque vt K T, ad B T; ita M P, ad F P; Et conuertendo vt B T, ad T K, ita F P, ad P M. Quare cum sit vt T K, ad K B, ita P N, ad M F, & vt K B, ad B T, ita M F, ad F P; Et vt B T, ad T K, ita F P, ad P M, veluti ostensum est; habebunt triangula B K T, F M P, latera proportionalia, h ideo- h 6. sex.



que æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides A T V C X D Y K, E P F Q G R H S M, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum B T, F P, ex coroll. propos. 8 huius lib. Vt autem B T, ad F P, ita est B I, ad F L, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P;

a 11. *quinti.*



Et vt B I, ad F L, ita B D, ad F H. Igitur pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem habebit quoq; triplicatam proportionem triplicatæ diametrorum B D, F H. Ponebatur autem & pyramis A T B V C X D Y K, ad portionem coni A B C D K, ad N, eandem diametrorum triplicatam. Igitur erit vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus A B C D K, ad N. Quare cum pyramis A T B V C X D Y K, minor sit cono A B C D K, pars toto; b erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono E F G H M.

b 14. *quinti.*

SIT deinde N, maior cono E F G H M. Cum ergo ponatur conus A B C D K, ad N, habere proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autem & pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime ostendimus: Erit vt conus A B C D K, ad N, ita pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M; & conuertendo vt N, ad conum A B C D K, ita pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cum ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad T B, hoc est, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoq; N, ad conum A B C D K, proportionē triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad O, magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur quam conus E F G H K; c erit quoque conus A B C D K, maior quam O. Quapropter conus E F G H M, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habebit triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem ali-

c 14. *quinti.*

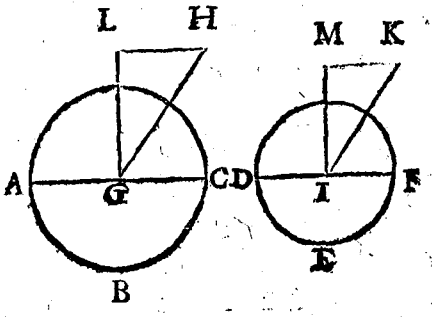
alio cono minorem, proportionẽ habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor est ostensa. Æqualis igitur est; ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum BD, & FH; erit quoq; conus ABCDK, ad conum EFGHM, in eandem diametrorum proportione triplicata. a 7. *quinti.*

b QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, eandem quoq; obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atq; prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorũ, quæ in basibus. Quod ostendendum erat. b 15. *quinti.*

SCHOLIVM.

QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur pyramide, in secunda parte huius propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

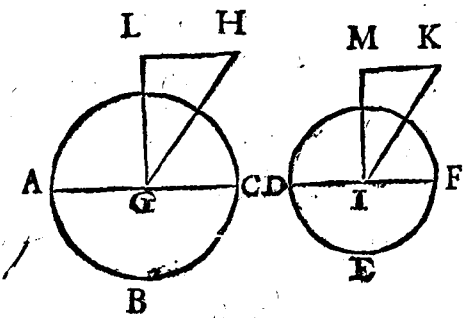
HÆC porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionẽ diametri ad diametrũ triplicatam. Intelligãtur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinũ, quorũ axes GL, IM. Ducanturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF, quæ diametri basiũ erũt. Quoniã igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF, c erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdem recta. d Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in AC, DE, cõmunes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt,



c 12. *Vndec.*

d 38. *Vndec.*

se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: sunt autem
a 32. primi. *& anguli C G L, F I M, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Re-*
qui igitur, H G L, K I M, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni
A B C H, A B C L, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta H L
b 29. primi. *per axium vertices ducta ipsi A C, parallela; b ideoque angulus L H*
ctus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli



C G L, F I M, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli C G H, F I K. Trianguli igitur G H L, I K M, æ-
c 4. sex. *quiangula sunt; c atque ideirco erit vt G H, ad G L, ita I K, ad I M; & permutando, vt G H, ad I K, ita G L, ad I M. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita est A C, diameter ad D F, diametrum, quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & G L, axis ad I M, axem erit, vt diameter A C, ad D F, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti A B C L, D E F M, similes erunt ex definitione.*
d 12. duodec. *d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus A B C L, cono & cylindro A B C H, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus D E F M, cono & cylindro D E F K, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit vt conus & cylindrus A B C L, ad conum & cylindrum D E F M, ita conus & cylindrus A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, ideoque proportio coni & cylindri A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, triplicata quoque erit diametri A C, ad diametrum D F. Quod est propositum.*

xj. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelis: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus A B C D, plano G H, parallelo aduersis planis A B, C D, quod quidem secet axem E F, in I. Dico vt est cylindrus A B H G, ad cylindrum G H C D, ita esse axem E I, ad axem I F. Intelligatur enim cylindrus A B C D, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo E C, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantum libet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ E K, K L, æquales ipsi E I. Item quotcunque rectæ F M, M N, N O, æquales ipsi F I. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ I H, K P, L Q, M T, N V, O X, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli E C, describent circulos G H, P Q, S T, & V X,

T α, V Z, X Y, parallelos æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum S Q X Y. Quoniam vero tam cylindri S P, P A, A H, super bases æquales Q S, P R, B A, & sub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales sunt, quam cylindri X Z, Z T, T D, D H, super æquales bases X Y, V Z, T α, C D, & sub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quam multiplex est axis I L, ipsius axis I E; Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quam multiplex est axis I O, ipsius axis I F. Quoniam autem si axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis est axi I O, (multiplici axis I F, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propos. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, secundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper aquidistantes circa centra L, K, E, &c. vna cum recta S T, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione Cylindri.

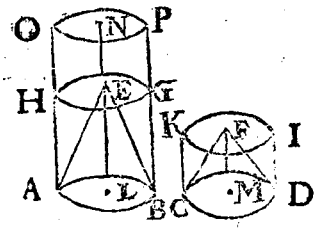


THEOR. 14. PROPOS. 14. xj.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT

SINT ſuper baſes æquales A B, C D, duo coni A B E, C D F, duo cylindri A B G H, C D I K, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) L E, M F. Dico eſſe conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A G H, ad cylindrum C D I K, vt eſt altitudo L E, ad altitudinem M F. Extendatur enim cylindrus A B G H, ad partes G H, vna cum eius axe L E, & rectangulo A G; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O P, eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes, & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. prop. 11. huius lib. *a* cylindrus A G, ad ipſum eandem habebit proportionem. *b* Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, vt axis, ſeu altitudo L E, ad axem, ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo L E, ad altitudinem M F.



a 7. *quinti.*

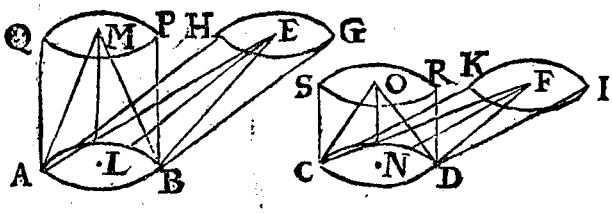
b 13. *duode.*

c 10. *duode.* d 15. *quinti.*

c QVIA vero coni A B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; *d* ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, vt altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E; C D F, & cylindri A B G H, C D I K, ſcaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, eſſe, vt eſt altitudo L M, ad altitudinem N O. Super baſin enim A B, conſtruatur cylindrus rectus A B P Q, ſub altitudine L M; item



e 14. *duod.* *ſuper baſin C D, cylindrus C D R S, ſub altitudine N O. e Quoniam igitur eſt cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrum rectum C D R S, vt altitudo L M, ad altitudinem N O: Eſt autem cylindro A B P Q, æqualis cylindrus A B G H: Item cylindro C D R S, cylindrus C D I K, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoq; cylindrus A B G H, ad cylindrum*

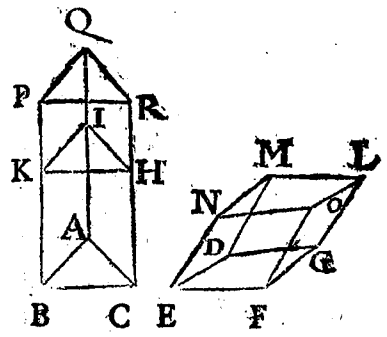
f 10. *duode.* *C D I K, vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod eſt propoſitum. f QVONIAM autem coni, cum ſint tertiæ partes cylindrorum, eandem*

eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod quinti. a 15.
tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus; alterum vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, aqualis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoque cylindrus scalenus ABGk, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

b QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, c cum illi horum sint tertiæ partes; Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est. b 15. quinti. c 10. duod.

EADEM quoque hac propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGLM, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineæ AI, CH, BK, prismatis ABCHIk, ad basin ABC, perpendiculares, ita vt Bk, sit altitudo prismatis ABCHIk; Productis autem rectis AI, CH, Bk, sumantur IQ, HR, kP, æquales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIkPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntque prismata HIkPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines æquales, inter se æqualia, ex coroll. 2. propos. 7. huius lib.

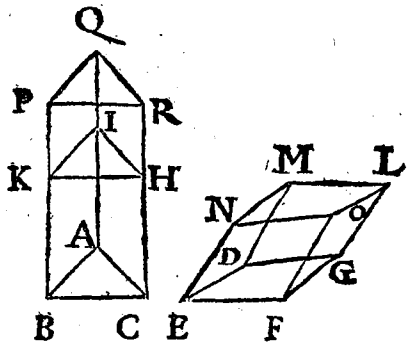


d Ac propterea prisma ABCHIk, ad vtrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma ABCHIk, ad prisma HIkPQR, est vt planum BI, ad planum kQ; e Et vt planum BI, ad planum kQ, ita est recta Bk, ad kP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, vt BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum. d 7. quinti. e 1. sex.

QVOD si insistentes lineæ AI, CH, BK, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma,

cuius

cuius insistentes sint perpendiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cum ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin, sint æqualia, quodque prisma constitutum ad prismatis EL, & illius altitudo ad huius altitudinem; erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, & altitudo illius, ad altitudinem huius.



a 15. quinti. b 10. duodec.

a *QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem cum prismatis,* b *quod illæ sint horum tertiæ partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, & est altitudo ad altitudinem.*

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, & dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HÆC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA quoque hæc facile conuerti possunt hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM alioquin pars æqualis foret toti, & in conuerso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

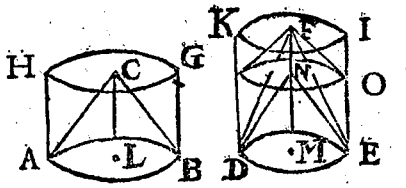
xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudines vel LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 7. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.

QVOD

QVOD si altitudines L C, M F, inæquales fuerint, sit M F, maior, ex qua abscindatur M N, ipsi L C, æqualis; & per N, ducatur planum O N, basi D E, parallelum, vt in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri D O, O K. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri A B G H, D E I K; *a* erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O. *b* Est autem vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita basis A B, ad basin D E, cum æquales sint altitudines: *c* Item vt cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cum bases sint æquales, imò vna & eadem D E. Igitur erit quoque vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc est, ad huic æqualem L C; Ac propterea reciprocæ sunt bases & altitudines.



a 7. *quinti.*

b 11. *duodec.*

c 14. *duode.*

IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni A B C, D E F, sint æquales; erunt & cylindri A B G H, D E I K, æquales. *d* cum coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus M N, N F, constituantur duo coni, vt in figura.

d 10. *duodec.*

SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, sint æquales, cum sit vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C; erunt & bases A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases A B, D E, & sub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem L C, hoc est, ad huic æqualem M N; *e* Est autem vt basis A B, ad basin D E, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, cum altitudines sint æquales: *f* Item vt altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cum bases sint æquales: erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O; *g* Ideoque cylindrus A B G H, cylindro D E I K, æqualis erit.

e 11. *duode.*

f 14. *duode.*

g 9. *quinti.*

AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum A B C, D E F, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cum eædem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam

ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo nos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æquilium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

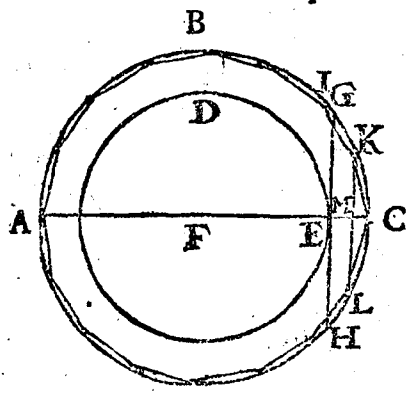
NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti eisdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoq; erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oportetque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GEH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu GCH, ex AGC, auferatur dimidium AG, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, &



21. *dec.* sic deinceps; a relinquetur tandem minor arcus quam CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero

numero & magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, a quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & pariter latum: Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt, b erunt rectæ GH, kL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DF, in solo puncto E; recta kL, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta Ck, quæ longius à circulo DE, abest, quam kL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, c ideoque æqualiter cum Ck, à centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

a 29. tertij.

b 29. primi.

c 14. tertij.

COROLLARIVM.

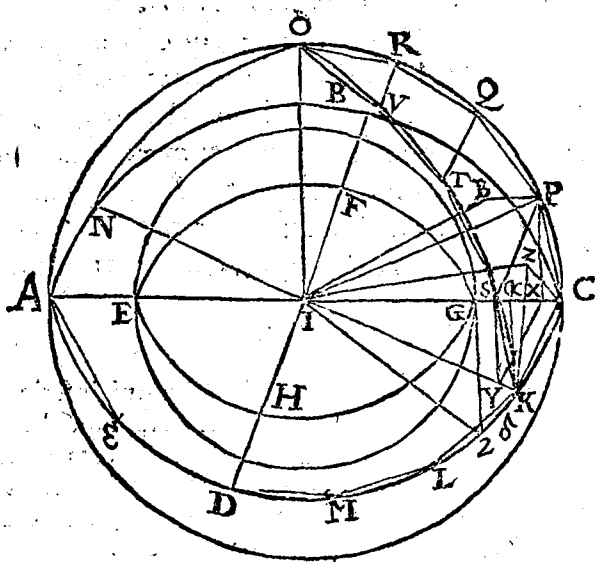
HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

PROBL. 2. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatq; in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintq; communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrũ sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionũ sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarũ ad earũ superficiem; erunt ipsæ sectio-

nes, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, vt fiant
a 16. quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. *a* Deinde in maiori circulo
duode. A B C D, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ, ad circumferentiam vsque circuli A B C D, quæ circulum
b 1. E F G H, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, *b* applicetur in circulo A B C D, recta æqualis A ε. Quia vero si ardeat
quarti. C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, *c* latus
c 19. C γ, oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ,
primi. quod minori an-



gulo opponitur, et mirum acuto; estque quoque recta G γ, maior recta A ε, ac proinde arcus C γ, arcu A ε, maior. Constat autem ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus C δ, æqualis arcui A ε, æquidistante C D, dimidiū auferatur D L, & ex reliquo C L,

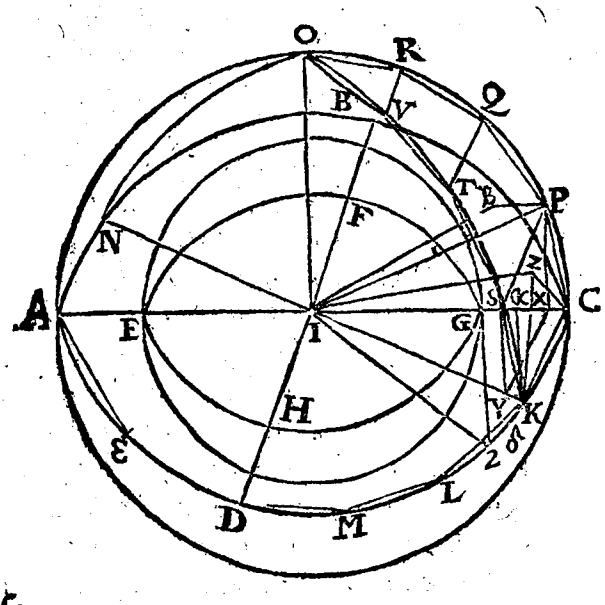
d 1. *dec.* dimidium L K, & sic deinceps; *d* relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, seu arcu A ε. Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C K, subtensa minor quam recta A ε, hoc est, quam G γ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet; multo minus recta C K, subtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro K N, *e* erigatur ex centro I, ad planum
e 12. *&* *vndec.* circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, K N,
f 18. plana ducantur, *f* quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficientque
& *vnde-.* communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia vero anguli O I C, O I K, recti
g *schol.* sunt, ex defin. 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt O C, O K; atque adeo
21. *ter.* cum circuli A B C D, A O C, N O K, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D,

ties C D, O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis C D; *a* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C k, k L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; k S, S T, T V, V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, *b* quæ in communes sectiones A C, N k, cadent; *c* eruntque inter se parallelæ. a 29. tertij. b 38. vndec. c 6. vndecimi.

QVONIAM igitur triangulorum P C X, S k Y, anguli P X C, S Y k, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *d* & anguli P C X, S k Y, æquales, quod & æquales sint peripheriæ A O P, N O S, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis A O C, N O k, æqualibus demantur arcus æquales C P, k S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X, æquales duobus angulis S k Y, S Y k, trianguli S k Y. Sunt autem & latera P C, S k, rectis angulis opposita, æqualia. *e* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y k, æqualia erunt. Quare cum rectæ P Y, S Y, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta X Y, *f* æquales quoque erunt & parallelæ P S, X Y, inter se. *g* At quia & rectæ C k, X Y, parallelæ sunt, quod latera I C, I k, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectæ C X, K Y, relinquentur & I X, I Y, æquales; Ac proinde erit, vt I X, ad X C, ita I Y, ad Y K) *h* Erunt parallelæ quoque P S, C k, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi K Y, *i* ideoque eas coniungentes rectæ C P, k S; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum C k, S P, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli A B C D, perpendiculares, & connectantur rectæ Q C, T k, ostendemus similiter C k, Q T, esse parallelas; atque adeo ipsas P S, Q T, inter se parallelas esse, cum eidem C k, sint parallelæ; totumque quadrilaterum P S T Q, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum Q T V R. *k* Est autem & triangulum R V O, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera k L, L M, M D, ductis scilicet quadrantibus O L, O M, O D, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sunt prædictis inter quadrantes O C, O k, super C k, constructis, inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem E F G H. d 27. tertij. e 26. primi. f 33. primi. g 2. sex. h 8. duodec. i 7. vndecimi. k 2. vndecimi.

DVCATVR enim ex I, ad planum C k S P, perpendicularis I Z, connectanturque rectæ Z C, Z k. Cadere autem perpendicularem I k, intra quadrilaterum C k S P, in scholio sequenti

ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli I Z C, I Z K, recti sunt; a erit quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ I K, quadratis rectarum I Z, Z K, æqualia. Cum ergo quadrata rectarum æqualium I C, I K, æqualia inter se erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, quadratis rectarum I Z, Z K, æqualia; proinde demptis communi quadrato I Z, reliqua quadrata rectarum Z C, Z K, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectæ Z C, Z K, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad P S, ducentur, æquales esse & inter se & rectis Z C, Z K. Quare circulus ex Z, ad intervallum Z C, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eadem quera-



tione circa reliqua quadrilatera P S T Q, Q T V R, & triangulum R V O, circulos describi posse: demonstrabimus. Quoniam vero, vt postea ostendemus, angulus C Z K, obtusus est; b erit quadratum rectæ C K, maius quadratis rectarum Z C, Z k; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ C K, duplo quadrati rectæ Z C.

DVCATVR ex k, ad rectam A C, perpendicularis k α. Cum igitur A C, dupla sit ipsius A I, & A α, maior sit, quam A I, erit A C, minor duplo ipsius A α. Quam ob rem cum sit, c vt A C, ad A α, ita rectangulum sub A C, α C, ad rectangulum sub A α, α C; quod bases horum rectangulorum sint A C, A α, & eadem altitudo α C; erit quoque rectangulum sub A C, α C, minus duplo rectanguli sub A α, α C. d Est autem rectangulum sub A C, α C, æquale quadrato rectæ C K, & rectangulum sub A α, α C, æquale quadrato rectæ k α; quod recta C k, inter A C, α C, sit media proportionalis, & recta k α, inter A α, α C, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta A k, fieret triangulum rectangulum A C k, &c.) tur & quadratum rectæ C k, minus erit duplo quadrati rectæ k α, maius esse duplo quadrati rectæ Z C, erit quadratum rectæ k α, maius quadrato rectæ Z C. e Quoniam vero quadratum rectæ I C, æquale est quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ I k, quadra-

b 12. secund.

c 1. sex.

d 17. sexti.

e 47. primi.

tis re-

tis rectarum I α, α k; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium I C, I k. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarum I α, α k. Si ergo ex his demantur quadratum maius, nempe rectæ α k; & ex illis minus, videlicet rectæ Z C, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z, maior quam recta I α. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorem E F G H, quod per coroll. propos. præcedentis recta k α, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani C k S P, longius absint à sphæra E F G H, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum C k S P, sphæram E F G H.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum C K S P, non tangere sphæram minorem E F G H, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam C K, minorem esse recta c γ: *a* Est autem C k, maior quam Z C, quod angulus C Z k, obtusus sit, vt mox demonstrabitur; Multo maior erit G γ: quam Z C; Ac propterea quadratum rectæ G γ, maius quadrato rectæ Z C. *b* Quia vero quadratum rectæ I γ, æquale est quadratis rectarum I G, G γ; & quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, sit sphæræ minoris E F G H, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum C k S P, sphæram E F G H, nequaquam continget.

a 19. primi.

b 47. primi.

DVCATVR rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa P S T Q descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. *c* erit quadratum rectæ I P, æquale quadratis rectarum I β, β P. Quia vero & quadratum rectæ I c, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I c, I P,) æquale est quadratis rectarum I Z, Z c; erunt quadrata rectarum I β, β P, quadratis rectarum I Z, Z c, æqualia; Est autem quadratũ rectæ Z c, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z c, maior sit, quam linea β P, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratũ rectæ I β, reliquo quadrato rectæ I Z, maius erit; ideoque & linea I β, maior quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram E F G H, existet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum P S T Q, quam c k s p, tanget sphæram maiorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus,

c 47. primi.

quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

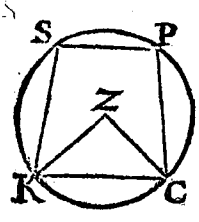
COROLLARIVM.

EX iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autē, vt vna pyramis ad vnā pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: habebit quoque polyedrum vnius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum, a 15. *quinti.* sphærarum, *a* cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum C K S P, & angulum C Z K, in quadrilatero C K S P, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt I K, ad K C, ita I Y ad Y X, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula I C K, I X Y, similia sint.) Est autem I K, maior quam I Y; b erit & K C, maior quam Y X. Cum igitur Y X, aqualis sit ostensa ipsi S P, erit quoque K C, maior quam S P. Ac propterea in hac figura, arcus C K, maior erit arcu S P, ex scholio propos. 28. lib. 3. c Quare cum arcus C P, K S, ipsi K C, lineæ sint aequales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum aequalibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus C P, K S, arcu P S, maiores; Atq; idcirco quilibet arcum C P, K S, quadrantem circuli C K S P, excedet; atque à semicirculo superabitur; ac proinde multo magis segmentum S P, minus erit semicircu-

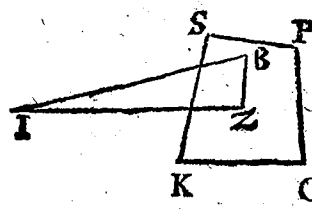


b 14. *quinti.*

c 28. *tertij.*

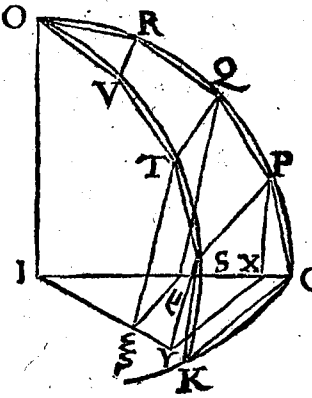
micirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum C K S P. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est K β, cadere intra quadrilatera; nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum O R V, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus C K, quadrante maior est; angulus C Z K, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, & perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri G K S P, longius à centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & adiungantur rectæ I θ, Z θ. Quoniam ergo angulus I Z θ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppositum I θ, maius latere I Z, quod minori angulo I θ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius à centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.



a 19. primi.

TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam Z C, maiorem esse recta β P. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam P S, maiorem esse recta Q T. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris I C, I K, I Q, & quadrantibus O C, O K, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli A B C D, in quo est triangulum I C K, perpendiculares Q μ, T ξ, b quæ in communes sectiones I C, I K, cadent, c eruntque inter se se parallelæ, vt de rectis P X, S Y, dictum est. Quod si adiungatur recta μ ξ; erunt Q T, μ ξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales P S, X Y. d Quia vero μ ξ, ipsi C K, parallela est; quod latera I C, I K, proportionaliter sint sectæ in μ, & ξ, veluti diximus de recta X Y; e erunt quoque μ ξ, X Y, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt I Y, ad Y X, ita I ξ, ad ξ μ; Est autem I Y, maior quam I ξ. f Igitur & Y X, maior erit quam ξ μ; Ac proinde & P S, quæ æqualis est ipsi X Y, maior erit quam Q T, quæ æqualis est ipsi ξ μ.



b 38. vndec.

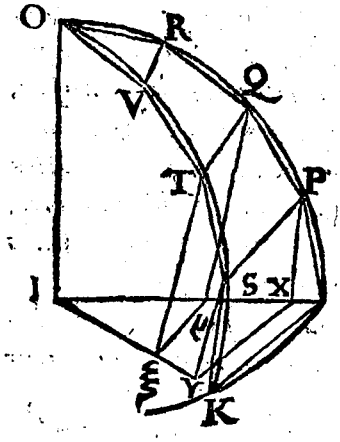
c 6. vndec.

d 2. sex.

e 30. primi.

f 14. quinti.

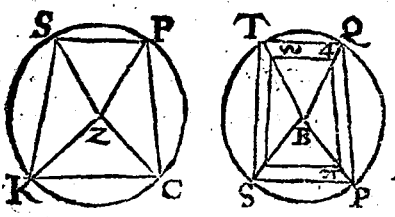
HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, G, circa quadrilatera C K S P, P S T Q, circuli, egrediunturque è centris rectæ Z C, Z K, Z S, Z P; G P, β S, β T, β Q. Si igitur Z C, non credatur maior, quam β P, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis.



a 25. primi.

b 8. primi.

Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, ζP, & basis KC, maior est basi PS; a erit angulus KZC, maior angulo SζP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TζQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales; b erunt anguli KZS, CZP, angulis SζT, PζQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad ζ: Sunt autem & æquales, cùm tam hi, quàm illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ ζP. SIT deinde ZC, minor quàm ζP. Et abscindantur ζπ, βρ, βϖ, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales; connectantur q3 rectæ πρ, ϱϖ, ϖφ, φπ, c quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eò quòd rectæ ex centris sectæ sunt proportionaliter; ac proinde ex 2. coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ, ad ϱϖ. Cùm ergo βS, maior sit quàm βϱ, d erit & SP, maior quàm ϱπ. Eadem q3 ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis πφ, φπ; Ac propterea cùm PS, minor sit, quàm CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quàm PS, erunt rectæ πφ, φϖ, ϖφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cùm rectæ βπ, βϖ, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales; e erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quod tam illi, quàm hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quàm βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.



c 2. sext.

d 14. quinti.

e 25 primi.

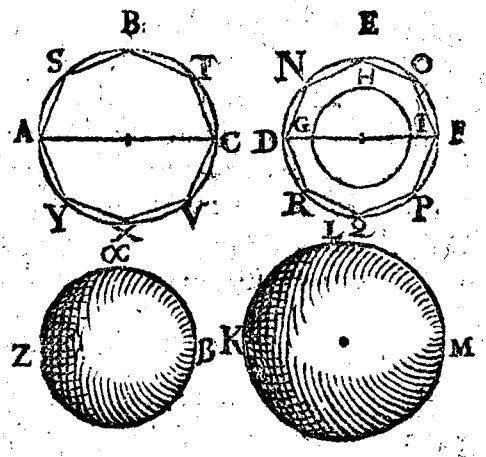
17. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHÆRÆ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quàm DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum AC, ad diametrum DF. Habeat primum sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæræ DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. f Inscribatur

f duo decimi.

batur in sphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cùm sphæra ABC, maior sit polyedro ASBTCVXY, *a* erit & sphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.



a 14. quinti.

HABEAT secundò sphæra ABC, ad sphæram KLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cùm igitur ex coroll. præcedentis propos. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt sphæra KLM, ad sphæram ABC, ita polyedrũ DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propos. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrũ ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphæra kLM, ad sphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt sphæra KLM, ad sphæram ABC, ita sphæra DEF, ad aliam sphærã Zαβ. Habebit igitur & sphæra DEF, ad sphæram Zαβ, proportionẽ triplicatam diametri *D F*, ad diametrum AC. Et quia sphæra kLM, maior ponitur, quàm sphæra DEF, erit quoq; sphæra ABC, maior, quàm sphæra Zαβ. Quapropter sphæra DEF, ad sphærã Zαβ, minorem sphæra ABC, proportionem habet triplicatã diametri DF, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Ostensum enim est,

non

non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphæram kLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI

EVCLI

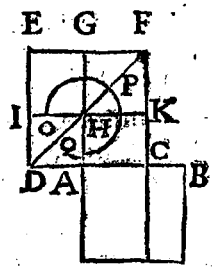
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et ſolidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela; ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur Ik, parallela ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, kG, quadrata rectarum AD, AC. *a* Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *b* erit rectangulum CM, ſub AB, CB, æquale ipſi kG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB; & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: *c* Eſt autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad Ak, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius Ak. Quoniam autem Ak, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus Ak, IG. Additis igitur æqualibus CM, kG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, qua-

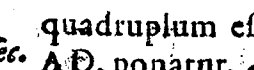


a 3. def. sexti.
b 17. sexti.
c 1. sex.
d 43. primi.

A M, quadruplum sit quadrati A I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea A B, dupla ponatur lineæ A D, erit & gnomon O P Q, eiusdem quadrati A I, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni O P Q, addatur ipsum quadratum A I, quintuplum efficietur quadratum C E, quadrati A I.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A B, quadruplum est quadrati rectæ A D, quòd linea A B, dupla lineæ A D, ponatur. a Est autem quadratum rectæ A B, æquale rectangulis sub A B, A C, & sub A B, B C, comprehensis; Et rursus, quod sub A B, A C, æquale est ei quod sub A D, A C, bis; (sicut enim A B, ipsius A D, est dupla, b ita quoque erit rectangulum sub A B, A C, rectanguli sub A D, A C, duplum, cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo A C. Ac propterea rectangulum sub A D, A C, bis sumptum æquale erit rectangulo sub A B, A C.) c Quod verò sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ A C, cùm sit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Igitur quadratum rectæ A C, vna cum rectangulo sub A D, A C, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ A D; Ac proinde quadrata rectarum A C, A D, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ A D. d Quocirca cùm quadratum rectæ C D, æquale sit quadratis rectarum A C, A D, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis; Erit & quadratum rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremã & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. sec.



b 1. sext.

c 17. sexti.

d 4. sec.

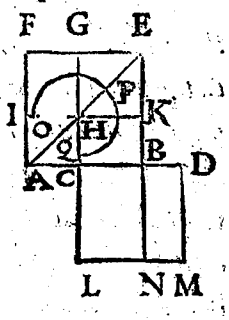
ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit, Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta A B, in C, possitq; quintuplum segmenti A C; sumatur autem ipsius A C, dupla C D, quæ, vt pòst ostendemus, maior erit reliquo segmento B C. Dico si C D, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse C B, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ex C, ducatur ipsi A F, parallela C G, secans diametrum in puncto H, per quod agatur I K, parallela ipsi A B. Producta deinde G C, perficiatur quadratum C M, protractaque E B, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. C I, K G, quadrata rectarum A C, C B. Quia igitur quadratum B F, quintu-

plum

plum ponitur quadrati C I; Si tollatur quadratum C I, relinquetur gnomon O P Q, eiusdem quadrati C I, quadruplus: Est autem & quadratum C M, quadruplum quadrati C I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd recta C D, dupla sit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rursus quoniam C D, ponitur ipsius A C, dupla; est que L C, ipsi C D; & C H, ipsi A C, æqualis; erit & L C, ipsius C H, dupla. *a* Cùm igitur sit vt L C, ad C H, ita rectangulum L B, ad rectangulum C K; erit quoque illud huius duplum: *b* Est autem C K, ipsi H F, æquale. Aequale igitur est L B, ipsis C K, H F; Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo sunt tres rectæ C D, C B, B D; estque rectangulum B M, sub C D, B D, comprehensum æquale ipsi K G, quadrato rectæ C B; *c* Erit vt C D, ad C B, ita C B, ad B D. Quam ob rem, ex definitione, recta C D, secta est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum C B.

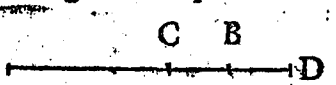


a 1. sext.

b 43. pri mi.

c 17. sexti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; *d* est que quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, vnà cum rectangulo sub A C, C B, bis; Etunt & quadrata rectarum C B, A C, vnà cum rectangulo sub A C; C B, bis, quintuplum quadrati rectæ A C. Dempto igitur quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum sub A C, C B, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ A C; Est autem & quadratum rectæ C D, eiusdem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequale igitur est quadratum rectæ C B, & rectangulum sub A C, C B, bis, quadrato rectæ C D. Cùm ergo rectangulum sub A C, C B, bis, æquale sit rectangulo sub C D, C B; (sicut enim recta C D, dupla est rectæ A C, *e* ita quoque duplum erit rectangulum sub C D, C B, rectanguli sub A C, C B; cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo C B; Ac propterea rectangulum sub C D, C B, æquale erit rectangulo sub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectæ C B, & rectangulum sub C D, C B, quadrato rectæ C D, æquale: *f* At quadratū rectæ C D, æquale est rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D. Igitur quadratum rectæ C B, & rectangulum sub C D, C B, æquale erit rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D; Ac proinde dempto communi rectangulo sub C D, C B, relinquetur quadratum rectæ C B, æquale rectangulo sub C D, B D; *g* ideoque erit vt C D, ad C B, ita C B, ad D B. Quare ex defin. recta C D, secta est in B, extrema ac media ratione, estque segmentum maius C B. Si igitur recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.



d 4. sec.

e 1. sexti.

f 2. sec.

g 17. sexti.

LEM-

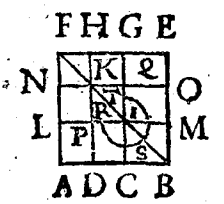
LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior sit necessario quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, a cum a 4. secundi. *æquale sit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.*

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde

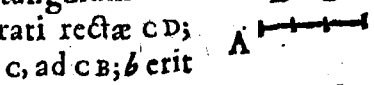


ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, k, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex corroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, b erit rectangulum sub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earum latera Hk, lQ, æqualia; c ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. d Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. e Est autem IO, ipsi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æquale

b 17. sexti.
c 34. primi.
d 36. primi.
e 43 pr.

æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ; erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD.

ALITER. Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita CB, a erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum sub AB, BC, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum sub AB, AC, æquale quadrato rectæ AC: quod cum, ex scholio propos. 4 lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.



a 6. secundi.

b 17. sexti.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum sit quadrati PQ,) ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, vt supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum: c Ac proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca

c 17. sexti.

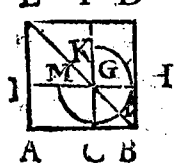
ea, ex definitione secta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

ALITER. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei adiecta sit B,
a 6. secundi. *a erit rectangulum sub A B, B C, vna cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cum quadratum ex rectæ lineæ B D, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex rectæ C D, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis A B, B C, descriptum, cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiusdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Est autem eiusdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale est rectangulum sub A B, B C.*
b 17. sexti. *b Quamobrem erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde secta erit A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

v. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum A B, B C, simul tripla esse quadrati rectæ A C. Describatur enim super A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi B D, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi A B. Erunt que C H, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B;



c 17. sexti. *c* erit rectangulum sub A B, B C, nempe A H, æquale ipsi I F, quadrato rectæ A C. Cum ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon k L M, vna cum quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectæ A B, vna cum quadrato C H, rectæ B C, eiusdem quadrati I F, rectæ A C, triplum.

d 17. sexti. ALITER. Quoniam est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; *d* erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C; Atque adeo rectangulum sub A B, B C, bis, vna cum quadrato rectæ A C, triplum quadrati rectæ A C.
e 7. secundi. *e* Sunt autem quadrata rectarum A B, B C, simul æqualia quadrati rectæ A C, vna cum rectangulo sub A B, B C, bis. Igitur & quadrata rectarum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C. Quocirca si recta secundum extremam & mediam

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

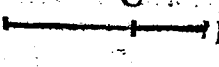
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraque simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomen KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CQ, erit AH, ipsi F, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC; a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema ac media ratione. a 17. sexti.

ALITER. *Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; b Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC. Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.* b 7. secundi. c 17. sexti.



EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaq; assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmeto describitur, quadrati: Recta

illa linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt.

SIT primum recta A B, ſecta in C, extrema ac media ratione: addatur recta B D, minori ſegmento B C, æqualis. Dico quadratum ex A D, quintuplum eſſe quadrati ex A C, maiore ſegmento. a *Quoniam enim quadratum ex A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, B C, quater contento, ſ̃na cum quadrato ex A C:* b *Rectangulum autem ſub A B, B C, æquale eſt quadrato ex A C; (quod A B, A C, C B, ſint continuè proportionales) erit rectangulum ſub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C: adeoque rectangulum ſub A B, B C, quater ſ̃na cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C. Igitur & quadratum ex A D, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub A B, B C, quater, ſ̃na cum quadrato ex A C,) eiuſdem quadrati ex A C, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.*

a 8. ſecundi.

b 17. ſexti.



SIT deinde recta A B, ſecta inæqualiter in C, cui addatur ſibi B D, minori ſegmento B C, æqualis, ſitque quadratum ex A D, quadrati ex A C, maiori ſegmento quintuplum. Dico A B, in C, ſectam eſſe extrema ac media ratione. c *Quoniam enim quadratum ex A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, B C, quater, ſ̃na cum quadrato ex A C; erit quoque rectangulum ſub A C, B C, quater, ſ̃na cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C; ac propterea rectangulum ſub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C: hoc eſt, rectangulum ſub A B, B C, æquale quadrato ex A C.* d *Igitur erit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B: Ac proinde A B, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

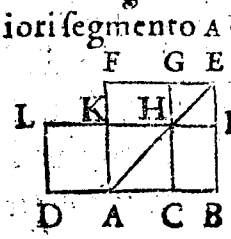
c 8 ſecundi.

d 17. ſexti.

IV. THEOR. 5. PROPOS. 5.

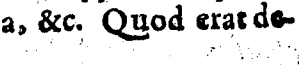
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum A C, & adiiciatur ei in rectum A D, æqualis maiori ſegmento A C. Dico rectam B D, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeq; maius ſegmentum A B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum B E, in quo ducta diametro A E, ducatur ex C, ipſi B E, parallela C G, ſecans diametrum in H, puncto; per quod agatur ipſi B D, parallela I K, & ex his ducatur



batur ipſi A F, parallela B L, occurrens ipſi I K, productæ in L. Erunt-
que ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. c K, I G, quadrata rectarum A C, B C.
Quoniam igitur eſt vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; a Erit rectangu- a 17.
lum I F, contentum ſub A B, B C, æquale quadrato C K, rectæ A C. *ſexti.*
Eſt autem C K, ipſi A L, æquale. Igitur I F, æquale erit ipſi A L; b 36.
additoque communi B K, erit rectangulum B L, contentum ſub *primi.*
B D, D A, æquale quadrato B F, rectæ A B; c Ac proinde erit vt B D, c 17.
ad A B, ita A B, ad D A. Quare B D, ſecatur in A, extrema ac media *ſexti.*
ratione, eſtque maius ſegmentum A B.

ALITER. Quoniam eſt vt A B, ad A C, hoc eſt, ad A D, ita A C,
ad C B; Erit conuertendo vt D A, ad A B, ita B C, ad C A; & compo-
nendo vt D B, ad A B, ita A B, ad C A, hoc eſt,



ad A D. Secta igitur eſt B D, in A, extrema ac
media ratione. Itaque ſi recta linea ſecun-
dum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei
æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat de-
monſtrandum.

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, de-
trahaturq; ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit
maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, &
maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus
ſegmentum erat.

RECTA enim linea B D, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum A B, minus autem ſegmentum A D, & ex maiori ſegmento A B, detrahatur recta A C, æqualis minori ſegmento A D. Dico maius ſegmentum A B, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam A C, quæ æqualis eſt minori ſegmento A D. Facta enim prioris figura conſtructione, cum ſit vt B D, ad A B, ita A B, ad A D, d erit rectangulum B L, contentum ſub B D, A D, æquale quadrato B F, recta A B; & ablato communi B K, erit A L, æquale ipſi I F; e Eſt autem A L, ipſi C K, æquale. Æquale igitur eſt I F, contentum ſub A B, C B, quadrato C K, recta A C; f Ac proinde erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quare A B, recta eſt in C, extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt A C, minus vero ſegmentum recta C B. Quod eſt propoſitum.

d 17. *ſexti.* e 36. *pr.* f 17. *ſexti.*

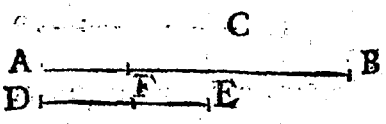
ALITER. Quoniam eſt vt tota B D, ad totam A B, ita A B, detracta ex B D, ad A D, hoc eſt, ad A C, detractam ex A B; g erit g 19. *quinti.*
quoque ita A D, reliqua ipſius B D, hoc eſt, A C, ad C B, reliquam ipſius A B, vt tota D B, ad totam A B, hoc eſt, vt A B, ad A C; Ac pro-

pterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod erat propositum.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC.



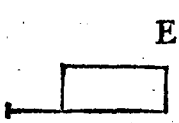
Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, totam ad DE, totam, ita AC, ablatam ad DF, ablatam, a *cum vtrobique sit proportio dupla; a erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam; Ac proinde & CB, duplæ erit ipsius FE.* b *Quoniam vero est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidium ipsius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

a 19. quinti.
b 15. quinti.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. *c* Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. *d* Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8.) erunt rectæ



c 1. tertiidec.
d 6. decimi.
e 9. dec. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.

rectæ CD, AD, longitudine incommunsurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; *a* erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome. a 74. decimi.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *b* erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, *c* facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. b 17. sexti. c 98. decimi.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitq; maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. d Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; e ac proinde commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ ED, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadratum rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; f erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.

A——B D C

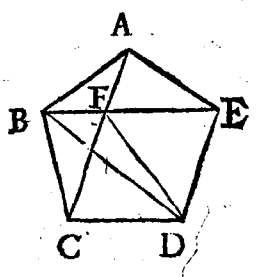
d 3. tertiidec. e 6. dec. f 74. decimæ.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse

æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ B E, A C, B D; & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ B E, A C, recta ducatur E D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; a erunt & bases B E, B D, & anguli A E B, C D B, æquales; b Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, cum æqualia sint ostensa latera B E, B D; Totus igitur anguli A E D, C D E, æquales erunt. Rursus quia latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli B A C; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi: c Erit & basis B E, basi A C, æqualis, & anguli A B E, A E B, angulis B A C, B C A, æquales. Cum ergo æquales sint anguli A B E, B A C, trianguli A B F; d erunt quoque latera B F, A F, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus B E, A C, erunt reliquæ lineæ F E, F C, æquales. Itaque cum latera F E, E D, trianguli F E D, æqualia sint lateribus F C, C D, trianguli F C D; & basis communis F D; e erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, æquales: Sunt autem & anguli A E B, B C A, ostensi æquales. Æquales igitur sunt toti anguli A E D, B C D; Ac proinde cum angulo A E D, ostensus æqualis angulus C D E, & angulo B C D, æquales ponantur anguli A B C, B A E; erunt omnes anguli pentagoni æquales, idemque æquiangulum erit ipsum pentagonum.



a 4. *pri.*
b 5. *pri.*
c 4 *pri.*
d 6. *pri.*
e 8. *pri.*

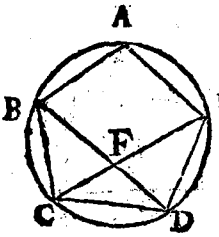
SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipsis contenti, æquales, ex hypothesi; f Erunt & bases B E, B D, & anguli A E B, C D B, æquales; g Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, quod æqualia ostensa sint latera B E, B D. Igitur toti anguli A E D, C D E, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli B A E, C D E; erũt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonstratũ est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demõstrandum.

f 4. *pri.*
g 5. *pri.*

11. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo A B C D E, duobus angulis, qui sunt deinceps C, D, rectæ D B, C E, se



E, se mutuò secantes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni. *a* Descripto enim circulo circa pentagonum; *b* erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia verò latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; *c* Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cùm in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, *d* & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: *e* Est autem & angulus ECB, eiusdem anguli DCB, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt: *f* Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. *g* Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD. *h* Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. *i* Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC; ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. *quarti.*
b 28. *tertij.*
c 4 *primi.*
d 32. *primi.*
e 33. *sexti.*
f 6. *primi.*
g 27. *tertij.*
h 32. *primi.*
i 4. *sext.*

SCHOLIVM.

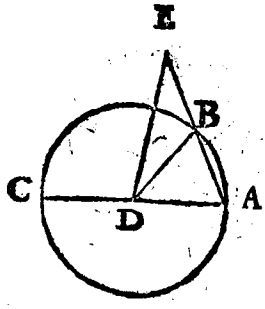
FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum, k *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quàm duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cùm ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales:* l *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

k 22. *tertij.*
l 28. *primi.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectum adda-



tur B E, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico E A, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse E B, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter A C, coniungaturque rectæ D B, D E. Quoniam igitur A B, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus semicirculi arcum A B, quinquies: Ac proinde arcus B C, quadruplus erit arcus A B. *a* Quare & angulus B D C, anguli A D B, quadruplus erit. Rursus quia latera B D, B E, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim B E, latus hexagoni semidiametro B D, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) *b* erunt & anguli B D E, B E D, æquales: *c* quibus cùm æqualis sit externus A B D: erit angulus A B D, duplus anguli B E D: *d* Est autem angulo A B D, æqualis angulus B A D, ob æqualitatem laterum D A, D B. Igitur & angulus B A D, duplus erit anguli B E D: ac proinde duo anguli D A B, D B A, simul quadrupli erunt anguli B E D. *e* Cùm ergo angulis D A B, D B A, æqualis sit externus B D C, erit angulus B D C, quadruplus eiusdem anguli B E D: Atqui idem angulus B D C, ostensus fuit quadruplus anguli A D B. Igitur æquales sunt anguli A E D, A D B. Quocirca cùm duo anguli A E D, D A E, trianguli A D E, æquales sint duobus angulis A D B, B A D, trianguli A B D, *f* erunt triangula A D E, A B D, æquiangula. *g* Igitur erit vt E A, ad A D, hoc est, ad E B, ipsi A D, æqualem, ita A D, hoc est, E B, sibi æqualis ad B A: Atque idcirco recta E A, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum E B, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.

a 33. *sex.*
b 5 *primi.*
c 32. *primi.*
d 5 *primi.*
e 32 *primi.*
f 32. *primi.*
g 4 *sex.*

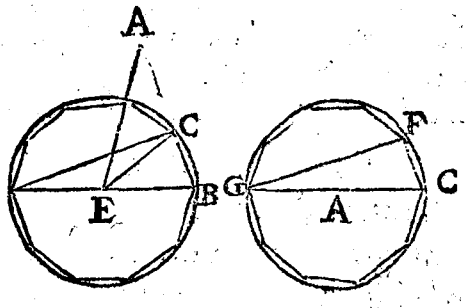
SCHOLIVM.

QVIA verò demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum lineæ diuisæ extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum secari quoq; extrema & media ratione, eiusq; segmentum maius esse minus segmentum detractũ. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositũ cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 2.

CONVERSVM quoq; huius theorematis facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet. 51

SI lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentũ latus decagoni eiusdẽ circuli. Quod si minus segmentũ fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB, diuisa in C, extrema & media ratione, sitq; primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus segmentum CB, esse eiusdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo est, vt AB ad AC, ita AC, ad CB; & est AC, latus hexagoni æquale semidiametro EB, ex coroll propos. 15. lib. 4. Erit quoq; vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, a ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erũt, cùm habeant latera circa communem angulum B proportionalia; eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rursus quia latera CA, CE, æqualia sunt, nempe latera hexagoni; b erunt anguli CAE, CEA, æquales; quibus cùm æqualis sit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: c Est autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde d eius anguli BCE, CBE, simul quadrupli erunt eiusdem anguli A. e Cùm ergo angulis BCE, CBE, æqualis sit externus CED; erit quoque angulus CED, eiusdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui a æqualis ostensus est angulo A, quadruplus. f Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus semicirculi BCD, eiusdem arcus BC, quintuplus existet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus est decagoni.



a 6. sex.

b 5. primi.

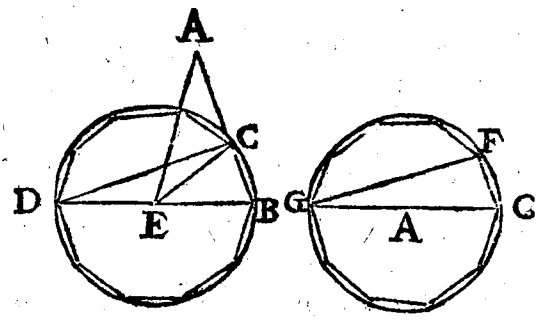
c 32. primi.

d 5. primi.

e 32. primi.

f 33. sex.

SIT deinde CB, minus segmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius segmentũ AC, esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus BC, in circulo BCD; ducatur q; diameter BED. Deinde interuallo AC, describatur circulus CFH, cuius diameter CAG; erit q; ex coroll. propos. 15. lib. 4 AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniã igitur AB, secta est in C, extrema ac media ratione, est q; maius segmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam ostensum est, minus segmentum CB, latus decagoni eiusdem circuli CFG. Describatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum, & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; erunt q; latera BC, CF, inter se æqualia. Quoniam verò,



si connectantur rectæ C D, F G, anguli C D B, F G C, sunt æquales, & in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus quòd insistant arcubus similibus B C, C F, nempe dimidiis partibus peripheriarum; & sunt quoq; anguli B C D, C F G, in semicirculis æquales, a nimirum recti: b Erunt quoque latera B D, C G, inter se æqualia. Quam ob rem cùm diametri B D, C G, sint æquales, æquales quoque erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde cùm recta A C, sit latus hexagoni circuli C F G, erit quoque eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D. Quod est propositum.

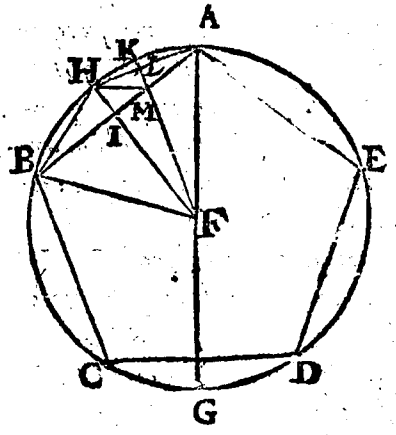
a 31. tertij.

b 36. primi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

In circulo A B C D E, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vnà cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diuiso deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I; eritq; recta A H latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu A H bifariam in K, adiũgatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, pũcto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; c erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cùm latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipsis contenti æquales quoque; d erunt & bases A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, ideoque recti: Eadem ratione æquales erunt rectæ H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D, relinquentur arcus C G, D G, inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D. Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cùm arcus A B, C D, æquales sint; erunt quoque eorum



c 27. tertij.

d 4. primi.

eorum dimidii arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cùm arcus A H, duplus sit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiusdem arcus H K. Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales sunt, & est arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiusdem arcus B H, duplus. Quare arcus C G, B C, æquè multiplices sunt, nempe dupli, arcuum H K, B H; *a* Ac propterea totus arcus B G, duplus quoque erit totius arcus B K, *b* & idcirco angulus quoque B F G, duplus anguli B F K: *c* Sed quia idem angulus B F G, ad centrum duplus est quoque anguli F A B; erunt idcirco anguli B F M, F A B, æquales; *d* Ac propterea triangula A B F, F B M, cùm habeant angulos F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit vt A B, ad B F, ita B F, ad B M; *f* ideoque rectangulum sub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ B F.

a 1. quinti. b 33. sexti. c 20. tertij. d 32. primi. e 4 sexti. f 17. sexti.

RVRSVS quia latera A L, L M, trianguli A L M, æqualia sunt lateribus H L, L M, trianguli H L M, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & bases A M, H M, & anguli L A M, L H M, æquales: *h* Est autem angulus L A M, angulo H B A, æqualis, quòd & latera H A, H B, æqualia sint. Igitur & angulus L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula A B H, A H M, cùm habeant angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. *k* Quā ob rem erit vt A B, ad A H, ita A H, ad H M; *l* ideoque rectangulum sub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Ostensum est autem & rectangulum sub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, simul æqualia sunt quadratis rectarum B F, A H. *m* At verò rectangula sub A B, B M. & sub A B, A M, æqualia sunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

g 4. primi. h 5 primi. i 32. primi. k 4. sexti. l 17. sexti. m 2. secundi.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam F H, propterea quòd arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

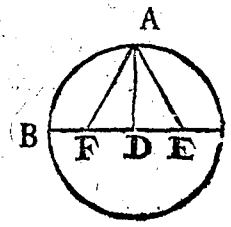
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est, diametrum A G, ex puncto A, ductam diuidere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cùm transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bi-

CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua ȣna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusq; demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc à nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F, adiungaturq; recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secta sit bifariam in E, eiq; addita D F,



a 6. sec. *erit rectangulum sub C F, D F, ȣnà cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, idest*

b 47. primi. *quadrato rectæ E A, quæ ipsi E F, est æqualis. b Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, ȣnà cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E, relinquetur rectangulum sub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc est, quadrato rectæ C D.*

c 17 sexti. *c Quam ob rem erit vt C F, ad C D, ita C D, ad D F, propterea quæ recta C F, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cùm igitur maius segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll propos. 15 lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos 9. huius lib.*

d 10. tertij dec. *d Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D ȣnà cum quadrato lateris decagoni D F, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli;*

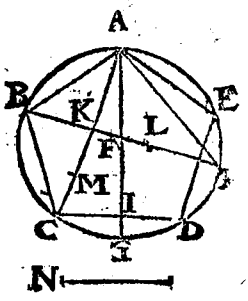
e 47 primi. *e Est autem eiusdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea recta A F, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*

xij. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetq; A G, latus C D, in I, connectanturq; rectæ A C, A H, quarum A C, secet diametrum B H, in K. Ab

K. Abscindatur quoq; ex semidiametro F H, quarta eius pars F L. Item ex recta A C. quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commensurabiles, cùm sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota B L, composita, *a* cùm sit commensurabilis vtrique F L, B F, Rationalis erit.



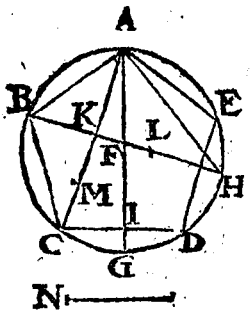
a 16. decimi.

RVRSVS quoniam recta F B, ex centro ducta secat arcum A C, bifariam in B; secabit quoque rectam A C, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo A C I, A F K, cùm habeant angulos A I C, A K F, rectos, & angulum C A I, communem, *b* æquiangula inter se erunt. *c* Quamobrem erit, vt C I, ad C A, ita F K, ad F A; & permutando vt C I, ad F K, ita C A, ad F A, siue ad F H, ipsi F A, æqualem *d* Vt autem C A, ad F H, ita est C M, quarta pars ipsius C A, ad F L, quartam partem ipsius F H. Erit igitur vt C I, ad F K, ita C M, ad F L; & permutando, vt C I, ad C M, hoc est, vt C D, dupla ipsius C I, ad C K duplam ipsius C M, ita F K, ad F L; Atque componendo, vt C D, C K, simul ad C K, ita F K, F L, simul, nimirum recta K L, ad F L; *e* Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C K, ita quadratum rectæ K L, ad quadratum rectæ F L. Quia verò si A C, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta B D,) *f* maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi C D; *g* Erit quadratum rectæ compositæ ex C D, maiori segmento, & C K, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ C K, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ K L, quintuplum erit quadrati rectæ F L, *h* ideoque quadratum rectæ K L, commensurabile erit quadrato rectæ F L; Ac proinde rectæ K L, F L, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem F L, ostensa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit.

b 32. primi.
c 3. sexti.
d 15. quinti.
e 22. sexti.
f 8. tertij dec.
g 1. tertij dec.
h 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. est B F, talium 1. est F L; ac propterea qualium 5. est B L, talium 1. est F L: erit quadratum rectæ B L, talium partium 25 qualium 1. est quadratum rectæ F L, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. *i* habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. est quadratum rectæ F L, talium 5. ostenium est quadratum rectæ K L. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ B L, talium 5. est quadratum rectæ K L; ac proinde quadratum rectæ B L, quintuplum erit quadrati rectæ K L. Quia ergo quadrata rectarū B L, K L, proportionē non habent, quam numerus quadratus ad numerū quadratum,

i 20. sexti.



dratum (vt patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Eu
enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1
a 9. dec. a Erunt rectæ B L, K L, longitudine incom
mensurabiles: ideoque, cùm ostensæ sint Ra
tionales, erunt Rationales potentia tantùm
commensurabiles. Quare si ex Rationali B L
dematur Rationalis K L, potentia tantùm co
mensurabilis; b erit reliqua B K, Irrationalis,
quæ dicitur Apotome, ei verò congruens e
rit K L.
b 74. de cimi.

IAM verò recta B L, possit, plus, quàm recta K L, quadrato rec
tæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ B L, æquale est quadra
tis rectarum K L, & N; Qualium autem partium 5. fuit quadra
tum rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ K L, Erit reliquum
quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum
rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N, proportio
c 6. dec. nem habebunt, quam numerus ad numerum. c Quare commen
surabilia erunt; proptereaq; rectæ ipsæ B L, & N, commensura
biles, saltem potentia; Est autem B L, ostensa Rationalis, Ratio
nalis igitur erit & N. Quia verò quadrata rectarum B L, & N, pro
portionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum
quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quòd
d 9. dec. proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) d Erunt rectæ B L, & N, longi
tudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tan
tùm commensurabiles. Quapropter cùm tota recta B L, Ratio
nalis longitudine sit commensurabilis Rationali B H; (Qualium
enim partium 8. est B H, talium 5. est B L) possitque plus, quàm
congruens K L, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommen
surabilis, vt ostensum est: Erit B K, Apotome quarta, ex defini
tione.

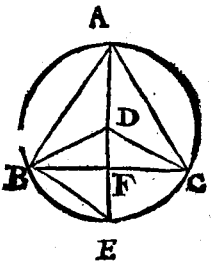
POSTREMO quia recta A B, est media proportionalis in
ter B H, B K, ex coroll. propos. 8. lib. 6 (quòd triangulum A B H,
e 31. ter tij. habeat angulum B A H, rectum, à quo ducta est A K, ad basin
perpendicularis) f erit quadratum rectæ A B, æquale rectangulo
f 17. sex. sub B H, B K. Quocirca cùm superficiem contentam sub Ratio
g 95. de cimi. nali B H, & Apotoma quarta B K, possit recta linea A B; g Erit
A B, linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habentem
diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

viij. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur;
Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex
centro circuli ducitur.

IN cir

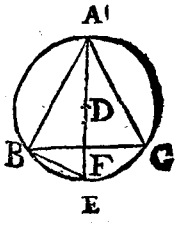
IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur A B C. Dico quadratum lateris A B, triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariã quoque, & ad angulos rectos in puncto F; cùm arcus B C, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoq; coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiã ita probabitur. Semicirculus A B E, continet tres sextas partes totius circuli; arcus verò A B, cùm sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus B E, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta B E, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro D E, ex coroll. propos. 15. lib. 4.



Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale est quadratis rectarum A B, B E, *b* quòd angulus A B E, in semicirculo rectus sit; a 47. primi. Est autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd linea A E, dupla sit lineæ B E; b 31. tertij. erunt quadrata rectarum A B, B E, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ A B, triplum est quadrati rectæ B E, quæ æqualis est semidiametro Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. Nam cùm latus A B, ostensum sit potentia triplum semidiametri A D, posito quadrato ex A B, 3. erit quadratum ex A D, 1. atque adeo quadratum ex A E, quod ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum est quadrati ex A D, erit 4. Quare quadratum ex A E, quadrati ex A B, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.



ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. vt est A E, ad A B, ita se habet A B, ad A F; erit quoque latus trianguli æquilateri A B, perpendicularis A F, ex vno angulo ad basin demissæ potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facilè etiam colligi potest, semidiametrum D E, bifariam secari in F, à latere trianguli B C. Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B E; si ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. c Est autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt c 47. primi.

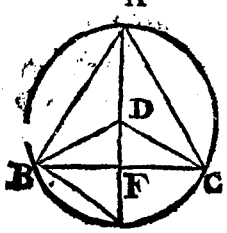
quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ BF (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc est quadratum rectæ DE, sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex scholio propos. 4. lib. 2. recta DE, dupla erit ipsius FE. Quocirca DE, bifariam secatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, secari à latere BC, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; eũ latera AB, AD, æqualia sint lateribus AD, trianguli CAD; & bases BD, CD, æquales quoq;: a *Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod est primum.*



a 8. primi.

DEINDE, cùm latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales ostensi: b *Erunt & bases BF, CF, & angulo adE, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.*

b 4. primi.

POSTREMO, cùm anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse æquales; c *erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cùm BEC, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit BE, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4.* d *Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune;* e *Erunt & latera DF, EF, æqualia. quod est tertium.*

c 26. tertij.

d 5. primi.

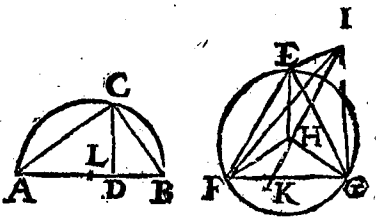
e 26. primi.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra comprehendi; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT

SIT datæ sphæræ diameter A B, circa quam semicirculus describatur A B C; & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt sit A D, ipsius D B, dupla; at vero A B, eiusdem D B, tripla; & ipsius A D, sesquialtera. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, cõnectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ H E, quæ æqualis sit ipsi D C, describatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur E F G, adiunganturq; rectæ H F, H G, quæ singulæ æquales erunt ipsi D C, cum æquales sint ipsi H E, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quæ æqualis ponatur rectæ A D, & ex I, demittantur rectæ I E, I F, I G. Dico solidum contentum quatuor triangulis F-E G, I E F, I F G, I E G, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam enim latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. a erit basis A C, basi I E, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam A C, æqualem esse rectis I F, I G. Rursus quia tres lineæ A D, D C, D B, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt A D, ad D B, ita quadratum rectæ A D, ad quadratũ rectæ D C; & componendo, vt A B, ad D B, ita quadrata rectarũ A D, D C, simul ad quadratum rectæ D C: b Sunt autẽ quadrata rectarũ A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoq; vt A B, ad D B, ita quadratũ rectæ A C, ad quadratũ rectæ D C; Ac proinde cum A B, sit ipsius D B, tripla, erit quoq; quadratũ rectæ A C, triplum quadrati rectæ H E, cum H E, æqualis sit ipsi D C: c Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ H E. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectæ E F. Quare cum recta A C, ostensa quoq; sit æqualis rectis I E, I F, I G; erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis E F G, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter A B; & diametrum sphæræ A B, potentia sesquialteram esse lateris E F, vel A C.



EXTENDATVR perpendicularis I H, vsq; ad K, vt sit H K, ipsi D B; & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres I H, H E, H K; erunt quoque I H, H E, H K, proportionales. Quare cum H E, sit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K, semicirculus circa I K, descriptus in plano rectarum I K, H E, transibit per E, vt mox ostendetur; Eodemque

a 4. *primi.*

b 47. *primi.*

c 12. *tertiid.*

argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I K, ſcriptus in plano rectarum I K, H F, tranſibit per F, quam ſe circulus circa eandem I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, nente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum T traedrum complectitur, cùm per omnes illius angulos E, F, G, incedat. Cùm ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ dat quòd diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehe detur idem Tetraedrum ſphæra data.

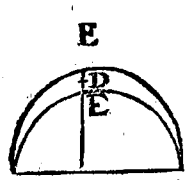
QVONIAM verò tres rectæ A B, A C, A D, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt A B, ad A D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. autem recta A B, ſeſquialtera rectæ A D, quod qualium partium eſt A B, talium 2. ſit A D. Igitur & quadratum rectæ A B, ſeſquialterum erit quadrati rectæ A C; Ac propterea cùm A B, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa I K, *in plano rectarum* I K, H E, *deſcriptus, tranſeat per* E, *facilè demonſtrabitur propoſito theoremate.*

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad A B, perpendicularis C D, & media proportionalis inter A C, & C B. Dico ſemicirculum circa A B, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D,



vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque C E, media proportionalis inter A C, & C B, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ C D, quàm quadratum rectæ C E, æquale erit rectangulo ſub A C, C B; Ac proinde quadrata rectarum C D, C E, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.

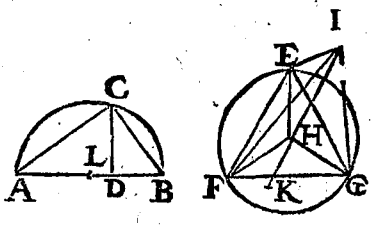
a 17. ſexti.

HINC

HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa I K, *in plano rectarum* I K, H E, *transire per* E, *cùm* H E, *sit ad* I K, *perpendicularis, & media proportionalis inter* I H, H K.

COROLLARIVM I.

HINC facilè colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti. Cùm enim diameter sphæræ A B, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis E F, erit quadratum rectæ E F, talium partium 6. qualium 9. est quadratum rectæ A B: At qualium partium 6. est quadratum rectæ E F, talium partium 2. est quadratum rectæ H E, *a* quòd quadratum rectæ E F, triplum sit quadrati rectæ H E. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectæ A B, talium partium 2. erit quadratum rectæ H E; Ac propterea diameter sphæræ A B, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri H E, cùm proportio quadratorum sit, quæ 9. ad 2.



a 12. *ter tydes.*

COROLLARIVM II.

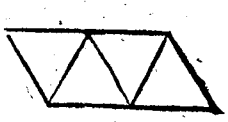
RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi A C B, eritque L, centrum quoque sphæræ. Dico rectam L D, (quæ nimirum ex centro sphæræ ad basin E F G, ducitur perpendicularis; cùm A D, æqualis sit ipsi I H, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem est, quod centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ A B, & tertiam partem semidiametri A L. Quoniam enim A D, dupla est ipsius D B; Qualium partium 4. est A D, talium 2. erit D B: ac proinde talium 6. tota A B, & semidiameter A L, talium 3. Quare si A D, est 4. & A L, 3. erit L D, 1. & idcirco L D, sexta pars erit rectæ A B, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ A L, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER altitudo pyramidis H I, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim H I, eadem, quæ A D, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facilè ex ipsis ritè inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totam soliditatem. Hanc verò praxin, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regula-



via in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alb. Durero non ignobili ſcriptore.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

XV.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC, BC, *a* quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuò ſecantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales; cùm ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratum eſt. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturqur IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus FI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, recti; (ipſe quidem EIK, ex defin. lib. 11. At verò EIG, *b* eo quòd ſit æqualis angulo GIH, ſibi inceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EG, GH,.) *c* Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeò æqualia triangulo KEH, cùm illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis conſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.

a 4. primi.

b 8. primi.

c 4. primi.

QVONIAM enim IE, perpendicularis eſt ad KL, ex defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL; (quòd tres rectæ KI, IE, IL, æquales ſint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, deſcriptus tranſibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propoſitionis. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum E. Idem-

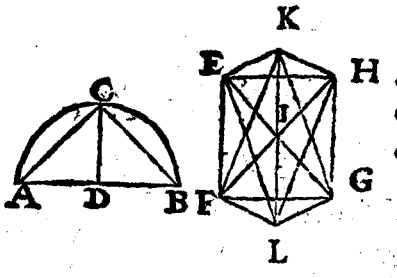
Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cùm per omnes illius angulos incedat. Cùm ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB; (Nam cùm rectæ AC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quàm quadratum rectæ FE, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

QVIA verò quadratum rectæ AB, *a* æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cùm AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

a 47. primi.

COROLLARIVM I.

EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuò ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atque proinde, cùm KI, recta sit ad lineas EG, HF: *b* recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum: *c* Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immò eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGk, se mutuò ad angulos rectos secabunt: Quæ quidem plana sunt quadrata, cùm omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri FK, KH. *d* Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.



b 4. vndecimi.
c 8. vndecimi.
d 48. primi.

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices verò K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHk, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. *a* Quoniam igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. *b* Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium quadratum diametri sphæræ. Igitur cùm talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri, perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

a 13. *ter tijdec.*

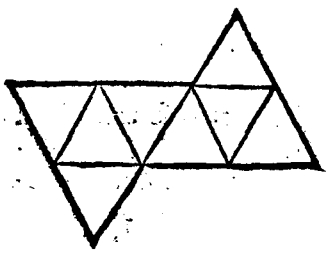
b 14. *ter tijdec.*

COROLLARIVM IV.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: *c* Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

c 15. *Undecimi.*

SCHOLIVM.

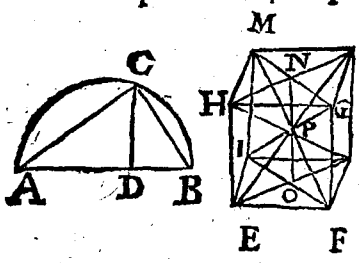


QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facilè ex ipsis ritè inter se complicatis componetur octaedrum secundum totam solliditatem, vt ait Albertus Durerus.

XIV. PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM constituere: & sphæra complecti, quà & priores figuras; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoq; ipsi BC, quarũ extrema conuentiantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniã ergo rectæ EI, FK, ad planum EF, GH, rectæ sunt; *d* erũt rectæ EI, FK, parallelæ. Sunt autẽ & æqua-



d 6. *Undecimi.*

& æquales, quod vtraq; æqualis posita sit ipsi B C, hoc est, ipsi E F.
Igitur & E F, I K, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est E F K I; In quo, cum lineæ E I, I K, K F, æquales sint ipsi E F, omnes quatuor lineæ æquales existunt: *b* Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum E I K, F k I, æquales sint oppositis angulis rectis k F E, I E F. Igitur E F k I, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt F k L G, G L M H, H M I E; Atque idcirco & I k L M, quadratum erit, *c* cum simile sit & æquale quadrato oppositio E F G H. Est enim E L, solidum parallelepipedum, *d* quod eius plana opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit E L. Quem dico comprehendi sphæra diametri A B. Sint enim planorum oppositorum E F k I, G H M L, diametri E k, F I, G M, H L, per quas ducantur plana E k L H, F I M G. *e* Quia igitur tam planum E k L H, quam F I M G, cubum bifariam secat; vtrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiusdem propos. se mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac proptrea communis planorum sectio, recta scilicet N O, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana E k L H, F I M G, rectangula sunt, (Cum enim H E, perpendicularis sit duabus rectis E I, E F, ob quadrata E M, E k; *f* perpendicularis quoque erit ad planum E k, ideoque & ad rectam E k, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est H E k. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E k L H, nec non & anguli in plano F I M G. Rectangula ergo sunt plana E k L H, F I M G,) & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri E L, H k, F M, G I, æquales, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidiametri P E, P L, P H, P k; P F, P M, P G, P I, æquales erunt. Quare semicirculus circa E L, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro E L, sphæram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ diametri A B, ita demonstrabitur.

a 33. pr.
b 34. pr.
c 24. vndec.
d 15. vndec.
e 28. vndec.
f 4. vndecimi.

G V M quadratum rectæ E k, *g* æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F k, ac proinde duplum quadrati rectæ E F, hoc est, quadrati rectæ k L: Erunt quadrata rectarum E k, k L, tripla quadrati rectæ k L. *h* Est autem quadratis rectarum E k, k L, æquale quadratum rectæ E L, quod angulus E k L, sit rectus in rectangulo E k L H. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ k L, hoc est, quadrati rectæ B C: At vero eiusdem quadrati rectæ B C, triplum est quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ A B, B C, B D, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est A B, ad B D, ita erit quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B C. Cum ergo

g 47. primi.
h 47. primi.

AB, ipsius BD, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB quadrati rectæ BC, triplum. Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt.

QVIA vero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi kL, manifestum est, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML: EFkI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duob. angulis NMP, NPM trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML, c & angulus OPF, æqualis est oppositio ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

a 29. pr.
b 16. 34. indec.
c 15. pr.

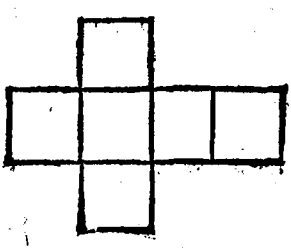
COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. d Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri: e Qualium vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero BC. f Perspicuum autem est, diametrum sphæræ AB, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.

d 13. ter tiidec.
e 15. ter tiidec.
f 47. pr.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiusphiam, vt constat.



PROBL. 4. PROPOS. 16. xvj.

ICOSAEDRVM constituere: & sphæra comprehendentis, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

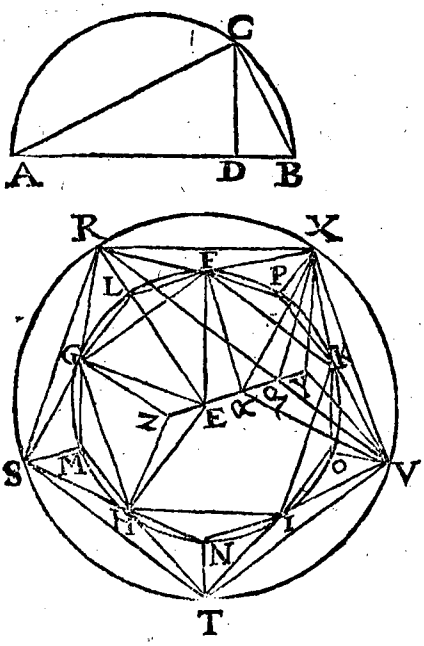
SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; *a* in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntque omnes inter se æquales; *b* sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR, EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus) *c* binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. *d* Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto, eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem EGHIk, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIk. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. *e* Quia igitur LR, PX, æquales sunt, & parallelæ; si concipiatur duci recta LP; *f* erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; *g* Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIk, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RST-VX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST,

a 11. *quarti.*
b 6. *Vndecimi.*
c 33. *pr.*
d 15. *Vndec.*
e 6. *Vndecimi.*
f 33. *pr.*
g 28. *tertij.*

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIk. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIk, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, Vk, Xk, XF. Quia igitur perpendicularis LR æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIk, & est LF, latus decagoni; *a* erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF.

a 10. *ter tiidec.*

b 47. *primi.*



b Est autem eisdem quadratis æquale quadratū rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. dec. fin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademq; ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIk, VkX, XkF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cum eorū omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri.

Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIk, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; *c* erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; *d* Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV,

c 10. *ter tiidec.*

d 47. *primi.*

TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZk, kZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque bases αX, αF, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, k, rectæ ducantur, ostendentur αG, αH, αI, αk, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, k; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIk; & EZ, latus decagoni eiusdem circuli; c erit QZ, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ, d quintuplum potest eius, quod ex Eα, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius Eα; Erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex

a 4. prin.

b 4. prin.

c 9. tertiidec.

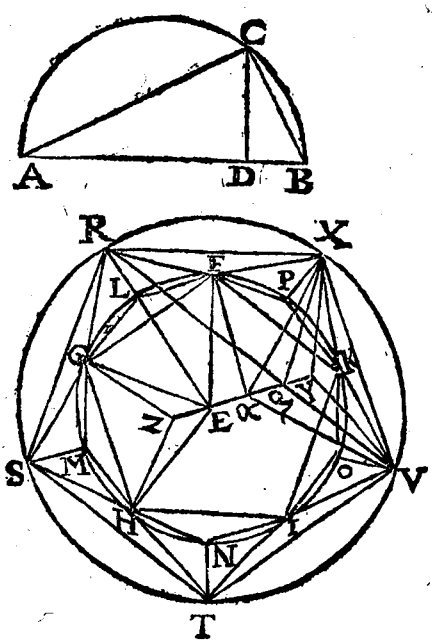
d 3. tertiidec.

e 47. pr.

Z Y, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæræ diametri A B.

a 15. quinti. b 22. sexti.

α CVM enim sit vt α Z, ad α E, ita Y Z, dupla ipsius α Z, ad QE, duplam ipsius α E; b Ac propterea vt quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ Y Z, ad quadratum rectæ Q E; sit autem quadratum rectæ α Z, ostensum quintuplum quadrati rectæ α E; erit quoque quadratum rectæ Y Z, quintuplum quadrati rectæ Q E, hoc est, quadrati rectæ B C; quare recta Q E, æqualis sit positæ semidiametro E F, hoc est, rectæ B C; Est autem & eiusdem quintuplum quadrati rectæ B C, quintuplum quadratum rectæ A B; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt A B, ad B C, ita B C, ad B D; erit vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente A B, quintupla ipsius B D, erit eriam quadratum rectæ A B, quintuplū quadrati rectæ B C;) Quadrata igitur rectarum Y Z, A B, æqualia sunt, ideoque & rectæ Y Z, A B; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.



QVONIAM denique diameter sphæræ A B, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) potestq; quintuplum quadrati rectæ B C, hoc est, rectæ illi æqualis E F; erit quoque semidiameter E F, circuli F G H I k, Rationalis. (Nam quadrata rectarum A B, E F, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. c erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ A B, E F, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo A B, sit Rationalis, erit & E F, Rationalis) Quare & tota diameter circuli F G H I k, Rationalis erit; Ac propterea F G, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, d Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonstrauimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. Quod erat faciendum.

c 6. decimi.

d 11. tertiidec.

COROL.

COROLLARIVM I.

EX dictis infertur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri A B, quintuplum esse quadrati rectæ B C, hoc est, semidiametri E F.

COROLLARIVM II.

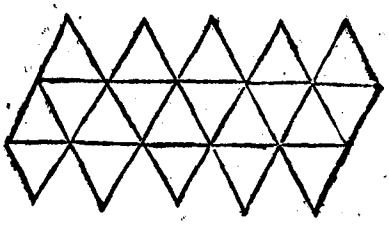
ITEM manifestum est, sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam Y Z, diameter sphæræ componitur ex E Q, latere hexagoni, & ex Q Y, E Z, lateribus decagoni circuli F G H I K.

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt R X, H I, esse parallela. Nam recta R X, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ L P, sit quoque parallela recta H I, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus H L, I P: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas R X, H I, esse parallelas. Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur figuli triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.



PROBL. 5. PROPOS. 17. xvj.

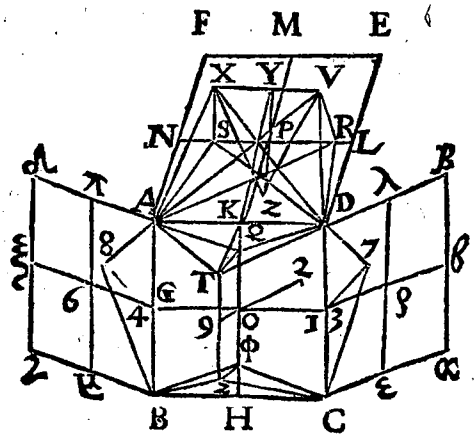
DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum A B C D, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos A D E F, vt sit communis horum sectio recta A D, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis E F G H, quatuor lineæ E I, F k, G L, H M, ipsi basi E F G H, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. *a* Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin E F G H.) Diuisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, k, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui

a 18. *vndec.*

proble-

Problematis lib. 4. Secentur O k, P L, P N, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares Q T, R V, S X, æquales segmentis maioribus O Q, P R, P S. Coniunctis deinde rectis A X, D T, D V, V X; Dico A T D V X, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi.



Quod enim pentagonum A T D V X, sit in vno plano, ita ostendetur, Cum R V, S X, latera ad quadratum A D E F, rectæ *a* ipsæ erunt parallelæ; Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoque planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

a 6. *Vndecimi.*

b 33. *pr.*

c 33. *pr.*

d 9. *Vndecimi.*

e 7. *Vndecimi.*

f 8. *Vndecimi.*

g 6. *Vndecimi.*

h 32. *sexti.*

i 11. *Vnd.*

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A K, K Q, trianguli A K Q; (Sunt enim A N, A k, dimidia latera cubi, & N S, k Q, segmenta minora rectarum æqualium sectarum) & anguli A N S, A K Q,

AKQ, recti; si ducatur recta AQ, *a* erunt bases AS, AQ, æqua- *a* 24. primi.
les. Rursus cùm latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia late-
ribus AQ, QT, trianguli AQT. (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ
sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarum æqua-
lium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3. lib. 11. *b* E- b 4. primi.
runt quoque bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ,
ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; si verò
ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt
igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV, æqualia: qui-
bus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. *c* Qua- c 4. tertiædec.
drata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc
est, quadrati rectæ SX: Est autem quadrato rectæ PN, æquale
quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, si-
mul tripla sunt quadrati rectæ SX. *d* Cùm ergo quadratis recta- d 47.
rum AN, NS, æquale sit quadratum rectæ AS; erit quoq; qua- primi.
dratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX, Ac proinde qua-
drata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ
SX. *e* Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum e 47.
rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum quoq; erit primi.
quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati
rectæ XY; *f* Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cùm igitur & f 34. primi.
quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ
XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; E-
runt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ
æquales. Quare cùm & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æ-
quales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

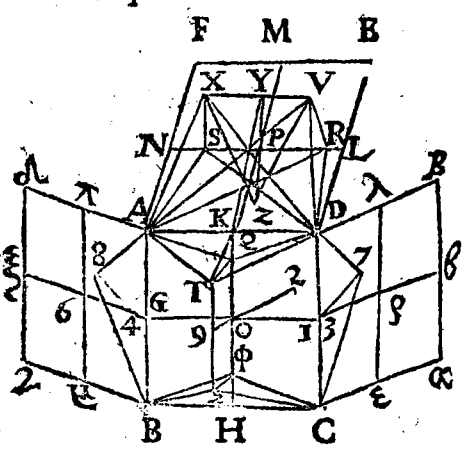
QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Du-
ctis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ra-
tione, eiq; addita PR, æqualis maiori segmento PS; *g* erit quo- g 5. tertiædec.
que NR; secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmen-
tum erit NP. *h* Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla h 4. tertiædes.
sunt quadrati NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem qua-
dratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata
rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde
quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem qua-
drati rectæ AN. *i* Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æ- i 47. primi.
qualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR,
quadrupla sunt quadrati rectæ AN. *k* Cum ergo quadratis re- k 47.
ctarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque primi.
quadratum rectæ AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum.
At vero eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum
rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius
AN. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoque
& rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS,

DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectæ AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TD, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD, DX, æquales quoque: a Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, b ipsum erit æquiangulum.

a 8 pri.

b 7. ter tridec.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata C α β D, B γ δ Δ, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secentur in ε, ϛ, λ, l, μ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ, &c centur deinde OH, OK, ϕ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum ducantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 46, coniunganturque rectæ T2, 2C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.

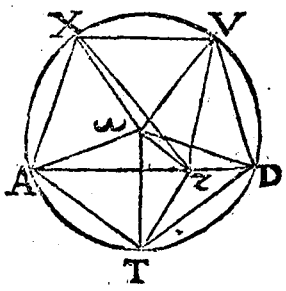


INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis quæ per rectas planorũ latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD; c Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa, commu-

c 19. undec.

communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur.
* Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem se diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. a 39. & vndec.
* Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quod vtraque recta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt OK, ZP, quod vtraque recta sit ad planum ADEF; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. c Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ; (Est enim XY, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PZ:) d Est autem quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratum rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoq; quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; f Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. g Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ ZX, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi; Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certè quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelam VX, perpendicularis.) h Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ b 6. vndecimi. c 4. tertiidec. d 47. primi. e 15. quinti. f 22. sexti. g 15. tertiidec. h 4. pri.

perpendicularis demittatur Z ω, connectanturq; rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. a Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale
a 47. primi. est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quod rectæ Z A, Z X, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoque rectæ ipsas ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, æquales, quod & recta Z V, Z D, æquales sint ostensæ rectis Z A, Z X. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ



b 9. ter. lineæ æquales, quam duæ, b punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt
c 47. primi. quadratis rectarum Z ω, ω T. c Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratum rectæ Z T, erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; propterea que & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque A T D V X, & deinque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus,
d 15. quinti. POSTREMO cum sit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N, & quoque vt N L, dupla ipsius N P, ad R S, duplam ipsius P S, ita R S, dupla ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L, nimirum ad duplam ipsius S N. Si igitur cubi latus N L, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R; Sed N L, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius)
e 6. ter. tiidoc. e Igitur maius segmentum S R, hoc est dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra comprehensi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Cum ergo demonstratum sit; recta L N, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: Sit autem L N, æqualis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROL-

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis A V, D X, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione,[a] facit maius segmentum latus pentagoni:[b] ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

a 8. *tertiidec.*

b 5. *tertiidec.*

COROLLARIVM III.

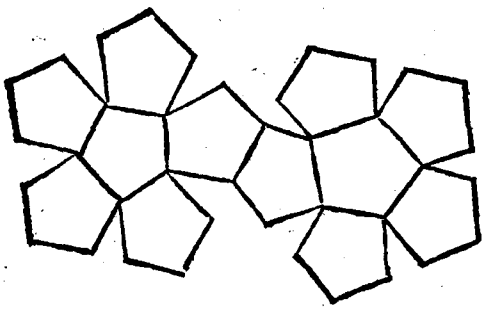
CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt V X, T 2, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi E F, A B: aliaque quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos a lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ Y Z, 9 Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo inter secant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ P Z, O Z, æquales sint dimidio lateri cubi, & Y P, 9 O, æquales maioribus segmentis æqualibus P S, O Q; Erunt totæ Y Z, 9 Z, æquales: Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus est, cum opponatur recto O K P. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IV.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum Z Y, Y P, tripla ostensa sint quadrati rectæ P Z: erit Z Y, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit P Z, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt Z Y, ad Z P, ita Z P, ad P Y: *c* ideoque vt dupla ipsius Z Y, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius Z P, hoc est, ad latus cubi, ita eadem duplam ipsius Z P, ad duplam ipsius P Y, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.

c 15. *quinti.*

SCHOLIVM.

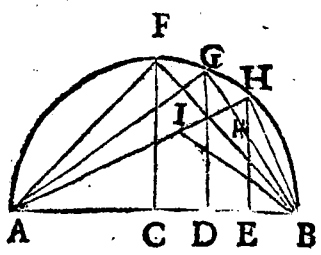


QVOD si ex aliqua[illegible] teria conficiantur [illegible] cim pentagona aquilatera & aequiangula, inter se qualia, disponanturque hac figura indicat, compl[illegible] netur Dodecaedrum so[illegible] dum totam soliditatem [illegible] rite inter se complicentur.

xviij. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsa AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH, connectaturque recta BI. Postremo BC, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim AG, media proportionalis est inter BA; AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; a Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri.

a 13. tertiidee.

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AF. b Quare cum diameter sphæræ

b 14. tertiid.

sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

DEINDE cum B G, sit media proportionalis inter A B, B D, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem A B, ipsius B D, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. a Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit B G, latus cubi. a 15. tertiidec.

PRÆTEREA quia, ex eisdem corollariis, B H, est media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt A B, ad B E, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. propos. 16 huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. b Igitur latus pentagoni potterit & B H, & H I, simul; Ac proinde c cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. d Quam ob rem B I, latus est Icosaedri. b 10. tertiidec. c 47. pr. d 16. tertiidec.

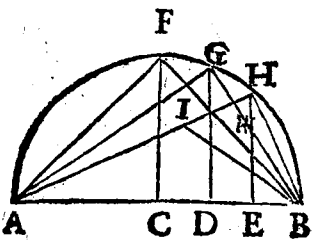
DENIQVE cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratū lateris Tetraedri; talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum. e Ac propterea diameter sphæræ, & latera dicta- e 6. dec. tum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atq; adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ve

Diamet.	6.	
Tetraed.	4.	
Octaed.	3.	
Cub.	2.	

a 9. dec. constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. *a* Erunt huiusmodi lineæ, nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorū, cum latera priorū sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.



SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, exco. d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

b 104. decimi.
c 106. decimi.
d 16. tertiidec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM

EODEM modo ostendemus, latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quàm BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD; & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cùm noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1.3.9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partiũ 9. est quadratum rectæ AB, talium 3. est quadratum rectæ BG; quòd illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cùm æqualia sint quadrato rectæ BG. Igitur si auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam verò quadratum rectæ AB, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quàm talium partium 2. Nam cùm 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quòd 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quàm 2. Quare quadratum rectæ GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, maior quàm recta BH. Rursus quia diameter sphæræ AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrũ constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, maius esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeò cùm quadratum rectæ AB, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quàm duæ tertiæ, hoc est, quàm AD, erit BH, minor quàm tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quàm noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quàm tertia pars, hoc est, quàm BD. Itaque cùm rectæ GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum

a 20. sexti.

b 15. tertiidec.

c 10. quinti.

d 47. primi.

zum B H, H I. Quadratum ergo rectæ B G, maius quoq; erit quadrato rectæ B I, Ac proinde recta B G, nempe latus cubi, maior erit quàm recta B I, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri B I, latere Dodecaedri B K, hac ratione patefiet. Cùm rectæ B G, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B K, & minus G K; erit rectangulum sub B G, B K, maius rectangulo sub B G, G K; atq; adeò rectangula sub B G, B K, & sub B G, G K, simul maiora duplo rectanguli sub B G, G K: a Est autem rectangulis sub B G, B K, & sub B G, G K, æquale quadratum rectæ B G; Et duobus rectangulis sub B G, G K, æqualia sunt duo quadrata rectæ B K (Nam cùm sit, vt B G, ad B K, ita B K, ad G K; b erit quadratum rectæ B K, æquale rectangulo sub B G, G K, ideoque duo quadrata rectæ B K, æqualia duobus rectangulis sub B G, G K.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ B G, duobus quadratis rectæ B K; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, sex quadratis rectæ B K: Atqui tribus quadratis rectæ B G, æqualia sunt quinque quadrata rectæ B H (Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quàm quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ B H, maiora erunt sex quadratis rectæ B K; Ac proinde vnum quadratum rectæ B H, maius erit vno quadrato rectæ B K (Si namque æquale esset quadratum rectæ B H, quadrato rectæ B K, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora, sex quadratis rectæ B K. quod est absurdum, cùm illa quinque his sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quàm recta B K; Ac propterea cùm B I, maior sit quàm B H, multò maior erit B I, latus videlicet Icosaedri, quàm B K, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

a 2. sec.

b 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter se æqualibus, hac ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cùm saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus,

EX

EX quinque, angulus Icosaedri;

EX sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cùm enim trianguli aquilateri angulus contineat duas tertias partes ℽnius recti, ex corell.3.propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertia partes ℽnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. a Nam solidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multò ergo minus ex pluribus, quàm sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. a 20. ℽn decimi.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cùm enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde ℽnus angulus contineat ℽnum rectum, ac præterea quintam partem ℽnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes ℽnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cùm enim ℽnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod continet ℽnum rectũ, & insuper recti quintã partem; erũt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; ac propterea multò minùs ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sanè ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cùm sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; ac proinde ℽnus angulus contineat ℽnum rectum, ac præterea duas partes sextas ℽnius recti; continebũt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atq; idcirco multò minus ex pluribus eiusmodi angulis, quàm tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in ℽnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI verò quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinq; talia triangula ad efformandum angu-

angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata aqualia coeant in vnum punctum, & constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona aquilatera, & aquiangula inter se aqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expeditè numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ sunt omnes baseis in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia verò bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ sunt omnes baseis in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli. Quia verò tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularium solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si verò 6 quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt

fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & Octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contrà. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos: Octaedrum verò octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases, totidemque solidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et ſolidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij verò, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cum verò diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non rectè tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accuratè complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certè ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cùm ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, ſtudiò nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cùm in omnibus diſciplinis tum vel maximè in Geometria verſatus, ſcitè ac prudenter iudices

dices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam verò, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi adscribuntur: Duo verò subsequentes à plerisque Hypsicli Alexandrino & rectè, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem prieri inter se comparantur Icosaedrū, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditates. In posteriori verò exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verùm quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumq; mutuas inscriptiones vnius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque verò problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulò vberiùs de dictis figuris regularibus in vniuersum disserere, proponendo varia theorèmata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuò inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quamplurimis theorematibus problematibusque locupletauit; verùm etiam integrum librum, qui ordine decimus sextus est, adiunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterùm præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facilè intelligi potest ex eius prooemio ad Protarchum, quod superius est positum.

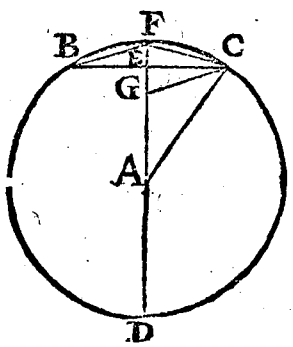
QVONIAM verò in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quàm in earundem ordine, & inter se, & à Francisco Flussate, ideoque & à nobis discrepant; annotauimus in margine ordinem vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior verò Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantùm numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hac nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicium est, tam apud Hypsiclem, quàm apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR.

I. THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli B C D, ducatur A E, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico A E, dimidiũ eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim A E, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter D F, ſumptaque E G, æquali ipſi E F; connectantur rectæ A C, C G, C F, B F. *a* Quoniã igitur perpendicularis A E, ſecat rectam B C, bifariã; erunt latera B E, E F, trianguli B E F, æqualia lateribus C E, E F, trianguli C E F; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; *b* erunt baſes C F, B F, æquales; *c* ideoque & arcus C F, B F, æquales; Acè proinde exiſtente arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit C F, eiuſdem pars decima; atque adeò recta C F, latus erit decagoni. Rurſus quia latera C E, E F, trianguli C E F, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, ſuntq; anguli contenti recti; *d* erunt & baſes C F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia verò arcus C F, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ D C F, cùm ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus C F, qualium 4. eſt arcus D C, hoc eſt, arcus D C, quadruplus arcus C F. *e* Quare & angulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: *f* Eſt autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cùm illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis D C. Igitur angulus C F D, atq; adeò illi æqualis oſtenſus C G F, duplus erit anguli C A F: *g* Atqui angulus C G F, externus, æqualis eſt internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cùm igitur G A C, ſit dimidium anguli C G F, vt oſtenſum eſt, erit G C A, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoque æquales erunt anguli G A C, G C A; *h* ac proinde & latera A G, C G, æqualia. Eſt autem C G, recta oſtenſa æqualis rectæ C F. Igitur & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F G, ſimul: Ac proinde tres ſimul A E, E F, F C, hoc eſt, duæ ſimul A F, F C, duplæ erunt ipſius A E, atq; idcirco è contrario erit A E, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pen-



a 3. tertij.
b 4. primi.
c 28. tertij.
d 4. primi.
e 33. ſex.
f 20. tertij.
g 32. primi.
h 6. primi.

in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quæ ex centro perpendicularis est ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

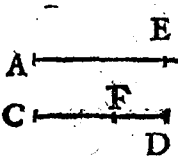
COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem esse vtrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul: Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. iv. ij.

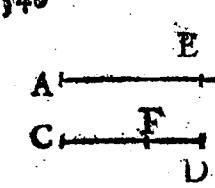
SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binæ rectæ AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cùm enim sit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB; & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD; a erit rectangulum sub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum sub CD, FD, æquale quadrato rectæ CF. Quam ob rem erit vt rectangulum sub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum sub CD, FD, ad quadratum rectæ CF (est enim vtrobiq; æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, ad quadratum rectæ CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, & quadratum rectæ AE, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, & quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ CF: b Sed quod quater continetur sub AB, EB, vnà cum quadrato rectæ AE, æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB, EB; Et quod quater continetur sub CD, FD, vnà cum quadrato rectæ CF, æquale est quadrato lineæ compositæ ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineæ compositæ ex AB, EB, ad quadra-



a 17. sexti.

b 8. sec.



a 2. sec. tum rectæ A E, ita quadratum lineæ co
positæ ex C D, F D, ad quadratum rec
C F, *a* Ac proinde, vt recta compos
A B, E B, ad rectam A E, ita recta compo
ta ex C D, F D, ad rectam C *F*: Et com
nendo vt composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla
ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta
C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, vt du-
b 15. quinti. pla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F; *b* Vt autem
dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo
vt A B, ad C D, ita A E, ad C F, Ac propterea, cùm sit vt tota A B,
c 19. quinti. ad totam C D, ita A E, ablata ad C F, ablatam; *c* erit quoq; reli-
qua E B, ad reliquam *F* D, vt tota ad totam. Quare vt A E, ad C F,
ita erit E B, ad *F* D, cùm vtraq; proportio eadem sit proportioni
A B, ad C D: Et permutando, erit vt A E, ad E B, sic C F, ad F D, & sic
deniq; iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostende-
mus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

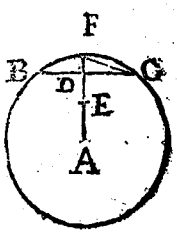
d 9. tertiidec. e 8. tertiidec. f 2. quartidecimi. *QVONIAM enim* d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam*; e *& recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni:* f *sit & vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti recta angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cùm ergo sit, & maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoq; latus hexagoni ad latus decagoni, & recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.*

EX hac quoq; propositione & præcedenti inferemus hoc illorum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquila-

quilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta; minus verò segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namq; recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 11 propos. 1. huius lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F, a *Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni, minus verò segmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum; & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum:* b *Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri, & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse ductæ perpendiculari, minus verò ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.*



29. tertiidec.

b 1. quartidecimi.

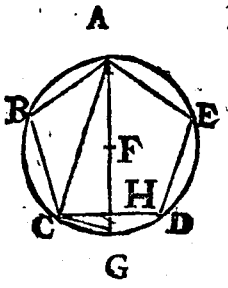
THEOR. 3. PROOPS. 3.

ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatq; recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa CG, latus





latus decagoni. Quoniam igitur recta A G pla est rectæ F G: erit ex scholio propos. 4. lib. quadratum rectæ A G, quadruplum quadr rectæ F G: *a* Sunt autem quadrato rectæ A G æqualia quadrata rectarum A C, C G. Igitur quadrata rectarum A C, C G, quadrupla sunt quadrati rectæ F G; Atque adeò tria quadrata rectarum A C, C G, F G, quintupla quadrati

a 47. primi.

b 10. ter iusdem rectæ F G: *b* Cùm ergo quadratis rectarum F G, C tijdec. nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ C D, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum A C, C D, quintupla quadrati rectæ F G, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur quadrati. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

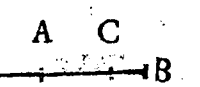
CIRCVMSCRIBAT enim circulus A B C D E, pentagonum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta A C, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. *c* Perspicuum est autem, quadrata rectarum A C, C D, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.

c 3. quartidecimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim A B, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum A C. Dico A C, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim A D, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi A B; *d* erit tota composita B D, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum B A: Ponitur



d 9. tertijdec.

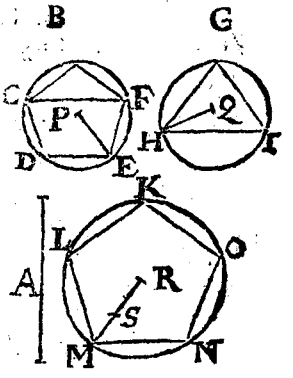
ipse autem & A B, secta in C, similiter. *a* Igitur erit vt B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, tota ad maius sui segmentum A C: Sed est quoque vt B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, maius segmentum ad A D, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt A B, ad A C, ita eadem A B, ad A D; Ac propterea A C, A D, æquales erunt. Cùm ergo A D, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est A B; erit & A C, eiusdem circuli latus decagoni. a 2. quarti decimi.

ALITER. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D, æqualis maiori segmento A C; *b* eritque tota recta B D, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cùm igitur A B, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. A D, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum. b 9. terti decimi.

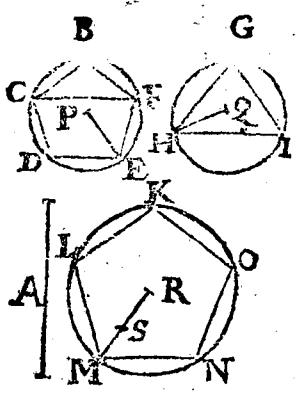
THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum *B* C D E F, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum G H I. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum B C D E F, & triangulum G H I, hoc est, circulos B C D E F, G H I, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus K L M N O, pentagonum K L M N O, ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoq; quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli G H I. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ P E, Q H, R M; Secetur-



que R M, extrema ac media ratione in S; *d* eritq; maius segmentum R S, latus Decagoni in circulo K L M N O, in quo R M, est latus hexagoni. Subtendat quoque recta C F, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. E F, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris d 4. quarti decimi. 13. terti decimi.



cubi CF, secti extrema ac media ratione, a 2. quarti decimi. erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF maius segmentum ad RS, maius segmentum; Atq propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atq; adeò per ea, quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. libri vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quàm quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphætæ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: c Quia verò quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinq; quadratis rectæ RM, & quinq; quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cùm hæc ostensa sint æqualia quinq; quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinq; quadratis rectæ RS. Sed quoniam, d (cùm quadrata rectarum CF, BF, quinq; quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cùm MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; e sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoq; quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac præterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & ideirco semidiameter BE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.

b 22. sexti.

c 10. tertiidec.

d 3. quarti decimi.

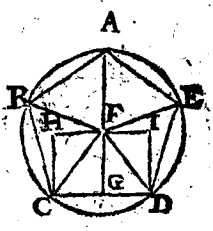
e 12. tertiidec.

iij. vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari com-

ri comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri A B C D E, ducatur ad latus C D, perpendicularis F G. Dico rectangulum sub F G, & C D, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cùm bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta H I, parallela ipsi C D, occurrens duabus perpendicularibus C H, D I, ductis ex C, D, ad C D, in punctis H, & I. Erit; rectangulum C I, contentum sub H C, hoc est, sub F G, & C D. a Quoniam verò rectangulum C I, duplum est trianguli F C D, atque adeò cuiusliber reliquorum quatuor triangulorum ipsi F C D, æqualium; erit rectangulum C I, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cùm quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeò sextuplum rectanguli C I, quinquies sumpti, nimirum rectangulum C I, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



a 41. primi.

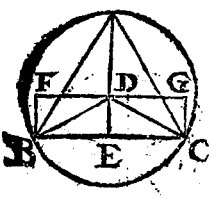
ALITER. Facta eadem figuræ constructione, b cùm rectangulum C I, duplum sit trianguli F C D, hoc est, æquale triangulo F C D, bis sumpto; Erit rectangulum C I, trigesies sumptum æquale triangulo F C D, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cùm enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexagiuta huiusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum F C D, sumptum sexagesies æquale erit superficiei Dodecaedri.

b 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri A B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum sub D E, & B C, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. libri. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & basis vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoq; per D, recta F G, parallela ipsi B C, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus B F, C G, ex B, C, ductis ad B C; erit rectangulum B G, contentum sub F B, hoc est, sub D E, & B C,



a 41. primi. a Quoniam verò rectangulum B G, duplum est trianguli B D C; atq; adeò cuiuslibet reliquorū duorum triangulorum ipsi D B C, æqualium: Erit rectangulum B G, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cùm triginta talia triangula æqualia sint vni triangulo Icosaedri; Atq; adeò idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli B G, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

b 41. primi. ALITER. Facta eadem constructione figuræ, b cùm rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum B G, trigesies sumptum æquale triangulo D B C, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quòd tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies, (repetita figura proximè antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni

c 6. quartidecimi. Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. c Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; d Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. e Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

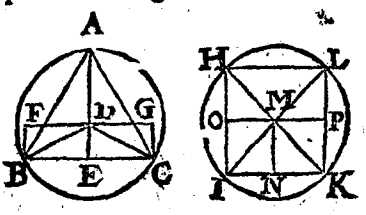
d 7. quartidecimi.

e 15. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptū sexies, superficiei Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi aequale. Sit enim primo triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, eius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, aequale esse superficiei Tetraedri. a Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, aequale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aequale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aquilatera ipsi A B C, aequalia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aequale.



a 41 pr.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptum, aequale esse superficiei Octaedri. b Cum enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, aequale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum aequale viginti quatuor huiusmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptum aequale est superficiei Octaedri.

b 41. primi.

SIT tertio quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectae lineae, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula aequalia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, aequale esse superficiei cubi. c Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, aequale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptū aequale viginti quatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totā superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum aequale superficiei cubi. Quod est propositum.

c 41. primi.

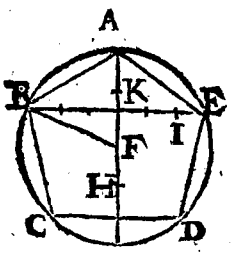
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HK L; (sunt enim IP, PH, aqualia, cum recta OI, sit dimidium lat. vis HI, nempe aqualis ipsi MN) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

17. viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum vero A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sint quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F, quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cum sit semidiameter, erit A H, ipsius A F, sesquialtera. Quia vero recta F A, diuidens arcum B A E, bifariam, diuidit quoque rectam B E, bifariam, per 3. coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam K B, quam K E, tres sextas rectæ B E; atque adeo cum B I, contineat quinque, continebit K I, duas: Ac proinde & K B, ipsius K I, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt A H, ad A F, ita K B, ad K I; *a* atque idcirco rectangulum sub extremis A H, K I, æquale erit rectangulo sub mediis A F, K B. *b* Est autem rectangulum sub A F, K B, duplum trianguli A B F, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin A F, & eandem altitudinem B K, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub A H, K I, duplum erit eiusdem trianguli A B F: *c* Est autem & rectangulum sub A H, K I, duplum rectanguli sub A H, I E; proterea quod & basis k I, dupla est basis I E, (continet enim k I, duas sextas partes ipsius B E, & I E, vnam) eademque semper altitudo A H. Igitur æqualia sunt triangulum A B F, & rectangulum sub A H, I E; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum A B C D E, quintuplum est trianguli A B F, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero sub A H, B I, quintuplum est rectanguli sub A H, I E; quod & basis B I, quintupla sit basis I E, eademque semper altitudo A H. Igitur



a 16. sexti.
b 41. primi.
c 1. sex.
d 1 sex.

Igitur pentagonum A B C D E, & rectangulum sub A H, B I, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

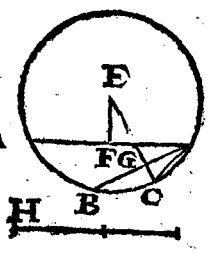
COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum A B C D E, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, B E, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (a comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum A G, in H, (cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum F G, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum F G, bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub A H, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub B I, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti. a 5. *quartidecimi.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. IV. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo A B C D, *b* circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni B D, & trianguli A D; & ex centro E; ducãtur ad A D, B D, perpendiculares E F, E G; Sit deniq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse, vt H, latus cubi, ad A D, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est B D, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem E G, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentum est E F, ex scholio propos. 2. huius lib. *c* Erit vt H, tota ad B D, maius sui segmentum, ita E G, tota ad E F, maius sui segmentum; *d* Ac proinde rectangulum sub extremis H, E F; æquale erit rectangulo sub mediis B D, E G. *e* Quia vero est, vt H, ad A D, ita rectangulum sub H, E F, ad rectangulum sub A D, E F, cum bases sint H, A D, altitudo vero semper eadem E F; Erit quoque vt H, ad A D, ita rectangulum sub B D, E G, (quod est æquale rectangulo sub H, E F,) ad idem rectangulum sub A D, E F. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub B D, E G, ad rectangulum sub A D, E F, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoq;, vt H, latus cubi, ad A D, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiẽ Icosaedri. Superficies itaque



b 5. *quartidecimi.*

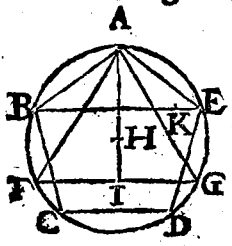
c 2. *quartidecimi.*

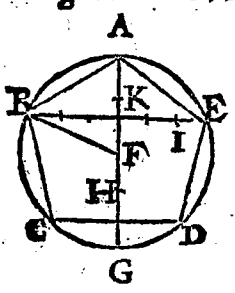
d 16. *sexti.*

e 1. *sexti.*

itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod eſtendendum erat.

a 5. *quarti decimi.* ALITER. *a* Circumſcribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icoſaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit pentagoni, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinquæ ſextæ partes ſint B k. Dico rurſus eſſe, vt B E, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub A I, B k, æquale eſt pentagono A B C D E, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B k, ad I F, cum baſes ſint B k, I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque vt pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B k, ad I F; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nempe pentagonum A B C D E, & recta B k, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æque multiplicentur per numerum 20, *c* erit quoque vt pentagonum A B C D E, duodecies ſumptum, hoc eſt ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta B k, duodecies ſumpta, ad rectam I F, vigeſies ſumptam: Atqui recta B k, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B k, contineat quinque ſextas partes ipſius B E, continebit eadem B k, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E.) Recta vero I F, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri F G, decies ſumpto; (eo quod F G, eſt ipſius I F, dupla,) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi B E, decies ſumptum ad latus Icoſaedri F G, decies ſumptum; Ac propterea, *d* cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.





b 1. *ſexti.*

c *ſchol.* 2 2. *quinti.*

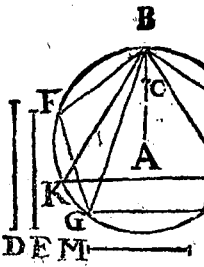
d 15. *quinti.*

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 17. 18.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

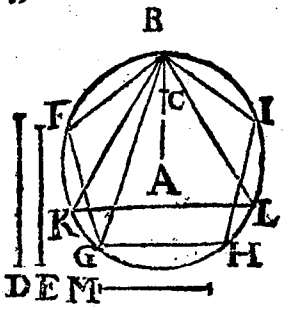
SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum A C. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum A B, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum B F G H I, & triangulum æquilaterum B k l. Si igitur B F, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta B G, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam vero A C, maius segmentum semidiametri A B, sectæ extrema ac media ratione, a est latus Decagoni in circulo B F G H I, in quo nimirum A B, latus est Hexagoni; b poterit B F, latus pentagoni & totam A B, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam A B, & minus segmentum B C, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est B F, potens totam A B, & maius segmentum A C, ad M, potentem totam A B, & minus segmentum B C. c Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri B k, triplum est quadrati semidiametri A B: d Item quadrata rectarum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C; Erit vt quadratum rectæ B k, ad quadratum rectæ A B, ita quadrata rectarum A B, B C, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ B k, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C: Est autem vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B F, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. eo quod B G, est latus cubi, & B F, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; e Erit vt tota A B, ad maius segmentum A C, ita tota B G, ad maius segmentum B F; f Ac proinde vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F, ita



a 4. *quartidecimi.*
b 10. *tertiid.*
c 12. *tertiidec.*
d 4. *tertiidec.*
e 2. *quartidecimi.*
f 22. *sexti.*

B F, ita quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B K, ita quadratum rectæ B F, ad quadratum rectæ M; a Ac propterea erit vt recta B G, ad rectam B K, ita recta B F, potens totam A B, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & minus segmentum B C. Cum igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ B G, B K, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta B F, potens totam A B, & maius segmentum A G, ad rectam M, potentem totam A B, & minus segmentum B C, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. sexti.



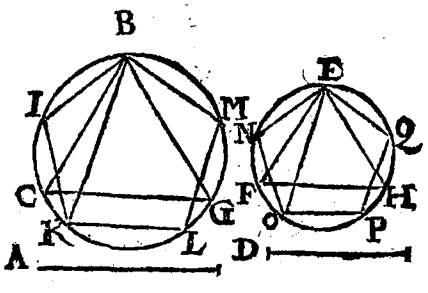
SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ B G, B K, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & B C, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & E F, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad B C, ita D, ad E F. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum B C G, E F H, & circa ipsa descriptis circulis, describantur his circulis pentagona æquilatera B I K L M, E N O P Q, connectanturque rectæ B K, C K, E O, F O,

b 5. quartidecimi.



b *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & pentagonum B C G, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in quauis habeant lateris A: Erit B I K L M, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Acpropterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta B K, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta E O, lateri cubi D. Rursus quia arcus B I K, E N O, similes sunt (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ.) item arcus B G C, E H F; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli B C K, E F O, ex definitione*

finitimæ segmentorum similium, æquales inter se, quam anguli B K C, E O F, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus C B K, trianguli B C K, reliquo angulo F E O, trianguli E F O, æqualis erit, & totum triangulum B C K toti triangulo E F O, æquiangulum. a Quare erit vt B K, hoc est, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad B C, latus Icosaedri, ita E O, hoc est, recta D, illi æqualis, latus scilicet alterius cubi, ad E F, latus Icosaedri. Quod est propositum. a 4. sext.

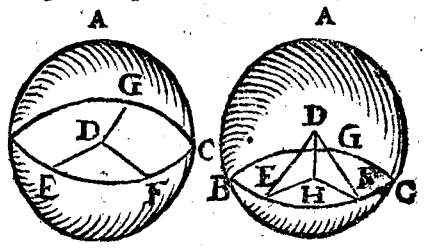
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent B G, B K, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

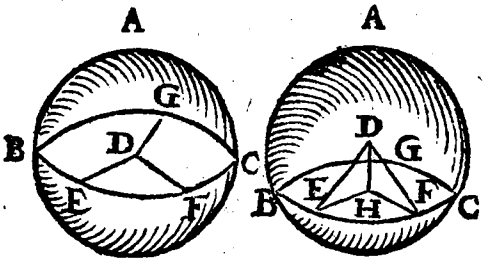
SECETVR sphæra A B C, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum B E F G C. Dico B E F C G, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione B E F C G; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ, quotcunque D E, D F, D G. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli. figura plana B E F C G, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.



TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis D H; emittanturque ex H, rectæ vtcunque H E, H F, ad extremitatem vsque communis sectionis; & con-

nectan-

nectantur rectæ D E, D F. Quoniam igitur anguli D H E, D H
a 47. primi. ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; a erit tam quadratum rectæ D E
quadratis rectarum D H, H E, quam quadratum rectæ D F
quadratis rectarum D H, H F, æquale: sunt autem quadrata



rectarum D E, D F, æqua
lium ex centro sphæræ ad
eius superficiem cadentium
æqualia. Igitur & quæ
drata rectarum D H, H E
quadratis rectarum D H
H F, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rec
ctæ D H, reliquum quadratum rectæ H E, reliquo quadrato rectæ
H F, æquale erit. Quare & rectæ H E, H F, æquales erunt. Eodem
argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitates
communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis
duabus H E, H F. Figura igitur plana B E F C G, vnica linea
contenta, ex defin. circuli, circulus erit; eiusque centrum, pun
ctum H, in quod perpendicularis D H, cadit. Quod est propo
situm.

COROLLARIVM.

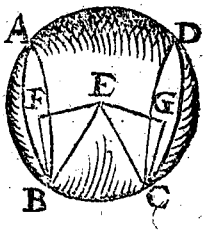
ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis à centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distantes à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN *sphæra* A B C D, *cuius centrum* E, *sint circuli æquales* A B, D C. *Dico ipsos æqualiter à centro* E, *distare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* E F, E G, *quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* F B, G C, *ad circumferentias circulorum vtrumque, connectanturque rectæ* E B, E C. *Quoniam igitur anguli*
b 47. primi. E F B, E G C, *recti sunt, ex defin. 3. lib. 11.* b *Erit tam quadra-*

tum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant à centro E.

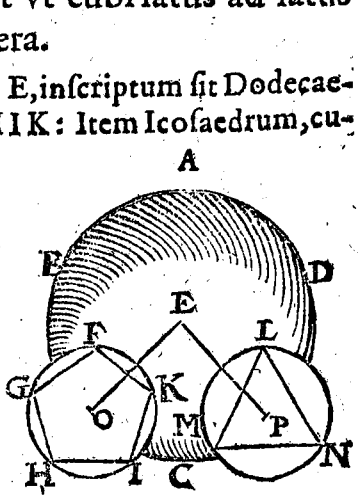


SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.

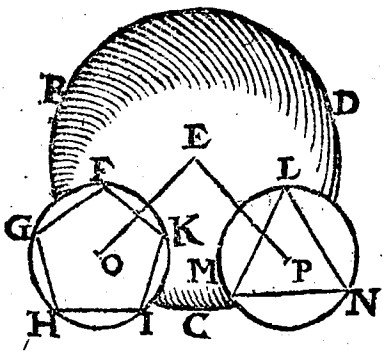
THEOR. 11. PROPOS. 11. 17. x.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri; in vna eademque sphæra.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum FGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangũt; si per pentagonũ, & triangulum plana ducãtur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN,



nn



LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a Quia idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idem circuli FGHIK,LMN; Ac propterea per lemma 2. præcedens, æquales ab E, centro sphæræ distabunt; ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorū centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ; resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cùm & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter se, ex coroll. propos 6. lib. 12. Eodemmodo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. b Quoniā autem est, vt basis FGHIK, ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cùm vtriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5 demonstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est (sicut modò diximus) vt totasuperficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholium, vt totasuperficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: c Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ; atque adeò ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Dodecaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunq; sphęræ. Quapropter Dodecaedrū ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. *quarti decimi.*

b 6. *duodecimi.*

c 9. *quarti decimi.*

d 9. *quarti decimi.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero ostensum est quoque, d ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra. e Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemque sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quam-

e 10. *quarti decimi.*

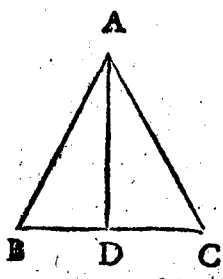
quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: Item ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri: & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri: & lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius: & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, esse inter se æquales.

a 11. *quartidecimi.*

THEOR. 12. PROPOS. 12. 0. xj.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, sesquitertium esse quadrati perpendicularis A D. Quoniam enim ob æqualitatem laterum A B, A C, anguli B, & C, æquales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli A D B, æquales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autem & latus A D, commune, vel A B, A C, æqualia. *c* Igitur & reliqua latera B D, C D, æqualia sunt; ac propterea latus B C, hoc est, latus A B, duplum rectæ B D; & idcirco quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex scholio propos. 4. lib. 2. *d* Cùm igitur quadrato rectæ A B, æqualia sint quadrata rectarum A D, B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, quadrupla quadrati rectæ B D; Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ A B, vel quadrata rectarum A D, B D, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ A D. Quare quadratum rectæ A B, partium 4. sesquitertium est quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.



b 5. *primi.*

c 26. *primi.*

d 47. *primi.*

COROLLARIVM.

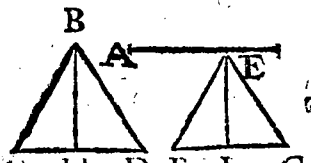
HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est B D, & C D, rectas æquales esse, hoc est, latus B C, secari bifariam à perpendiculari A D. Quare cum latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia sint lateribus A C, A D, trianguli A C D: & basis B D, basi C D, æqualis: *e* Erunt & anguli B A D, C A D, æquales, id est, angulus B A C, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari A D.

e 8. *primi.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius sphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita C D, F G, perpendiculares B H, E I. *a* Quoniam igitur quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri B C, *b* & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, E F, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. *c* idemque commensurabilia erunt: Quare lineæ ipsæ A, B C, E F, commensurabiles existent saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, E F, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt C H, F I.



a 13. *ter tiidec.*
b 14 *ter tiidec.*
c 6. *dec.*

RVRSVS, *d* quia tam quadratum rectæ B C, quadrati rectæ B H, quam quadratum rectæ E F, quadrati rectæ E I, sesquitertium est; habebunt tam quadrata rectarum B C, B H, quam quadratum rectarum E F, E I, proportionem inter se, quam numeri 4. 3. *e* idemque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & earum lineæ ipsæ B C, B H, quam lineæ E F, E I, commensurabiles existent. Est autem & tam C H, ipsi B C, quam F I, ipsi E F, dimidia videlicet toti, commensurabilis. *f* Igitur & tam B H, C H, quam E I, F I, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde cum C H, & F I, ostensæ sint Rationales, erunt quoque B H, E I, Rationales. *g* Quoniam vero tam C H, B H, quam F I, E I, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut constat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. *h* cum ostensum sit talium partium 1. esse tam quadratum C H, quam quadratum F I, qualium 3. est tam quadratum B H, quam quadratum E I.) Erunt tam C H, B H, quam F I, E I, Rationales potentia tantum commensurabiles: *i* Ac proinde tam rectangulum sub C H, B H, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub F I, E I, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula B C D, E F G, æqualia rectangulis sub C H, B H, & sub F I, E I, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum C D, F G, duplæ sint basium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula B C D, E F G, Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri trian-

d 12. *quartidecimi.*
e 6. *dec.*
f 12. *decimi.*
g 9. *dec.*
h 12. *quartidecimi.*
i 22. *decimi.*

triangulo B C D, sit commensurabilis; (est enim triangulum B C D, totius superficiei quarta pars) Item tota superficies Octaedri triangulo E F G, commensurabilis; (Est enim triangulum E F G, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quã Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum.

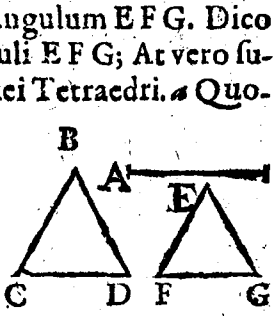
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera B C, E F, & ob id eorum dimidia C H, F I, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas C H, B H, quam F I, E I, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub C H, B H, & sub F I, E I, hoc est, triangula B C D, E F G, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale: perspicuum est, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14. o. XIV.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum B C D; Octaedri vero basis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, sesquitertium esse trianguli E F G; At vero superficiem Octaedri esse sesquialterã superficiei Tetraedri. *a* Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterũ est quadrati lateris Tetraedri C D; *b* duplum vero quadrati lateris Octaedri F G; fit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris C D; & talium 3. quadratum lateris F G. Quare quadratum rectæ C D, sesquitertium est quadrati rectæ F G: Vt autem quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ F G, ita est triangulum B C D, ad triangulum E F G. (*c* quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum C D, F G, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum B C D, sesquitertium est trianguli E F G.



a 13. *tertiidec.*

b 14. *tertiidec.*

c 20. & 19. *sex.*

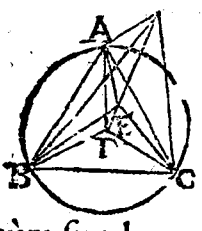
RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum B C D, sesquitertium esse trianguli E F G; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum B C D, talium 3. esse triangulum E F G; Efficitur, vt triangulum E F G, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum B C D, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16.

Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basin.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E; ducaturq; ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta DEF, incidens in basin ABC, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt, erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cùm sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Quare tur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, *b* eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; *c* Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cùm tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; *d* erit F, centrum basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.



a 8. *primi.*

b 13. *primi.*

c 4. *primi.*

d 9. *tertij.*

QVIA verò ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC demissa in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si aliter caderet perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cùm F, quoq; sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

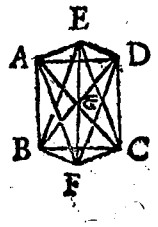
THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

xvj.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis verò vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum A B C D E F, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus E A D, E A B, E B C, E C D, F B C, F B A, F A D, F D C, & in sphæra descriptũ, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinũ, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Ductis enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quæ æquales sunt, cùm sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet è centro ad superficiem sphæræ: *a* quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati semidiametri A G, ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2 erit quadratum rectæ A B, & talium partium 1. quadratum rectæ A G; Ac proinde quadratum rectæ A B, duplum erit quadrati rectæ A G. Cùm ergo quadratum rectæ A G, æquale sit quadrato rectæ B G; erit quadratum rectæ A B, æquale duobus quadratis rectarũ A G, B G; *b* Ac propterea angulus A G B, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli A G D, B G C, C G D, recti. *c* Quam ob rem A G, C G, & B G, D G, in rectum coniunctæ; *d* atque adeò rectæ A C, B D, sese secantes in G, in vno existent plano; *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum A C D, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarũ basis communis A B C D, vertices verò E, & F; quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cùm quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia, & basi communi A B C D. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin A B C D, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri A B, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum A G, B G; erit quoque quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis semidiametrorum A G, E G; *f* Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, se mutuò secantibus in G, ad rectos angulos insistit, *g* ipsa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe ad ba-



a 14. tertiidec.

b 48. primi.

c 14. primi.

d 2. vndecimi.

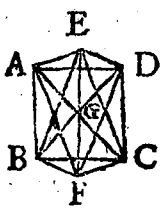
e 7. vndecimi

f 48. primi.

g 4. vndecimi.

ad basin pyramidum. Quare E G, altitudo est pyramidis A B C D E. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis A B C D F. Cum ergo E G, F G, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia A C, est diameter sphæræ; *a* erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterum A D, D C. *b* Quare angulus A D C, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum est. Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere Octaedri A B, *c* constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. *tertiidec.*



b 48. *primi.*

c 12. *tertiidec.*

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2 propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Verumtamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco describere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

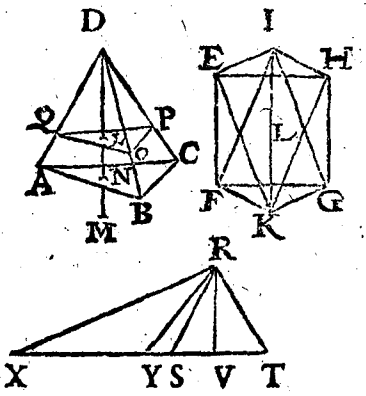
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

SIT Tetraedrum A B C D, & octaedrum E F G H I k, in eademq; sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ D M, incidens in basin A B C, ad punctum N. *d* Erit igitur N, centrum basis A B C, & D N, perpendicularis

d 15. *quarti.*

laris ad eandem basin. Quia verò pars diametri L N, inter centrum sphæræ & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit D L, semidiametri talium partium 3. qualium 1. est L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde ex scholio propos. 15. lib. 11. per centrũ L, planum O P Q, parallelum plano A B C; *a* Eruntq; rectæ Q O, O P, P Q, parallelæ rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulum Q O P, æquiangulum erit triangulo æquilatero A B C, *b* cùm anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At A B C, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi A B C: Sunt autem & triangula D Q O, D O P, D Q P, triangulis D A B, D B C, D A C, æquilateris similia, ex coroll. propos 4. lib. 6. Igitur pyramides A B C D, Q O P D, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. *c* Rursus quia plana parallela A B C, Q O P, secant rectas D N, D C, proportionaliter; erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P: Erat autem D N, ad D L, vt 4. ad 3. (cùm ostensum sit D N, esse talium partium 4. qualium 3. est D L.) Igitur & D C, ad D P, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, *d* cùm pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus *e* quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ D C, ad quadratum rectæ D P, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



a 16. 9n. decimi.

b 10. 9n. decimi.

c 17. 9n. decimi.

d 8. duo decimi.

e 20. se. xti.

STT iam triangulum æquilaterum R S T, æquale triangulo D Q P; demittaturque ex R, ad S T, perpendicularis R V. *f* Erit- que latus R T, hoc est, D P, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis R V. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ D P, talium 27. erit quadratum rectæ R V. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ D C. Igitur linea R V, est potens viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. quarti decimi.

RVRSVS extensa T S, fiat T X, ad T S, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturque T X, bifariam in Y, vt sit T Y, talium partium 32. qualium 27. est T S, seu illi æqualis D P. Quoniam verò proportio D C, ad D P, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquiter-

tia, erit D C, talium partium 36. qualium D P, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia) ac propterea qualium T Y, est 32. Quare linea T Y, continet octo nonas partes lateris tetraedri D C. Dico igitur ita esse tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K, vt rectangulum contentum sub recta R V, (quæ potest vigintiseptem sexagesimasquartas partes quadrati lateris D C), & sub recta T Y (quæ continet octo nonas partes eiusdem lateris) ad quadratum diametri sphæræ.

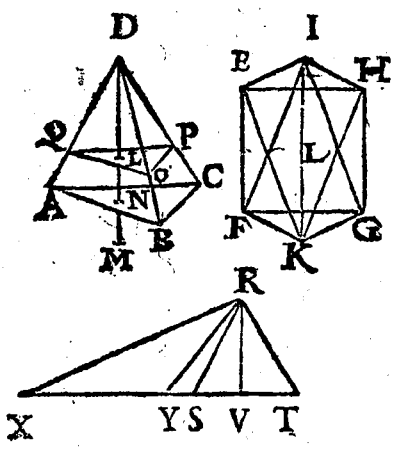
a 1. sext. CVM enim ductis rectis R X, R Y, *a* triangulum R T X, duplum sit trianguli R T Y, quod & basis T X, dupla sit basis T Y;

b 41. primi. *b* Est autem & rectangulum sub R V, T Y, duplum eiusdem trianguli R T Y; Erit triangulum R T X, æquale rectangulo sub R V, T Y. *c* Ac propterea erit vt

c 7. quinti, triangulum R T X, ad triangulum R S T, ita rectangulum sub R V, T Y, ad idem triangulum R S T;

d 1. sext. *d* Est autem triangulum R T X, ad triangulum R S T, vt basis T X, ad basin S T, nimirum vt 64 ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum R S T, hoc est, ad triangulum D Q P, siue Q O P, sibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. Erit ergo rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum Q O P, ita pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D. At vero vt triangulum Q O P, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita est pyramis Q O P D, ad octaedrum E F G H I K (Nam cum D N, recta sit ad planum A B C, recta quoq; erit ad planũ Q O P, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoq; sphæræ semidiameter D L, altitudo erit pyramidis seu tetraedri Q O P D:

e 16. quarti decimi. *e* Octaedrum autem E F G H I K, diuiditur in duas pyramides æquales E F G H I, E F G H K, quarum basis communis quadratum E F G H, dimidium quadrati diametri sphæræ; & altitudines æquales semidiametri sphæræ L I, L K. Pyramides ergo Q O P D, E F G H I, æquales habent altitudines. Quare ex scholio propos. 5. lib. 12. erit vt basis Q O P, ad basin E F G H, ita pyramis Q O P D, ad pyramidem E F G H I; Ac propterea per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 12. ostendimus, vt basis Q O P, ad duplum basis E F G H, hoc est, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyramidis E F G H I, hoc est, ad Octaedrum E F G H I K. Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub R V, potente vigintiseptem sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri D C, & sub T Y, octo nonis eiusdem lateris D C, contentum ad quadratum



dratum diametri sphæræ D M, ita pyramis, seu tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

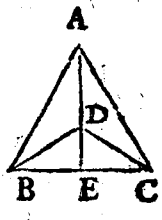
SCHOLIVM.

QVONIAM verò D C, talium partium 4. fuit, qualium 3. D P; continebit D P, seu illi æqualis R T, tres quartas partes lateris tetraedri D E: Ac proinde, a cùm recta R T, sit potentia sesquitertia rectæ R V; erit R V, potentia subsesquitertia ipsius R T, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rursus quia T Y, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, seu D P; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit T Y, superquintupartiens vigesimasseptimas partes ipsius S T, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K, vt rectangulum sub R V, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub T Y, quæ superquintupartiens est vigesimasseptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus. a 12. quartidecimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18. 20. xvij.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta A E, quæ perpendicularis erit ad B C, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10 lib. 13. Dico A E, triplam esse rectæ D E, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cùm latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia sint lateribus D B, D C, trianguli B D C; (è centro enim ducuntur) sit autem & basis A B, basi B C, æqualis: Erunt triangula A B D, B D C, æqualia ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atq; eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare ob æqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, trianguli A B C, triplum est trianguli B D C. Quoniam verò rectangulum sub A E, E B, triangulo A B C, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cùm basis trianguli B D C, dupla sit basis B E, vtriusq; rectanguli; Erit quoque rectangulum sub A E, E B, triplum rectanguli sub D E, E B: *b* Est autem vt rectangulum sub A E, E B, ad rectangulum sub D E, E B, eiusdem altitudinis E B, ita basis A E, ad basin D E. Igitur & A E, tripla est ipsius D E. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.



b 1. sexti.

COROL-

COROLLARIVM.

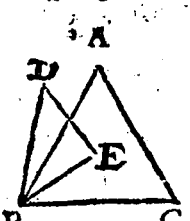
ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cùm enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

0. xvij. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphæræ inscribatur: erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphæra, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ DB. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; *a* quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. *b* Quia verò quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare *c* cùm quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. *tertiidec.*

b 12. *tertiidec.*

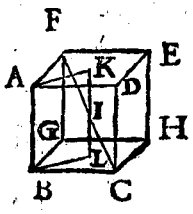
c 47. *primi.*

0. xviij. THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum

centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. *a* Cùm enim quadratũ diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.



a 15. tertiidec.

PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cùm KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, *b* quia AB, KL, parallelæ sunt, quòd rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, *c* quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeò recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam verò perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cùm KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit Ik, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b 6. vndecimi.

c 16. vndecimi.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. *d* Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: *e* Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

d 15. tertiidec.

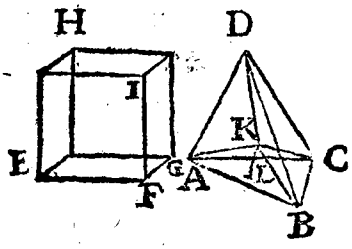
e 31. vndecimi.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro

centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſin ductæ tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunq; A B C D, contentum planis A B C, A B D, A C D, B C D, ſolidum autem E F G H, contentum ſub E I, tertia parte ſuperficiei corporis A B C D, & ſub altitudine F G, quæ æqualis ſit perpendiculari K L, ducta ex centro K, ad baſin A B C. Dico ſolidum E F G H, æquale eſſe dicto corpori regulari A B C D. Nam ductis ex centro K, rectis K A, K B, K C, K D, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cùm æquales habeant baſes & altitudines. Cùm enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſis æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſitionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ducta, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò priſma contentum ſub baſi A B C, & altitudine K L, triplum eſt pyramidis A B C K, per coroll. 1. propoſ. 8. lib. 12. Atq; eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, eandem altitudinem K L, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine K L (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis A B C D. Quam ob rem cùm idem priſma triplum ſit priſmatis E F G H, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, ea; quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida E F G H, A B C D, æqualia. Quod eſt propoſitum.



e. xj.

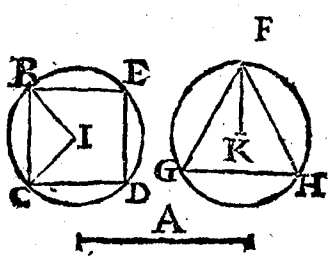
THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum B C D E, & octaedrum, cuius vnum triangulum F G H. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum B C D E, & triangulum F G H, hoc eſt, circulos B C D E, F G H, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex centris I B, K F. a Quia igitur quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi B C, & quadratum lateris B C, duplum quadrati rectæ B I; (Nam ducta recta I C, fiet angulus B I C, rectus, cùm ſubtendat quadratum; b Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectarum B I, I C. Quare cùm rectarum

a 15. tertiidec.

b 47. primi.



tarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus *a* quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; *b* & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ Fk. Cùm igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, Fk; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erũt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. *xerti decimi.*

b 12. *xerti decimi.*

COROLLARIVM.

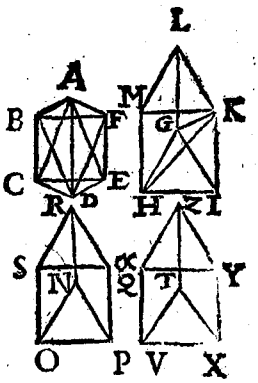
HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quàm octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. *c* qui cùm sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cùm sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quòd parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quàm in octaedro. quod est propositum.

c 21. *quarti decimi.*

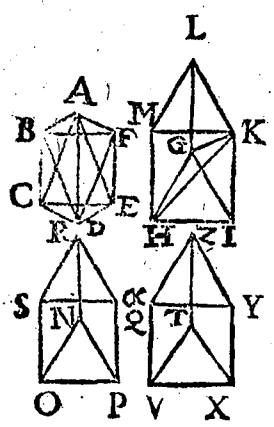
THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrũ GHIk. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus communis est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD; in BDFA; cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis DEF; quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt continentes cum ipso dimidiam partem octaedri. Quoniam verò quælibet harum pyramidum



dum constat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipsorum commune est A D, diameter, & reliqua latera, ipsius octaedri latera existunt, a inter se æqualia sunt; efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cùm contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Constituatur super G H I, basin tetraedri, prisma G H I K L M, eiusdem cum tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Rursus, super basin octaedri N O P, & T V X, basi tetraedri æqualem, constituantur duo prismata, N O P Q R S, T V X Y Z α, eiusdem cum octaedro, seu pyramide A C D E, altitudinis; b Quoniam igitur G H I, hoc est, T V X, basis tetraedri sesquitertia est ipsius N O P, basis octaedri: Erit quoque prisma T V X Y Z α, prismatis N O P Q R S, sesquitertium, cùm prismata eiusdem altitudinis sint, vt bases, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus. Est autem & octaedrum A B C D E F, eiusmodi prismatis N O P Q R S, sesquitertium; (Nam prisma æquale est tribus pyramidibus ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum.) Igitur æquale est octaedrum prismati T V X Y Z α. Quod verò prisma T V X Y Z α, ad prisma G H I K L M, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex scholio propos. 14. lib. 12. Est autem altitudo prismatis T V X Y Z α, quod octaedro æquale est, eadem quæ octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prisma G H I K L M, hoc est, ad triplum tetraedri G H I K, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri. Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quàm quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, vt 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est vt 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaq; octaedrum, atq; Tetraedrũ eidem sphæræ inscribantur, &c. quod demonstrandum erat.



a 8. primi.

b 14. quarti decimi.

COROL-

COROLLARIVM.

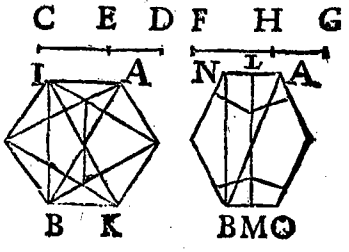
EX dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. *a* Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram

a 18. *huius.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

POSSIT recta A *E*, rectam C D, & eius segmentum maius C E; Item rectam F G, & eius segmentum minus H G. Dico C E, esse latus Icosaedri, & H G, latus Dodecaedri, eius sphæræ, cuius A B, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter A B, descriptũ Icosaedrum A I B K, & Dodecaedrum A N B O. Latera deinde Icosaedri opposita A I, *B* K, connectantur recta I B, quæ subtendet vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, vt constat ex propos. *16. lib. 13.* (Nam in ea figura, ducta recta Z F, erit R S H Z F, pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia G R, G S, G H, G Z, G F, cadentia in superficiem sphæræ, in quo recta R H, latera opposita R X, H I, coniungens angulum R S H, subtendit) clarius q; patebit ex constructione Icosaedri, quam ad finem lib. *16.* ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia verò A I, *B* K, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16. lib. *13.* *b* erunt anguli A I B, I B *K*, æquales duobus rectis, Ac proinde, cùm sint inter se æquales (Ducta enim alia diametro I *K*; cùm latera A I, I B, trianguli A I B, æqualia sint lateribus K B, B I; & bases quoque A B, I K, æquales; *c* Erunt anguli A I B, I B *K*, æquales) recti erunt; *c* ideoq; quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum A I, I B; Erat autem idem quadratum rectæ A B, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum C D, C E: Igitur quadrata rectarum I B, I A, æqualia sunt

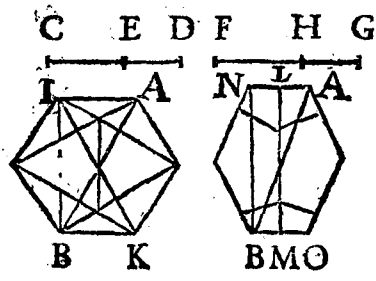


b 29. *primi.*

c 8. *primi.*

d 47. *primi.*

quadratis rectarum C D, C E; Ac propterea cùm C E, sit maius segmentum ipsius C D, diuisæ extrema ac media ratione; Item I A, maius segmentum ipsius I B, similiter diuisæ; (Nam I B, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est I A, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, *a* maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit C E, maius segmentum ipsi I A, lateri Icosaedri. *b* Cùm enim sit vt C D, ad C E, ita I B, ad I A; erit quoq; vt quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ C E, ita quadratum rectæ I B, ad quadratum rectæ I A; Ac componendo, vt quadrata rectarum C D, C E, ad quadratum rectæ C E, ita quadrata rectarum I B, I A, ad quadratum rectæ I A: Constant autem quadrata rectarum C D, C E, æqualia quadratis rectarum I B, I A; *d* Igitur & quadratum rectæ C E, æquale est quadratum rectæ I A; ideoq; rectæ C E, I A, æquales sunt. Quod est propositum.



a 8. *tertiidec.*
b 2. *quartidecimi.*
c 22. *sexti.*
d 14. *quinti.*

RVRSVS latera Dodecaedri opposita A N, B O, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta L M, & ipsa latera recta N B, coniungantur. Quoniam igitur N L, B M, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. *e* erunt quoque L M, N B, æquales & parallelæ: Est autem recta L M, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, *f* Ac proinde quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B, N A. Quare cùm idem quadratum rectæ A B, æquale sit positum quadratis rectarum F G, H G; æqualia erunt quadrata rectarum N B, N A, quadratis rectarũ F G, H G. Ac propterea, cùm H G, sit minus segmentum ipsius F G, sectæ extrema ac media ratione: Item N A, minus segmentum ipsius N B, hoc est, ipsius L M, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit H G, minus segmentum ipsi N A, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac suprà demonstrauimus, C E, maius segmentum æquale esse ipsi I A, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam secatam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item aliam lineam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit. Quod erat ostendendum.

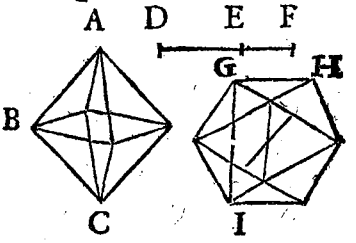
e 33. *primi.*
f 47. *primi.*

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cùm enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; *a* erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; *b* Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. *c* Quia verò quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: *d* Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cùm sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. *f* Erit quoque vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



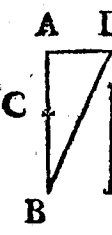
a 8. tertiidec.
b 5. tertiidec.
c 47. primi.
d 14. tertiidec.
e 2. quartidecimi.
f 22. sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulũ rectũ constituat; cui recta subtenda-

tendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta A B, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quæ æqualis sit minori segmento A C; angulum rectum A, cui recta subtendatur B D, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua A D, vel A C, latus est Dodecaedri. Cùm enim per coroll. 2. propos 17. lib. 13. maius segmentum B C, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum A C, vel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi: *a* Sunt autem & quadrata rectarum A B, A D, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti B C. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum A B, A D, hoc est, quadrato rectæ B D; Ac proinde recta B D, diameter est sphæræ. *b* Quare cùm diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta B D, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius B D; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.



a 4 *tertiidec.*

b 14. *tertiidec.*

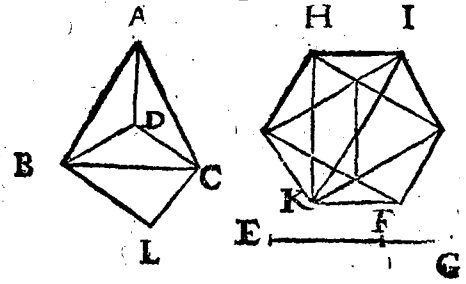
COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est A D, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum B C, sit maius segmentum, & A D, minus rectæ A B, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum B C) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum A D) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

c 18. *tertiidec.*

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ; latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri latus C D, latus B C, maius segmentum E F, & minus F G, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico H I, rectam potentia esse

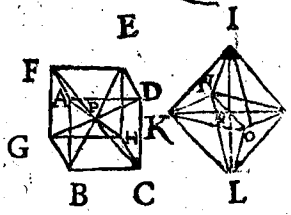
esse sesquialteram minoris segmenti F G. Subtendat enim recta H K, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta I K, diameter. *a* Quia igitur H I, est maius segmentum rectæ H K, diuisæ extrema ac media ratione; *b* Erit quoque composita K H I, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum H K, & minus H I. *c* Fiat ex rectis B C, E F, F G, triangulum B C K, ita vt B L, recta ipsi E F, & C L, ipsi F G, sit æqualis, *d* Eritq; angulus L, rectus, quòd recta B C, ponatur posse rectas B L, C L, hoc est, rectas E F, F G: Est autem & angulus I H K, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; *e* Estq; vt B L, ad L C, ita K H, ad H I. *f* Igitur triangula B L C, K H I, æquiangula sunt. *g* Ac propterea vt K I, ad I H, ita B C, ad C L; & permutando, vt K I, ad B C, ita H I, ad C L. *h* Atqui I K, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & H I, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius C L, hoc est, minoris segmenti F H. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

a 8. *tertiidec.*
b 5. *tertiidec.*
c 22 *primi.*
d 48 *primi.*
e 2. *quartidec.*
f 6. *sext.*
g 4. *sex.*
h 13 *tertiidec.*

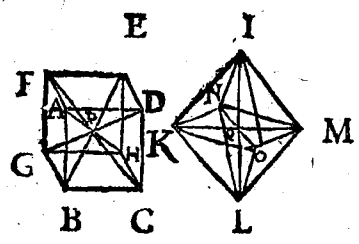
THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum I K L M N O, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quàm Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines. (Cùm enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. *i* Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri à centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basin pyrami-



i 21. *quartidecimi.*

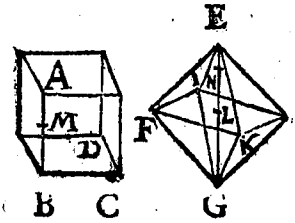


ramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, ad basin pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus ex eodem scholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

SINT rursus in eadem sphæra cubus A B C D, & octaedrum E F G H I K, sitq; diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam verò quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. a sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C: Est autem & recta A B, rectæ B M, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases I F K H, B D, & altitudines A B, B M: b Ac propterea parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basin B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta E L, rectæ E N, tripla est, & parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basin, & sub altitudine E N, vt in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine E L, triplum est pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo super basin I F K H, & sub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. quòd & altitudo L N, dupla sit altitudinis E N. c Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E. Aequale igitur erit parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterùm quia parallelepipedum super basin K H, & sub altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, vt altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L. (Cùm enim sit vt A M, ad M B, ita E N, ad N L: & componendo, vt A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoq; permutando, vt A B, ad E L,

a 18. tertiidec.

b 34. vndecimi.

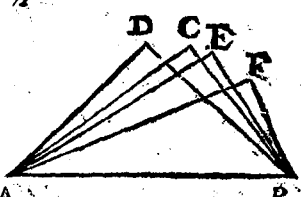


c 16. quartidecimi.

ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostensum cubo A B C D: Et parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, æquale est Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoq; vt cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVIA demonstratum est, a *diametrum sphæra, in qua omnia quinq; corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt si quadratum diametri ponatur 3 partium, eadem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3 partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphæra ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ A C, continens duas tertias partes, relinquatur quadratum rectæ B C, quadrati diametri A B: Vel si constituantur duo quadrata rectarum A C, B C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum sit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.* a 13. tertiidec.



RVRSVS b cum ostensum sit, diametrum sphæra potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium sit quadrati diametri A B; Vel si constituantur duo quadrata rectarum A D, B D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectæ A D, latus esse Octaedri. b 14. tertiidec.

DEINDE, c quoniam docuimus, diametrum sphæra potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars sit quadrati diametri A B; Vel si quadrato diametri A B, constituantur duo quadrata æqualia rectarum A C, B C, ita vt quadratum rectæ A C, duplum sit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus existere. Vel certè cum diameter A B, posset & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2 propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, relinqui quadratum lateris cubi B C; Quemadmo- c 15. tertiidec.

dum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; a *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quauis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum; Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.*

a 23. quartidecimi.

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; b *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri A Bistituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quacunque recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum; Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.*

b 23. quartidecimi.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ inscriptorum scripserunt. Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad huius sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiicienda, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra inscriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

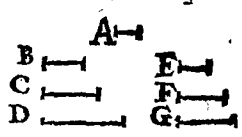
SI sint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales, nec non quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, proportionem D, ad G, quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; c habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplica-

c 20. sexti.

tam

tam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E: vt recta C, ad rectam F: *a* Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.



quadr. B. *Recta* C.
quadr. A. *Recta* A.
quadr. E. *Recta* F.

a 20. sexti.

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; *b* habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubū rectæ E, vt recta D, ad rectam G: *c* Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

Cubus B. *Recta* D.
Cubus A. *Recta* A.
Cubus E. *Recta* G.

b 33. 9ndec.

c 33. 9ndec.

SCHOLIVM.

HOC idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatã proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-

portionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est. Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. *a* Inueniatur ergo



recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cùm enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. *b* Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. *c* Quoniam verò quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoq; duplicatam lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

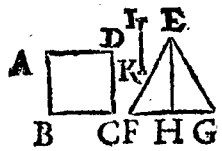
a 12. sexti.
b 17. sexti.
c 20. sexti.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris; æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta dividens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F ad perpendicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; *d* cùm quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B; *e* sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F. Erit rectangu-

d 28. tertiidec.
e 1. sext

rectangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; *a* Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continuè erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continuè proportionales, ex constructione. Igitur cùm omnium antecedens sit F H, *b* erit proportio rectæ E F, ad rectam E H, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ A B, ad rectam I K, secundæ ad secundam duplicata. Quare cùm & quadratum A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc est, ad triangulum E F G (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectæ I K, æquale triangulo E F G) *c* proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, vt latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. sexti.

F H. A B. I K. E F. E H.

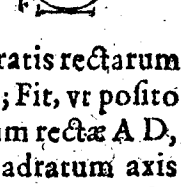
b 28. quartidecimi.

c 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis verò, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulum A B C, & altitudo, seu axis Tetraedri D E, latusq; cubi eiusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri A B, esse potentia sesquialterum axis D E: Axem verò D E, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* descripto circulo A B C; ad centrũ D, in quod videlicet cadit axis D E, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur A D, semidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc est, lateris A B, *e* æquale est quadratis rectarum A D, D E, *f* & triplum quadrati semidiametri A D; Fit, vt posito quadrato lateris A B, seu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.



d 5. quarti.

e 47. primi.

f 12. tertiidec.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, *g* potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. quadratum 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis D E. Igitur quadratum axis D E, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

g 18. tertiidec.

COROL-

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. *a* quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, *b* cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

a 13 *ter tiidec.*

b 20. *sexti.*

COROLLARIVM II.

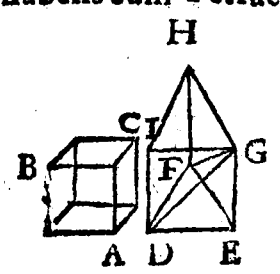
CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet *c* tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

c 12. *quartidecimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. *d* Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABCGDE FGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque est eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.



d 30. *quartidecimi.*

COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

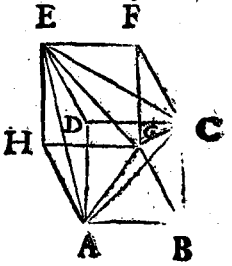
ET SOLIDORVM QVINTVM, vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus,

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quod potentia duplæ sint laterum æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 11. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

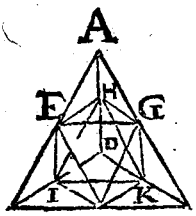


PROBL.

ij. PROBL. 2. PROPOS. 4.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro AbCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E,F,G,H,I,K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam verò latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quòd sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quòd sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: a æquales erunt bases EH, GH. Eademq; ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoq; octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cùm omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 8. duo decimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM verò tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuò ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. prop. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: b Eodemq; modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

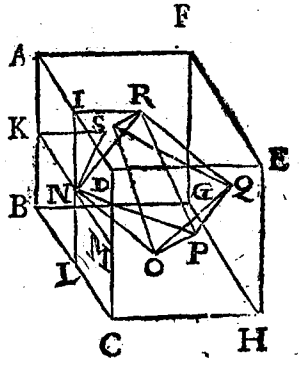
b 8. duo decimi.

iij. PROBL. 3. PROPOS. 5.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NL, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum

torum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremò ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planũ conſtituunt. Quoniam verò latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli kNS, quòd omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cùm NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; angulus NIR, æqualis eſt recto angulo kAF, in quadrato AG, eademq; ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; b Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, Sk, ductæ ſunt ad k, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorũ centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cùm omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 10. 6. *decimi.*

b 4. *primi.*

ALITER. c In cubo dato inſcribatur pyramis; d In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera verò pyramidis ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cùm ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atq; adeò Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 1. *quintidec.*

d 2. *quintidec.*

COROLLARIVM.

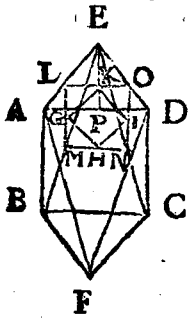
QVIA verò diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO (ſi ducerentur) ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quæ

quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non secare se mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

IV. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.

DATVM Octaedrum sit A B C D E F, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis A B C D E, cuius basis A B C D, quadratum, triangula vero æquilatera A B E, E B C, C D E, D E A, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ L M, M N, N O, O L, parallelæ lateribus A B, B C, C D, D A. Erunt igitur & triangula L M E, E M N, N E O, O E L, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris A B E, E B C; C E D, D E A, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, præterea quod latera habent communia. Est enim E M, latus commune triangulis L M E, E M N; Et E N, commune triangulis E M N, N E O; & denique E O, commune triangulis N E O, O E L. Hinc enim fit, triangulum L M E, triangulo E M N; hoc vero ipsi N E O; & hoc ipsi O E L, æquale esse. Conueniunt rectæ L M, M N, N O, O L, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ L M, M N, N O, O L, inter se



a 18. quarti decimi. æquales sunt. a Quia vero ducta recta E K P, tripla est rectæ K P, b Est autem vt E P, ad K P, ita E A, ad L A; Erit quoque E A, tripla rectæ L A. Eademque ratione E B, E C, E D, triplæ erunt rectarum M B, N C, O D. Quocirca rectæ L M, M N, N O, O L, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumq; constituent L M N O. Rursus quia L O, L M, parallelæ sunt rectis A D, A B, non in eodem cum ipsis existentibus plano; c æqualis erit angulus M L O, angulo B A D, qui

b 2. sex.

c 10. vndec. rectus est, cum A B C D, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus M L O, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos L M N, M N O, N O L, rectos esse. Quoniam vero planum per L O, L M, quam per N M, N O, ductum, d parallelum est plano A B C D, e ipsa, cum conueniant in punctis M, & O,

d 15. vndec.

e 15. vndecimi. vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca L M N O, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, trianguli E L K, æqualia sint lateribus

teribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quòd recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12. lib. 13. a Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cùm sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cùm & angulos contineant æquales, nimirum rectos, b æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia verò hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; (c cùm enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IkO, per corollarium 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus Gkl; Eademque ratione recti erunt anguli kGH, GHI, HIk.) quadratum erit GHIk, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata; quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cùm octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.

b 4. primi.

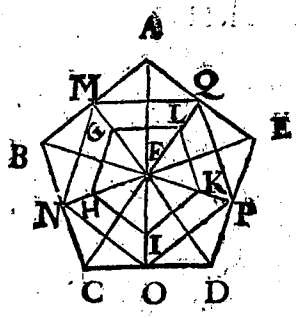
c 13. primi.

2. mi.

PROBL. 5. PROPOS. 5. v. vj.

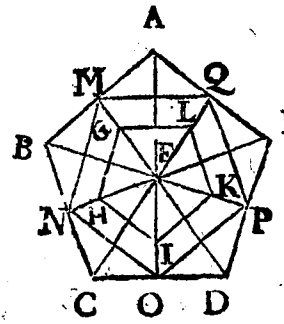
IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum videlicet bases sunt pentagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices verò, duodecim anguli Icosaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula verò æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, Ik, kL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. lib. 13. bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quæ cùm angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, d æquales quoque erunt rectæ MN,



d 4. primi.

ctæ M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta M, N, O, P, Q, connectentes. *a* Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, quales erunt, quod & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B M, trianguli F B M, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; *b* erunt bases F M, F N, æquales; & sic de reliquis. Quoniam verò & rectæ F G, F H, F I, F K, F L, semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratum est; *c* Erunt & rectæ G H, H I, I K, K L, L G, æquales. *d* Rursus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, quàm anguli B N M, M N O, O N C, æquales sunt duobus rectis. *e* Sunt autem anguli A M Q, Q M N, angulis B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum æquilaterum & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, existens. Deniq; cùm rectæ F M, F N, F O, F P, F Q, æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quòd & rectæ F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales sint; Vel certè quia F G, F H, F I, F K, F L, duplæ sunt ipsarum G M, H N, I O, K P, L Q, ex coroll. propos. 18. lib. 14. *f* parallelæ erunt G H, H I, I K, K L, L G, ipsis M N, N O, O P, P Q, Q M; *g* Ac propterea anguli L G H, G H I, H I K, I K L, K L G, angulis æqualibus Q M N, M N O, N O P, O P Q, P Q M, ideoq; & inter se æquales erunt. *h* Quinverò plana per rectas G H, H I, & per H I, I K, ducta parallela sint plano pentagoni M N O P Q, per rectas M N, N O, O P, ducto conueniúntq; in recta H I, ipsa vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Eodemq; modo ostendemus plana per I K, K L, & per K L, L G, nec non per L G, G H, ducta idem planum constituere cùm plano per G H, H I, I K, ducto. Quocirca G H I K L pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cùm & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula, quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare obrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icosaedro erit describi, cùm viginti anguli dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri con-



a 8. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.
d 13. primi.
e 4 primi.
f 2 sext.
g 10. & undecimi.
h 15. & undecimi.

dri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

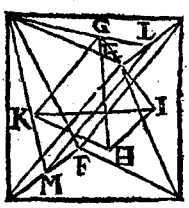
ITAQVE cùm omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basiũ, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cùm enim ex corroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentiũ, atq; adeò eorundẽ distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lem. 2. eiusdem propos. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atq; sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

o. v.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro A B C D E F. In pyramide octaedri superiori A B C D E, sumantur G, & H, centra triangulorũ ex aduerso sibi respondentium A E D, B E C; Item in pyramide inferiori A B C D F, capiantur I, & K, centra triangulorũ ex aduerso quoq; sibi correspondentium C F D, A F B: quæ quidem centra coniungantur sex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, secantes latera opposita octaedri D E, B F, bifariam in L, & M, per scholiũ propos. 12. lib. 13. coniungaturq; recta L M, a quæ ipsi B E, vel F D, æqualis & parallela erit: cùm E L, B M; Item D L, F M, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ D E, B F, oppositorum in quadrato E F. Quoniã verò rectæ A L, A M, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quòd A G, A K, duplæ sint ipsarum G L, K M, ex coroll. propos. 18. lib. 14. b Erunt G K, L M, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula A L M, A G K, similia. c Quare erit vt A L, ad L M, ita A G, ad G K; & permutando, vt A L, ad A G, ita L M, ad G k. Est autẽ A L, ipsius A G, sesquialtera; d quòd G L, sit tertia pars ipsius A L, ideoq; A G, eiusdem A L, duæ tertiæ. Igitur & L M, hoc est, ipsi æqualis D E, sesquialtera erit ipsius G k. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, k, coniungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrum constitui: quod, cùm habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.



a 33. primi.

b 2. sex. 4. sex.

c 4. quarti decimi.

d 18. quarti decimi.

e 4. quarti decimi.

ALITER. e In octaedro dato inscribatur cubus, f & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri, & in angulis cubi

f 11. quarti decimi.

collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

COROLLARIVM I.

QVIA verò oſtenſum eſt, vtramque G K, D F, parallelam eſſe ipſi L M, *a* ac propterea & G K, ipſi D F, atque adeò ipſi B E, parallelam eſſe. *b* Atque eadem ratione K H, ipſis F C, E A, parallelum eſſe: Atque idcirco, planum G K H, per G K, K H, ductum, parallelum eſſe plano D F C, per D F, F C, necnon & plano B E A, per B E, E A, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula: Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

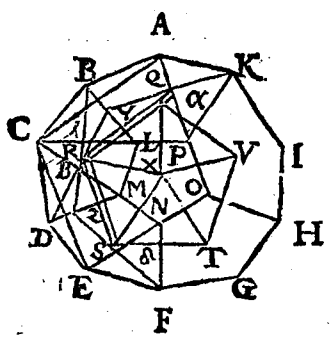
a 9. *vndecimi.* *b* 11. *vndecimi.*

COROLLARIVM II.

PRAETEREA cùm octaedrum circumſcribat & cubum & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur: Atq; adeò recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis A B L P K, P K I H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectæ ducantur K Y, D Y, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient. Dividunt autem & rectæ eædem Y k, Y D, rectas A P, C M, bifariam & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll eiuſdem propoſitionis; quod & arcus A k P, C D M, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant (*e* conſtat enim rectas A k, P k; Item C D, M D, arcus ſubtendere æquales.) *d* Igitur A α, C β, parallelæ ſunt rectæ B Y, *e* atque adeò & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales,

c 28. *tertij* *d* 28. *primi.* *e* 9. *vndecimi.*

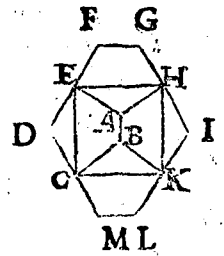
les, nempe dimidia rectarum AP, CM, *a* quæ æquales sunt, cùm latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. *b* Rectæ ergo ipsas connectentes AC, αβ, æquales erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales esse ipsas CE, γδ: *c* Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cùm contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quàm CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter eùm & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualiũ, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, *d* atque adeò æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarũ æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, *e* ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt) *f* Erunt quoq; anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cùm & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; *g* æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos) quæ quidem latera habent communia, describetur Icosaedrum intra Dodecaedrum, cùm duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

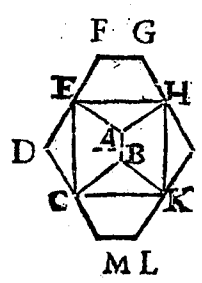
a 4. primi.
b 33. primi.
c 4. primi.
d 14. tertij.
e 14. tertij.
f 8. primi.
g 4. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8. 10. viij.

IN dato Dodecaedro cubum describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus AB CDE, EFGHA, AHIkB, BkLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABkIH, secundũ latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLk, secundum angulos EAH, CBk. In his verò pentagonis subtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK,



quadrilaterum efficientes E H k C, quod æquilaterum erit. Cùm enim omnia latera A E, A H, D E, D C, B C, B k, I H, I k, æqualia
a 4. primi. sint, angulosq; contineant æquales, ex hypothesi; a æquales erũt
b 28. tertij. bases E H, H k, k C, C E. b Quoniam igitur rectæ A E, B C, æquales, auferunt ex circulo pentagonum A B C D E, circumscribente
c 9. & undecimi. arcus æquales; Erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. rectæ A B, C E, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt A B, H K. c Quare & E C, H k, inter se parallelæ erunt; d Ac propterea rectæ E H, C k,
d 33. primi. quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, e in eo-
e 7. & undecimi. demq; cùm ipsis plano; ideoq; parallelogrammum erit E H k C; quod ostendimus esse æqui-
laterum. Quia verò planum E C k H, producti communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propositionis 10. lib. 14. circa
f 22. tertii. quadrilaterum E k, descriptum; f Erunt tam anguli oppositi E, k, quàm C, H, duobus rectis
g 34. primi. æquales; g Ac propterea cùm oppositi E, & K, sint æquales, necnõ & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare E K, quadratum erit; collocans suos angulos in quatuor


angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorũ Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum
h 4. primi. erit solidum sex quadratis contentum; quæ cùm sint æqualia, & quòd eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt, cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quòd duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reliquos. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

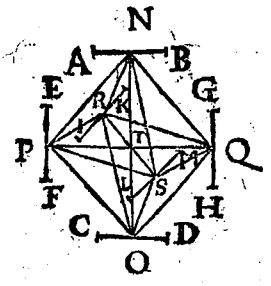
HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est C E, ipsi A B, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit Octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib 13. nimirum A B, C D, E F, G H, I K, L M; quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur N O, P Q, R S, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuò in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diui-

diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeò æquales quoque erunt eatum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. a Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cùm dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, QSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentque octaedrum intra Dodecaedrum descriptũ, cùm sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

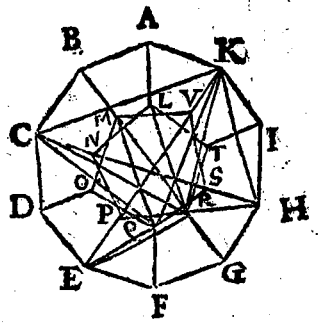


a 4. primi.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato dodecaedro pyramidem describere.

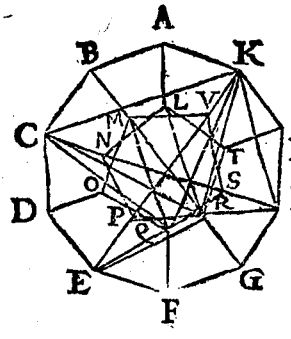
SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorũ quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At verò K, lateri LV, communi pentagonis KLTL TP; Deniq; R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB) rectis connectantur CK, CR, KR; & expunctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; 6 quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 19. lib. 14. c Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Nõ secus ostendemus, rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. d Quocirca cùm in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Aequalia erunt quadrata rectarum Ck, kH, quadratis rectarum CR, RH,



b 17. tertiidecimi.

c 31. tertij.

d 47. primi.



& quadratis rectarum k R, R E, & quadratis rectarum k Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarū æqualium k H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H (Hæ enim rectæ cùm subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, a æquales sunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum C k, C R, R k, k Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C k R, C k Q, k R Q, R C Q, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt C k R Q: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. primi.

b 8. quinti decimi. c. quintidec.

ALITER. *b* In proposito Dodecaedro cubus describatur *c* & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

o. xj.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

d 5. quinti decimi. e 8. quinti decimi.

d DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrum *e* & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; angulis verò Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tanget anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

o. xij.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

f 11. quinti decimi. g. quintidec. h 11. quinti decimi. i 1. quintidec.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

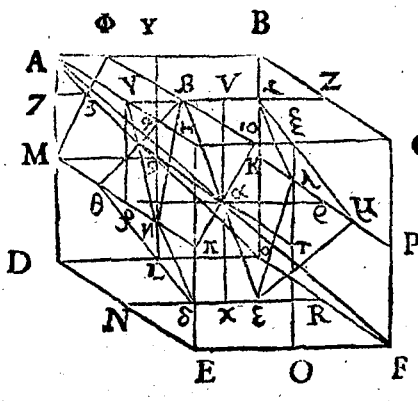
IN dato Icosaedro *f* cubus describatur, *g* & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. *h* Cùm enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis tangere centra earundem basium Icosaedri: Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

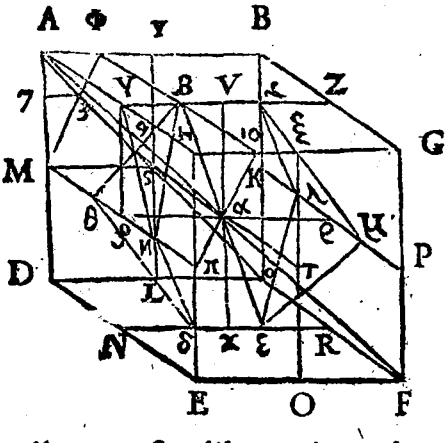
SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mϖ, kP, NR, nusquam inter se coeuntibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed vna dūtaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ se mutuò in centro κ, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, sunt que lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mπ, secentur extrema ac media ratione in β, γ θ, ϰ, vt sint maiora segmenta Yβ, Zγ, Mθ, πϰ, ductis rectis Yρ, Yϰ, βθ, βϰ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρϰ, ϛV, segmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yϱ, ρϰ, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yϱ, ϱϰ, æquale sit quadratum rectæ Yϰ, [c] quòd angulus Yρϰ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yϰ, triplum quadrati rectæ Yϛ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yϱ, [d] recta est ad planum AE, per rectas AY, Yϱ, ductum, rectus erit angulus βYϰ, ex defin. 3. lib. 11. [e] Ac propterea quadratum rectæ βϰ, æquale quadratis rectarum Yϰ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ (quia nimirum quadrata rectarum Yϰ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cùm quadratum rectæ Yϰ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ) Ideoque [f] cùm quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βϰ, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & θϰ, dupla ipsius ρϰ, quòd minora segmenta θϱ, ϰϱ, rectarum æqualium Mρ, πϱ, æqualia sint. [g] Erit igitur vt Yβ, ad ϱϰ, ita ϛϰ, dupla ipsius Yϛ, ad θϰ, duplam ipsius ρϰ: Est autem Yϛ, maius segmentum ad ϱϰ, rectam minori segmento βV, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & βϰ, ad θϰ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde θϰ, erit maius segmentum rectæ βϰ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θϰ, maius esse segmentum



Ducatur in figura recta HαC.

a 4. tertiidec.
b 47. primi.
c 29. primi.
d 4 & undecimi.
e 47. primi.
f 20. sexti.
g 15. quinti.

rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur rectangulum $Y\theta$. Quare æquales erunt $\beta\theta$, $\beta\varkappa$, constituentes triangulum Isosceles $\beta\theta\varkappa$, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus: Ac proinde $\theta\varkappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\varkappa$, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

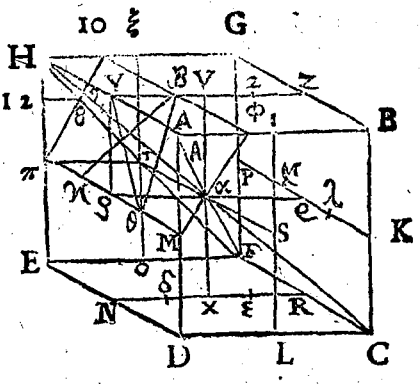


INTELLIGATVR iam planum trianguli $\beta\theta\varkappa$, extendi (ducta per β, recta $\beta\Phi$, ipsi $M\varkappa$, parallela) per parallelas $M\varkappa$, Φ10. vt sit planũ extensum Φ10. occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto Σ, cubi verò diametro AF, in puncto Ψ, & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\Phi$, parallela, connectatque MS, α quæ parallela est vtriquè $A\Phi$, 73. Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A73. simile est triangulo AMS, ac proindevt AM, ad MS, ita est A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad AΦ, ita M7. ad 73. Est autẽ AΦ, ma- ius segmentũ rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione (*equales* æquales sint AΦ, YΨ, necnon & MA, YV, dimidia cubi latera) & 73. hoc est, 7A, maius segmentũ erit rectæ M7. extrema ac media ratione sectæ; *d* Ac proptrea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusq; segmentũ erit M7. *e* Atqui vt M7. ad 7A, ita est S3. ad 3A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusq; segmentum est S3. *f* Quia verò SαT, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per SαT, planũ ducatur parallelum plano $\Phi\varpi$, ducto per Mπ, *g* secabuntur rectæ AS, Aα, in easdẽ rationes, in punctis 3. & 4. cùm planum $\Phi\pi$, rectas AS, Aα, secet in 3. & 4. at planum per SαT, ductum plano $\Phi\varpi$, parallelum eadem secet in S, & α. Atq; idcirco, cùm AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit α4.

a 33. primi.
b 4. sex.
c 34. primi.
d 5. tertiidec.
e 2 sex.
f 33. primi.
g 17. & undecimi.

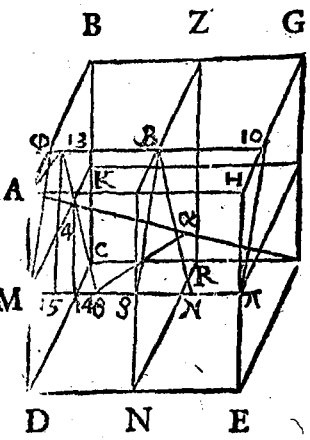
IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in ρ. puncto extrema ac media ratione à plano $\Phi\pi$, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, itavt quadratum AC, locum quadrati HF; & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, huc hac inuersione probat-

probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura; (Hæc deest in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum φπ, secet in 9. prope punctum H; intelligaturq; per rectã AH, planum plano φπ, parallelũ. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H; & 4, 9; (Nam planum φϖ, eas secat in 4. & 9. planum verò per AH, ductum plano φπ, parallelum easdem secat in A, & H) erit vt α4, ad 4A, ita α9, ad 9H. Cùm ergo αA, secta sit in 4. extrema & media ratione, erit quoque αH, similiter secta, quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur θ4, β4, β9. κ9, rectilineum β4, θκ9. in plano φπ, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.



a 15. 9m decimi.

INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βθκ, siue planum φπ, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano φπ, recta coniuncta θ4. extendatur vsque ad rectam φ10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta kP, & iunctis rectis MK, πP, b planum MP, parallelum est plano AG, (quòd & rectæ Pk, kM, parallelæ sunt rectis GB, BA) c secatq; cubum bifariam; ideoque per centrũ α, transit, per ea, quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt; si per rectas α4A, θ413. planum extendatur, d fient αθ, A13. communes sectiones planorum MP, AG, parallelæ; Ac proinde triangula αθ4. 1κ34. æquiangula erunt; e Erit-que vt α4 ad 4A, ita θ4. ad 413. Quare cùm αA, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostendimus; eodẽ modo erit secta 913. in 4. Rursus plano NZ, per centrum α, transeunti, parallelum ducatur planum per punctum 4. ex schol. propos. 15. lib. 11. secans φπ, recta 414. f Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. g Rectæ igitur αA, ρM, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρM, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusq;



b 15. 9m decimi.

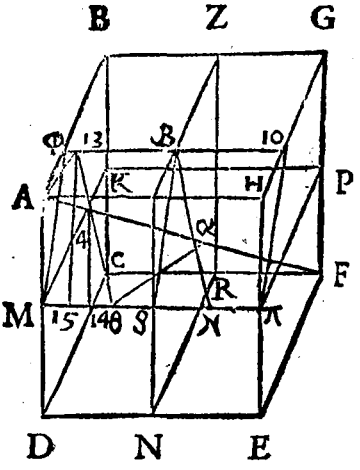
c 32. 9m decimi.

d 16. 9m decimi.

e 4. sen.

f 15. 9m decimi.

g 17. 9m decimi.



22. *sext.*

minusq; erit segmentum 14M, ideoque æquale minori ϱθ, ipsius Mϱ. Quare cùm ex ϱ14. maiori segmento ipsius ϱ M, auferatur ϱθ, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ρ 14. diuisa in θ, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ϱθ. Postremò acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallelæ a secabuntur rectæ θ13. θ15. proportionaliter; Ac proinde & 915. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusq; segmentũ erit 914. b Quare propter erit vt ρθ, maius segmentum ad 914. minus, ita θ14. maius ad 14. 15. minus; Vt autem 914. ad 14. 15. ita est tota 915. ad θ14. maius segmentum. Igitur erit vt ρθ, ad θ14. ita 915. ad eandem 914. Ac propterea rectæ ϱθ, vel ρκ, & 915. æquales erunt. Quoniam verò planum N Z, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, secantur plano φπ, c erunt communes sectiones βϱ, 4. 14. parallelæ, ideoque & 13. 15. βϱ, parallelæ erunt, d anguluſque externus βρκ, interno 13. 15 9. æqualis. Cùm igitur & latera βϱ, ρκ, lateribus 13. 15. 15θ, sint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ βκ, 13θ. Ac proinde & earum segmenta maiora θκ, θ4 (Ostensum enim est θκ, esse maius segmentum ipsius βκ) æqualia erunt. Eadem arte & ϛ4, ipsi βγ, in prima figura ostendetur æqualis. Simili situ triangulum Isosceles formetur super basin βγ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam I S, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem θκ, ϛγ, æquales erunt κϑ, ϛϑ. Aequilaterum ergo est pentagonum β4θκϑ. quandoquidem βγ, θκ, rectæ æquales sunt, cùm componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt Y V, Z V, ϖϱ, Mϱ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirũ ad singulas rectas M ϖ, Y Z, N R, I L, ξ O, K P; bina ipsi ϛθκ, similia, & æqualia constituantur; (ita enim ad M-π, duo huiusmodi triangula vides βθκ, δθκ) & ipsorum beneficio duodecim pentagona ipsi β4θκϑ, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis M ϖ, Y N R, I L, ξ O, K P, bini nimirum in singulis, octo verò reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & in semidiametris A α, & H α, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non propriè, cùm non omnes eius anguli vel in angulis vel

b 2. *quarti-decimi.*

c 16. *vndecimi.*

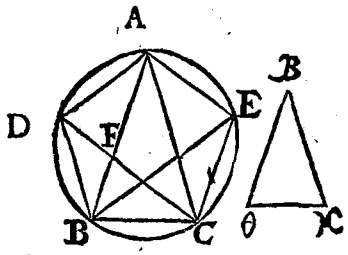
d 29 *primi.*

e 4. *primi.*

vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo verò in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem triangulum ϛ θ κ, cuius basis θ κ, maius segmentum existat vtriusque lateris β θ, β κ, extrema ac media ratione diuisi similе sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles A B C, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus A D B C E,

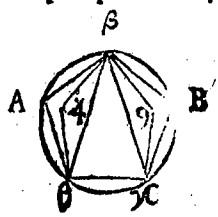


diuisisque angulis A B C, A C B, bifariam rectis B E, C D, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum A D B C E, vt propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentq; se mutuò rectæ A B, C D, in F. a Quoniam ergo A B, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentũ est A F, æquale lateri B C: b Erit vt A B, tota ad maius suum segmentum B C, ita β θ, tota ad maius suum segmentum θ κ; Eodemque modo, vt tota A C, ad maius segmentum C B, ita β κ, tota ad maius segmentum κ θ: Est autem quoque vt A B, ad A C, ita β θ, ad β κ, vtrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur β θ κ, A B C, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea aque vterque angulorum θ κ, duplus erit angulus β; & triangula ϛ θ κ, A B C, similia.

a 8. tertiidec.

b 2. quartidecimi.

PENTAGONVM verò β 4 θ κ 9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum β θ κ, circulus β A θ κ B, qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex iis, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si verò non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A θ κ B. Quoniam igitur tam rectæ A θ, A β, quàm rectæ 4 θ, 4 β, æquales sunt rectæ θ κ, cùm & β 4 θ κ 9,



& β A-

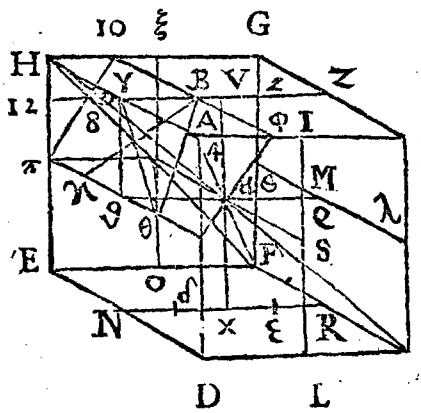
& β A θ κ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A, ϑ 4, quàm duæ β A, 4 β, æquales. quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β θ κ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ κ 9, æquiangulum est.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



a 33. primi.

b 29. primi.

c 47. primi.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ε, intelligatur cui β coniuncta recta γ ε, æqualis existens & parallela lateri cubi V X, quod & V γ, X ε, æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V γ rectus est; b rectus quoque β ε erit. Angulus β γ ε, ad γ, constitutus; c & proinde quadratum diametri β ε æquale erit quadratis laterum β γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti. Maius verò segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

d 15. quinti.

IN eadem enim prima figura, d cùm sit ϛt Y X, ad β V, ita Y Z, dupla ipsius Y V, ad β γ, duplam ipsius β V; Sit autem β V, minus segmentum ipsius Y V, secta extrema ac media ratione. Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Y Z, secti extrema ac media ratione; compositum verò ex Y ϛ, γ Z, hoc est, recta β κ (quæ dupla fuit ostensa ipsius Y β, eoque composita ex Y β, γ Z, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione ϛ γ, esse latus Dodecaedri

e 8. quinti. accimi.

e & β κ, seu β θ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cùm subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel ϛ 4 θ.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus; Dode-

caedri

caedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi Υ Z, componitur ex latere Dodecaedri ζ γ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Υ β, γ Z, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cùm enim Υ Z, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, & perspicuum est ex 8. propos. huius lib. a *Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris Υ Z, secti extrema ac mediæ ratione: Erit β θ, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris Υ Z, & æqualis duabus Υ β, γ Z simul, & iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Υ Z, circumscripti.* a 8. tertiidec.

IV.

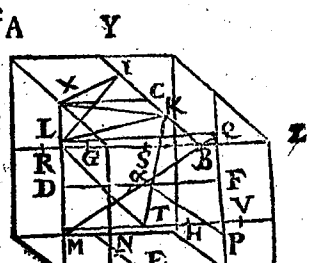
RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θ κ, oppositi, b æqualis est recta V X (quod & ζ V, δ X, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur. b 33. primi.

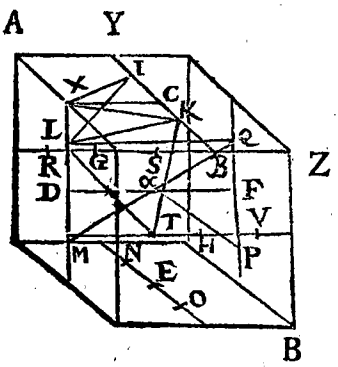
PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit A B, per cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ, parallelæ agantur nusquam inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti trianguli IKL, IKO, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVk, TVO, ILR, IsQ, κTL, κQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora verò octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, Xκ. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateri b. XC, Cκ, trianguli XCκ; c & anguli contenti, recti, quòd XC, c 29. primi paral mi.



a 4. primi. parallela sit ipsi A Y; a Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea L X, recta est ad planum A Z, per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas X I, X K; Ac propterea, cùm latera L X, X K, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, b anguli contenti, recti; b æquales erũt bases L I, L k. Rursus c quoniam quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I; Et quadratum rectæ L X, quadrato rectæ L K, quadratum verò rectæ X I, quadrato rectarum X C, C I, est æquale: Aequale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quòd eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ C I. d Cùm enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, triplasint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergò rectæ L I, quadruplum est quoque quadrati rectæ C I; Ac propterea, cùm eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratum rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarum L I, K I, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, subsstratum.



c 47. primi.

d 4. tertiidec.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atq; adeò inter se æqualia, cùm eorum latera I K, L M, N O, P Q, R S, T V, æqualia sint. Quoniam verò latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo k T L, latus k L, commune est triangulo I k L; & latus K T, triangulo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cùm eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

DIA-

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DVCTA enim recta L Q, a *quæ lateri cubi D F, parallela est, & æqualis, quod & D L, F Q, parallelæ sint, & æquales;* b *manifestum est, quadratum diametri Q M, æquale esse quadratis rectarum L M, lateris Icosaedri, & L Q, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est,* c *cùm angulus M L Q, sit rectus, quod & L D F, sit rectus.*

a 33. primi.
b 47. primi.
c 29. primi.

II.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

*NAM huiusmodi tres lineæ nimirum D F, C E, G H, cùm coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, sese*q *per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F, F Q, trianguli α F Q, æqualia sunt lateribus α F, F P, trianguli α F P, angulosque comprehendunt rectos,* d *æquales erunt rectæ α Q, α P. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.*

d 4. primi.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim C I, sit maius segmentum rectæ C Υ; e *sitq; & C I, ad C Υ, ita K I, dupla ipsius C I, ad β Υ, duplam ipsius C Υ;* f *erit quoque K I, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi & Υ. Si enim aliæ rectæ, quàm K I, esset maius segmentum rectæ β Υ, esset β Υ, ad illam rectam, & C Υ, ad C I, hoc est, & β Υ, ad K I, diuersum ab illa recta. quod est absurdum.*

e 15. quinti.
f 2. quarti.

IV.

ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita, inter se sunt parallela.

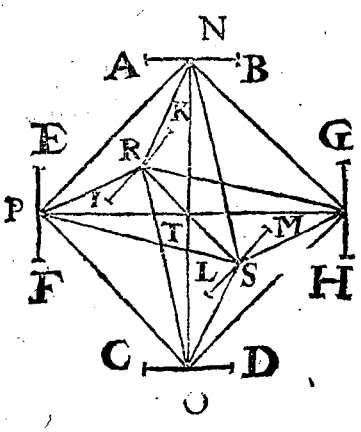
SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se æqualia, angulosque alternos habentia æquales ex 4. propos. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt; g *atq; idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.*

g 15. & decimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita A B, C D, E F, G H, I K, L M, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ N O, P Q, R S, æquales sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturque rectæ N P, N R, N Q; O P, O R, O S, O Q; P S; Q R, Q S, constituentes octo triangula S N P, S P O, S O Q, S Q N; R N P, R P O, R O Q, R Q N. Quia igitur latera T N, T S, trianguli T N S, æqualia sunt lateribus T N, T P, trianguli T N P, (cùm sint rectarum æqualium dimidia) angulosque contineant rectos, vt dictum est; a æquales erunt bases N S, N P: Eodem modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hisce duabus, & inter se æquilatera; Ideoq; Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro describi potest, cum eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum describere scripsimus. Quod faciendum erat.



a 4. primi.

COROLLARIVM.

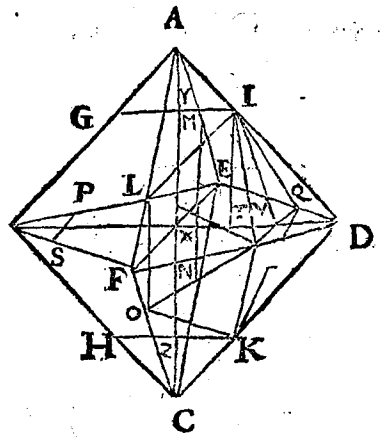
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ N O, P Q, R S, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri N P O Q R S, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoq; est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

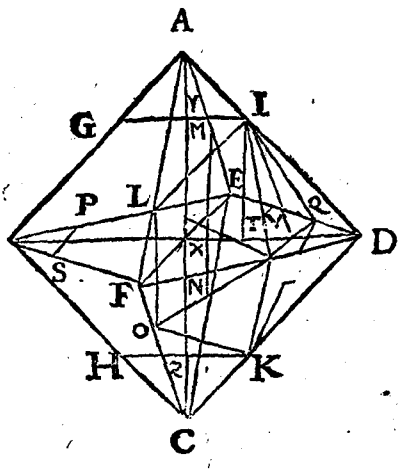
DATVM octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit A B C D E F. Cùm à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt B A, B C; D A, D C, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati A B C D; A F, A E; C E, C F, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati A E C F: (Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantùm duo latera; at verò latera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuere) E B, E D; F D, F B, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati E B F D (Nam latera

latera E A, E C; F C, F A, quadrati A E C F, iuxta eosdem angulos R, F, iam accepta sunt) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectæ I Q, I R, I M, I L, I G, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchrè indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctũ acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorũ octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptũ est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere D F, quod cum tribus D E, D A, D C, pyramidem constituit in vertice D, est commune triangulis octaedri D F A, D F C; propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinque laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, duobus bifariã, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13 quatribus octaedri diametris A C, B D, E F, sese in centro X, secantium A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturq; recta I V, agaturq, I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I, trianguli D R I; (sunt enim D Q, D R, minora segmenta rectarum æqualium D E, D F) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri A D E, A D F; a Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cùm sit, b vt B G, ad G A, ita D I, ad I A; c erit G I, rectæ B D, parallela. Eademq; ratione Q R, ipsi E F, parallela; d Ac proinde vt D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est vt A X, ad X D, ita A Y, ad Y I (quod triangulum A Y I, simile sit triangulo A X D, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y G, esse æqualem; ideoq; G I, rectã, bifariam in Y, similiterq; Q R, in Y, secari. Cùm verò latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R (nimirum minora segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendant rectos, nempe quadratorum A B C D, D E B F; e æquales erunt



a 4. *primi.*
b 2. *quarti.*
c 2. *sexti.*
d 4. *sexti.*
e 4 *primi*

baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturque duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia ΥI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti XΥ, diuiſæ extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5 lib. 13.



a 34. primi.

b 34. primi.

c 4 tertiidec.

Eſt autem XΥ, rectæ XA, æqualis (cùm ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD) a & ΥI, rectæ XT; cui rit XT, maius ſegmentũ ipſius XV, & idcirco TV, ſegmentum minus, eiuſdẽ XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT (b cùm & recta IT, æqualis ſit ipſi XΥ) & TV, minoris ſegmenti, c tripla ſunt quadrati rectæ XT, maioris ſegmenti; Atq; adeò quadratum

d 47. primi. rectæ IV, d æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, plum eſt eiuſdem quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, qualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi ΥI, ex demonſtratis, cùm RV, midia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum

e 47. primi. VR, quadrupla quadrati rectæ RV: e At quadratis rectarum IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR, f quòd anguli IVR,

f 8. primi. IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR; Ac propterea cùm eiuſdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque ſit per ſcholium propoſ. 4 lib. 2. quadratum rectæ QR; Aequalia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR, GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN, atque adeò triangulo IQR, æqualia, cùm latera ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cùm enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum octaedri; duo verò reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterum Octaedri, maiore & mino-

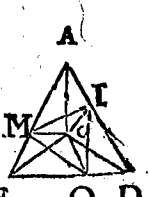
minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, subtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehensos minoribus segmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia sunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cùm subtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic verò segmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non secus latera I R, G L, æqualia erunt. Aequalia igitur sunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propos. 8. lib. 1. Atqui I Q R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur, reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet G M P, in A E B; H N P, in B E C; K N Q, in C E D; I M Q, in A E D; G L S, in A F B; H O S, in B F C; K O R, in C F D; I L R, in A F D, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cùm horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi (vt vides in quinq; R Q I, R I L, R L O, R O K, R K Q, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alterius verò minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cùm enim in triangulo æquilatero A D E, maius segmentum lateris A D, sit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, ostensa æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti A I, *a* cùm quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perspicuum est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmenti minoris A I. *a* 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS fit, cùm octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namq; Octaedri superior triangulum A E D, in quo collocatum est triangulum Icosaedri I M Q, sitq; C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D; C I, C M, C Q.



Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia sunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q, quòd hæc latera sint ex centro, &

tro, & maiora segmenta æqualium rectarum) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in schol. propos. 12. lib. 13. ostendimus: Erunt bases C M, C Q æquales. Non secus demonstrabimus C I, æqualem esse lineis C M, C Q. Quare C, centrum erit trianguli I M Q.

COROLLARIVM III.

NON difficile est deniq; ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atq; sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunq; duos angulos Icosaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O; cùm latera X A, A G, trianguli X A G, æqualia sint lateribus X F, F O, trianguli X F O (Nam X A, X F, semidiametri sunt Octaedri, & A G, F O, segmenta minora laterum æqualium Octaedri sectorum extrema ac media ratione) angulosq; complectantur æquales, semirectos videlicet (cùm A C, E F, diametri sint quadratorum A B C E, E A F C: ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) *a* Aequales erunt & bases X G, X O. Eodemque argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

a 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

b INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; *c* & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis ex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest: Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

b 16. quinti decimi.

c 5. quinti decimi.

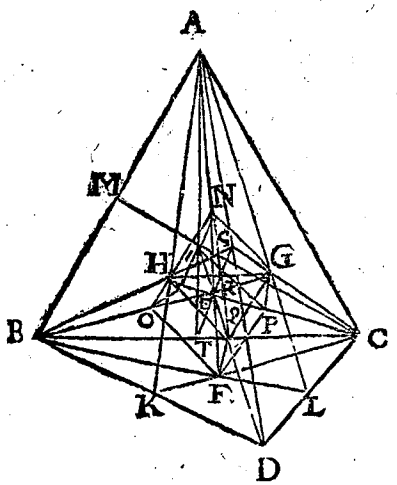
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum describere.

DETVR pyramis A B C D, in qua cubus iubetur describi; sitq; eius centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur A E F, B E G, C E H, D E I, *d* quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eadem bases B C D, A C D, A B D, A B C. Per hæc centra porro & angulis A, B, C, rectæ ducantur A H K, A G L, A I T, B F L, B I M, C I M, C F K, C G S, secantes bases oppositas B D, C D, A D, in B C, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. punctis K, L, M, S. Secentur quoq; rectæ ex solidis angulis per centrum E, demissæ A F, B G, C H, D I, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris,

d 15. quarti decimi.

tris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidũ N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, F I, cubum esse. Cùm enim latera A F, F K, trianguli A F k, æqualia sint lateribus A F, F L, trianguli A F L, (quod F k, F L, cùm perpendiculares sint ad B D, C D, ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarum æqualiũ B D, C D, à centro F) angulosq; contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [a] Aequales erunt & bases A k, A L, & anguli k A F, L A F. Rursus quia latera A N, A H, trianguli A N H, æqualia sunt lateribus A N, A G, trianguli A N G (sunt enim A H, A G, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium A B D, A C D) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [b] Aequales erunt bases N H, N G. Haud secus ostendentur æquales rectæ Q G, Q H, si rectæ ducantur D G, D H, necnon & reliquæ, cùm omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur F T, cùm latera A F, F T, æqualia sint lateribus A F, F K. (Sunt namq; F T, F k, distantiæ rectarum æqualium B C, B D, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli T A F, k A F. Ac proinde cùm latera A N, A I, æqualia sint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, semidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualium A B C, A B D) angulosque contineant æquales: [c] Aequales erunt bases N I, N H, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeò componere cubum N F.

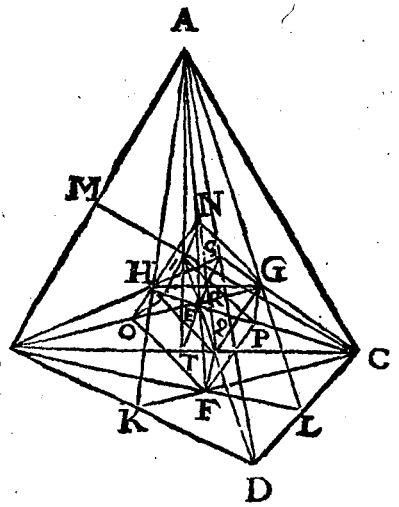


a 4. primi.

b 4. primi.

c 4. primi.

A S S V M A T V R quadrilaterum N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera B C, A D, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propositionis 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cùm & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia B C, A D. Quocirca cùm idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit S T, per



a 18. *quarti-decimi.*

b 2 *sext.*

S T, per E, centrum pyramidis, æqualesq; erunt E S, E T, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia B S, C S, perpendiculares sunt ad A D, per schol. lium propos. 12. lib. 13. a erunt H S, G S, ex centris H, & G, circulorum partes perpendiculares ad B S, C S. Quare latera B S, C S, trianguli B S C, proportionaliter secantur, b atq; idcirco H G, parallela est lateri B C, secatque latera T S, C S, trianguli T S C (quod quidem pars est trianguli B S C) proportionaliter; ideoq; & R S, tertia pars ipsius S T; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ S E. Rursus c quia D I, perpendicularis est ad triangulum A B C; erit E I, tertia pars semidiametri D E, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur D E, talium 1. erit E I, ac proinde talium 4. rectarum D I, ideoq; eius dimidium D Q, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua E Q, talium partium erit 1. atq; idcirco E Q, tertia pars erit ipsius D E. Eadem ratione E N, tertia pars erit ipsius A E; Ac propterea, cùm latera D E, A E, trianguli A E D, proportionaliter secentur, d recta N Q, parallela erit lateri A D, secabitque latera E S, E D, trianguli D E S (quod quidem pars est trianguli A E D) proportionaliter; ideoque, cùm E Q, sit tertia pars ipsius D E; tertia pars erit E R, ipsius S E; Ac proinde S R, duæ tertiæ partes eiusdem S E. Quoniam igitur vtraq; H G, N Q, ex S E, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur S E, à rectis H G, N Q; Atq; idcirco & ipsæ H G, N Q, in eodem sese puncto

c 15. *quarti-decimi.*

d 2. *sex.*

c 2. *vn-decimi.* interfecabunt. e Quare in eodem sunt plano, propterea q; & rectæ H Q, Q G, G N, N H, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum N Q; Eademq; est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

CVM ostensa sit H G, ipsi B C, parallela, atq; adeò trianguf2. *sext.* lum S H G, simile triangulo S B C, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Erit vt S H, ad H G, ita S B, ad B C; & permutando, vt S H, ad S B, ita H G, ad B C: Est autem S H, tertia pars ipsius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris B C, Haud secus ostendemus N Q, ipsius esse partem lateris A D. Cùm ergo latera B C, A D, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cùm subtendãtur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G;

g 8. *primi.* N H, Q H; g Aequales erunt quatuor anguli, H N G, G Q H, Q H N. Quocirca cùm ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostensum

vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum erit N Q. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent, qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.

ALITER. In data pyramide deſcribatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in centris octo baſium Octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt conſtat ex propoſ. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes Octaedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. (*a* cum enim rectæ E G, E H, parallelæ ſint rectis B C, B D; *b* erunt quoque triangula E G H, B C D, per illas rectas ductа, inter ſe parallela, & ſic de cæteris) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas quatuor reliquas baſes Octaedri perpendiculares, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor baſes Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 2. ſex.
b 15. vn decimi.
c 17. vn decimi.

COROLLARIVM I.

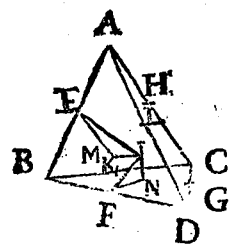
CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum, per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis G N H Q, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat: Recta R S, dupla ipſius E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, oſtenſa ſit tertia pars ipſius S T; perſpicuum eſt, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis A D, B C, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi R S.

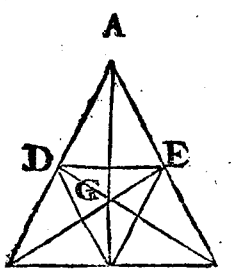
LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primùm pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E,F,G,H,I,K; & ex L, centro pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE,EM,LF,FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF (cùm enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes, sint æquales, æqualiter distabunt ipsa à centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.



a 4. primi. *a Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cùm anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cùm ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cùm igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.*

SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, CG æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri,



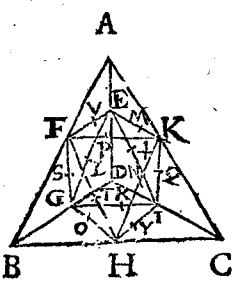
b 4. sex. *b erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF. quod est propositum.*

PROPE.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK, HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrū in dicto octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cùm ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quòd & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, kF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, denique latera Ik, kE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 2. *quartidecimi.*

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ *b* inscribatur Icosaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri: *Factumq;* erit quod iubetur. Cùm enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus: consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde *d* quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyra-

b 19. *quintidecimi.*

c 5. *quintidecimi.*

d 8. *quintidecimi.*

a 18. quinti decimi. pyramidi inscriptus, a quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bisariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bisariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non propriè. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

xiij. PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter à centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 19 huius lib. est manifestum. Nam, vt proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes anguli solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, Octaedro,

b 16. quinti decimi. *& Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.*

CÆTERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta.

c 5. quinti decimi. b *In Octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri exte-*

d 8. quinti decimi. *ma ac media ratione secantur. Deinde* c *Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro* d *describitur cubus, cuius octo an-*

gulis

guli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in Octaedro descriptus est.

a Denique in cubo Pyramis includitur, qua ideo in Octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis. a 1. quinti decimi.

NEQVE vero pratereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. b Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, c conuenianteque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat. b 1. quinti decimi. c 8. quinti decimi.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium Octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesue quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ solidorum regularium sibi mutuò inscriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Francisco Flussate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

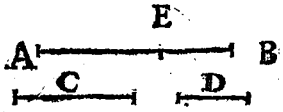
QVEMADMODVM libro 14. tradita sunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphæra descriptarum, quarum quidem descriptionem lib 13. exposuit Euclides; ita etiam Franciscus Flussas Candalla hoc lib 16. inter se comparat easdem figuras regulares sibi mutuò inscriptas, nec nõ & earundem latera, quam quidem inscriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri possit tractatio hæc quinque corporum regularium, si liber hic decimussextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturq; AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cùm enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docui-

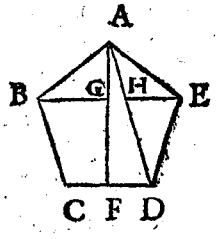
docuimus, Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit A E, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit E B, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, vt A E, maius segmentum ad E B, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris segmenti A E, ad minus segmentum E B. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo A B C D E, ex angulo A, ad latus oppositum C D, perpendicularis demittatur A F. Dico A F, à recta B E, subtendente angulum A, secari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta A D, quæ secet B E, in H; quoniam B E, recta lateri C D, ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, a secabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: b Atqui A D, in H. secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentum D H. Igitur & A F, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. sex.
b 18. ter tiidec.

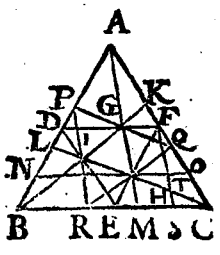
THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius

lateris,

lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit A B C, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, innctis rectis D E, E F, F D, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ G H, H I, I G, constituentes G H I, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in k, L, M, iunctis rectis B k, C L, A M. Dico has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosaedri G H I, hoc est, rectam B k, transire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectam A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipsi B C, parallela; erit triangulum F H O, triangulo F E C, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & F E C, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo A B C, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis est rectæ F H, maiori segmento rectæ F D, ipsi æqualis: (Est enim & D E F, triangulum æquilaterum cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualium laterum, eiusdem trianguli comprehensos; *a* ideoque æqualia sint.) *b* Est autem & N H, æqualis toti D F, in parallelogrāmo D H, *c* propterea quod F H, D F, parallelæ sunt rectis A B, B C, seu N O. Igitur recta N O, composita ex N H, tota, & H O, maiori segmento, *d* secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ B C, N O, D F, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex iis, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam A M, transire per puncta G, H. Haud secus ostendemus B k, per puncta G, I; & C L, per puncta H, I, transire, si per G, I, rectæ ducantur parallelæ lateribus A C, A B; Atque idcirco rectæ B k, C L, A M, suis sectionibus producent triangulum Icosaedri G H I.



AGATVR iam per G, recta P Q, rectæ C L, parallela. Quoniam igitur A F, æqualis est rectæ D F, seu rectæ F E, cuius maius segmentum fuit F H, hoc est, F O, illi æqualis; Erit quoque F O, maius segmentum rectæ A F; *e* ac proinde tota A O, secta in F, extrema ac media ratione: *f* Est autem vt A F, ad F O, ita A G, ad G H, ob

a 4. *pri.* b 34. *primi.* c 2. *sex.* d 5. *tertiidec.* e 5. *tertiidec.* f 2. *sex.*

GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntq; maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia verò est *a* vt AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris AB, maiusque reliqua BP; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione; atq; adeò in puncta R, Q, cadet. Quoniam verò singula latera trianguli PQR, cùm subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, *b* æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI (Cùm enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in easdem rationes, ex iis, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, *c* secans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

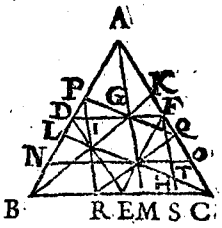
a 2. *quarti.* *decimi.*

b 4. *primi.*

c 2. *sexti.*

COROLLARIVM.

EX his facilè colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cùm enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, triangulI FEC, quod triangulo DEF, est æquale; recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. *d* Cùm igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; *e* sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF: Ac propterea cùm totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC,



d 2. *sexti.*

e 34. *primi.*

a 2. sex. in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde a quia F E, F S, similiter secantur: secatur autem F E extrema ac media ratione, secabitur & F S in T, extrema ac media ratione; maiusque segmentū erit F T, recta b æqualis existens lateri Icosaedri G H, ob parallelogrammum G T. Igitur F T, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ F S, quæ diuidit E C, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.

b 34. primi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit A B C, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis B K, C L, A M, prodeant centibus G H I, basin Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli A B C, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera P Q, Q R, R P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico A P, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri H I. Cùm enim P Q, dupla sit potentia minoris segmenti A P, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 15. quadrupla verò potentia rectæ P G, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd P Q, recta dupla sit rectæ P I, hoc est, sibi æqualis H I, ob parallelogrammum P H, erit P Q, potentia 4. & A P, 2. & H I, 1. Quamobrem A P, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. c Cùm enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, d cum diametro potentia sit commensurabile. e Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit. Atque ageò f cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri) Erit & latus Icosaedri, ex [illegible] propos. 104. lib. 10. Apotome.

c 13. tertiidec.
d 6. dec.
e 6. tertiidec.
f 6. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus verò Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cùm ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt cõstat ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Nam cùm sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus Pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti. a 2. sex.

DENIQVE b quia diameter sphæræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cùm diameter octaedri coniungat centra basium oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. b 14. ter tiidec.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potẽtia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

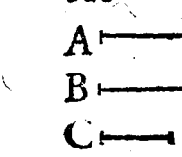
CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; c existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Apertè colligitur, latus Dodecaedri maius, segmentum rectæ esse, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. c 5. sexti decimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus deniq, Dodecaedri in eodẽ cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cùm enim ex iis, quæ in propos. 14. lib. 15. demonstrata

A ——————
B ——————
C ——————



strata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C latus Dodecaedri, per ea quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi. Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ in propos. 18. lib. 5. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti (ostensum enim est ibi, G H, diametrum basis cubi in ea descripti tertiam esse partem lateris Pyramidis B C) *a* Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis nonuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cùm nonupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3 9. apparet. Quare cùm quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

a 20. sexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15. *b* Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac mediæ ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.

b 8. sextidec.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosae-

Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

VT enim constat ex propos.16. lib.15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium propè minora segmenta (qualis fuit ibi recta G I, subtendens angulum rectum G A I, minoribus segmentis A G, A I, comprehensum) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare a cùm hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. a 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octaedri A B C D E, cuius basis quadratũ A B C D, triangula verò ad E, verticem, A B E, E B C, C E D, D E A, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur K L, L M, M N, N K, rectis A B, B C, C D, D A, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ F G, G H, H I, I F; erit F G H I, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta E H O, sesquialtera est rectæ E H, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur E O, talium 2. erit E H: b Atqui vt E O, ad E H, ita est E B, ad E L. Igitur qualium partium 3. continet E B, talium 2. erit E L, seu L M, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L, M N, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi G H, videlicet F G H I, talium partium 2. cùm quadratum L N, duplum sit quadrati G I, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. demonstrauimus. Est enim L N, quadratum ex diametro quadrati H I, descriptum; c cùm G I, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri L M. Quapropter latus octaedri E B, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi G H, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.



b 2. seu.

c 33. primi.

COROLLARIVM.

QVIA verò latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema

ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti: cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusque scholio: Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residunt sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cùm per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. *a* Atqui diameter sphæræ seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

a 14. terdec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cùm ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus (quod tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales) liquidò constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

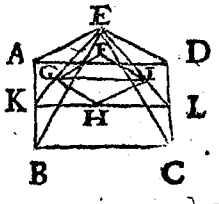
PRÆ-

PRÆTEREA, cùm constet ex coroll. 1. propos. 17. lib 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cùm enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula autem ad verticem E, sint A B E, E B C, C E D, D E A, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur F G, G H, H I, I F, quadratum cubi in octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam verò pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus, Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri B C, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I, Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera A B, C D, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque E K, E L, sesquialteræ erunt rectarum E G, E I, per coroll. propos. 18. lib. 14. a Ac propterea G I, a 2. sex. parallela erit rectæ K L, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum E G I, simile triangulo E K L. Quare erit vt E K, ad K L, ita E G, ad G I, & permutando, vt E K, ad E G, ita K L, ad G I, idcoque cùm E K, sesquialtera sit ipsius E G, erit & K L, sesquialtera ipsius G I. b Cùm ergo B C, æqualis sit ipsi K L, quòd & B K, b 33. pri. mi. C L, æquales sint, & parallelæ; Erit B C, latus octaedri sesquialterũ lateris Pyramidis G I, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

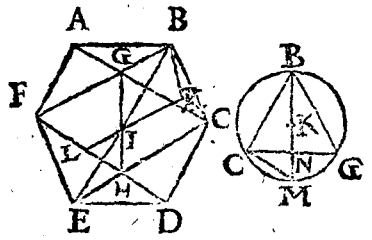


THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum A B C D E F G H, cuius diameter B E, &

centrum I; triangula verò oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. B C G, E F H, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum B C G, perpendicularis I K, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur K I, perpendicularis quoque erit ad planum E F H, parallelum plano B C G, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cùm cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, vt conſtat ex propoſ. 11. lib. 13. atque adeò angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit K L, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cùm ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, idemque I K, I L, ſemidiametri æquales: Coniuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum B C G, circumſcribentis; erit angulus B K I, rectus, ex defin. 3. lib. 11. *a* Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum B K. K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, erit ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis, & K L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium quadrupla quadratorum ex ſemidiametris B K, K I, deſcripti. Ablato ergo quadrato diametri cubi K L (*b* quod triplum eſt quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extenſaque B K, vſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. *c* erit recta B C, potentia ſeſquitertia rectæ B N: Vt autem B C, ad B N, ita eſt B M, ad B C, quòd B C, ſit media proportionalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. *d* cùm angulus B C M, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur B M, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C, propterea quadratum diametri B M, ſeſquitertium eſt quadrati lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri [illegible] Quod erat demonſtrandum.



a 74. primi.

b 15. tertiidec.

c 12. quartidecimi.

d 31. tertij.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambien-

bientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri BE, æquale eſſe quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, vt manifeſtum eſt ex propoſ. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones coniungentis diuiſæ extrema ac media ratione minus ſegmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi rectæ coniungat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum. a 14. tertiidec.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

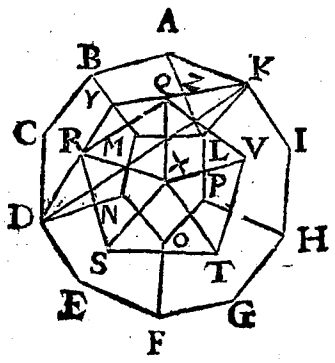
DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodem Icoſaedro deſcribantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidem circumdantis: b Poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſin Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris Icoſaedri, vt in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circumdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſin Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum. b 13. tertiidec.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atq; extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdē lineæ inter centrum pentagoni & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſium BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſitionis 10. lib. 13. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur [a] perpendicularis kY, in Z, extrema ac media ratione.



[a] 2. ſextidec.

Dico ita eſſe latus Dodecaedri LM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt kZ, minus ſegmentum perpendicularis kY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta Dk, quæ per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius Dk, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodem ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam verò latera YD, Yk, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q (ſunt enim RD, Qk, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipſi Dk; Idéoque triangulum YRQ, triangulo YDk, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Quamobrem erit vt Dk, ad kY, ita QR, ad QY, [d] Vt autem Dk, tota ad totam kY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus kZ. Vt igitur LM, ad kZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita kZ, minus ſegmentum perpendicularis kY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[b] 2. ſex.

[c] 4 ſex.

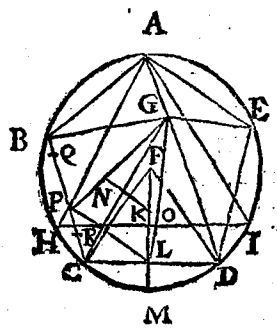
[d] 2. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

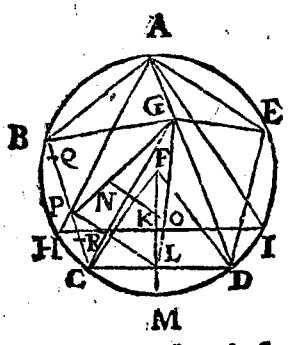
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinq; latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur A H I. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cùm quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cùm sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; proptereaq; rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FkL, a secans rectas HI, CD, bifariam in k, & L; coniunganturq; rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, dividentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demõstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro descripti. Deniq; BP, dimidiũ lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cùm enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, secetur in k, extrema ac media ratione (quòd FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari Fk, per coroll. propos. 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento Fk, æqualis recta kM, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum kM, sectum quoque in L, à minori segmento kL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ suiipsius segmento LM. Quoniam verò iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descri-



a 3. tertij.

descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo lib. 4. ideoque similis illi: erunt triangula FCD, FPL (si recta ducatur FP) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP; Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmẽto dimidii ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidii ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit PQ, ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris NO (quòd GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14.) a parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. b Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cùm CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Simile midium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

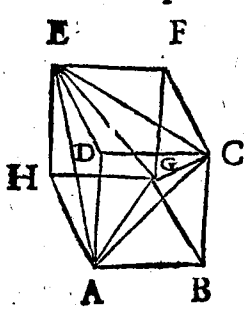


a 2. sex.
b 4. sex.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cùm enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices verò habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. definitione libri vndecimi, cùm contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & simili-



similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basin habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem verò eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 17. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. *a* Cùm igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quòd & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum. *a* 32. vndecimi.

ALITER. Cùm cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. *b* Cubus verò triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicuè colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur. *b* 32. quartidecimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cùm enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt propos. 3. lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cùm contineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterũ æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) *c* Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum (cum octupla proportio sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicuè apparet) hoc est, quælibet



c 8. duodecimi.

bet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis A B C D; Atq; idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis A B C D, conficient. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis A B C D. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

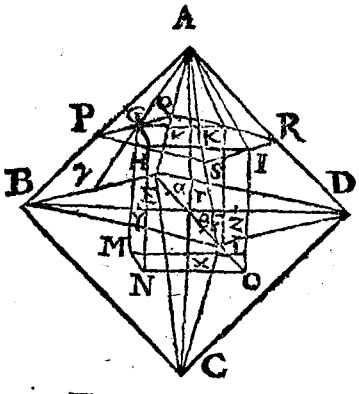
QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. *a* Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, *b* & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeò cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

a 20 *sextidec.*
b 21. *sextidec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro A B C D E F, cubus descriptus sit G H I K L M N O, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri B E D F A, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ P Q, Q R, R S, S P, lateribus B E, E D, D F, F B, parallelæ quadratum constituentes P Q R S, vt in propos. 14. lib. 15. est demonstratum; *c* quod quidem parallelum erit quadrato B E D F. Ducatur quoque octaedri diameter A C, perpendicularis existens ad quadratum B E D F, vt centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 4. lib. 11. proinde perpendicularis ad bases cubi G I, M O, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati P Q R S; *d* (cùm enim plana B E D F, P Q R S, parallela fecentur rectas æquales A B, A E, A D, A F, proportionaliter; erunt & A P, A Q, A R, A S, æquales. Intelligantur ductæ rectæ V P, V Q, V R, V S. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium A P, A Q,



c 15. *Undecimi.*

d 17. *Undecimi.*
e 47. *primi.*

AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quòd anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, propterea que & rectæ ipsæ VP, VQ, æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR, VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS) Igitur & centrũ erit quadrati GHIK, in illo descripti, per schol. vltimũ lib. 4. Secantur n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariã in G, K, I, H, vt constat ex demonstratis in propos. 4. lib. 15. Eodẽ argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO; Necnon & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib. 14. *a* Cùm ergo a 17. 9m decimi. plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde cùm æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: necnon VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cùm ad eundem modum YZ, αβ, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cùm per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarũ connectentes sese bifariam secent in centro. Iam verò quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autem fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. cùm vtriusque eadem sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX. *b* Est autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quòd & basis PQRS, dupla sit basis GHIK, illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia verò pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cùm triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius) *c* proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterum, quòd & recta Aγ, *d* proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem

b 6. 9m decimi.

c 8. duo decimi.

d 2. sex.

habet,

habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadruplæ sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. *a* Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quæ druplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

a 11. sextidec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; *b* Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis *c* triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptã pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

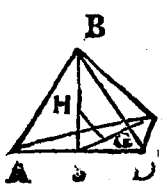
b 23. sextidec.

c 20. sextidec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim GH, centra duarum basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 11. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa verò recta GH; cùm BH, CG, duplæ sint rectarum GS, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur BS, CS, *d* parallelæ erũt BC, HG, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo BCS, simile. *e* Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita CS, ad



d 2. sex.

e 4. sex.

CS, ad GS: a Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta verò connectens duo centra basium pyramidis commune larus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuũ est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis; GH, verò diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cùm ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera (Est enim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quòd proportio vtraque sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cùm vtrobique sit proportio dupla.) b Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionẽ triplam. At verò cubi, cùm sint parallelepipeda similia, c proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABDC, proportionẽ habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, d cùm cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeò pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

a 18. *quarti decimi.*

b 12. *sexti.*

c 33. *vndecimi.*

d 20. *sextidecimi.*

IGITVR

COROLLARIVM.

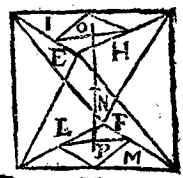
cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionẽ habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

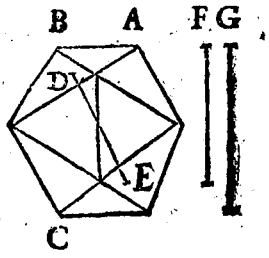
IN octaedro ABCDEF, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases o-

ctaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cùm enim, vt ex demonſtra-
tis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſi-
bus octaedri reponantur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M,
in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atq; ex N, cen-
tro octaedri, necnon & Icoſaedri (idem enim vtriuſq; eſt centrum
per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſin A D E, perpendicularis
ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli
ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. quod quia
dem O, centrum quoq; eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ.
16. lib. 15. Cùm ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint, ex



coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. Recta O N, producta
perpendicularis quoq; erit, per ſcholium propoſ.
14. lib. 11. ad planum B C F, in eiuſque propterea
centrum P, commune etiam triangulo K L M,
cadet. Quare O P, recta altitudo eſt & octaedri
& Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia verò octaedrum
in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad
mnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt
N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icoſaedrum in
20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autē priſma
triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſin, & altitudinem ha-
bentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis
A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri. Hexaedrum
verò priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla
altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E,
altitudo verò O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſten-
dimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale
eſt ſex pyramidibus octaedri. Ac proinde reliquis duabus octae-
dri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt,
æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſin A D E, & ſub alti-
tudine O P, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt
trianguli A D E, altitudo verò eadem O P. Hoc enim priſma
tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P,
cùm per ea, quæ docuimus ad propoſ. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem
altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum al-
nius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars
baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro. Rurſus
D E F. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis G H I, al-
titudo verò O P, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: proinde
eaque triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tertia pars
ſit baſis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales eſſe ſex pyra-
midibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidi-
bus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri
conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem G H I,

GHI, & sub altitudine OP, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo verò eadem OP; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius verò basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam verò, cùm duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes (cùm vnius basis sit ADE, nempe tres tertiæ partes ipsius ADE, complectens, alterius verò basis tertia pars ipsius ADE) ad bases prismatum Icosaedro æqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes (cùm vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipsius GHI, continens, alterius verò basis tertia pars ipsius GHI) Sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI, [a] ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cùm sex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipsius GHI (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cùm quindecim tertias complectantur) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.



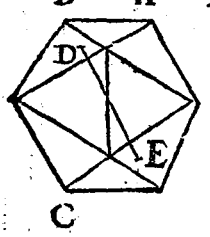
[a] 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionē habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadē cum in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam

habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Ico-
saedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum A B C, in quo recta D E coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sphæræ A C; & *F*, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad rectam D E. Cùm enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro inscriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeò oppositos angulos in centris basium oppositarum, ut D E, diameter dodecaedri in Icosaedro A B C, descripti, cùm metiatur angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc est in eadem sphæra, in qua Icosaedrum A B C, descripto, cuius triusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri D E, sibi inscripto Icosaedrum videlicet A B C, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri A B C, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per eas quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri A B C, ad dodecaedrum diametri A C, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro A B C, descriptum. Cùm ergo Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi (*a* Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icosaedrum A B C, eiusdem diametri est, vt G, latus cubi ad *F*, latus Icosaedri. Conuertendo igitur erit Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At verò Dodecaedrum eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro videlicet A B C, descriptum, proportionem habet triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri D E, componi quoque ex proportione F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum pro-



a 11. *quarti-decimi.*

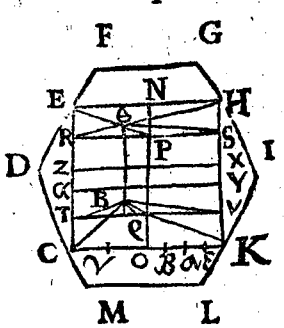
proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At verò altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

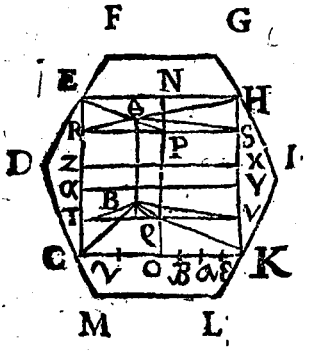
QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; sint huiusmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I-K B, B k L M C, conuenientia ad latus A B; duo quidem A B-C D E, A H I k B, secundum latus idem commune A B, alia autem duo A E F G H, B C M L k, secundum angulos E A H, C B k. His verò pentagonis inscriptum sit quadratum cubi E C k H, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet C B k H A E, constans quinq; planis C B k, E A H, A B C E, A B k H, E C k H; quorum duo C B K, E A H, a triangula sunt æqualia, cùm latera pentagoni B C, B k, æqualia sint lateribus pentagoni A E, A H, angulosque comprehendant æquales pentagonorũ E A H, C B k. Duo verò A B C E, A B k H, trapezia sunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona A B C D E, A B k I H, per hypothesin, & triangula ex ipsis ablata C D E, H I K, b æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia A B C E, A B k H;) Quintũ denique est basis cubi inscripti E C k H. Similia, per 10. defin. lib. 11. super reliquas quinque cubi bases; ita vt Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit à C E H k, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi C k, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at verò altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati late-

a 4. primi.



b 4. primi.

ris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus EH, Ck, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demissæ in planum Ek, vt constat ex demonstratis propos. 17. lib. 11. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas



LN, VX, VR, XS, figuræ propos. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, BQ, maius segmentum lateris cubi NO, vel Hk, & vtraque AP, BQ, æ. qualis dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propos. 17. lib. 13. Ab propterea si per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, Ck, parallelæ, erunt quoque RT, SV, maiora segmenta laterum EC, Hk; atq; adeò ER, CT, simul, & HS, kV, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, constituantur duæ pyramides ERSHA, CTVkB, quæ per coroll. propos. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cùm & earum baſes ERSH, TCkV, & altitudines PA, QB, æquales

a 33 primi. sint; consistentque extra solidum ABTVSR. a Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT, æqualis est, & parallela; cùm

b 15. & undecimi. coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, b parallelæquales erunt plana triangulorum ARS, BTV, atq; adeò inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cùm latera vnius lateribus alterius

sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, prisma est, ex definitione.

IAM verò, cùm ostensum sit rectas HS, kV, minus segmentum efficere lateris Hk, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriusque HS, & kV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris Hk, duas tertias partes contineat VY, tertia verò pars sit XY, ducanturque XZ, Y α, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides

c 6. duo decimi. ERSHA, CTVkB, æquales sunt ostensæ; c vtriusq; verò earum

d 1. sext. dupla est pyramis super baſem TX, & sub eadem altitudine PA, vel QB, constituta, d quòd & baſis TX, dupla sit baſis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVkB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias prismatis continet prismatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadem, QB, vertex verò linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis sit ipsi VX, vt demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prismatis, cuius baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex verò pars rectæ

rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. a quòd & basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVkB; Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTV-SR, efficiet prisma æquale solido CBkHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoq; à base cubi deficientem rectangulo αX, contento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinq; prismata æqualia & proximè dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constituris. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo verò æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim Ck, latus cubi extrema ac media ratione in ζ. Itemq; Cβ, maius segmentum, & βk, minus bifariam in γ, & atque ex ζk, abscindatur ζε, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars minoris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB; & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βk, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti; quia βk, maior est, quàm dimidium maioris segmenti Cβ. Cùm enim sit, vt Ck, ad Cβ, ita Cβ, ad βk; sit autem Ck, minor, quàm dupla ipsius Cβ, quòd Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque Cβ, minor, quàm dupla ipsius βK, hoc est, erit βk, maior, quàm dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota Ck, ad maius segmentum Cβ, ita maius segmentum Cζ, ad minus βk; b erit quoque vt CQ, dimidia ipsius

a 21. sexti

b 15. quinti.

ipsius C K, ad C γ, vel β ε, dimidiam ipsius C β, ita C γ, vel β ε, ad β δ, dimidiam ipsius β K; Ac proinde si C O, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ, vel β ε, & minus β δ. Quare & β δ, minus segmentum secabit β ε, maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. eritque maius segmentum β δ, minus autem δ ε; Ac propterea rursus δ ε, minus segmentum secabit rectam δ K, maiori segmento β δ, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ε K. Deficit igitur C ε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi C K, minore segmento ε K, rectæ δ K, vel sibi æqualis rectæ β δ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem verò ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

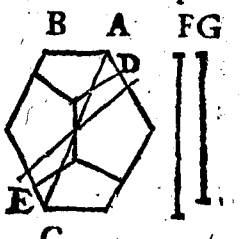
VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Alterius verò & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens quam cubus, altitudo verò à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedū prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque ideirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo verò alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam

rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro A B C, diameter sit A C, & recta coniungens centra basium oppositarum D E; At verò F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cùm enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeò anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta D E, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cùm eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cùm ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex coroll. propos. 17. lib. 12. *a* Dodecaedrum verò diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquidò constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. *quartidecimi.*

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo deniq; à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentũ minus existit, ita vt amborũ altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdẽ cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, *a* cùm pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cùm Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius, non obscurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeò vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo, lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

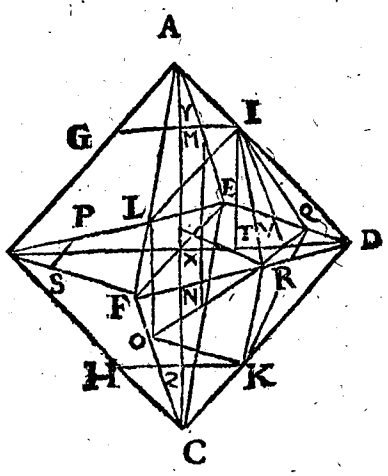
a 25. *sexti Elem.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit A B C D E F, repetita figura propos. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptũ componentia esse I O R, K Q R,

KOR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, FMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABCDEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri QR, altitudo verò IT, maius segmentum semidiametri AX. Cùm enim in quatuor basibus octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum solidum octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cùm earū altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri octaedri (Nam quemadmodum AX, secta est à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; secta est CX, à recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, a erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrū prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia verò triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ (Cùm DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoq; quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR,



a 34. primi.

IDQR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cùm earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Aequale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cùm enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: *a* octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri, rectæ videlicet IT, seu YX: Fit, vt octaedrum bis sumptum, nempe pyramidi cui inscribitur (*b* quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet duplum Icosaedri in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis eadem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cùm altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramidis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

a 31. *sexti.*

b 21. *sextidec.*

DE QVINQVE CORPORVM REgularium descriptione in data sphæra ex Pappo Alexandrino.

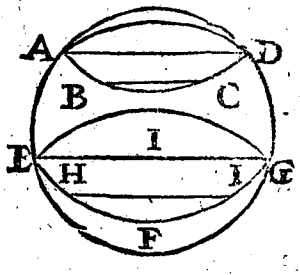
QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram constituxit, deinde verò eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; non erit absre dicere qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in sphæra describat: præsertim cùm eius ratio multo clarior videatur & facilior, quàm constructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, non tamen præ-

ptorem ordinem Euclidis peruertere censeri possumus; quippe cùm propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant; & commodè ante lib. 12. atque adeò multò magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. In citandis autem Theodosij propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, datàque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli A B C D, E F G; sitq; primum in A B C D, data diameter A D, cui in E F G, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, & in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum A D, planum rectum ad circulum A B C D, a faciens in sphæra superficie circulum A E G D. Quoniam igitur circulus A E G D, circulum A B C D, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus A E G D, maximus, transibitq; per polos circuli A B C D, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli E F G, b cùm paralleli eosdem polos habeant; c ideoque eum bifariam secabit. Communis ergo sectio E G, eius diameter erit: d qua cùm sit ipsi A D, parallela, patet propositum.



a 1. 1. Theod.

b 1. 2. Theod.

c 15. 1. Theod.

d 16. vndecimi.

DEINDE in circulo A B C D, data recta B C, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo E F G. e Ducatur ipsi B C, per centrum circuli A B C D, diameter parallela A D; cui in circulo E F G, ducatur diameter parallela E G, & proximè ostendimus. Quoniam igitur vtraque B C, E G, eidem A D, parallela est, ex constructione, f ipsæ quoq; B C, E G, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.

e 31. primi.

f 9. vndecimi.

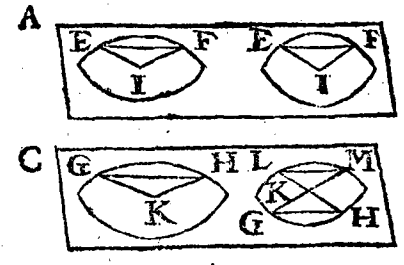
EADEM ratione recta B C, ducetur in circulo E F G, parallela H I, a diametro E G, diuersa, quæ ipsi B C, æqualis sit, si modò B C, maior non sit diametro E G. Nam si in circulo E F G, ducatur ipsi B G, parallela H I, & æqualis, & ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, fa-ctum erit, quod iubetur.

LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes; erunt

erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis A B, C D, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ E F, G H, primùm parallelæ sint, ad easdem partes centrorum I, K, auferanturque arcus similes E F, G H, ac tandem iungantur ad centra rectæ E I, F I, G K, H K. Dico tam E I, G K, quàm F I, H K parallelas esse. Quoniam enim arcus E F, G H, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propos. 22. lib. 3: a *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* b *Cùm ergo tam illi, quàm hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quàm angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ E F, G H, parallelæ sunt, & rectæ E I, G K, ad easdem partes planum per E F, G H, ductæ efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt eæ, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstrauimus, E I, G K, parallelæ. Eademque ratione F I, H K, parallelæ erunt.*



a 32. primi.
b 5. primi.

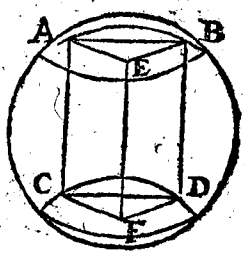
DEINDE sint E F, G H, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. Dico tam E I, H K, quàm F I, G K, esse parallelas. Producantur enim G K, H K, iungatur recta L M. Et quia latera G K, H K, lateribus L K, M K, sunt æqualia, c *anguloque ad verticem K, æquales continent;* d *erunt & bases G H, L M, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M.* e *Igitur arcus G H, L M, æquales sunt,* f *& rectæ G H, L M, inter se parallelæ: Ac proinde cum vtraque E F, L M, ipsi G H, sit parallela,* g *erunt & E F, L M, parallelæ inter se. Quia igitur E F, L M, parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes E F, L M (Nam cùm arcus G H, sit arcui E F, similis, erit quoque arcus L M, qui arcui G H, æqualis est, eidem arcui E F, similis) erunt tam E I, L K, hoc est, E I, H K, quàm F I, M K, hoc est, F I, C K, parallelæ. Quod est propositum.*

c 14. primi.
d 4. primi.
e 28. tertij.
f 27. primi.
g 9. vndecimi.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus sint



sint duæ rectæ æquales & parallelæ AB, CD, ad easdem partes centrorum, quarum extrema iungantur ad easdem partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque esse, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt; a erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Quare cùm AB, CD, sint etiam æquales; b æquales quoq; erunt ac parallelæ AC, BD, quod est primum.

a 7. undecimi.
b 33. primi.

EX centris deinde E, F, ductis rectis EA, EB; FC, FD, iunctaq; rectæ EF; erunt tam AE, CF, quàm BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate. Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales. d Quoniam verò circuli AB, CD, paralleli circa eosdem polos sunt, e recta per eorũ polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta per eorum polos extensa, quod est absurdum. Haberent enim illa recta segmentum commune EF. f Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, recta est: & propterea & vtraque AC, BD, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.

c 33. primi.
d 2. Theod.
e 10. 1. Theod.
f 10. 1. Theod.

HÆC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, sunt circulorum diametri, sed tunc EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, vt patet.

g 8. undecimi.

LEMMA IV.

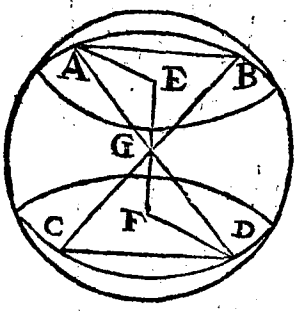
SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales; Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in iis ductæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primùm non ad easdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro sphæræ se intersecare, ideoque diametros esse sphæræ inter se æquales.

Quoniam

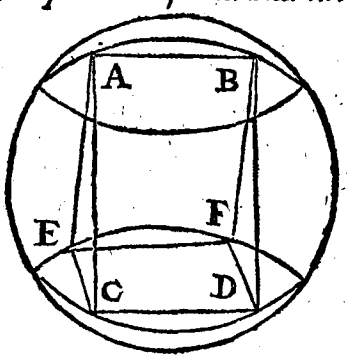
a 7. Vndecimi. *Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt,* a *erunt AD, BC, in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuò intersecabunt, & in puncto H, quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectæ EA, EG; FD, FG.* b *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem æquales sunt:* c *Item tam alterni anguli BAD, CDA: quàm alterni ABC, DCB, æquiangula erunt triangula AGB, CGD.* d *Igitur erit & AB, ad BG ita DC, ad DG. Item & AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æquales,* e *erunt quoque tam BG, CG, quàm AG, DG, inter se æquales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum æqualium æquales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ, fit & quidem anguli alterni EAD, FDA, æquales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia, angulosque comprehendent æquales.* g *Igitur & bases EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales sunt.* h *Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallela AE, DF;* i *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum constitutæ, propter æquales angulos AGE, DGF, & ex Proclo ad propos. 15 lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, & in præcedenti lemmate demonstrauimus, & perpendiculariter ad eorum plana erit. Cùm ergo EG, FG, sint ostensæ, erit G, centrum sphæræ,* l *propterea quòd circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro sphæræ absunt; inæqualiter verò abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quàm G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.*

b 15. primi.
c 29. primi.
d 4. primi.
e 14. quinti.
f 29. primi.
g 4. primi.
h 7. Vndecimi.
i 2. Vndecimi.
k 10. 1. Theod.
l 6. 1. Theod.



SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA esse rectos. Quòd enim sint parallelæ & æquales, m *manifestum est, cùm extrema puncta parallelarũ æqualiũ coniungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iungantur & EF, AE, BF. Quia igitur anguli EDC, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui* n *arcus EFD, CEF, semicirculi erunt,* n *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æqua-*

m 33. primi.



n 31. tertij.

les sunt, a ideoque & A B, E F, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 33. lemmate A E, B F, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli A E C, B F D, recti erunt. Recta igitur E F, perpendicularis ad vtramque E C, E A, & ad vtramque F D, F B; vt ostendimus, b perpendicularis erit & ad planum trianguli A E C, per E C, E A, ducti, & ad planum trianguli B F D, per F D, F B, ductis: c ac propterea & C D, A B, ipsi E F, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib 11. anguli C A B, A B D, B D C, D C A, recti erunt. Quod est secundum.

a 9. Undecimi.

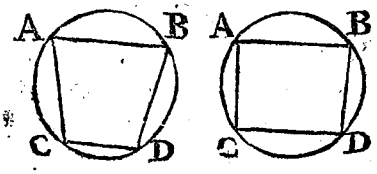
b 4. Undecimi.

c 8. Undecimi.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erũt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ A B, C D, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis A C, B D, Dico A C, B D, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt A B, C D, d erunt A C, B D, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano, e fiat in sphæra circulus A B D C, in quo cum parallelæ sint A B, C D; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus A C, B D, æquales: f ideoque & rectæ A C, B D, æquales erunt. Quod si parallelæ A B, C D, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum A B D C, in circulo habeat duo opposita latera A B, C D, parallela, & æqualia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. A B D C; parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.



d 7. Undecimi.

e 1. 1. Theod.

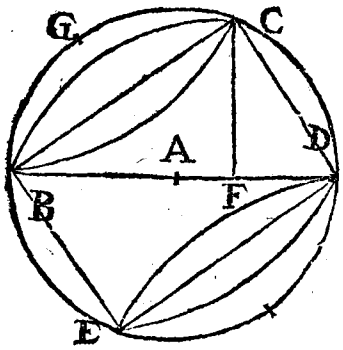
f 29. tertij.

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæræ centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum B C D E, cuius diameter B D, ex coroll. 1. propos. 1. lib. 1. Theod. Secta autem B D, in F, vt B F, ipsius F D, dupla sit; erit B D, talium partium 3. qualium 2. est B F; ac proinde B D, ipsius B F, sesquialtera est. Ducta quoque F C, ad B D, perpendiculari, iungantur rectæ B C, D C, ductaq; D E, ipsi B C, parallela, connectatur

a 29.pri mi. recta BE. a Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quàm duo BED, CBE, duobus rectis æquales sunt; b estque tam BCD, quàm b 31.ter tij. BED, rectus; erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scholio propos. 34. lib. 1. quadrilaterorum rectangulum BCDE, parallelo- c 34.pri mi. grammum est; c ideoque recta BC, DE, æquales sunt. Diuiso iam



arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariam in G; quare scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoq; BE, GD, æquales sunt. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quàm GE, GD; d qui paralleli erunt, cùm eosdem habeant polos. e Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cùm æquales sint ostensæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continuè proportionales sunt; erit ex coroll propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autem BD, ipsius BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atq; adeo & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusque diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.

d 2. 2. Theod.

e 15. 1. Theod.

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinq; corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.

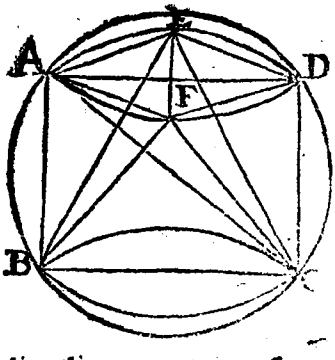


fig. 1. Theod.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diametri sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, f qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo ED, recta alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem: hoc est, quatuor triangula EBC, BCF, GFE, EFB, esse æquilatera & æqualia.

qualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & in plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, descriptum, & constat ex propos. 6. lib. 4. Itaq; quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli; si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cùm ergo quadratum ex AC, a æquale sit quadratis ex AD, DC, quòd angulus ADC, rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF; b quibus cùm æquale sit quadratum ex CF, quòd angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoq; duplum, propterea q; quadrati ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoq; BCF, triangulum est æquilaterum.

a 47. primi.

b 47. primi.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex schol. propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: c quibus cùm æquale sit quadratum ex CE, quòd angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea q; recta CE, rectæ AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atque adeò & recta CF, quæ ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cùm latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cùm eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant. quod est propositum.

c 47. primi.

COROLLARIVM.

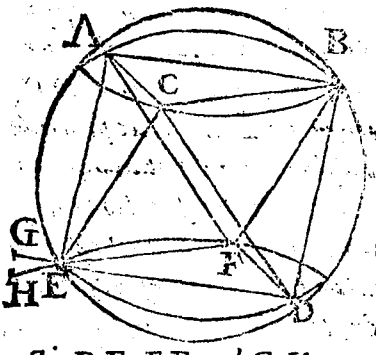
HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data sphæra octaedrum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circu-

culi æquales & parallelí A B C, D E F, ita vt sphæræ diameter dia-
a 2. quarti. metri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. a Descripto autem triangulo æquilatero A B C, in circulo A B C, ducatur per primum lemma, recta A B, in circulo D E F, parallela & æqualis D E, ad easdem partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri, in circulo D E F, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero D E F, erunt singula eorum singulis lateribus trianguli A B C, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum A B, D E, æqualitatem; parallela verò, ex scholio propos. 16. lib. 11. Cùm enim parallelæ sint A B, D E, & anguli A B C, D E F, æquales; productis rectis D E, F E, ad G, H, erunt quoque anguli A B C, G E H, æquales. Cùm ergo parallelæ sint A B, G E, & B C, E H, ad easdem partes plani per A B, G E, ducti; erunt quoque B C, H E, hoc est, B C, E F, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit D F, ipsi A C. Connectantur denique A E, E C, C D, D B, B F, F A, & in figura. Dico A D, octaedrum esse, hoc est, octo triangula A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D E B, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ rectæ A B, D E, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum; erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ A D, B E (quas tamen ductas, confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ A E, B D, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas A B, D E.



b 47. primi. b Quadratum igitur ex B E, duobus quadratis ex B D, D E, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ B E, 6. quadratum ex D E, est 3. (Nam cùm per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli D E F: posito quadrato ex B E, 6. erit quadratum diametri circuli D E F, 4. At posito quadrato diametri circuli D E F, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri D E, est 3. quod ex coroll. 1. propos. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex B D, est 3. ac proinde quadrata ex D E, B D, æqualia sunt, & rectæ ipsæ D E, B D, æquales. Est autem D E, ipsi A B, per constructionem, & B D, ipsi A E, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ A B, B D, D E, E A, æquales erunt, constituentes quadratum A B D E, cùm anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4. lemmate.

RVRSVS quia B C, E F, parallelæ sunt & æquales ad easdem partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ B E, C F, non tantùm ad easdem partes diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ B F, C E, æquales inter se, atque ad B C, E F, perpendiculares, eritque rursus, vt prius, quadratum B C E F. Non aliter ostendemus, A C D F, quadratum esse;

esse; cum iunctæ rectæ AD, CF, sint quoque sphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cum AB, latus sit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erunt omnia triangula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27 lib. 11. & in data sphæra descriptum; cum eius anguli solidi A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.

COROLLARIVM.

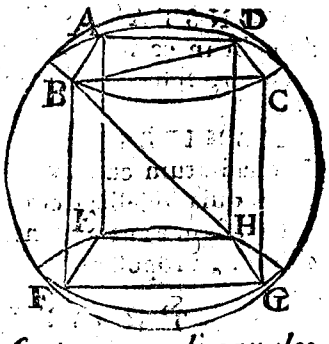
COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

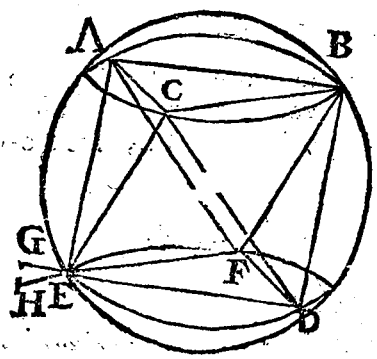
IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. a Descripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD; ducatur per 1. lemma recta AD, in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadem parte centrorũ, qua latus quadrati in circulo EFGH, describitur. ob circulorum æqualitatem Complexo ergo quadrato EFGH, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum AD, EH, æqualitatem: parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ sunt AD, EH, suntque anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque DC, HG, parallelæ, cum sint ad easdem partes plani per AD, EH, ducti, & sic de cæteris. Iungantur denique ad easdem partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico AG, esse cubum, hoc est, sex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH diameter sphæræ; at BD, diameter circuli ABCD, quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex BH, sesquialterum est quadrati ex BD; quadratum autem ex BD, quadrati ex BC, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. si statuatur quadratum ex BH, 3. erit quadratum ex BD, 2. & quadratum

a 6. quarti.



dratum ex D C, 1. atque adeò quadratum ex B H, quadrati ex D C, triplum erit. Rursus quia quadratum ex B H, est 3. & quadratum
247. primi. *ex B D, 2. a estque quadratum ex B H, æquale quadratis ex B D, D H, quòd angulus B D H, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum est quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratum ex B H, triplum quadrati ex D C. Æqualia ergo sunt quadrata ex D C, D H; ac proinde rectæ D C, D H, æquales. Cùm ergo oppositis lateribus G H, C G, æquales sint, erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo C H: cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit C H. Eadem ratione & B E, A H, B G, quadrata esse ostendentur: Sed & A C, E C, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est A G, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus, cùm eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.*



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ B H, triplum esse quadrati lateris cubi D C, vel A D, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis est circulo A B C, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

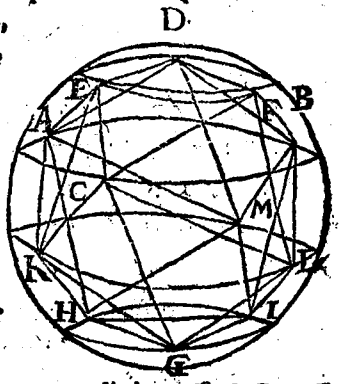
b 12. sexti. *REPERIATVR* b *recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, & pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiat q; ex coroll. propos. 6. lib. 10. & numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius rectæ; eidem lineæ, ad cuius interuallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Describatur*

c 1. quinti. *in quinto maximo circulo in sphæra data,* c *accommodetur in eo recta inuenta semidiametri sit dupla, cùm hæc recta minor sit diametro sphæræ siue illius circuli maximi, & infrà probabitur. Nam super eam*

d 1. 1. Theod. *rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* d *faciet id circulum A B C, in sphæra, cuius semidiameter, ex construc-*

tione

ctione, potentia subtripla est recta initio inuenta. Deinde inueniatur a rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæra diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti; Fiat q3 vt 3. ad 1. ita per coroll. propos. 6. lib. 10. quadratum recta inuenta ad quadratum alterius linea, ad cuius interuallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo A B C, parallelus; quod fiet, si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta aqualis dupla semidiametri inuenta, & parallela prioris circuli diametro, exijs, quæ ad propos. 1. lib. 4. demonstrauimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectum, ex scholio propos. 18 lib. 11. Nam per idem scholium, planum hoc erit circulo A B C, parallelum, b faciet q3 in sphæra circulum D E F, cuius semidiameter semidiametro inuentæ æqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alij duo æquales ac paralleli describantur G H I, K L M, quod facilè fiet, si illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. c Descripto autem in circulo D E F, triangulo æquilatero D E F, ducatur lateri E F, in parallelo circulo A B C, ex lemmate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in circulo A B C, descripti: Item huic A B, agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circulo K L M, & æqualis: Ac deniq3 huic K L, in circulo G H I, ducatur ex altera parte centri, parallela H I, & æqualis ipsi E F, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo G H I, descripti. Completis ergo triangulis æquilateris A B C, K L M, G H I, erunt singula latera singulis lateribus trianguli D E F, parallela; nimirum A C, M L, G H, ipsi D E; at B C, M K, G I, ipsi D E, quod probabitur ex scholio propos. 16. lib. 11. vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse B C, E F, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, rectæ D E, D A, D M, D B, D F; ex G, rectæ G H, G K, G C, G L, G I, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico D G, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula D E F, D E A, D A M, D M B, D F B, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16.



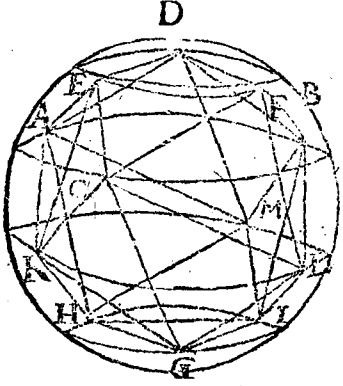
a 12. sexti.

b 1. 1. Theod.

c 2. quarti.

lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in sphæra descriptũ Icosaedrũ DG, 12. angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia 5. rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cùm sint latera triangulorum æquilaterorũ æqualium; si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in eodem plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cùm ergo eius latera sint inter se æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, Ek, EC, EF, ED: Et kHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia Ak, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icosaedri æqualia kH, kG, kC, kE, kA: Et GIMAk, ob latera quinque Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, Hk: Et ILCkH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, Gk, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales FD, FE, BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinq; æquales FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEk, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, Ck, ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaq; inter se æqualia constituantur. Quoniam verò recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppositi lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AkCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. a Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt, b facientq; circulos parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta kE, ipsi HI, parallela in pentagono ILCkH: Et iuncta kM, ipsi GI, in pentagono GIMAk: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMGH: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GIL, kLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta kL, ipsi EF, in pentagono GLFEk. c Cùm autem EF, HI, cùm sint eidem iunctæ AB, vel kL, parallelæ, inter se parallelæ sunt, Eademque ratione DE, GI, cùm sint eidem iunctæ BC, vel kM, parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea quæ planæ circu-



a 15. vndecimi.
b 1. 11. Theod.
c 9. vndecimi.

culorum D E F, G H I, per rectas D E, E F, & H I, G I, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra D E F, A B C, k L M, G H I, paralleli inter se sunt: & tam circuli D E F, G H I, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quam circuli A B C, K L M, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis A B, B C, C A; & k L, L M, M k, constituuntur: quippe cùm latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.

QVIA verò iuncta recta K B, quæ connectit non ad easdem partes extrema K, B, parallelarum K L, A B, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus B A k, rectus ex 4. lemmate, quòd K A, connectat ad easdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; a erit quadratum diametri k B, æquale duobus quadratis ex A B, A k. Rursus quia in pentagono E A M B F, recta iuncta A B, angulum A M B subtendit: vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descripto rum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit A B, iuncta ad E F, vel A K, ipsi E F, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cùm latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæræ K E (quæ ambas A B, A K, potest, vt ostendimus) latus pentagoni in eo circulo, in quo A B, latus est hexagoni, & A K, vel E F, latus decagoni. Quare sphæræ diameter K B, ad iunctam A B, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at verò ad E F, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cùm tam A B, latus trianguli æquilateri in circulo D E F, potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli D E F, A B C, ac proinde & G H I, K L M, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis describimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri initio inuentæ, minorem esse diametro sphæræ, vt suprà diximus.

a 47. primi.

b 10 ter tiidec.

c 12. ter tiidec.

HIS demonstratis facili negotio includemus, solidam figuram à nobis descriptam D G, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum D E F, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum laterum singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeò vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo in circulo. Nam descripto Icosaedro D G, in sphæra, ostensum est

esse diametrum sphæræ K B, ad E F, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: *a* ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

a 20. primi.

COROLLARIVM.

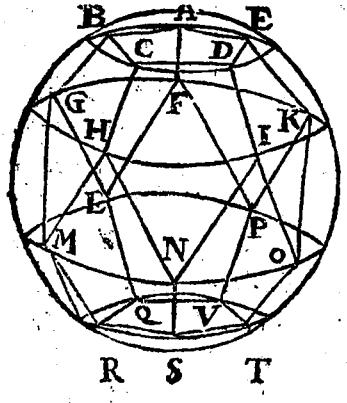
COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo A B C, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo A B C descriptorum, ita diameter sphæræ K B, ad iunctam A B, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum A B. *b* Est autem latus hexagoni in circulo A B C (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ A B, quòd A B sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo A B C, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo A B C, descripti.

b 12. tertiidec.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli æquales, & vt in antecedenti propositione A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ita vt semidiametri circulorum A B C D E, Q R S T V, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni: semidiametri verò circulorum F G H I K, L M N O P, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo A B C D E, pentagono A B C D E, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri C D, ad easdem partes centrorum parallela H I, in circulo F G H I K, æqualis lateri pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Rectæ autem H I, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela L P, in circulo L M N O P: Huic tandem L P, ad easdem centrorum partes ducatur parallela Q V, in circulo Q R S T V. Completis iam pentagonis in hisce tribus circulis (quorum tamen latera, vt sectionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni A B C-



ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallela ducta sunt: quod demonstrabitur, vt in problemate secundo ostendimus, parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erunt ipsi BC, &c. Postremò ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEkOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPkE, kPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propositione 17. lib. 13.) suos viginti angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos describimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem viginti puncta notauimus.

SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, k, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & Ik, lateri DE, in pentagono DEkOI; & kF, ipsi AE, in pentagono AEkPF; & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur recta AB, AE, rectis FG, Fk, parallelæ sunt; a erit & planum per FG, Fk, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propositionis 16. lib. 11. plana per FG, Fk, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeò, ex eodem scholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quàm duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, iK, KF; LM, MN, NO, OP, PL, c quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

a 15. Undecimi.

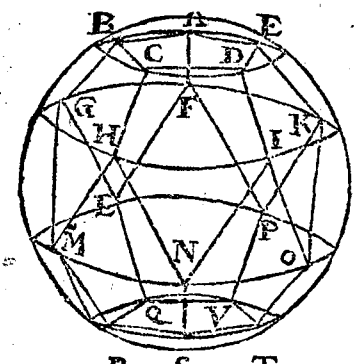
b 1. 1. Theod.

c 4. primi.

DEIN-

DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. recta iuncta ND, MB, lateri CH, parallela sunt in pentagonis CHNID, BGM-
a 9. Undecimi. *HC; a erunt quoque ipsa iuncta ND, MB, parallela: Sunt autem* [illegible]
b 33. primi. *æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant.* b *Igitur iuncta NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iuncta NO, CE, cùm connectant* [illegible] *NC, OE, æquales ac parallelas, quæ utraque lateri DI, sit parallela.* c *Circulus igitur LMNOP, circulo AECD Equidistans parallelus est, cùm ille ducatur per rectas NM, NO, hic verò per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ. Non secus ostendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.*

c 15. Undecimi.



RVRSVS quoniam iuncta recta EF, OV, cùm ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVKPO, æquales sint, d *parallela sunt; nec non & inter se æquales, quòd anguli æquales in pentagonis æqualibus subtendant,* e *erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in eodem plano est,* f *cùm EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis FO, FV. Est autem & in circulo,* g *propterea quòd planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus, cùm in eo quadrilatero opposita latera* [illegible] *sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac prosectò cùm omnia latera æqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, rectæ iunctæ FG, quòd æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata simul eorundem partium 3. Quibus* h *cum æquale sit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter sphæræ est (Nam cùm æquales sint iunctæ FG, ON, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphæræ) erit quoque quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ FG, hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit.* i *Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni;* k *atque adeò vt diameter sphæræ ad rectam FG, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt au-*

d 9. Undecimi.
e 33 primi.
f 7. Undecimi.
g 1. 1. Theod.
h 47. primi.
i 12. tertiidec.
k 22 sexti.

tem re-

rem rectæ FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod FG, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appositа formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoque vt diameter sphæræ ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta FG, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABGDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE; erit quoque vt latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proximè demonstratum est. Igitur ex æquo erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoque vt diameter sphæræ ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram AS, à nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli solidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & trian-

& triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo A B C D E, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

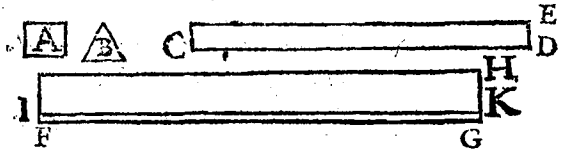
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonstrauimus, facile iam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in eandemque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertiò cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora construxisse, cùm post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper à minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quàm octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum sit lateris quadrati A, & latus D E, lateri eiusdem quadrati æquale: Erit-



que rectangulum C E octuplum quadrati A, a cum sit, vt C D, ad latus quadrati A, sic rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum sit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius basem demissa, hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi G H, hoc est, altitudini trianguli B, b vigecuplum est trianguli B; Ei autem quod angulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. rectangulum F H, quippe cum basis F G, dimidium sit basis illius trianguli, quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est, rectangulum F H, maius esse rectangulo C E. c Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus D E, potentia sesquitertium est eius

a 1. sext.

b 1. sext.

c 12. quarti decimi.

perpendicularis, hoc est, lateris G H: Latus autem F G, ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quòd F G, sit 10. & C D, 8. hoc est, F G, 5. & C D, 4. Erit maior proportio F G, ad C D, quàm D E, ad G H. Est enim maior proportio 25. ad 16. superparticularis sextasdecimas, quàm 4. ad 3. sesquitertia, quòd maior sit fractio $\frac{9}{16}$. a quàm $\frac{1}{3}$. a Fiat & ut F G, ad C D, ita D E, ad H K, eritque maior quoq; proportio D E, ad H k, quàm ad G H; b ac proinde maior erit G H, quàm H K. Ducta ergo K I, ipsi F G, parallela, erit & I K, ipsi F G, aequalis ad C D, ita D E, ad H K. c Igitur erit I H, rectangulum rectangulo C E, aequale: ideoque E H, maius, quàm C E. Quod est propositum.

a 12. sexti.
b 10. quinti.
c 14. & 16. sexti.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

d QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæra descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti aequalia sunt: Duo verò eadem quadrata aequalia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæra descripta, quòd quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæra aequalia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæra. Quod est propositum.

d 20. quartidecimi.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basin Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basin octaedri, & cubi ducta.

NAM e quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit & vnum triangulum octaedri maius quoque & no trianguli Icosaedri. Quare si vtrumque solidum ita intra sphæram constituatur, vt triangulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quàm triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæra attingat: Ac proinde perpendicularis è centro sphæra ad basin Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basin Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri aequalis sit perpendiculari cubi; f quòd basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoq; aequaliter à centro distent; erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.

e 18. tertiidec.

f 21. quartidecimi.

SI

IV.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæræ semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multò maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cùm viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulò antè demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATUM quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, a *vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum*: b *est autem latus cubi latere Icosaedri maius*; *maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.*

a 11. quarti decimi.
b 18. tertiidec.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basin cubi demissa, vt in 3 theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est. Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri continuo maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basin cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cùm ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum

dum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum, quàm cubus. Quod est propositum.

III.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, a vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæra maius (Namb cùm latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multò maius semidiametro sphæræ) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.

a 27. quarti decimi.
b 18. ter tiidec.

IV.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis octaedri minor est basi Tetraedri, c quòd basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basin octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quàm suprà theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior, d cùm illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basin Octaedri cadente, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basin Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cùm ex scholio propos. 20. lib. 12. illud solidum octaedro sit æquale, hoc verò Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

c 14. quarti decimi.
d 14. quarti decimi.

ALITER. Quoniam est, e vt latus Octaedri ad latus tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cùm ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri (Nam f quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multò minorem tripla; g ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

e 22. quarti decimi.
f 18. ter tiidec.
g 10. quinti.

ALITER. h Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt re-

h 17. quarti decimi.

& rectangulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quòd eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod erat propositum.

a 32. quarti-decimi. ALITER. a Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor quàm triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quàm triplum semidiametri sphæræ, quòd & tota diameter, quæ cubi latus maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam) Erit Octaedrum maius, quàm Tetraedrum. Quod est propositum.

b 27. quarti-decimi. EODEM prorsus ordine se mutuò superant conuexæ superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa, maior est conuexa superficie Tetraedri.

c 9. quarti-decimi. QVONIAM enim c est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, d vt suprà demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

d 18. ter tiidec. SVPERFICIEM verò Icosaedri minorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulò ante theoremate 4. ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

e 27. quarti-decimi. DEINDE e quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri maior.

f 14. quarti-decimi. DENIQVE f quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.

VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quò maius fuerit corpus, eò maiorem quidem habeat etiam superficiem, sed minus latus. Nam g vt suprà demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius verò superficies atque soliditas, vt demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius verò conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra de-

g 18. ter tiidec.

scripta

scripta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuò superant, a ut suprà ostensum est, *ita contrario ordine eorundem superficies conuexæ, atque soliditates se mutuò superant,* ut *hoc loco demonstrauimus.* a 18. tertiidec.

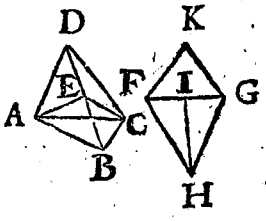
CÆTERVM prætereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinque corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphæra constructa, longè aliter se habere, quàm à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita ut *Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.*

INVENTIO ANGVLI INCLINAtionis duarum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppositis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cùm perpendiculares sint ad B D, communem sectionem planorum A B D, C B D, in quibus existunt (*b* Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis A E C, basium A B D, C B D, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur F G H: triangulum æquilaterum super rectam F G, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco trianguli cuicunque pyramidis propositæ, ipsi æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, constituatur super F G, triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc est, vtrique perpendiculari A E, C E, cùm perpendiculares H I, A E, C E, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem esse anguli inclinationis A E C, basium A B D, C B D. Cùm enim latera K F, k G, æqualia sint lateribus E A, E C; & basis F G, basi A C: æquales erunt anguli F k G, A E C. Dico insuper angulum inclinationis A C E, acutum esse. *d* Cùm enim latus A D, vel illi



b 8. primi.

c 8. primi.

d 12. quarti.

æquale

æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE: ideoque eorundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cùm in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

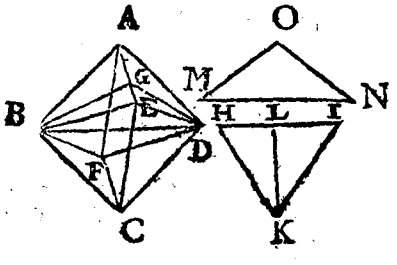
COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & latera pyramidis eorundem ſubtendentia ſint æqualia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, communem, bifariam q; ſectum in G, rectæ ducantur BG, DG, quæ cùm perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtunt *a* (quod in triangulis BGE, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIk, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta kL, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti, triangulũ OMN, habens vtrumq; latus MO, NO, perpendiculari kL, æquale, hoc eſt, vtriq, perpendiculari BG, DG, cùm perpendiculares kL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cùm enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GD, & baſis MN, baſi BD; *b* Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico propterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum. Cùm



a 6. primi.

b 8. primi.

a Cùm enim diameter octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB: b latus verò AB, potentia sesquitertium rectæ BG; qualiũ partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemq; 3. quadratum rectæ BG; ideoque ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterũ GB, GD; Ac propterea angulus GBD, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

a 14. tertiidec.
b 12. quartidecimi.

COROLLARIVM.

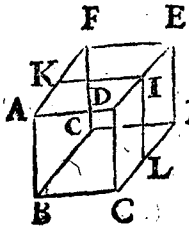
HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cùm enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; c omnes inter se æquales erunt, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales.

c 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, nec non & latera illi opposita in quadratis AE, EC, cõmune latus illud DE, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur Ik, IL; d quæ cùm æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH (quòd & kF, IE, inter se, necnon & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoq; e angulos rectos ad latus DE, efficiant, continebunt kIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam verò rectæ Ik, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, f angulum kIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modò demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



d 33. primi.
e 29. primi.
f 10. undecimi.

COROLLARIVM.

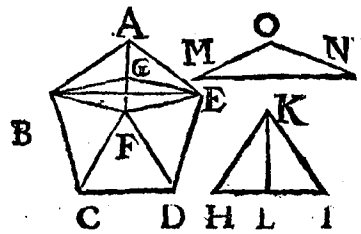
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicuè concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, vna ex 12. pyramidibus Icosae-

dri, cuius basis pentagonum A B C D E, ex quinq; Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diuiso itaque latere A F, bifariam in G, ducantur ex triangulorum A B F, A E F, latus A F, commune habentium, angulis B, & E, lateri A F, oppositis rectæ B G, E G, quæ cùm ex demonstratis in probl. 2. huius scholij, perpendiculares sint ad A F, communem sectionem planorum A B F, A E F, in quibus ducuntur, comprehendent



B G E, angulum inclinationis basium A B F, A E F. per 6. defin. lib. 11. Huiusmodi tur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum H I k, super rectam H I, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet A B F, æquale, in quo ducta recta k L, ad H I, perpendiculari, constituatur super recta M N, quæ rectæ B E, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum O M N, habens vtrumq; latus M O, N O, perpendiculari K L; æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari B G, E G, cùm perpendiculares k L, B G, E G, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum M O N, angulo B G E, inclinationis basium A B F, A E F, æqualem esse. Cùm enim latera O M, O N, æqualia sint lateribus G B, G E, & basis M N, basi B E; *a* Æquales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc etiam angulum inclinationis B G E, esse obtusum. Cùm enim B G, angulum rectũ faciat *b* erit recta A B, maior quàm recta B G; ad eundemq; modũ A E, maior erit quàm E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoque erunt rectis O M, O N, cùm hæ rectis G B, G E, positæ sint æquales. Si itaq; recta B E, super rectam sibi æqualem M N, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum M O N, ita vt rectæ A B, A E, rectas O M, O N, prorsus includant. *c* Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At hic obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales; per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintam. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multò igitur magis obtusus erit angulus M O N, hoc est, sibi æqualis B G E.

a 8. primi.

b 19. primi.

c 21. primi.

COROLLARIVM.

NON obscurè quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cùm singuli anguli inclinationis contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, F G, subtendanturq; à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est B E: *d* omnes inter se erunt æquales, quòd & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & rectæ: illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, *e* æquales erunt.

d 8. primi.

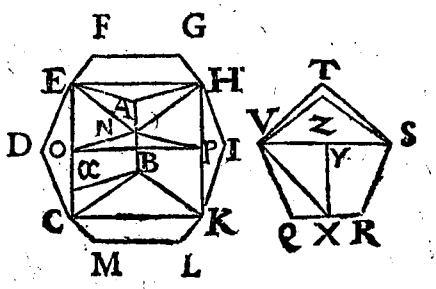
e 4. primi.

ANGV-

V.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15 quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnũ latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B k L M C, ad latus A B, conuenientia, duo quidem A B C D E, A H I k B, secundũ idem latus commune A B; alia autem duo A E F G H, B C M L k, secundũ angulos E A H, C B k.



His porrò pentagonis inscriptum sit quadratum cubi E C-K H, cuius quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorũ D, B, I, A. Diuiso autem latere A B, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum A B C D E, A B K I H, ad A B, perpendiculares N O, N P, secantes latera E C, H K, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cùm rectæ E C, H K, ipsi A B, sint parallelæ, ex scholio propos. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur N O, N P, angulum O N P, inclinationis basiũ A B C D E, A B k I H. Cui æqualem in quouis plano hac arte construemus. Super rectam Q R, lateri Dodecaedri A B, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum Q R S T V, hoc est, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi A B C D E, æquale, cuius angulo T, recta subtendatur V S, æqualis existens rectæ E C, cùm & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia sint, angulosq; contineant æquales. Diuisa deinde recta Q R, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; propterea q; perpendicularis ad V S, cùm V S, sit parallela ipsi Q R, ex schol. propos. 8. lib. 13. Ac postremò super recta V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumq; latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem esse angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cum latera E A, A N, æqualia sint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, angulosq; comprehendant æquales; *b* Aequales erũt & bases N E, N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoque & residui ex rectis; anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erunt. Quoniam igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales sunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec non & angulis V X Y, V Y X, trianguli V X Y (sunt enim E O N, H P N, V Y X, ostensi recti) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonstratum; *c* Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis late-

ã 4. primi.

b 4. primi.

c 26. primi.

lateribus P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S, æ-
quales existentes ipsi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam ve-
rò, quia O E, P H, æquales sunt, ac parallelæ; a erit quoq; recta
a 33. primi. coniuncta O P, æqualis & parallela ipsi E H, ideoq; æqualis ipsi
E C, hoc est, rectæ V S. Quam ob rem, cum latera Z V, Z S, latera
b 8. primi. bus N O, N P, æqualia sint; basis item V S, basi O P; b æqualis erit
angulus V Z S, angulo inclinationis O N P. Dico etiam angulum
hunc O N P, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta B α,
ipsi N O, parallela; cum sit quoq; N B, ipsi O α, parallela, ex schol.
c 34. primi. propos. 8. lib. 13 Parallelogrammum erit N O α B, c ideoque recta
B α, ipsi N O, æqualis. Quia verò B C, latus pentagoni oppositum
d 29. primi. angulo C α B, qui rectus est (d æqualis nimirum interno C O N
maius est latere B α, hoc est, recta N O, vel vtraq; Z V, Z S, quæ ipsi
N O, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ T V, T S, maiores
duabus rectis Z V, Z S. Cadit igitur punctũ Z, intra triangulũ T V S,
ita vt rectæ T V, T S, rectas Z V, Z S, includant omnino; Atque
proinde angulus V Z S, ideoque illi æqualis O N P, maior est an-
gulo pentagoni T: Hic verò, cum sit pentagoni angulus, paulò
antè, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demon-
stratus est maior recto. Multò igitur maior recto erit angulus
inclinationis O N P, ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æ-
quales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineun-
tur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo
latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt N O, N P, subten-
dantur; à rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certè, quæ
rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi
est recta O F, lateri cubi inscripti E H, quod angulum pentagoni E A H,
subtendit, æqualis: e Erunt omnes inter se æquales, cùm & omnes illæ
e 8. primi. perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint: necnon & rectæ illæ
omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam
sint æquales.

Elementi decimisexti Finis.