Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRAtionibus, accuratiq; scholiis illustrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate Iesv.

FRANCOFVRTI
Ex officina typographica Nicolai Hoffmanni, sumptibus
IONÆ RHODII.

M. DC VII.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES:

I.

Vnitas est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HActenus egit Euclides de prieri Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet, explicandas; harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt absq; ea solidorum tractatio imperfecta sit, neque suu numeru absolut:. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in apus conferatur, atq; vsum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non raro pleraq; laterum sunt ida linea, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur. Veli si nan sunt Irrationales, longitudine certe inter se sunt incõmensurabiles ita q; adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundẽ linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeru est implicata, & coniuncta, vt absq; his nullo modo cognoscãtur, oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrina suus ordo, ratio q; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequẽtibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac planius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principijs, definit initio vnitatem, docetq; eam esse, secundum quam vnamquodq; eorũ, quæ sunt,

vnum esse dicitur. Nam secundum vnitatem vnum lapidem, vnū animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Caterum vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

Cum numerus sit multitudo quadam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates quarum qualibet, octaua pars dicitur octonarij. Sic quoq; numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est. &c.

Ex his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos vna eademq; mensura, nimirum vnitas vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurima earum mensuram communē non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

Pars est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

Non est dissimilis hac definitio illi, qua Euclides li^l. 5. partem quantitatis continuæ exposuit Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definitum hac solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorū 12. 18 24. 30. 60. 60. &c. quia ille singulos hos metitur Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cū illū singuli hi metiantur, vt perspicuū est.

Omnis autem pars ab eo numero nomen sibi sumit per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42 & in reliquis, eodem modo.

IV.

Partes autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non: partem sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cū hoc numero 18. Quamuis enim, cum non metiatur, nisi per suas vnitates pars ipsius dici non debeat; atque tamē congruenter partes poterit appellari, quod quinq; contineat vnitates,

tes, quarum qualibet decima octaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimas octauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantã, vt volunt nonulli; alioquin superuacanea esset haec definitio quarta, quae partem aliquantam comprehendit.

Caeterum partes quacunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eã, cuius illae partes appellatur: Ita vt si communu deorum numererũ mensura metiatur minorẽ per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintae, Tales partes sunt 6 huius numeri 10. Nam communis eorum mẽsura 2. metitur 6. per 3. & 10. pars. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

Quod si roges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiã illum, qui partes non autem idipsũ quinto lib in magnitudinibus praestiterit; Nec enim magnitudinem illam minorem, quae maiorem non metitur partes appellauit; sed tuntum eam, quae maiorem metitur, partem. Respondemus. huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidẽ, cũ ipsũ metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus lõge aliter se res habet. Non enim propositis duabus magnitudinib. inaqualibus necessario minor aut pars aut partes est maioris, cũ ea persaepe sint incommẽsurabiles, vt aperte liber decimus demonstrabit, atq; adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nã solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illũ non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem & partes explicauit.

V.

Multiplex vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

Quemadmodum ille solum numerus minor, maioris pars dicitur qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur. adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est &c. Si vero maiorem minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris

non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur: Nam si metietur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4.10.40.100.1000. tales vocantur, quoniã diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2.5.20 50.500.

VII.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur. vel qui vnitate differt à pari.

Omnes hi numeri 5.11.15.37.101.1001, impares nominantur quia bifariam diuidi nequeunt Vel certe quia vnitate differunt ab his paribus 4.10.14.36 100.1000. vel etiam ab his 6 12.16.38.102.1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatẽ in numeris prorsus esse indiuiduam Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeo bifariã diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars esset quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

Quia numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltẽ binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur, et numerũ parem pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8 per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Quod si numerum parem metiatur numerus par per imparẽ numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15 Sic quoq; par numerus 6 metitur eundem per numerum imparem 5 &c.

Caterum si recte dua proxima definitiones expendantur perspicuum erit fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerũ imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum.

surdum vt excluderẽt numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares & pariter impares videtur esse, addiderunt vtriq; definitioni particulam, tantũ, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerũ parem tantũ, Pariter aũt impar, quam par numerus metitur per numerum imparem tantum. Itan. sit vt propositus numerus par 24, neq; pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiã par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum vt dictum est, par 8 per imparem 3, verum etiã par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodãmodo naturã vtriusq; vt constat. Itaq; tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar: pariter par & pariter impar, qui à quibusdã, pariter par & impariter appellabitur. Veruntamen hæc omnia vera quidẽ sunt. & ex sententia Pythagoreorum Nicomachi Boetij, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionib̃ traditis, in quibus nõre, eritur dictio i, la. tantum, quam illis apponunt & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeste omnem numerum parem, quam aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum deniq;, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonstratq; omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum, Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14 18 22. &c. Numeros deniq; qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24 28 48. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demõstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosq; similes, vere esse secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem diuidi recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt hic numerus 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. cum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

Quod si numerum quempiã nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita neq; pariter par, neq; pariter impar, neq; impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; qualas sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

Sicut numerus ille, quem sola vnitas metitur; Primus metitur: ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri quos prater vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli eorum habeant numeros, qui eos prater vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8 sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur. quamuis enim priorem metiantur bi numeri 3. & 5 posteriorem vero isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrumq; metitur. sed sola vnitas vtriusq; est cõmunis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 9. 11. primi inter se dicentur, quod prater vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram cõmunem, quamquã postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denq; vnitas, & quinus numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: qui sola vnitate, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

Numerum, quem prater vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum horum numerorum 3. 5 metitur Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, prater binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIV.

Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

Duo numeri, vel plures, quos prater vnitatẽ, aliquis alius numerus, tanquã mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit cõpositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem prater vnitatẽ, numerus quispiam metitur, cõpositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3, tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se cõpositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur; licet per se sumptus, Primus vocetur.

NVME-

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

Vt numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8 multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumserimus, toties scil. quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimus eundem numerū 48. Eadem deniq; ratione hi numeri 100. 1000. 10. &c. dicētur multiplicare numerum 456. cūq; hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. & 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.

Sequitur ex hu, productum ex multiplicatione numerū eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantiū habet ad vnitatem. Cum n. ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicatium vnitatem cōtinet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrū multiplicatium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaq; Multiplicatio siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

Multiplicatio numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

Sic vides ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8 vt 6. ad 1.

Huic definitioni addenda est hac alia docens quid sit numerum diuidere numerum: quippe qua necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in iis, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

Numerus numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

Vt numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit nu-

rit numerus 8. qui octo ſuis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis vnitatibus indicat diuidentem numerum 8. in diuiſo 48 contineri ſexies.

Hinc fit numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis vnitatibus indicare debeat, quot ens diuidens numerus in diuiſo continetur, cõtinebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continere: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad vnitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque diuiſio vnius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

Diuiſio numeri per numerum, eſt inuentio numeri qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuiſus ad diuidentem,

Ita vides ex diuiſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1. vt 48 ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48, per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

Ex his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniã enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, vt C, ad vnitatem D. Ex definitione autem diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B vt C, ad vnitatem D. perſpicuum eſt, numerum ex C in B, genitum eſſe numerum A, cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1.

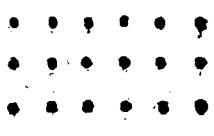
Hæc omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris eũ fractis. Id eſt, Numerus fractus numerũ fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſiue fracti adhæreant integris, ſiue nõ) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis. Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiſo cõtinetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoq; numerus, qui ad alterutrũ multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus multiplicare dicitur numerum 10. quando numer. 10. toties fuerit com-

fit compositus, quod sunt in ¼. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10 Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in ½ sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, qua est 10 Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerū ½. si ½. sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10 Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad ½. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt ½ ad 1. Sic etiam ½. & ⅓. se mutuo multiplicare dicentur quando ½ sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum ⅓ tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando ⅓ sumptus fuerit per sui semissem, quia & ½. semissem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur ⅙. qui numerus tertia pars est numeri ½. siue ⅔. & semissis numeri ⅓ siue ⅓. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusque ad finem lib. 9.

Rursus numerus ½ diuidere dicetur numerum 10 cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum ½. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem ½. Sic quoq; ⅔. diuidere dicetur ⅙ quando sumptus fuerit numerus ⅓ indicans diuidentem numerum ½. non totum eōtineri in diuiso ⅙. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus ½. idem sit qui ⅔ liquido constat tertiam huius partē, nimirum ⅓. contineri in ⅙. Cæterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis tradidimus in Arithmetica & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia hac, quæ de multiplicatione, diuisioneque fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

Cum autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur, Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorū numerorum planus appellatur, quia secūdū suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulū refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum continent, non secus, ac recta linea angulum rectum ambiētes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorũ 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6 quia eius unitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigũt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius unum latus ſex unitates, alterũ vero 4, complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

Caterum cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras, Euclides ſolum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorũ diſputat, quod omnibus parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, ſimiles ſint & æquales, ſiue ambitum, ſiue aream, capacitatemve ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulis Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum ſpectat: tamẽ ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, Arithmeticam Iordani perlegerit.

Poteſt autem vnus, demque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8 nec non 2. & 12. quia tã ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus, ita quoq; numerus planus 100 latera habet 5 & 20: 4. & 25: 2. & 50: 9 & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

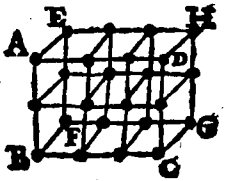
Quia vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quod quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt altero unitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planũ numerum eſſe compoſitum. Quod etiam de numero ſolido, qui iam iam definietur, dici poteſt. Verum eſt, unitatem, aliquãdo diſpoſſe numerum planũ, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ unitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam unitatem producunt.

XVII.

Cum vero tres numeri mutuo ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſeſe multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24 Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6 & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8 & ex 8. in 3 efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4 producitur numerus 12, & ex 12 in 2. generatur 24. appellabi-

pellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2.3.4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latũ atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimẽsiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidẽ longitudinem, alius verò latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8, basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24 altitudinem habens trium vnitatum. Et si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatũ, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerũ 24. in altitudine habẽs 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro basi, quæ bus sumpta faciet numerũ eundẽ solidum 24 cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit BGGF, octo vnitatũ, cuius longitudo BC, quatuor vnitates, & BF, latitudo duas complectitur; superponentur eĩ duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus cõtinent 24. vnitates, eiusque altitudo BA, vnitates tres. Similiter si basis sit ABFE, sex vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fictq; totus solidus numerus rursum 24. altitudinem BC, habens quatuor vnitatum. Si denique basis sit ABCD, 12. vnitatum, cuius lõgitudo EC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis EFGH, constabitque totus numerus solidus 24. vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.



Denique & vnitas interdum solidus appellabitur numerus, et si non proprie, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

Definit autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob eam sam in præcedenti definitione: quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

Planus

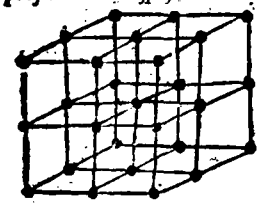
Planum illum numerũ, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longũ & latum dispositus, refert parallelogrammum rectangulum cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nã si eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habẽs quinque vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

Alteruter autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter, Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

Solidum quoque illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo & altitudo, siue profunditas, æquales sint. Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorũ inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. siue ex eorũ multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27 Omnes enim illius vnitates in formam solidam redacta referunt perfectum cubũ Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



Quilibet vero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi,

cundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eędem partes: Vel certe, cum primus secundum & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel eaſdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inaqualitatis (huiuſmodi ſunt omnes numeri inaquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe cum primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem vel eaſdem partes. Definitio etenim vulgata Euclidu, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehedit cum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionib. reliquis minoris inaqualitatis. Nam in porportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecũdi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplicivero, cum primus ſecundi & tertius quarti eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inaqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidu. At vero ex ea nequaquã deprehẽdere poſſumus, quinã numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecũdi, & tertius quarti, neq; æque multiplex eſt, neq; eadem pars, neq; eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eadem inſuper illius partem, eaſdem ve partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus in defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones, rationales copioſe explicuimus. Itaq; hi numeri 12. 4. 9. 3 proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit. nimirum triplus item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videl. tres partes quarta. Deniq; & 7. 6. 14 12. & 7. 4 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24 10. ſunt numeri proportionales Nam in primo exẽplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem videl. ſextam: In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas. In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem videl. quintam, continet. In vltimo deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, bis & preterea eaſdem partes cõplectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

Quotieſ-

Quotiescunq; igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus conferãtur, quod primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, cõtinent aqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex cõcedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referãtur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et è contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ip, os eandem habere proportionem.

Definit autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaqualitatu habent. Nam si de proportione aqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

Ex hac autem definitione aperte colligitur, aquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et cõtra eundem ad aquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eãdem habet proportionem, aquales esse. Cum n. aquales numeri sint eiusdem, vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem aqualiter continent, eandemq; insuper illius partem, vel partes: Itẽ cum idem numerus aqualium sit vel aque multiplex, vel eadẽ pars, vel eadem partes: Vel certe illos aqualiter contineat, eandemq; insuper eorum partem, vel partes, perspicuum est, aquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

Rursus quia numeri ad eandem habentes eandem proportionem, sunt illius vel aque multiplices, vel eadẽ pars, vel eadem partes: Vel certe illum aqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemq; insuper illorum partem vel partes, secundum hanc eandem definitionem, manifestum est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, aquales esse.

Pari ratione infertur, maiorũ numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionẽ, maiorem esse: Ad

quem

quem autem idem habet maiorem proportionẽ, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

Hæc definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{1}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$. & posteriores quoq; ad eandem denominationẽ, vt ad $\frac{2}{4}\ \frac{1}{4}$ Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationẽ reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}.4\frac{8}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur $\frac{19}{8}.\frac{38}{8}$ & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$ atque ita de cæteris.

XXI.

Similes plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quilibet duo illius latera quibuscunq; duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus porportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & sex similes sunt, quoniam illius latera 6.4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis hu eisdem non sint proportionalia alia illius latera nempe 8.3. vel 12.2

Eodem modo vt duo numeri solidi similes sint non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus huius 4.3.2. sunt proportionalia, licet hi eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 10.4.3.

Itaq; possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24.6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperiuntur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192.24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3.4.16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

Hac porro similitudo planorum, & solidorum reperitur quoq; in factis numeris, siue in integris cum factis. Nam si sumantur quatuor numeri nō integri proportionales, & tam duo priores, quā duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunq;, quia fieri potest, vt inter duos integros numeros gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$ 6 & alia duo $1\frac{1}{2}$ 12 quæ eandem proportionem habent nonuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

XXII.

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

Numerus ille, cui omnes sua partes simul sumpta (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius l. b.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa cōstituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres hos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9

Quod si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

Luce autem clarius ex hoc loco colligitur, partē ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partib. sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici posset, siue eū metiatur, siue non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propositis adiungēda mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnulla alia, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12 per 3. quia multiplicatus per 3 producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metitur per 4, cum ex multiplicatione 4 in 3. numerum 12. produ-

producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4 metiatur 12 per 3, faciet 4 ipsum 12 toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3 multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idē numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

Hac quoq; definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerū $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{14}$.

XXIV.

Proportio numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel partes, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

Qua cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cū primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes. Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, aqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. decimus.

XXV.

Termini siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi, nequeunt.

XXVI.

Cum tres numeri proportionales fuerint. Primus ad tertium, duplicatā rationem habere dicitur eius, quam habet ad secūdum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatā rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Hac definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, qua ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secũdi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita se habere, pluribus verbis antea demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

Possunt etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro tradita de alterna ratione inuersaque; de compositione, diuisione & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim huiusmodi argumentationes, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoq; hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

Postuletur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

Quolibet numero sumi posse maiorem.

Quamuis enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat, tamen augeri potest infinite per additionem cõtinuam vnitatis. Quare quilibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam pluritum additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONUNCIATA.

I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æque multiplex est, vel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV. Quo-

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum metitur.

Nam vnitas sumpta totiens, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsū metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per vnitatem.

Cum quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Numerus enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C per B, & B, eundem C per A. Cum enim ex defin 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A vnitates: perspicuum est B metiri ipsum C per A, & eadem ratione A, ipsum eundē C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16 huius lib.

A.... B....
C.....

VIII.

Si numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quę in metiente sunt vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

Vt quia numerus 6 metitur numerū 18 per 3 metietur & numerus 3. eundem numerum 18 per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6 metitur 18 per 3. fiet numerus 18, ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6 per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18 metietur per 6.

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

quem metitur, vel ab eo multiplicetur: illum quem metitur producet.

Metiatur enim numerus A, numerum C, *per* B. *Dico A, multiplicantem ipsum* B, *vel multiplicatum à* B, *producere ipsum* C.

A....B...
C.....

Nam numerus A, numerum C, *metiri dicitur per eum numerum quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum* C, *producit, per defin.* 23. *Cum ergo* A, *metiri ponatur ipsum* C, *per* B; *perspicuum est, numerum* A, *multiplicantem ipsum* B, *vel ab eo multiplicatum, producere ipsum* C.

X.

Numerus quotcunque numeros metiens compositum quoque ex ipsis metitur.

Metiatur numerus A *numeros* B C, C D. *Dico eundem* A, *metiri quoque ex ipsis compositum* B D. *Cum enim A, metiatur ipsos,* B C, C D; *erit tam* B C, *quam* C D *ipsius A, multiplex. Diuiso ergo* B C *in partes* B E, E C, *ipsi A, aquales & ipso* C D, *in partes* C F, F G, G D, *eidem* A, *aquales;*

A....
B....E....C....F....G....D

eris numerus B D, *compositus ex omnibus partibus* B E, E C, C F, F G, G D, *ipsi A, aqualibus, multiplex ipsius A, Quare A, ipsum* B D, *metitur. Quod est propositum.*

XI.

Numerus quemcunq; numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

Metiatur numerus A, numerum B, *& B, numerum* C D. *Dico eundem A, metiri quoque numerum* C D, *quem* B, *metitur. Cum enim* B, *metiatur ipsum* C D, *erit* C D, *ipsius* B, *multiplex. Diuiso ergo* C D, *in partes* C E, E D, *ipsi* B, *aquales, metietur A, ipsos numeros* C E, E D, *quandoquidem numerum* B, *tam numero* C E, *quam numero* E D, *aqualem metiri ponitur. Igitur idem* A, *per pron.* 10. *metietur quoque numerum* C D, *ex* C, E, E D, *compositum. Quod est propositum.*

A...
B.....
C.....E.....D

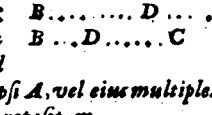
XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR *numerus A totum* B C, *& ablatum* B D. *Dico eundem A, metiri quoque reliquū* D C. *Cum enim A, metiatur &*

B C,

B C, & B D: erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex. aut certe B D, ipſi A, æqualis erit, Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales: erit reliquus numerus D C, vel vna pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.

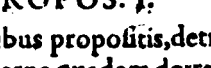


THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

Si duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

Sint duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt: & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem G B, quæ quidem præcedentem, numerum F, D metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars ſit ipſius A E, vel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) *a* metietur quoque H, ipſum A E: A: H metitur quoque totum A B, *b* Igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F *c* Igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, *d* metietur quoque reliquum E D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; *e* metietur etiam H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B. *f* Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.



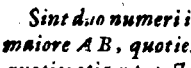
a II. *prop. num.*
b 12 *prop. num.*
c II. *prop. num.*
d 1. *prop. num.*
e II. *prop. num.*
f 1. *ax. num.*

SCHOLIVM.

Conuertemus cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur precedentem quoad assumpta fit vnitas.

Sint duo numeri inter se primi A, B, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest detrahatur, & reliquus EB, ex CE, quoties etiam potest, & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri precedentē, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus



a 11. pro nun. *GB precedentem FD. ex BF, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur, & FD ipsum EG, a metietur quoque GB,*
b 10 pro nun. *ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum metiatur b metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum*
c 11. pro nun. *CF. c Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsum FD, positus sit metiri: metietur J quoque ipsum CD, ex CF,*
d 10 pro nun. *FD, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. c Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac pr inde cum & ipsum EB,*
e 11 pro nun. *metiatur, vt ostensum est; & metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB, compositum Quare cum numerus GB, metiatur numeros*
f 10 pro nun. *AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus precedentē metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

Eodem modo & hoc verum est.

Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsq; non perueniet, sed ad numerum, qui precedentem detractū metiatur.

Nam si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, es-
g 1. sept. *sent propositi numeri inter se primi, g vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.*

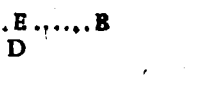
Ex hu facile dignoscemus an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi nec ne. Nam detractio semper minore de maiore. alterna quadā detractione; si nunquam reliquus precedentem me-
h 1. sep. *tiatur quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, h vt euclides demōstrauit, si vero reliquus aliquis numerus precedentē metiatur, ipsi erunt inter se compositi cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Exeo enim, quod reliquus numerus GB,*

merum GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorũ maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadem detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad vnitatem deueniretur, a numeri A, B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesin. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico FD, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrunque metiatur, ita ostendemus. Quia FD, metitur ipsum EB, & EB, ipsum CF; b metietur quoque FD, ipsum CF, atque adeo cum & seipsum metiatur, c metietur & totum CD, et CF, FD, compositum. At CD, ipsum AE, metitur, d Igitur & FD, eundem AE, metietur, Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipsum EB; e metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.



a 31. *sept.*

b 11 *pro nun.*

c 10 *pro nun.*

d 1. *pro nu.*

e 10. *pro nun.*

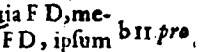
Quod autem FD, sit maxima mensura communis illorum ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam FD, Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipsum AE, f metietur quoque G, ipsum AE, g Igitur & residuum EB: At vero EB, metitur GF. h Metietur ergo & G, eundem CF. i Igitur & residuum FD; maior minorem. Quod est absurdum Non ergo maior numerus, quam FD, numerosA B, CD, metitur; Ac proinde F, D maxima est mensura numerorum AB, CD.

f 11 *pro nun.*

g 12 *pro nun.*

h 11. *pro nun.*

Quod si minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & seipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.



i 12. *pro nun.*

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, numerum metiẽtem duos numeros metiri quoq; maximam eorundem communem mensuram.

Hoc elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD: Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Ead. ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

Ex ijs quæ dicta sunt, facile cum quolibet numero proposito experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad prop. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Quæ si fuerint inter se primi, nonerunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem propter numeros A, & B, inter se primos.

A ..... B ..... C .....

Si vero A, & B, fuerint inter se cõpositi, sit eorum maxima mensura cõmunis inuẽta D, quæ si metiatur & numerũ C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos.

12. sep. A ..... B ..... C ..... D...

cum habeant numerum D, communem mensuram. Quod si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter se primi vel non. Si sint inter se primi non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita ut habeant numerum communem mensuram; metietur eiusmodi communis mensura numerũ D, maximam mensuram numerorum A, & B, per cor. 11. huius prop. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerũ C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesin. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi.

b 2. sep. A ..... B ..... C ..... D.... E..

b Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communis E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; c metietur quoque E, eosdem A, & B.

cu. pre. pun.

Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod erat propositum.

Simili arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quique, in qua-

quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. iij.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur tres numeri A, B, C, nō primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quæcunq; illorum mensura communis, per coroll. propos. 2 huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi *a* Sit eorum maxima mensura E. Dico E. esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipsos A, & B, *b* metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

a 2. *sept.*

b 4. *propo. huius.*

Quod autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis, Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem, quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

Hoc etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eadem q; in cæteris est ratio.

Pari

Pari ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se maxima eorum communis mensura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum, si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

iij.

THEOR. 2 PROPPS 4.

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

Sint duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primum A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A .....
B .....

Sint deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin 3. huius lib.

b 3. *defi.*

A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipsum B, & inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. *b* Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F; ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A, F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

a 2. *sep.*

A .. D .. E .. F
B .....
C ..

v.

THEOR. 3 PROPOS. 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterq; vtriusq; simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F, Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est vel A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo

A ..... D ....
B ..... G ..... C | E .... H .... F

tudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars est A, ipsius BC, quæ D, ipsius EF. Quia igitur A, & BG, æquales sunt; illis addantur æquales D, & EH; erũt A, & D, simul æquales ipsis BG, & EH, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis GC, & HF, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in BC, EF; aggregatum numerorũ A, & D, tot aggregatis partium numerorum BC, & EF, æqualis erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterq; A, & D, simul vtrunq; BC, & EF simul, quæ est A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Si numeri ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendũ.

SCHOLIVM.

Idem hoc verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibeatur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars est; ac proinde vterq; simul A, D, vtriusq; BC, EF, simul eadem pars ostendatur, qua A, ipsius BC: si enim BC, EF, dividantur in partes BG, GC; EH, HE ipsis A, D, æquales, &c

A, $\frac{2}{5}$ D, $\frac{3}{7}$
B, $\frac{2}{5}$ G, $\frac{2}{5}$ C, E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

Quod si quando contingat, numerum fractum dividi non posse in partes æquales propositas propterea quod numerator in eas partes secari nequeat multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per numerum partium. Proferabitur enim hac ratione alia fractio priori æquivalens, & cuius numerator in propositas partes dividi poterit. Vt si fractio $\frac{5}{9}$ secanda sit in duas partes æquales ducendus erit vterq; eius numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4 &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$ $\frac{15}{27}$ $\frac{20}{36}$ quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$ $\frac{5}{18}$. secunda in has tres. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$.

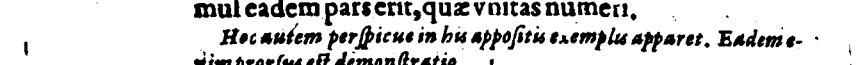
Rursus quando adsunt integri, reducentur & hi prius una cum fractione ad unam fractionem, deinde eodẽ modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $3\frac{3}{7}$ secandus sit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{24}{7}$. deinde vtrumq; eius numerũ per 3. multiplicabimus vt fiat fractio $\frac{72}{21}$ cuius tres partes æquales sunt $\frac{24}{21}$. $\frac{24}{21}$. $\frac{24}{21}$. Atque hac in sequentibus quoq; propositionibus observanda sunt quæ de fractionibus ac commodantur: Et semper nomine fractionum intelligẽdi quoq; sunt numeri integri cum fractis: Item quando æquales partes sunt, & alij integri.

Eodem modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas,

nitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicue in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

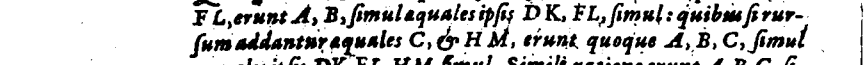


Possumus etiam hanc propositionem ad quotcunq; numeros transferre, hoc modo.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Sint numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorũ DE, FG, HI, simul eandẽ esse partem, quam est A, ipsius DE. Diuisis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tam numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM, erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis KE. LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatu partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum DE, FG, HI, simul quæ A, ipsius DE.

Idem sequitur, si loco trium numerorum A, B, C, sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.



Hæc etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunq; fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi a singuli numeri, tum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A,

A, 1.	B ½	C, ¼
D 1 K 1 E	F ½ L ½ G	H ¾ M ¾ I

Theoremati quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

Demonstratio eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D.

A	B ..... C ....
D	E ... F ..

Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est E, ipsius E, & C, ipsius F, erit è contrario D, ea pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ superà nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A B C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

Si numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æque multiplices; quam multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

Quòd si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas vel etiam loco plurium, vel omnium plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

A .. B .... C	A .. B .. C ..
D . E .. F ...	D . E . F .

THEOR. 4. PROPOS. 6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Dico vtrumque numerum A B, & D E, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Diuisis enim numeris A B, D E, in par-

A . . . G . . . B	D . . . H . . . E
C	F . . . . .

tes

tes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partiũ in numero D E; propterea quod eædem partes est numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri
a 5. sept. C, eadem est D H, numeri F; a erit vterque A G, D H simul eadem pars vtrius q; C, F, simul, quæ A G, ipsius C, vel D H, ipsius F. Eadẽ ratione erit vterq; G B, H E, simul eadem pars vtriusq; C, F, simul; quæ G B, ipsius C, vel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est A G, ipsius C; quot partes eædem est numerus A B, ipsius C, vel D E, ipsius F: Ae proinde eædem partes erit vterque numerus A B, D E, simul vtriusq; numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Eadem hæc propositio locum habet in numeris fractis, una cum demonstratione; vt hoc exemplum demonstrat.

A, $\frac{1}{3}$ G, $\frac{1}{3}$ B — D, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ E
C, $\frac{1}{7}$ — F, $\frac{6}{7}$

Sed & hanc positionem ad quotcunq; numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

Eadem enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus, in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.

A . . K . . B | C . . . L . . D | E . . . . M . . . . F
G . . , . . . | H . . . . . | I . . . . . .

THEOR. 5. PROPOS. 7.

ɑij.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

Sit numerus A B, eadem pars num. C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquum E B, eandem esse partem reliqui F D, quæ est totus A B, totius C D. Ponatur enim E B, numeri G C,

eadem

eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD.

A...E..B
G....C.....F....D

Quia igitur A E, eadem est pars ipsius C F, quæ E B, ipsius G C: a erit vterque A E, E B, simul eadem pars vtriusque simus C F, G C, quæ A E, ipsius C F, hoc est, quæ totus A B, totius C D; Ac propterea cum A B, eadem sit pars vtriusque numeri F G C D, erunt ipsi numeri F G, C D, inter se æquales. Dempto ergo communi C F, æquales remanebunt G C, F D, Eadem igitur pars erit E B, ipsius F D, quæ ipsius G C, hoc est, quæ totus A B, totius C D, Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

a 5. sep.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{2}$ E, $\frac{2}{5}$ B,
G, $\frac{4}{5}$ C, $\frac{6}{9}$ E, $\frac{4}{5}$ D

Locum etiam habet hæc propositio, vna cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

Idem hoc theorema verũ est tã in numeris integris, quam in fractis etiam si ablata sit vnitas A E, vel reliqua fuerit vnitas E B, vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A.E...B | A...E.B | A.E.B.
G.....C.F..... D | G..C.....F..D | G..C..F..D

Cæterum & ex his theorematis quinto lib. 5. similis hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

Quod quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D, æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita esse multiplicem, vt est totus A B, totius C D Cum enim A B, ipsius C D, sit æque multiplex, atque A E, ipsius C F. erit è contrario totus C D, totius A B, eadem pars, qua ablatus C F, ablati A E. b Quare & reliquum F D, reliqui E B.

A.....E....B
C...F..D

eadem pars erit, qua totus C D, totius A B, b 7. sep.
Ac proinde è contrario E B, ita multiplex erit ipsius F D, vt A B, ipsius C D, est multiplex.

Quod si ex C D, ablata fuerit vnitas C F, vel reliqua sit vnitas. F D. vel denique in integris & ablata sit vnitas C F, & alia reliqua F D, idem demonstrabitur. vt hæc exempla commonstrant.

A...E.....|A....E..B| A....E....B
C.F..D | C..F.D. | C.F.D

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati. Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

Sit numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E ablati C F, Dico reliquum E B, easdem esse partes reliqui F D, quæ totus A B, est totius C D,

A.....K.....E....B
C.....F.....
G.....L..I.....M..H

Sumpto enim numero G H, æquali ipsi A B, erit G H, eædem partes ipsius C D, quæ A B, eiusdem C D, hoc est, quæ A E, ipsius G F. Diuiso ergo G H, in partes G I, I H, numeri C D, & A E, in partes A K, K E, numeri C F, erit multitudo partium G I, I H, multitudini partium A K, K, E, æqualis, eademque pars tam G I, quam I H, ipsius C D, quæ tam A K, quam K E, ipsius C F cum ergo C D numerus maior sit numero C F, erit & tam G I, quam I H, pars ipsius C D, maior tam numero A K, quam K E, parte ipsius C F. Sumptis igitur numeris G L, I M, æqualibus ipsis A K, K E, erit G L, eadem pars ipsius C F, quæ A K, eiusdem C F, hoc est, quæ G I, ipsius C D; Ac proinde cum totus G L, totius C D, sit eadem pars,
a 7. sep. quæ ablatus G L, ablati C F, a erit & reliquus L I, reliqui F D, eadē pars, quæ totus G I, totius C D. Eodemq; argumento ostendemus M H, eandē esse partem ipsius F D, quæ est totus G I, vel I H, totius C D, Quoniam ergo tam G I, quam I H, eadem est pars ipsius C D, quæ est tam L I quam M H, ipsius F D; erit vterque G I. I H, simul eædem partes ipsius C D, quæ vterque L I, M H ipsius F D Est autem G H, eædem partes ipsius C D, quæ A B, eiusdem C D, propter æqualitatem numerorum A B, G H, Igitur & vterque L I, M H, simul eædem partes erit ipsius F D, quæ A B, ipsius C D. Quia vero si ab æqualibus A B, G H, æquales auferantur A K, K E, & G L, I M, reliqui E B, & L I M H, simul æquales sunt; Erit quoque E B, reliquus eædem partes reliqui F D, quæ A B, totus totius C D, nimirum eædem quæ vterque L I, M H, simul erat eiusdem F D. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

$A, \frac{2}{15}K, \frac{2}{15}E, \frac{6}{15}B$
$C, \frac{6}{15}F, \frac{6}{15}D$
$F, \frac{2}{15}L, \frac{3}{15}I, \frac{2}{15}M, \frac{3}{15}H$

In numeris fractis eadem hac propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

Non

Non demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia nõ constabit hic reliquum numerum E B, alicuius numeri eandem esse partes, quæ est numerus A E, numeri C F, ibi vero perspicuum erat reliquum E B, alicuius numeri eandẽ esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum &c donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti G C, vt A E, est submultiplex ipsius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9 ix.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, sintque A, B, C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Diuidatur enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia vero B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quam E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur; Erit B G, ipsius E H eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F, ac propterea & vterque B G, G C, simul, nimirum B C, secundus vtriusque E H, H F, simul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, & c. Quod demonstrandum erat.

A.... B....G....C D..... E.....H.....F

a 5. vel 6. sept.

SCHOLIVM.

In numeris fractis propositio hac, vna cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

Quod si loco primi numeri vnitas accipiatur, qua numeri alicuius pars sit, qua alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadẽ pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

$A, \frac{3}{11}$
$B, \frac{3}{11} G, \frac{3}{11} C$
$D, \frac{14}{22}$
$E, \frac{14}{22} H, \frac{14}{22} F$

A.
B. G C.
D.....
E.....H.....F

THEOR. 8. PROPOS. 10.

x. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D F, numeri F, sintque A, B, C, ipsis D E, F, minores, singuli singulis. De his enim etiam intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum A B, easdem partes esse, aut partem numeri D E, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . E
F . . . . . .

A G, G B, & D, H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipsius C, quæ tam D H, quam H E, ipsius F. a Vicissim ergo eadem pars erit aut partes A G, ipsius D H, & G, B, ipsius H E quæ C, ipsius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes A G, ipsius D H, quæ G B, ipsius H E. b Igitur & vterque A G, G B, simul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes vtriusque, D H, H E, simul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipsius D H-hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

a 9. sep.

b 5. vel 6. sep.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ G, $\frac{2}{15}$ B,
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ H, $\frac{3}{10}$ E
F, $\frac{9}{10}$

Numeris fractis conuenit etiam huius propos. demonstratio, vt in hoc exemplo apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

xij. Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum; Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

Sit vt totus numerus A, B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, esse, vt est totus A B, ad totum C D. Cum enim sit, vt A B, ad C D, ita A E, ad C F; erit A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel eaidem partes. Sit primum A B, ipsius C D, & A E, ipsius

A . . . . . E . . . . B
C . . . . . F . . . D

c 20 de fin.

ipsius C F, æque multiplex. Quo posito, erit è contrario C D, totus totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipsorum C D, C F. *a* Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea è contrario A B, ipsius C D, & E B, ipsius F D, æque multiplex erit, *b* Quare erit, vt totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

a 7. *sept.*

b 20 *def. fin.*

A...E..B
C..... F.... D

Sit deinde A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito *c* erit & reliquus E B, reliqui F D, eadem pars, vel partes, quæ totus A B, totius C D; *d* Ac proinde erit vt totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

A.... E.. B
C..... F... D

c 7. *vel* 8. *sept.*

d 20. *def. fin.*

Contineat tertio A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario C D, totus totius A B, eædem partes, quæ ablatus C F, ablati A E, vt mox demonstrabimus. *e* Reliquus igitur F D, reliqui E B, eædem quoque partes erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea è contrario A B, ipsum C D, & E B, ipsum F D, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. *f* Quare erit, vt totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

c 8. *sept.*

A..... E...B | A..... E ..... B
C... F.. D | C..... F .....D

f 8. *sept.*

Quod si A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F; perspicuum est reliquum E B, quoq; esse æqualem reliquo F D. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quę remanent, sunt æqualia. Itaq; si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....E...B
C.....F...D

SCHOLIVM.

Eodem modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationi respondent.

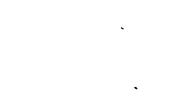
$A, \frac{6}{9}E, \frac{1}{90}B$
$C, \frac{1}{9}F \frac{2}{10}C$

$A, \frac{14}{21}E, \frac{28}{9}B$
$C, \frac{5}{21}F \frac{10}{29}D$

LEMMA.

Quod autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqua-

liter contineat, eademque insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE ipsum CF, aequaliter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, aequaliter, nimirum semel vel bis, vel ter, &c eandemque insuper partem GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel aequales ipsis CD, CF, vel eorum aeque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF ipsis GB, HE, aequales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, aequalis, quod GB, ipsius CD, sit eadem pars quae HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, EQ, QH, eisdem GB, HE, aequales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, aequalis. Cum enim AG, AH, vel aequales sint ipsis CD, CF, vel eorum aeque multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, aequalis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, aequalis: Atq; adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quae vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, aequalis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quae CF, ipsius AE.



Contineat deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, aequaliter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. eademque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel aequales ipsis CD, CF, vel eorum aeque multiplices

plicem. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD CF, erit multitudo partiũ ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, aequalis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, aequales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, aequalis propterea quod qualibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD quæ vna quaq; partium numeri HE est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, aequales, erit & multitudo partium numeri AG, aequalis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel aequales sint ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea quoq; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

A . . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . R . . S . . H . . K . . E
C . . N . . O . . F

Iam vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineãt æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudines æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Si sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunq; numeri proportionales A, B, C, D, E, F; hoc est vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico esse quoq; omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniã igitur, propter eandẽ proportionem,

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

a 20. *def.* a eadem pars est, aut partes, [illegible]us B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F, b erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia b 5. *vel* 6. *sept.* vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; c erunt c 5. *sept.* & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. d Quare eadem porportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, d 20. *def.* D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

Sint deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorũ B, D, F. Quo posito, erit è contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo vt prius, e erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. f Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem

A.... C.... E.....
B.... D.. F...

e 5. *sept.*

f 20. *def.*

semper demonstratio, vt hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A ... C ..... E	A ... C ... E .....
B. D.. F...	D. D. F..
	B. D. F.

Sint tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. a Quia igitur propter eandem proportionē, A, ipsum B, & C: ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemq; insuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C & F, ipsius E, eædem partes. Igitur vt prius, b erunt omnes B, D, F, simul omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ ipsius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, simul omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemq; insuper partem, vel partes. c Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B

a 20. def. fin.

A ..... C .... E .....
B ..... D ... F .....

b 6. sept.

c 20. def. fin.

Sint quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul: quibus si rursum addantur æquales, E, & F, fient & omnes A, C, E, simul, omnib. B, D, F, simul æquales; erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobiq; sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunq; numeri proportionales,, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

A .... C ... E .....
B .... D ... F ....

SCHOLIVM.

In numeris quoq; fractis propositio hac vera esse eodem modo conuincetur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

Si quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt. xi v.

Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadē pars vel partes. d Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: e ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A ... C ...
B .... D .....

d 9. vel 10. sept.

e 10. def. fin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam

quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars vel partes. *a* Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, vel partes: Atq; adeo è contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, vel certe per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemq; insuper partem, vel partes. *b* Quare erit vt A, ad C, ita B ad D.

a 9. vel 10. sept.

b 20 defin.

Sint tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C, quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemq; insuper partem vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certe per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. *c* Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit vel partes. *d* Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

c 9. vel 10. sept.

d 20. defin.

Sint quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo, è contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe per lemma propos. 11. huius lib eædem partes. *e* Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. *f* Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

e 9. vel 10. sept.

f 20. defin.

Sint quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt; *g* Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

g 20 defin.

Sint sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam G. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes; *h* erit vt A, ad C, ita B, ad D.

h 20. defin.

Sint septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores

iores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales. 4 Quoniam autem 20. definitur, ob eandem proportionem A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; sunt que A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca si quatuor numeri proportionales sint, vicissim & proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A ..... C .....
B ... D ...

SCHOLIVM.

Quod si pro numeris integros fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

Manifestum quoq; est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

Coacti vero sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosq; demonstrationibus certissimis confirmare, una cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionib. rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; non si maiorem numerū minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclide instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri minorem maioris, cum minor non metiatur maiorem. Quod etiam ex defin. 20 Solis luce clarius cōstat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis superuacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Sint

Sint quotcunque numeri *A*, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque vt *A*, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita *E*, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt *A*, ad *C*, ita D, ad F. Quoniam enim est, vt *A*, ad B, ita D, ad E;

a 13. sep.

A	D .....
B	E .....
C	F .....
G	H .....

a erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob causam, cum sit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit vicissim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt *A*, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraque proportio *A*, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni B, ad E, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, vt mox ostendetur.)

b 13. sep.

b Ac proinde vicissim, vt *A*, ad C, ita D, ad F.

Quod si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt fit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse vt *A*, ad G, ita D, ad H Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri *A*, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est, hanc propositionem eodem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

A .	D ...
B ..	F .....
C ...	F .....
G .	G ...

Idem verum est, si loco vnius numeri vnitas assumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perspicuum est.

LEMMA.

Quod autem dua proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem sunt inter se quoque eadem, quales sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C, ad F. quæ ad m ostensa sunt proportioni B, ad E. siue numeri sint integri siue fracti, ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, et it B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æque

A	B	C ...
D	E	F ...

æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quam C, ipsum F, continebit æqua- a 20 de
liter, eandemque insuper partem, vel partes, a Quare numeri A, fin.
D, C, F, proportionales sunt. vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod
est propositum.

Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xvj.

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

Metiatur vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiso enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF,

A.	D.
BG. HC	E. . I. . I. . F

in partes EI, IK, KF, ipsi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturque æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipsum EI, atque vnitas GH, ipsum IK, & vnitas HC, ipsum KF; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, simul numerorum EI, IK, KF, simul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Aq proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compositus numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compositum æque metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Illud idem, quod Euclides demonstrauit de numeris propos. 13. ostendit hoc loco seorsim de vnitate, & tribus numeris propterea quod vnitas nõ est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia vnitas A, numerum BC. æque metitur, atque numerus D, numerum EF, erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim vnitas A eadem pars numeri D, quæ numerus BC, nu-

B C numeri E F; ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

Hæc propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metitur vicissim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur a13.sep. *& secundus integer quartum fractum; a sed solũ eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quã secundus ad quartũ.*

THEOR. 14 PROPOS. 16

Si duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

E.

A... B....

D.....C.....

Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; b erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. c Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; d erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeo vnitas E, numerũ B, & numerus A numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Æque igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo sese multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

b 35. def.

c 15. sep.

d 15. def.

SCHOLIVM.

In numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadẽ defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoq; est D, ad A, quod E multiplicans A facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E.

A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{1}{7}$.

D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST *hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.*

Si duo

Si duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

Multiplicet enim A ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, & etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Id. mergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, æque metitur, atque vnitas E ipsum B.

E.
A ... B ....
C .....

a 15. def. fin.

Quod si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit; qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quã multiplicati.

Numerus enim A multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; *b* erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F. est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit,

F.
A ...
B .. C ....
D ..... E .....

b 15. def. fin.

c Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad *d*, & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

c 20. def. fin. d 13. sept.

SCHOLIVM.

Si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

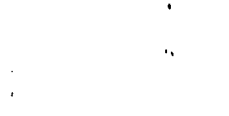
Theor.

xix. **THEOR. 16. PROPPS 18.**

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Generi ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; a fiet quoque idem D, ex C, in, A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; b erit, vt A, ad B, ita D, ad E.

a16. sep.



b17. se.

Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Liquido constat eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

Hanc autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunq; numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eajdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B, C, D, habent: hoc est, esse vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F, c erit vt B, ad C, ita E, ad F.

c17. sep.

Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt G, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

18. sep. xix.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

Sint

quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem
ta C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex
lo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se es-
nim rursus G, ex A, in C. Quia igi-
in C, D, fiunt G, E; a erit, vt C, ad A . . . a 17. sep.
st, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus B . .
A, & B, in C, fiunt G, & F; b erit quo- C . . . . . b 18. sep.
dem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per D . . .
propos. 14. habebit G, ad E, & F, ean- E . . . . . .
portionem; eam videl. quam habet F, ...
Ac proinde E, & F, numeri æquales G . . . . . .
iis, quæ ad defin. 20. scripsimus.

iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis
; producto ex C, secundo in C, tertium. Dico quatuor nu-
ros A, B, C, D. proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad
. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G,
; c erit, vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualé. Habet enim c 17. sep.
G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus.
Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; d erit quoque, vt A, d 18. sep.
ad B, ita idem G, ad eandem F. Quare proportiones A, ad B, & C,
per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si
quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat o-
stendendum.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis pro maxima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; genitiex ipsis æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quam in integris facile ex hac propos. 16 demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quam
ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus,
erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et ii,

quiex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.

Sit primum maior proportio primi A *ad* B, *secundum, quam* C, *tertij ad* D, *quartum. Dico numerum ex* A *in* D, *procreatum esse maiorem eo qui fit ex* B *in* C. *Nam sit intelligatur esse* E, *ad* B, *vt* C *ad* D; (*sive* E, *numerus integer sit sive fractus, sive integer cum fracto: qui quidē reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9. ostendemus, si numerus ex* B, *in* C, *procreatus dividatur per* D,) *erit quoq; maior proportio* A, *ad* B *quam* E, *ad* B, *ac proinde* A, *maior erit, quam* E. *Quare maior numerus fiet ex* A, *in* D, *quam ex* E, *in eundem* D: a *At qui fit ex* E, *in* D, *æqualis est ei, qui fit ex* B, *in* C. *Igitur & numerus ex* A, *in* D, *genitus, maior erit, quam numerus ex* B, *in* C, *procreatus. Quod est propositum.*

A..... E.....
B....
G.....
D.....

Fiat deinde maior numerus ex A, *in* D, *quam ex* B, *in* C. *Dico maiorem proportionem esse* A, *primi ad* B, *secundum quam* C, *tertij ad* D, *quartum. Si namq; intelligatur numerus* E, *ex quo in* D, *idem numerus fiat, qui ex* B, *in* C; (*sive* E, *numerus sit integer, sive fractus, aut integer cum fracto*) *fiet quoque maior numerus ex* A, *in* D, *quam ex* E, *in eundem* D: *ac proinde maior erit* A, *quam* E. *Quare maior erit proportio* A, *ad* B, *quam* E, *ad* B; b *At ita est* E, *ad* B, *vt* C, *ad* D. *Igitur maior erit quoque proportio* A, *ad* B, *quam* C *ad* D. *Quod est propositum.*

Quod si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero, minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim demonstratio erit, si modo vocem, maior, in vocem, minor. Vt in hoc apparet. Quæ tamen tacentur, adiungi potest. Quoniam maior est proportio A, *ad* B *quam* C, *ad* D: *hoc est, maior est proportio* C, *primi ad* D, *secundum, quam* A, *tertij ad* B, *quartum; maior fiet numerus ex* C, *primo, in* B *quartum, sive ex* B *in* C, *quam ex* D, *secundo in* A, *tertium, sive ex* A, *in* D, *vt demonstratum iam est: hoc est minor numerus fiet ex* A, *in* D, *quam ex* B, *in* C, *quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex* A, *in* D, *quam ex* B, *in* C; *hoc est, maior ex* B, *in* C, *sive ex* C, *in* B, *quam ex* A *in* D, *sive ex* D, *in* A: *erit maior proportio* C *primi ad* D, *secundum, quam* A, *tertij ad* B, *quartum, vt iam est demonstratum*

A..... E.....
B....
C....
D....

situm: hoc est, minor proportio erit A. ad B, quam C, ad D. Quod propositum.

THEOR. 18 PROPOS. 20 xxi

SI tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur.

Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita D, ad C, numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur.

A.....
B.....D.....
C....

Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, *a* erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur. a 19 sept.

Sed iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B. in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, *b* erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. b 16. sept.

SCHOLIVM.

Demonstratio hæc non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

Quod si maior fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium.

Item si minor fuerit proportio primi

A.....
B.....D.....
C.....

A....
B.....D.....
C.....

ad tertium: minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se. Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se; minor proportio erit primi ad secun-

dum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedētis propos. liquet. si secundo numero sumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundū quā tertii ad quartum, aut minor. &c vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. **THEOR. 19. PROPOS. 21.**

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri A B, C D minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æque metiri ipsos E, F, maiorem quidem A B, ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita E, ad F; *a* erit vicissim, vt A B, ad E, ita C D, ad F, Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E, F; *b* erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, vel partes.

a 13. *sep.*

b 20. *def.*

Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F, multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars, vel eadem partes. *c* Erit ergo, vt A G, ad E, ita C H, ad F; *d* & vicissim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium &c. Quod demonstrandum erat.

c 20. *def. fin.*

d 13. *sep.*

SCOLIVM.

EIDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continue proportionales primosque eosse in ea proportione minimos. Hoc enim posito ostenderetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundum tertium, vt in hoc appositio exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo aequalis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri continue proportionales, quorū duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas, datum

tas idem tamen demonſtratur in tribus, etiam ſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum: ex hac propoſitione quod antea negabat erat. Sed hoc planius fiet in propoſitione 1. lib. 9. Ratione autem & hoc verũ eſt. quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit proportio AB, ad

A...K...B C..L.D E....M....F

G..... H..... I. .....

CD, qua, CD, ad EF. ſiue non ita vt non poſſint reperiri alij numeri ipſis AB, CD, EF, minores quorum primus ad ſecundum ſit, vt AB, ad CD & ſecundus ad tertium vt CD, ad EF. &c. quamuis tres proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB ad CD. in numeris 4. ad 3. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD. quemadmodum & proportiones numerorum 16. 10. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſũ in minoribus numeris proportio quidem 16. ad 10 in 8, & 10. proportio vero 20. ad 25 in 4. & 5. vel in 12 & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G ad H. vt AB, ad CD, & H. ad I, vt CD. ad EF Dico AB ipſum C, & CD ipſum H, & EF, ipſum I, metiri aquè Cum enim ſit vt AB. ad CD, ita G. ad H. erit viciſſim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, eum ſit vt CD, ad EF, ita H, ad I, b erit quoque viciſſim, vt CD, ad H, ita EF, ad I, c Quare AB, ipſius G, & CD ipſius H. & EF, ipſius I, erit vna eadem pars vel eadem partes. Partes quid ſint nequaquam. Diuiſi enim, ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL D. EM, MF; partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipſius G. & CL. ipſius H, eadem pars. Erit ergo vt AK. ad G, ita CL, ad H c & viciſſim vt AK ad CL. ita G, ad H, v. l AB, ad CD, Eodemque modo erit, vt CL, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL

a 13. ſep.
b 13. ſep.
c 20. de fin.
d 20. de fin.
e 13. ſep.

EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF, Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I. aque metietur. Quod est propositum

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint

A.. B ..... C ... alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem
D..., E.....F..... habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, aque metiri. Nam per hanc propos. 21, A, B, cum sint minimi in proportione A, ad B, aq; metientur ipsos D, E, eademque ratione B, C, ipsos E, F, Q. ure cum A, ipsum D, & C, ipsum F, aque metiatur, ac B, ipsum E, metientur aque omnes A, B, C, ipsos D, E, F

CÆTERVM hac propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: propterea quod in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibuslibet datis, dari possunt alij minores, in infinitum Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorũ numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excipiendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi sed quo fcunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Alia autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, aque conueniunt & integris & fractis. quod satis est semel hoc loco monuisse.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

SI fuerint tres numeri; & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri, A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt

A ..... H ...
B ... D ...
C..... E.....
G..... F.

quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse, vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim

vt A, ad B, ita E, ad F; *a* erit numerus ex A, in F, genitus æ- a 19. 7.
qualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B,
ad C, ita D, ad E, *b* erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis b 19. 7.
numerus, qui fit ex C, in D. Atque ideo numerus genitus ex A, pri-
mo in F, quatum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium,
inuicem producto. *c* Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F. c 19. 7.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C,
ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim
iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; po-
natur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, B G, &
tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, eorumque
proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris osten-
sa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem o-
stendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor
numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si
fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini su-
mantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM vero Euclides ex illis sex modis argumentandi, in proportionibus vtimur, quos in magnitudinibus libro 5. explicauit & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, videlicet eum qui à permutata proportione sumitur propos. 13 & eum qui ex æqualitate dicitur propos. 14. Et vt huius lib. nō alienum nostro instituto esse erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendemus in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theoremata, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

Si quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

Sint tres, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, erit vicissim A ..... C ..
B, ... B ..
B, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, d 13 sep.
vt B, ad C, erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum. e 13. sep.

II.

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoq; diuisi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo esse vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; a *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde vt totus AB ad totum DE,* b *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* c *Vicissim ergo erit quoq; AC, ad CB, vt DF, ad FE, quod est propositum.*

a 13. sep.

A.....C...B
D....F..E

b 11. sep.

c 13. sep.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis cõuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis cõuersam esse quoq;, vt CB, ad AC, ita FE, ad DE. Cum enim sit, vt AE, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoq; diuidendo, vt AC, ad CB ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB ad AC, ita FE, ad DF Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE Dico per diuisionem rationis contrariam esse quoq;, vt AC ad CB, ita DF ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF Ergo diuidendo, vt CB ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoq; compositi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC ita DE, ad EF. Dico componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; d *erit vicissim, vt AB, ad DE, ita* e *BC, ad EF.* f *Ac proinde AB, BC, simul, ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF;* g *Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod erat propositum.*

d 2. sep.

e 2. sep.

f 13. sep.

A.....B...C
D....E..F

SIMILITER compositio rationis conuersa & contraria ostenditur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AE ad BC, ita DE, ad EF Dico per compositionem rationis conuersam esse quoq;, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoq;, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IV. SI

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoq; per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoq;, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, *ad* CB, *ita* DE, *ad* FE; a *erit vicissim, vt totus* AB, *ad totum* DE, *ita ablatus* CB, *ad ablatum* FE; b *Ac proinde, vt totus* AB, *ad totum* DE, *ita erit reliquus* AC, *ad reliquum* DF. c *Vicissim igitur vt* AB, *ad* AC, *ita* DE, *ad* DF. *quod erat propositum.*

a 13 *sep.*
b 11. *sep.*
c 13. *sep.*

A.....C...B
D.....F..E

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5, Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, *primus ad* C, *secundum, ita* DE, *tertius ad* F, *quartum; Item vt* BC, *quintus ad* C, *secundum, ita* EH, *sextus ad* F, *quartum. Dico ita esse* AG, *compositum ex primo & quinto ad* C, *secundum, vt est* DH, *compositum ex tertio & sexto, ad* F, *quartum. Cum enim sit, vt* BG, *ad ipsam* EH, *ad* F; *erit conuertendo vt* C, *ad* BG *ita ad* EH. *Quoniam igitur est, vt* AB, *ad* C, *ita* DE, *ad* F: *& vt* C, *ad* BG, *ita* F, *ad* EH; *ex aequalitate, vt* AB, *ad* BG, *ita* DE, *ad* EH. *Componendo igitur vt* AG, *ad* BG; *ita* DH, *ad* EH. *Itaq; cum rursus sit, vt* AG, *ad* BG, *ita* DH, *ad* EH, *& vt* BG, *ad* C, *ita* EH, *ad* F; *erit ex aequalitate, vt* AG, *ad* C, *ita* DH, *ad* F. *Quod est propositum.*

A.....B..G | D.....E...H
C..... | F.....

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 11. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

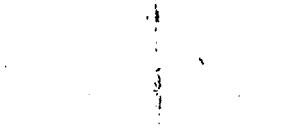
SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG; ita F ad HA. Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F & vt C, ad AG, ita F ad HA; erit ex aqualitate vt AB ad AG ita DE, ad DH. Conuertendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH: & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex aqualitate, vt GB, ad C, ita HE ad F. Quod est propositum.

Item & hoc demonstrabimus.

VII.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

Sit vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BG, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex aqualitate vt BC, ad CG ita EF, ad FH: & componendo vt BG, ad CG ita EH ad FH, & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH: & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex aqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.



Denique ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoq; illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunq; numeros proportiones habuerit, quas idem alius

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoq; idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunq; numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG ad K, & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum, erit quoque vt AC,

A .... B ..... C ..... D | F .. G ... H ... I
E ... ... | K ....,

primus cum quinto, ad E secundum, ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E secundum, ita HI, sextus ad K, quartum, erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunq; AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI. Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, numerum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, utpote ad FI. Cum enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam vt E, primus ad CD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI quartum cum sexto. Atq; ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM vero hus demonstratis, ostendentur nouem vltimæ propositiones l. b. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinib. demonstratæ fuere, si pro magnitudinibus, intelligantur numeri siue integri, siue fracti, pro modis componendi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur ydem modi hoc lib. demonstrativt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illa quinti, lib. in numeros numerentur, & magnitudines intelligantur esse numeri eadem prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR

XXI.

THEOR. 21. PROPOS. 23

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis A, & B. Quoniam igitur C D minimi sunt in proportione A, & B, a metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque atque adeo secundum eundum numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in F. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; b metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur, c metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B. Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B. Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A..... B....
C------D--
E.---

a 21. sep.

b 15. sep.

c 15. sep.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

XXII.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, præter vnitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At vero ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B: fit, vt D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. e Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E. Atque adeò,

A..... B....
C----
D-----E----

d 9. prop. 8. sep.

e 18. sep.

adeo, cum D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

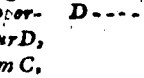
SCHOLIVM.

HANC propositionem & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunq; numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunq; numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarum proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, nimirum, D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A per E ipsum B, & F ipsum C, aquè per ea quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus: atq; adeo secundum unum eundemq; numerum, qui sit G ita ut D, totum metiatur ipsum A & E, ipsum B & F, ipsum C, quoties unitas est in G. Quotiens igitur unitas numerum G, & numerus D, ipsum A æque metitur: metietur quoq; vicissim æque unitas numerum D & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur ipsum B, & ipsum C, aque ita unitas ipsos E, F. Atque ideirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in eadem ratione proportionum A, ad E, & B, ad C, sed ipsi A, B, C, minimi sunt. 21. huius.

Sed uero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G ita ut G, toties metiatur ipsum A quotus unitas est in D & ipsum B, toties quoties unitas est in E, & ipsum C, toties quoties unitas est in F. Quoniam igitur G toties composuit numeros A, B, C, quoties unitas est in D, E, F, ipsum G multiplicates producãt ipsos A, B, C, ut D, E, F, ipsum G, multiplicates producãt ipsos A, B, C, eosdem habebit proportiones, quas A, B, C, per ea quæ ad pro-



ad propos. 18. huius lib. ostendimus: Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C, Q. od est propositum.

xx iiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri primi inter se fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

Sint inter se primi A, & B: & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C: metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipsum A: a metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint. &c. Quod erat demonstrandum.

a11. *prenun.*

A.....B.....
C...D----

xxv.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

Sit vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi: sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties quot vnitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt vnitates in F; *b* fit, vt F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D. *c* & contra E, ipsum F, multiplicas producat eundem D. Genitus est autem idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum, fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; *d* erit vt E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri; erit E, ad A, primus; Atq; adeo E, & A, cum sint inter se primi, *f* in sua proportione minimi erunt. *g* Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumq; B & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

b9. *prenun.*
c16 *sep.*
d19 *sep.*
e25. *sep.*
f23. *sep.*
g2. *sep.*

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxv

Si duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

Sint inter se primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in seipsum. Dico ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, *a* erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, primus ad eundem B, primus. Eademq; ratione ostendemus, numerum ex C, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat

A.... B.....
C.....
D....

a 26. *sept.*

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvi

Si duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumq; primi fuerint; Et qui ex eis gignētur, primi inter se erunt.

Sit vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit ad C; *b* erit quoq; E, ex ipsis genitus ad eundē C, primus. Rursus cum vterq; A, & B, ad D, sit primus, erit eodē modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; *c* erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B..
E..... .....
C... D..
F.....

b 26. *sept.*

c 26. *sept.*

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxvii

Si duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoq; primi inter se erunt; Et semper circa extremos hoc eueniet.

Sint primi inter se A, & B; & A, in se fiat C; at ex B, in se D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex C; & F, ex B, in D; Dico E, & F, quoque esse inter se primos. Nam enim A, B, inter se primi,

A... B..
C.....
E..... ..... F... ....
G, 81. H, 18.
I, 243. K, 32.

mi,

a 27. *septim.* mi, *a* erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, *b* erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; *c* Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cum A, & C, primi sint ad B, *d* erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademq; ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; *e* erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, *f* erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus; nec non & H, ad A. *g* Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterq; A, G, ad vtrumq; B, H, sit primus. Si duo itaq; numeri primi inter se fuerint. &c. Quod ostendendum erat.

b 27. *sept.*

A...
C.....
E.....
G, 81.
I, 243.

B..
D....
F.....
H, 16.
K, 32.

c 28. *sept.*

d 26. *septim.*

e 28. *sept.*

f 26. *sept.*

g 28. *sept.*

THEOR. 28. PROPOS. 30.

xxix. SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad vnum aliquē illorum primus fuerit; Et si vterq; simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & vtrumque simul A C, primum esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; *b* metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodēq; modo ad B C, ostēdemus eundem esse primum.

b 12. *prop. num.*

A.....B.....C
D-----

SED iam vterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B. & B C; *b* metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eo-

b 12. *prop. num.*

mi. Eodemque argumento ostendemus AB, BC, inter se primos esse, si AC, ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim AC, ad AB, primus est, erunt AB, BC, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & AC, ad BC, primus erit: per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Primus numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos praeter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . B . . . . . C ----

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

Si duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B; si non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum aequalis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; *a* erit vt D, primus ad A, *a* 19. *sept.* secundum, ita B, tertius ad E, quartum. *b* Quia vero primus *b* 31. *sept.* D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; *c* erunt D, & A, *c* 21. *sup.* in sua proportione minimi. *d* Quare aeque metientur ipsos B, & *d* 21. *sept.* E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, ne metietur saltem ipsum B: Eodemq; modo si D, non

A . . . . B . . . . . C . . . . . D . . . E . . . . . .

e n etia-

metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Eodem modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

Si duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

Non ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quoq; ad vnum ipsorum A, B, compositum esse: id est, vel D, & A, vel D, & B, esse quq; inter

A... B....
C. .....
D. .....

se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est, erit vterq; A, & B, ad D, primus. a Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur, vel metiri ipsum G, vel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B cum non sit primus ad vtrumq;.

a26. sep.

xxx. PROBL. 31. PROPOS. 33.

Omnem compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Sit numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si vero compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; *b* metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite,

A.....
B..... C...

veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum qui cum metiatur omnes præcedentes, *c* metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

b11. pro nun.

c11. pro nun.

Aliter. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A. *d* metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus

A.....
B... C---

d11. pro nun.

rus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

Sit numerus quicunque A. Dico eum esse vel primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur compositum: Si vero compositus; *a* metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metietur. Quod erat ostendendum.

A..... *a* 33. sept.

PROBLEM. 3. PROPOS. 35. xxxiiij.

Numeris datis quotcunque reperire minimos omniũ eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunq; proportiones, siue eadẽ sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, sine non; oporteatq; totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi.

A..... B.... C.....
D..
E.. F.. G....
H--- I--- K----
L-----

Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi aut compositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi per ea quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si vero nõ sunt inter se primi, *b* inuenta sit maxima eorum cõmunis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A B, C, per numeros E F G Dico E F G, minimos esse in proportionib. numerorum A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C; sic ostenditur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F, G; *c* fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E F G, quas numeri A, B, C.

b 33. *sept.*

c 9. *prim.*

Quod vero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sint minimi; erunt aliqui alij ipsis minores minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propos 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito, *d* fit, vt L, multiplicans numeros H I, K, producat numeros A, B, C; *e* & vicissim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, eundem facit A; *f* erit, vt E, primus ad H, ita

d 9. *prim.*

e 8. *prim.*

f 19. *sept.*

dum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior, quam H. Igitur & L, maior erit, quam D: Atque adeo cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem numeris datis quotcunq; reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

Ex his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D E, sive illi sint in continuatione proportionu A, ad B, minimi, si e non, reperiemus duos i, eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F & G minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

Cæterum contingit interdum, vnum numerorum E, F, G, per

A... B.....C.....
D..
E. F.. G...

A .... B .. C .....
D..
E.. F. G....

hanc proposit. inuentorum esse vnitatem, quando scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A B, C, æqualis est, vt ex his exemplis appareat. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in cõtinuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnus.

THEOR. 4. PROPOS. 36.

XXXVj. **Duobus numeris datis reperire quem illi minimum metiantur, numerum.**

Sit reperiendus minimus numerus omnium quod dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicans faciant C. Dico C, esse mini-

minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; a metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque ipſum A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus: metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, ad B, eundem D, per F. Quo poſito, b tam ex A, in F, quam ex B, in F, & è contrario producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium, c erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, d & ob id, in ſua proportione minimi) e æque metientur ipſos F, & E, nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D, f erit C, ad D, vt B, ad E. Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atq; adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

a 7. *pronun.*

A . . . . B . . . . .
C . . . . . .
D ---------
E ------- E ----

b 9. *pronun.*
c 19. *ſep.*
d 23. *ſe.*
e 21 *ſep.*
f 17. *ſep.*

Sint deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. g Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, h fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; i metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum B, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, k fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, l erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H ad G. m metientur ipſos H, & G, æque, nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E; & F, n erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt, metietur etiam E, numerus numerum

g 33. *ſop.*
h 19. *ſop.*

A . . . . B . . . . . .
C . . D . . .
E . . . . . .
F ---- ------
G ---- H ----

i 17. *pron*
k 9. *pronun.*
l 19. *ſop.*
m 21. *ſeptim.*
n 17. *ſeptim.*

rum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem, atque adeo E minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

Hoc autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

xxxv. THEOR. 33. PROPOS. 57.

Si duo numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Metiantur duo numeri A, & B, quem libet numerum C D, sitq; alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C, D, metiri. Si enim E, ipsum C, D, non metitur, ablato E ex C D, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerum, si fieri potest, F D, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum C F, ametietur quoquetam A, quam B, ipsum C F. Itaque A, & B, cum metiantur totum C D, & ablatum C F, b metientur & reliquum F D, Est autem F D, minor quam E. Non igitur E minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

A.. B...
C ..... E ----- D
E.....

a 11. pronun.

b 12. pronun.

xxxvj. PROBL. 5. PROPOS. 38.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

c 36. sep. Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur, c Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D; ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metian-

metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest; A B, C, aliũ numerum E, ipso D, minorem.

A... B... C.....
D.....
E ----------

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; *a* metietur quoq; D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. a 32 sept.

Sed iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. *b* Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; *c* metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest A B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; *d* metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B; metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum E minorem quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; *e* metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A... B... C.....
D.....
E.....
F --------

b 36. sept.
c 11. prenun.
d 37. septim.
e 37. septim.

COROLLARIVM.

Sequitur ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, motiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

Hoc corollariũ alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E. sitq; F. minimus quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E. metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D C,

A..B...C.... relinquatq; numerum G E, ſe minorem. Quoniam igitur A,B,C, ipſum F, metiuntur; & F, ipſum D G, a metiantur quoq; A,B,C, eundem DG; A proinde, cum & totum DE, ponãtur metiri; b metientur & reliquum G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus quem A,B,C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Metitur igitur F, ipſum D E.

D.....G---E

F.....

a 11 pro num.

b 12. pro num.

Pari ratione. Pluribus numeris dati, quam tribus reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia perag nda, vt de tribus numeris dictum eſt.

xxxvij. ## THEOR. 34. PROPOS. 39.

Si numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

Metiatur numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque metitur; a & viciſſim vnitas æque ipſum B, & C, ipſum A, metietur: atque adeo eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A. Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

A.....

B....C...

a 15. ſep.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

xxxviij **Si numerus partem habuerit quam libet; metietur illum numerus à parte denominatus.**

HABEAT numerus A, partem B, á qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cum B, pars denominetur à C, ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodem, C, denominata; metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. a Viciſſim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....

B...C....

d 15. ſep.

PROBL.

THEOR. 6. PROPOS 41. xxxix.

Numerum reperire, qui minimus cum sit habeat datas partes.

Sint datæ partes A, B, C, Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; a minimusque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, b habebit G, partes A, B, C, denominatas; hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D E F. Quod vero G, sit minimus illas partes habens perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest H, ipse G, minor eisdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A B C, c metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati. Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

a 38. sept.

b 39. sept.

c 40. sept.

SCHOLIVM.

Quod si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à D, E F.

Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur eque vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G, d Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I K L, ipsum G, aque, atque adeo vnitas ipsorum D E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I. K. L, ipsius G partes denominatæ à D, E, F.

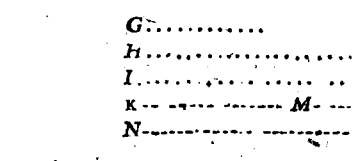
A, Secunda D..I.....
B, Tertia E...K....
C, Quarta F....L...
G.....

d 15. sept.

Ex hu autem sequitur, minimum numerum, quē quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimè metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

Iam vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus da-

tas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, sit illius duplus, numerus H, triplus vero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I tertium &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H neque inter H duplum, & I triplum &c. cadat vllus numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeãt denominatas scil. à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G a metientur quoque D, E, F, eosdem H I, & reliquos multiplices ipsius G b Quare H I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeros D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A B C.



a 11. pronun.

b 39. septim.

Quod autem H duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit quam G minimus & minor quam H, duplus ipsius G Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L ipso G minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C, metientur ipsum numeri D, E, F à partibus illis denominati; Ac propterea & G minimus quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem d Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.

c 40. septim

d 12. pronun.

Non aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H duplo ex N O, relinquatur P O minor ipso G Quia igitur N O, partes habet A, B, G, e metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O per coroll. propos. 38, huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H. duplo æqualem. f Igitur & reliquum P O, idem G metietur, minorem maior. Quod est absurdum Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens, partes habet A, B, C, datas; Ac

e 40. septim.

f 12. pronun.

tus; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eadem que ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

Huc quoque referri potest sequens problema.

Numerum reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

Sint datæ partes A, B C, inueniendusq; sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt, pars A, contineat partem B, & pars B, partem C Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H ex D, in G. Dico H esse minimum numerum, qui quæritur.

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerũ G, à D, denominatam. Deinde quia ex E in F, fit G erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E Atque adeo A pars ipsius H, nimirum numerus G habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam nimirum vnitatẽ Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest easdem partes eodem ordine, ita vt K sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K pars B, ab E, denominata & M ipsius L, pars C, ab F, denominata Quia igitur K pars est ipsius I à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; Atque adeo ex D, in K fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M Itaque cum D, ipsos C & K, multiplicans faciat H, & I, erit vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L fiant G, & K; erit vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F in vnitatem, & M fiant F, & L, erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt, G ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M. Erit per lemma

A Secunda. B, Tertia C Quarta.	
D..	E... F....
G...	
H	
	Vnitas
I ----------	----------
K ----------	
L ---- ------	
M ---	

H.	G F Vnitas
I.	K. L. M.

propos.

ait. 20. fin.

b 17. septim.

H.G F.Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ.14.huius lib.vt H,ad I,ita vnitas ad M:Ponitur autem H,numerus numero I,maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum: Nõ ergo alius numerus minor,quam H,habebit partes A.B, C,ordine prædicto,ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 1.3.4.5.6.ſint denominatores partium,fient 30.ex 5.in 6. & 120.ex 4.in 30.& 360 ex 3 in 120.& tandem 720. ex 2.in 360 Nam numerus 720.habebit partem à 2. denominatam: & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6.denominatam,vt manifeſtum eſt,

Quod ſi numerum H. inuentum duplicemus triplicemus, &c. habebimus alios numeros,videlicet ſecundum,tertium quartum, &c.qui eaſdem partes odem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas,&c Na G.duplicatus,vel triplicatus,&c.dimidiata pars erit,ipſius H,duplicati,vel triplicati,&c.quemadmodum & G.ipſius H Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A. & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E ad H: b. Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur: c Igitur tam A, ipſum E, quam D, ipſum H, æque metietur maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... E ---
B ..... F -----
C ..... G -------
D ..... H ---------

a 14. ſept.
b 23. ſept.
c 21. ſept.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe

esse minimos in continuatione quarum proportionum, si extremi A & D, inter se primi sint. siue A, B, C, D sint continue proportionales, vt vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

A.... E---
B..... F-----
C..... G-----
D..... H---------

ij. PROBL. 1. PROPOS. 2.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

Sint minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; *b* erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur.

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16, L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

a 17 *sep.*

b 17. *septim.*

Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos: *c* sunt autem A & B, inter se primi quod minimi sint in sua proportione; *d* Erunt & C, E, extremi, inter se primi. *e* Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

c 24. *septim.*
d 29. *sep.*
e 1. *oct.*

Iam vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propos. 18 lib. 7. ostendimus numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H. & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet *g* Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E, minimũ F, ex A, in C, &

f 18. *sep.*

g 24. *sept.*

C, & I, ex B, in E, *a* erunt & F I extremi inter se primi. *b* Quare F G, G H I, in tua proportione quæ est A, ad B, minimi sunt. a 29. sep. b 1. oct.

Non aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinq; numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademq; ratione inueniemus sex, septẽ, octo, &c Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

Eodem modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D C; & F, ex A, in C. Quo facto, e numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam c 18. sep. *A, b; quod A B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint. Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadẽ erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A B; quod B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H I, fecerit. Sunt ergo F G H I, in eadem ratione, in qua A B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.*

Non aliter si ex B, in quatuor inuentos I H, G F, fiant O N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides quatuor F, G, H I, produci ex A, in C D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A .	B .
C . . .	D . . . . . E . . . . .
F, 8	G, 12. H, 18. I 27.
K, 16.	L, 24. M, . 6. N, 54. O, 8 .

COROLLARIVM. I.

Hinc fit, si tres numeri minimi sunt continuè proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorũ æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea vtérque sit æqualiter æqualis æqualiter: ipsi ex def. 19. cubi erunt.

Sic etiam si fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè, erunt extremi eorum quadrati quadratorum: Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub alijs denominationibus, quæ

quæ in Algebra solent explicari: Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

Neque vero dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis cõtinue proportionalib. inuentis arte in hac propos. tradita, non autem in quibuscunq; tribus, quatuorve numeris minimis continue proportionalib. vt cunq; propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continue proportionales æquales prorsus sunt iis, qui per hanc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuentis, non essent inuenti, minimi, quod est cõtra hanc propos. Si enim dati maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi quod est contra hypothesim. Quod clarissime ita fiet perspicuũ Dati sint tres numeri A, B, C, minimi cõtinue proportionales; sumptisq; duobus minimis D. E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 21. lib. 7 inueniantur per hanc propos ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos d tribus inuentis F G H, non differre Nam necessario A, ipsi F, æqualis erit; atq; ita, cum sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G, ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B ipsi G æqualis: Eademq; ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G H, singuli singulis, æquales erunt. Eademque ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor quam F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quam G H. Quare F G, H, minimi non sunt, quod est absurdum, & contra hanc propos. Si vero A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A B, C, minimi non sunt, quod est contra hypothesim. Cũ ergo A, minor non sit, aut maior, quam F, æqualis omnino erit, ideoq; vt ostensum est, & B, C, ipsis C, H, æquales erunt Quod est propositum.

COROLLARIVM II.

Perspicuum quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

Constat etiam duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione: quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D. medius producitur ex A, in B; & G, H, medii ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex B, in F,

B. in F,G,H, vt ex demonſtratione Euclidis, & eâ quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM. II.

Quoniam vero tam numeri A,C,F,K, quam B,E,I,O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt, ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero à B, denominentur, vt clarius demõſtrabitur propoſ. 9. huius lib. ſit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris data rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum cõtinue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B, At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrẽ ſi quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe qua ab vnitate incipiat) cõtinue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorũ, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorẽ data proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rursũ per denominatorem eundẽ multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate cõtinue proportionales in proportione dupla, qua denominatur à 2. hoc modo 1.2.4 8.16.32.64. 128. Nam horum vltimus 128 erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128.192 288.432.648.972.1458.2187 ſi maiores numeri ad minores referantur. Eadem q; de reliquis eſt ratio.

Boetius autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos 5. lib. in tractatione proportionum diximus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderãtur 8 numeri minimi in proportione ſeſquiterca, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui minimum

denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, æ 1. Quod si optentur quinq; numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quinquipli; vt hic 1.5.25.125.626. Nam 625. est primus quinq; numerorum in proportione sesquiquintæ, vt hic apparet 625.750.900.1080.1296 Atq; ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neq; enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neq; in priori exemplo post 1287. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. demonstrabitur.

iij.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentiũ, illorum extremi sunt inter se primi.

Sint numeri A,B,C,D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, *minimi* sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometrice demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

A,8. B,12. C,18. D,27.	
E,2. F,3.	
G,4. H,6. I,9.	
K,8. L,12. M,18 N,27.	

SCHOLIVM.

Hæc propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri

heniri non possent, ex precedenti problemate, K, L, M, N, totius minim. in eadem proportione. Imo si diuersa sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, cõtinuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi Sunt enim hi numeri 6.10.13.18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaq; hoc theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. E. vicissim numeri extremi quotcunq; minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primi theorema, prout spectat ad numeros non cõtinue proportionales, conuerti nequit. Nã licet numeri quotcunq; non cõtinue proportionales, quorũ extremi sunt inter se primi, minimi sint in cõtinuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 2. huius lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunq; minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo super prolato 6.10.13.18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. IV.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis porportionibus. *a* Inuenio numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quo- *a* 36. sept.
ties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F, & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in porportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, *b* A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E, *c* Quare erit, vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt alij illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus; sint, si fieri potest, F, E, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua

A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.
H. 4. F. 24. E. 20. G. 15.
I ------ K ----- L ----

b 9. prænun.
c 18. sept.

A,6. B,5. C,4. D,3.
H,4. F,24. E,20. G,15.
I----K----L----

proportione: a ipsi æque metientur I & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eidemque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non erunt igitur alij numeri minores ipsis F E G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi, F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

b 37. sep.

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B, C, ad D; & E, ad F; inueniendiq; sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. c Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K.

c 36. sep.

A. 6, B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L----M------N----O-----

Dico H G I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, cõsta. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, sta G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione, d ipsi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

d 21. septim.

e 37. sep.

f 36. sep.

Sed iam E, non metiatur ipsum I. f Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur; & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K,

æque

æque metiantur; erit vt supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad *K*; Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æque.

Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita K, ad *K* Atque vt E ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, æque ipsos *K*, N, metiantur. Sunt ergo M, L, *K*, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namq; non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt, *a* ipsi sique metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, *b* metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad *K*, hoc est, ita P, ad Q, erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q. Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; *c* quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q, *d* metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipsi M, L, *K*, N minimi sunt.

A 9. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20, I, 15.
M, 48. L 40. *K*, 30. N, 105.
O----- P ----Q --- R ----

a 21. sep.

b 37. septim.

c 12. septim.

d 37. septim.

Quod si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus priotibus rationibus; deinde cum quarta posterior agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, *K*, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, E, *K*, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipsum N, non metiatur, *e* sumem⁹

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S. 9. T, 2,
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O, 144. Q. 120. P, 90. O, 315. V, 70.

e 36. sep.

A,6 B 5.C,4.D,3.E,2.F,7 S,9.T,2.
M,48.L,40.K,30.N,105.
R,144.Q,120.P,90.O,315.V,70.

O, quem S, & N, minimum metiantur. E quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P, & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S eundem O, metitur, toties T, ipsum, V, metiatur. His enim peractis, erunt R Q P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis, numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliqua data fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum: sed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequã ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet inter medius sit & antecedens & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

Porro inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, protrahuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs quæ ad propos. 18. lib. 7 demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 33. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F.

A,6 B 5.C,4.D,3.E,2.F,7 S,9.T,2.
M,48.L,40.K,30.N,105.
R,144.Q,120.P,90.O,315.V,70.

a 17. septim.

Quare

Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, a Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur. a 27. de fin.

Eodem argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, b erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. A: proinde rursum A G B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. c cum ergo proportio A, ad B componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

b 17. septim.
c 27. de fin.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam vllum metietur.

Sint continue proportionales A B. C, D, E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit vt A, ad B, ita B, ad C; C ad D; & D, ad E: A, vero ipsum B, non metiatur, neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. d Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. e Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium á se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neque

A, 16. B 24. C, 36. D, 54. E, 81
F, 4. G, 6. H, 9.

d 2. 8ti.

e 3. 8ti.

A quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hac propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequens sit multiplex, constat. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D, & D, ad E: non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C, ipsius D; neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipsius E, non est multiplex: non metietur E contrario, ipsum D per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniã igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C, & A, ad B: erit conuertendo E, ad D vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metietur; a neque alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è cõtrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum vllius erit multiplex per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus.

a 6. 0 7.

Sed & ex his sequens theorema demonstrabimus.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundem metiatur; & quicumque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuius libet sequentium multiplex erit.

Sint deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime in sequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur,

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, a metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, b metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis. a 11. pro nun. b 11. pro nun.

Sed iam primus A, multiplex sit B secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiusl bet proxi-
me insequentis multiplex est, A, 48. B, 24. C, 12. D, 6, E, 3. Rursus quia D, ipsius E, est mul-
tiplex, metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est. Ac propterea è contrario si maiores ad minores referantur, & quilibet uiusque sequentium multiplex erit.

Conuertemus etiam hanc propositionem sextam, & theoremate quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundum metietur: Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex; neq; primus secundi multiplex erit.

Sint deinceps proportionales A, B, C D, E, & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, secundum. Si enim
A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, A, 16. B, 24. C, 36. D, 54 E, 81
per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

Iam vero A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex
esse dicatur B, secundi, multi- A, 81. B, 54. C. 36. D, 24. E, 16.
plex quoque erit quicunque
alius cuiuslibet sequentium, ex iis, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neq; alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A ipsius B, multiplex erit.

vij.

THEOR. 5 PROPOS. 7

Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

Sint deinceps proportionales A,B,C,D,E, & A, primus extremum B, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri: a neque alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atq; idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 6,vij. A,3.B6.C.12.D,24. E,48.

SCHOLIVM.

Vt theorema quod secundo loco in scholio precedentis propos. demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc prop. hoc modo.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cuiuslibet à secundo sit multiplex, primus quoq; secundi multiplex erit.

Quod eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex, neq; alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholij precedentis. Quod est contra hypothesin.

viij.

THEOR. 6. PROPOS. 8

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C,D; sitq; vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo vt A, ad B, atque adeo vt E, ad F, ita G, ad K. b Quare cum G, & K,

A,24. C,36. D,54 B,81.
G, 8. H,12. I,18. K,27.
E,32. L,48. M,72. F,108.

b

& K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorū, *a* ac propterea in sua proportione minimi; *b* æque metientur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, singuli singulos *c* Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M F producunt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continuæ proportionales. Igitur & E, L, M, F, continuæ proportionales sunt; Atque idcirco cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B, tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

a 23 *sept.*
b 21. *sept.*

A, 17. C, 9. D, 5. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12 F, 4.

c 9 *prop. nunc.*

SCHOLIVM.

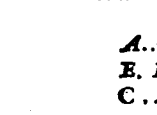
Non solum ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K. Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M F, eandem habent, quam A, C, D, B.

Eadem hac propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas existentibus E, & F, numerus, vt in exemplis apparet.

Constat etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, nō posse cadere numerum medium proportionalem: cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binariū, & vnitatem; superparticularis vero inter nūeros, sola vnitate differentes; superbipartientes denique inter numeros, quorum differentia est binarius si inter duos numeros dupla proportionis vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binariū, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes vel etiam binario, nimirū inter numeros minimos, qui eosdem cum illis proportiones habent, quod fieri nulla ratione potest. Nam neq; inter binariū & vnitatem, neque inter duos numeros sola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solū numerus, qui ab vtro-

que

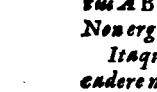
que vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant: numeri A B, C D, (siue C D, vnitas sit, & A B, ternarius siue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quã A B, maior vero quam C D, vnitate quoque.



Dico E F, non esse medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, vt E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, aquali, vt reliqua sit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipsi C D, aquali, vt relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque vt A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cum A G. E H, ipsis E F, C D, aquales sint, ex constructione. Igitur erit quoq; reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est, vnitas ad vnitatem, Vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.

Itaque inter numeros triplã proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplã, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proxime demonstrauimus.

Pari ratione inter numeros quintuplã proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplã, quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt sit A B, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad A B. Et quoniam vnitas C, metitur

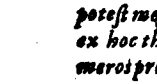


D; metietur quoque D, ipsum A B. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque senarium A E. Igitur D, metitur totum A E. & ablatum A E. ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem B E. Quod est absurdum

a 11. pro num.

Cadat deinde, si fieri potest, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E: ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem E B, metietur. Quod est absurdum.

b 11. pro num.



Ex quibus fit, neque illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, octaua esse, neq; illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuius modi est

Tonus

Tonus, seu vulgo secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariã diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariã secari non posse. Vnde Diapason pro sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum inter se extremorum illud in proportione sesquitertia tertia, hoc vero in sequitertia cõsistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

Rursum ex his demõstrari potest, proportionem diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea quæ ad propos. 47. lib. 1. demõstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; sit vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratũ lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, quæ de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

Si duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidẽ & inter vtrumq; eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

Cadant inter numeros A B, inter se primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, a sumantur in eadem proportione res minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec

a 22. octa.

A,8. C,12. D,18. B,27.
Vnitas.
1.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; *a* erunt A C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipsum G, fecit K, *b* metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: *c* Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Æquè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. *d* Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri, E, G, K, Simili ratione, cum manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib quod F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans vero ipsum I, faciat N; *e* metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: *f* Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Æque igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I. ipsius N. *g* Proportionales ergo sunt continue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vna cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continue proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

d 1. def.
b 7. prop. num.
c 5. prop. num.
d 20. def.
e 7. prop. num.
f 5. prop. num.
g 20. def.

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est, numeros quotlibet continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atq; vnitatē habere proportiones denominatas à minimo numeri proportionis A, ad C, hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

Constat etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt protracti, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab vnitate.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continue proportionales cecidерint numeri, quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

Cadant inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At vero inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, & B, & vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: *a* Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. *b* Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; *c* erit vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; *d* erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, eandem, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; *e* erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex iis, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, *f* erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Au-

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

a 5. prop. num.
b 9. prop. num.
c 17. sup.
d 17. sup.
e 18. sup.
f 18. sup.

proin-

proinde tot medij proportionales cadant inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, cõtinue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Ex his constat, numeros, qui mẽdij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

Patet etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate cõtinu. proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic d. inceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, & c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, qua tum ad ea quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium sumentes.

I.

Si sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

Sint numeri A, B, C, D, continuo ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionẽ B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumq; numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter B, quidem & vnitatem, numerus A: at inter F, & vnitatem numerus E: a cadet quoque inter B, & F, vnus medius proportionalis: atque adeo per scholium huius pr. posi. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L, quot numerum cadunt inter vtrumq; C, G, & vnitatem. Nec non inter D H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

a 10 8.

tione A, ad E proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I, est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque L, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

Hoc idem demonstrabimus si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

11.

Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium; & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quã habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

Sint ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodẽ totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I quadruplicatam. Ex A, in se fiant K & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q & ex F in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat C. Quibus peractis erunt A, K, L, M continue proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 9. huius lib. Eadẽ ratione erũt B, N, O, P, ab vnitate proportionales, nec non & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholii: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1 theoremate est ratio K, ad Q duplicata rationis A, ad F, & eiusdem ex defin duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholii; quod tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate continue proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, dupli-

E, 162.		I, 512.
D, 54.	*Vnitas.*	H, 128
C, 18.	L.	G, 32.
B, 6.	F, 8.	
A, 2.		
N, 36, K, 4. Q 64.		
O, 216.	L. 8.	R, 512.
P, 1296.	M, 16.	S, 4096.

E,81. D,4. Vnitas. C,36. I. G,4. B,24. F,8. A,16. N,576. K,256. Q,64. O,13824 L,4096. R,512. P,331776. M,65536. S,4096 I,1. H,2

duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad F; quod tam B, N, O, quam A, K, L, sint ab vnitate cõtinuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. & eiusdē triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodēq; modo est A, ad H, vt L, ad R: quod vtraq; proportio triplicata proportionis A, ad F: proportio quidem A, ad H, ex def. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, propterea quod tam A, K, L, quam F, Q, R continue proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex aquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F; ex 1. theor. eo quo tam B, N, O, quam F, Q, R, sunt continue proportionales ab vnitate ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur si numeri vnius ordinis desinant in vnitatem, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

Caterum theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14 propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quod inter vtrumque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

Cadant inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales, inter A, quidem & C, numeri D, E, F, inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E & C &,

inter

inter H, & C, Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G, erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L, a cadet quoq; vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem portione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadē ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadē proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

A,162 Q,216. R,288, S,384. B,512. F,54. O,72 P,96. I,128. E,18. N,24. H,32, D,6, G,8. C,2. K,9. L,12. M,16

a 8. oct.

Hoc etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti per spicuum est hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, cadunt q; tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt &c.

A,1048576 Q,32768. R,1024 S,32. B,1. F,65536. O,2048, P,64. I,2 E,4096 N,128, H,4. D,256. G,8. C,16. K,1024. L,32. M,1.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B nec non inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

Duorum quadratorum numerorū vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. xj.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciat E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A quadratum, ex defin. quadrati & ipsum D, multiplicans fecit E,

A,9. E,21, B,49. C,3. D,7.

a 17 sep. A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. ex constructione: & erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione: & multiplicans se-

b 17 septim. ipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum: b erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia verò, ex eo quod A, E, B, continue proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Perspicuum est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione laterus ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

Pari ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B esse inter se compositos. C. nempe A, E, B, proportionalem sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E ad B, vt C ad D; A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. *metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem si de proportionibus E, ad B, & C, ad D loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem, quandoquidem est E, ad B vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur C, & A, mensuram communem habent: quæ adeo inter se sunt compositæ. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Idcoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, B, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A: posteriorum verò E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.*

xi.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere

dere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
facit E: & D, seipsum multiplicans facit F. At C, & D, se mutuo E, 9. G, 12. F, 16.
multiplicantes faciant G. Multiplicantes vero G, faciant H & I. C, 3. D, 4.

Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G, a erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F: a 17. sept.
b erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea que E G F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. b 17. sept.
cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H: c erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, c 17. sept.
ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans vero ipsum F, ex defin.
cubi, fecerit cubum B: d erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, d 17. sept.
ad D, ita I, ad B; e Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quod C, & D, e 18. sept.
ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H I B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D: Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quamobrem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Hic quoq; manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in cõtinua propotione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

Eodem modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoq; C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H I, communem habent mensuram C, atq; adeo inter se compositi sunt. A, 27. H, 36. I, 48. B, 64. E, 9. G, 12. F, 16. C, 3. D, 4.

Similiter cum sit A, ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoq; D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B: immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A, posteriorum vero trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

xij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisq; seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoq; proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc euenier.

Sint continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F, multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoq; D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue esse proportionales. Multiplicantes enim A, & B, se mutuo faciant N; & B, C, se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, facia. P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128, L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

R, S. Simili modo A, multiplicans P, Q H faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, N. *a* erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum G, multiplicans fecit E, & O; *b* erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eadem-que ratione, cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea q; & E, O, F, continue proportionales sunt in ratione B, ad C seu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeo D, E, F, continue proportionales sunt.

a 17 *sep.*

b 17 *sep.*

Deinde

Deinde, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; *a* erit quoque, vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, porportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7 H, R, S, porportionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; *b* erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; propterea que & H, R, S, I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I, erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales. *a* 18. *ſept.* *b* 18. *ſept.*

Non diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Sunt autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad E, &c.

Iam quoq; numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B; Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et ſic deinceps ſemper vno amplius.

Breuius propoſitionem totã demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F, & in hos ex eiſdem numeris G, H, I, & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M.

A, 2.	*B*, 4.	*C*, 8.	
D, 4.	*E*, 16.	*F*, 64.	
G, 8.	*H*, 64.	*I*, 512.	
K, 16.	*L*, 256.	*M*, 4096.	

Dico D, E, F, & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoq; continue proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, cõtinue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theorema. ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I, eſſe proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.

Ex qua rurſum demõſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorũ; ſecundo vero loco pro-

procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

Quamuis autem in vtraq; demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem dimõstrabimus, etiam si plures fuerint, quam tres. Sint nanq; numeri plures,

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. F, 16. G, 64 H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

quam tres A, B C, D, continue proportionales, qui seipsos multiplicantes faciant E, F, G, H postea vero multipli antes ipsos E, F, G,

§ 13. def. *H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quon m igitur E F G, a ex demonstratis proportionales sunt. Item F G H, cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in seipsos: hi vero ex B C, D, proportionalibus quoq; in seipsos. Erunt E F, G H c ntinue, roportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L M & aly deinceps eodem modo producti.*

xiij. ## THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Metiatur quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt

b 7. def. in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremũ B, *b* metietur quoq; A, primus secundum E. Quare

A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6.

cum sit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur.

Metiatur iam C, latus latus I. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratũ est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoq; A, primus E, secundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

xiiij. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur & cubus cubum metietur.

Metiatur cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D.

Dico

Dico & latus C, metiri latus D. Vterq; enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E G F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, a metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B. 216.
E, 4 G, 12. F, 36.
C, 2. D, ..

a 7. 8

Metiatur iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C ad D, vt ostensum est propos. 12. huius libr. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaq; si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. XV.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, b metietur & quadratus A; quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

b 14. 8

Sed iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namq; A, metiri dicatur ipsum B; c metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

c 14. 8.

THEOR. 15. PROPOS. 17. XVI.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neq; latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

a15.oct. A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

Sed iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b15.oct.

SCHOLIVM.

Proxime antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

Nam si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. c *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

c14. & 15.oct.

Quod si latus C, lateris D, multiplex sit: metietur latus D, latus C. d *Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.*

d14. & 15.oct. A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

At vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. e *Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

e16. & 17.oct. A, 64. B, 8. C, 4. D, 2. A, 49. B, 9. C, 7. D, 3.

Similiter si C, latus lateris D, non sit multiplex, non metietur D, latus latus C. f *Igitur, nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur. Atq; adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

f16. & 17.oct. A, 125. B, 8. C, 5. D, 2.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

Duorum ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet, lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, huius vero illis proportionalia E F; ita vt C, D, ſe mutuo multiplicantes faciant A, & E F, mutuo ſe multiplicantes faciant B, ſitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E ad F, erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E; fecit A, & G, *a* erit A, ad G, vt C, ad E hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E multiplicans D, & F. fecit G, & B, *b* erit quoq; G, ad B, vt D, ad F Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A 12. G, 18 B, 17.
C, 6. D, 2. E, 9 F, 3.
a 17. *ſeq*
b 17. *ſeq*.

Quia vero, cum A, G, B, ſint continue proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Quia oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum G, E, vel D, F, aſſumptorum.

Conſtat etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſum ſit A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera conſequentes coſequentem, ſi de proportionib. C, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoq; C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram cõmunem habent tam C, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſum cum ſit A, ad

A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentẽ; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G B, communem mẽſuram tam F, quam F; ideoq; erunt inter ſe compoſiti.

Ex qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E F, latera plani poſterioris B.

xviij. ## THEOR. 17. PROPOS. 19.

Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

Sint ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E huius vero illis proportionalia F, G H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E H. Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; *a* erit vt C, ad F, ita I ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L & K; *b* erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, *c* erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; *d* erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. *e* Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H, quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in

a 17. *ſep.*
b 17. *ſep.*
c 17. *ſep.*
d 17. *ſep.*
e 18. *ſep.*

A, 30. M. 60. N. 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

es in ratione C,ad F,vel D, ad G vel E ad H; Atque idcirco inter A,B,solidos similes duo medij M, N,continue proportionales cadunt.

Quoniam vero,cum A, M, N, B,sint proportionales continue; proportio A,B, triplicata est eius, quam habet A,ad M;Est autem A,ad M,vt C,ad F,vel D,ad G,vel E, ad H:Habebit quoque A,ad B, solidus ad solidum,proportionem triplicatam eius quam habet C,ad F, vel D,ad G,vel E,ad H,latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

Cum demonstratum sit A, M, N, B,proportionales esse in ratione C,ad F,vel D, ad G, vel E,ad H, liquet inter duos similes solides A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C,F vel D,G vel E H,assumptorum.

Ex ijs quæ dicta sunt,perspicuum etiam est,duos medios proportionales M N & vtrumlibet solidorum A,B,inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C,ad F, vel D ad G vel E,ad H hoc est,esse A,ad M,& M,ad N & N,ad B vt C,ad F,vel D,ad G vel E,ad H:metiantur autem F,G,H,latera sua solidum B,consequentes consequentem,si de proportionibus N ad B & C ad F vel D ad G vel E,ad H,loquamur:metiétur quoq; C,D,E,ipsum N antecedentes antecedentem. quod sit N ad B,vt C, ad F,vel D,ad G vel E ad H. Atqui & C, D, E,ipsum M,metiuntur: (Cum enim M,factus sit, per constructionem,ex E,in L metietur E,ipsum M Deinde quia M N B proportionales sunt ipsis I, L, K,metitur autem K ipsum B,quod B factus sit ex K,in H,metietur quoque I,ipsum M. Metiuntur autem & C, D,latera planum suũ I, a Igitur & C, D,metientur ipsum M: Atque adeo C, D, E,ipsum a 11. pra *M,metientur) Nec non & ipsum A, nimirum latera sua solidum.* nun. *Ergo A M N,habent communem mensuram tam C,quam D,& quam E: Idcoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A ad M,vt C,ad F, vel D, ad G, vel E, ad H;metiuntur autem C,D,E,latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G H, ipsum M, consequentes consequentem Metiuntur vero & F, G, H, ipsum N; (Cum enim factus sit ex H, in L, per constructionem;metietur H, ipsum N. Deinde quia A M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I ipsum A, quo A, factus sit, ex I, in E;metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F G latera metiantur planum suum K;metientur quoque F G, ipsum N, atque adeo, F, G, H, ipsum N. metientur.) Necnon & ipsum B nimium la-*

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

rum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram tam F quam G, & quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, B.

Quia vero solidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonstremus hoc loco, eundem numerum solidum procreari, sive primum latus ducatur in secundum, & numerus procreatus in tertium: sive primum in tertium, & numerus genitus in secundum; sive denique secundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiã, propositis quotuis numeris, eundem per numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinẽ inter se permutent. Quæ quidem res magnũ vsũ habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema.

Datis quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

A, B,5 C,8.
D,15 E,120. F,24 G,40.

Sint primum tres numeri dati A, B, C, & ex A in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, a erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem. Sed vt C, ad vnitatem, b ita quoque est F, ad A; quod A, multiplicans C, facit F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: vt autem D, ad B, c ita est A, ad vnitatem; propterea quod A, multiplicãs B, facit D. Igitur ex aqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: d atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, aqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in G. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.

E, F, vnitas
D, A
E, vnitas

Rursus quia ex C, in D, fit E; e erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem. Sed vt C, ad vnitatem, f ita etiam est G, ad B, eo quod G, factus est ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B. Vt autem D, ad A, g ita est B, ad vnitatem, propterea quod D, factus est ex A, in B. Igitur ex aquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem. h Ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id est, ipse

E, G.
D, B.
A, vnitas

a 15. def. fin.
b 15. def. fin.
c 15. def. fin.
d 19. septim.
e 15. def. fin.
f 15. def.
g 15. def. fin.
h 19. septim.

ipse

met numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E gignitur ex A, in B & ex producto in C: ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A quod est secundum.

Sint deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D.

Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita vt præter primam multiplicationem quæ omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersa productiones eundem semper numerum. Quoniam enim vt in tribus ostensum est idem numerus sit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

A,2. B,3. C, D,5.
E,120.

Deinde quia vt in tribus est ostensum, idem numerus sit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est eundem numerum gignitum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

Tertio quoniã, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D tum ex A, in C, & ex producto in D & ex producto in B. Cum ergo ille sit æqualis proxime ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidem, quod est tertium.

Quarto quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus sit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B, gignitur quoque idem numerus ex A in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

Quinto quoniam, vt demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C, producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, &

in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B Cum ergo ille sit ostensus tertio loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem aqualis. Quod est quintum.

Sexto, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. quod est sextum.

Septimo quia vt in tribus ostendimus, idem numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in A; constat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proxime ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, Igitur & ille, quod est septimum.

Octauo quia vt in tribus ostensum est; idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C, Sed ille primo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic Quod est octauum.

Nono quia, vt demonstratum est in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A Sed ille ostensus est septimo loco aqualis ei, qui fit ex A in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic Quod est nonum.

Decimo quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A, producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B Sed ille, vt tertio loco est ostensum, aqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

Postremo quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod est undecimum.

Eodem

Eodem argumentandi modo vtendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerum ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A in B, cum C, & E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter eos eundem permutent, eundem semper gignent numerum ac proinde secundus ordo quum tertium eundem numerum producat, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem immutent, eundem efficiunt numerum: sic & quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. D. E.
A. B. E. C. D.
B. C. A. D. E.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A & B, esse similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia a 21. sept. prim. D, E, minimi sunt in ratione A, ad C, æquemetientur D, & E ipsos A & C, æquemetiuntur per F. Similiter æque metientur ipsos D, B: metiantur per G. b. Itaque F, multiplicans D, & E, faciet C. c. Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quoniam igitur F, multiplicans D, & E, facit A, 18. C, 24. B, 32. D, 3. E, 4 F, 6. G, 8.

b 9. prop. nun. c 9 prop. nun. d 17. def. sept.

D, facit C, & G, facit C, & B. erit vt C, ad F, ita D, ad G. Vt autem C, ad B ita E, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, planus, cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ordine sint proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. quod demonstrandum erat.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

DATI inter A, & B, duo medij proportionales C, D, sint autem A, & B, esse similes superficiales numeros, sumantur E, F, G, H, I, minimi in ratione A, C, D, B. Quia E, F, G, minimi sunt in ratione A, C, D, æquemetientur ipsos A, C, D, per K, L, M. Igitur K, multiplicans E, F, G, faciet A, C, D. Item L, eosdem E, F, G, multiplicans faciet C, D, B. Quoniam igitur K, multiplicans E, F, G, facit A, 24. C, 72. D, 216. B, 648. E, 1. F, 3. G, 9. H, 11. I, 31. M, 144. K, 3. L, 9. N, 72.

minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; *a* erunt E, & G, plani similes: sintq; ipsius E, latera H, I, ipsius vero G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, *b* æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis, metiantur per M. eodemque modo, *c* quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N, *d* ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicates F, faciunt C, & D; *e* ostendimus, *e* erit C, ad D, vt M, ad N. Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F, quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D. Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis per coroll. propos. 19. huius lib. *f* in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoq; H, ad K, vt I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera, H, I, M, laterib⁹ K, L, M; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quocirca manifestum est si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. oct. b 1. sept. c 21. sept.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1, 1. M, 24. K, 3. N, 78.

A, 8. C, 12. D, 3. L, N, 3
E, 4. E, 6, G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3

e 18 septim. f 17. sept.

SCHOLIVM.

Duo exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, & latus E, esse planum numerum, & vnitates H, & I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani monuimus. Si autem vnitatē à numeris planis excludamus, nō poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui inter duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem euenit in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodē exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem veram inter proponat, eamque sine vlla exceptione demonstret.

THEO

THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; *a* erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, & C, erit ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales &c. Quod demonſtrandum erat.

a 20. 8. *Euan.*

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus Dico &, quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; *b* erunt A, A, 27, B, 45 C, 75, D, 125. & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quam obrem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 21. 8.

SCHOLIVM.

Hac eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio praeclara tum duarū propoſitionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet ſane mancam eſſe & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunque lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia, dūmodo quibuſdam lateribus vnius proportionalia ſint quadam alterius. Ille optimo quis inficiari poterit, ſi duorū planorum ſimilium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorū vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubū: quod Euclides in demonſtratione pro conceſſo, atq; omnib. perſpicuo aſſumebat. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus ſatis eſſe duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiā patet ſi quadratus habēs duo latera aequalia 6. & 6. merito dubitari poſſit, imo omnino negare, poſteriorē habere alia duo latera proportionalia, hoc eſt inter ſe quoq; aequalia, atq; adeo eſſe quadratum: quemadmodū etiam manifeſtū eſt, hiſce lateribus prioribus 6. & 6. non reſpondere alia latera in poſteriori propor-

tionalia. S igitur hu lateribus prieru numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione ulla concedemus, hu lateribus prioru aquali us 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se aqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter utramque propositionem Euclides aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

Sint tres numeri A, B, C: continue proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A, cum D, ex defin.us se faciat A. erunt D & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab unitate continue proportionales, e. itque conuertendo A, ad D, ut D, ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadat medij proportionales multitudine aquales nimirum [illegible] eque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. hui[illegible], atque C, numerum, nimirum u[illegible] tas & E, C, numeri sunt contin[illegible] E, in se ipsum [illegible] scholio prop[illegible] dratus erit [illegible] cuius la[illegible]

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
unitas.

Aliter. [illegible] tribus nu[illegible] ad B, & B, ad C, metiatur [illegible] quæ ostendimus ad propos. 1[illegible] merorum trium numerorum,

A, 36. B, 48. C, 64.
21. oct. G, 18. H, 32.
D, 9. E, 12. F, 16
L, 64. K, 8. I, 4.

b 8. oct. inter C, & F, unus proporti[illegible]
primus metiatur C, [illegible]
17. oct. Sumpto autem I. latere qua[illegible]
quotus E, ipsum H, metiatur [illegible]
21. oct. ant proportionem multi[illegible]
Itaque quia ratio L, ad [illegible]
continet L, ad K, latera [illegible]
C, ad E, eandem rationem [illegible]
simile sint proportionales [illegible]
primus L, & C, aqualis [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

sit D, ad E sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A producitur ex D, in E & ex H, in se, a erunt D, H, E, continue proportionales Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatq; inter D, & E, medius proportionalis H, b *cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I. G, sint continue proportionales;* c *idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in seipsum, Fit autem C, ex F, in G, Igitur & idem C, fiet ex I, in seipsum: Atq; adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I*

A, 36.	*B*, 48.	*C*, 64.		a 20. *sept.*
H, 6.		*I*, 8.		
D, 3.	*E*, 12.	*F*, 4.	*G*, 16.	

b 8. *oct.*

c 20 *septim.*

Sint rursum quatuor numeri A, B, C D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D quartum, cubum esse Sumpto enim E, latere cubi A, fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A, erunt ex scholio 20 propos. 9. huius lib. E F A continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, &

A, 64.	*B*, 160.	*C*, 400	*D*, 1000.	
F, 16.		*H*, 100.		
E, 4.		*G*, 10.		
vnitas.				

vnitas. Itaq; cum tam inter numerum D, quam vnitatem, ac eum-

numerum A, cadant medij proportionales multitudine aequa-

les, cadent ex theorem 3. scholij propos. 10. huius lib.

inter vnitatem, & numerum D, qui sint G H. Itaq;

numeri G H D, continue sunt proportionales: Sed

& D, ex G, in productum H, vt supra

demonstratum. Quare D, cubus est

numerus quadratus, cuius latus

& E, ad C, & G, ad D, proinde

erunt ea, quæ ad

demonstrandum	*A*, 64.	*B*, 160.	*C*, 400	*D*, 1000.
H, extremi	*K*, 32.		*L*, 80.	
um, cubi	*I*, 16.			
ex 2. huius	*E*, 8.	*F*, 20.	*G*, 50.	*H*, 125.
		R, 1000.	*Q*, 400.	*N*, 160.

proportionales, qui sint I, E,

D, ad E, ad H, & permutando

inter H, D, duo media

sunt D,

tietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. Itaq; cum ratio P, ad H cubi ad cubum, triplicata
g12.oct. *sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L H: erit P, ad H, vt D ad H: A propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus sit ex constructione, cubus quoque erit D.*

xxij. ## THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D, sitq; A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; b cadat autem inter C, & D, quadratos

b11.oct. A, 36. F, 48 B, 64. vnus medius proportionalis, videlicet E;

c 8, oct. C, 9. E, 12. D, 16. & cadet quoq; inter A, & B, medius vnus, nempe F. Quatuor igitur tres numeri sunt

cõtinue proportionales A, F, B, & A, primus est quadratus, erit &

d22.oct. B, tertius quadratus. Quapropter si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc patet ex his proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet alium non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, e essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibita, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim

f24.oct. 4. existente quadrato, f esset & 8 quadratus. Igitur & 16. & 32. & 64. quod

g11.oct. est absurdum. g Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cũ tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratũ sit, inter numeros duplæ proportionis quadratos non posse cadere medium proportionalem.

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim

h11.oct. haberent, & caderet inter eos medius proportionalis. i Igitur & inter

i 8.oct. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri nõ posse demonstratum à nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

xxiij. ## THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri rationem inter se habeant, quam

bus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum, sitq; A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, a cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E F: b cadent quoq; inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quatuor igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus: c erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. oct.

b 8. oct.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

c 23. oct.

COROLLARIVM.

f Patet etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, d essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperte, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

d 25. oct.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

Similes plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; e cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex corol. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F, duo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

e 18. oct.

SCHOLIVM.

Hactenus etiam demonstrabimus conuersum huius: videlicet,

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes pla-

Duo numeri A, B, proportionem in-
ter se habentes quam quadratus ad quadratum. Dico A, B, esse pla-
nos similes. Cadat inter quadratos C,

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.

f 11. oct.

D cadit vnus medius proportionalis: Et est vt
a 8. oct. A, 8. B. 18. C, ad D, ita A, ad B; cadet quoque medius pro-
b 10. oct. C, 16. D, 6. portionalis inter A, & B, b Quare A, & B, plani similes sunt.

Ex hoc perspicuum est, planos numeros qui similes non sunt, proportionem non habere, quæ quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent, vt modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt
c 19. oct. solidi similes, c cadent inter eos duo medij proportionales, qui sunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. prop. 2. huius lib. cubi. Quare cum

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810. ex æquo sit A, ad B, vt E, ad
E, 8. F, [illegible] G, 18. H, 27. H, constat ita esse A, ad B, vt
est cubus aliquis, nimirum
E, [illegible] ad H. Similes ergo solidi numeros-
[illegible]. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Hanc propositionem alia quoque via demonstrabimus, scilicet.

Solidi numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

Habeant enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum
d 12. oct. A, 16. B, 54. *sit A, ad B, vt C, ad D, & cadant autem inter*
e 8. oct. C, 64. D, 216. *C, D, cubos duo medij proportionales, & cadent*
f 21. oct. *quoque inter A, B, duo medij. f Sunt*
A, & B, solidi similes.

Ex his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habere
[illegible] proportionem, nisi superparticularem, vel superbipartien-
g 23. oct. *similes plani, & solidi. Si enim essent similes plani, & cadent*
[illegible] proportionales, quæ fieri non posse, [illegible]
[illegible]
[illegible]
h 8. oct.

est, inter quos certum est, non posse recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

Similiter nec duo quinis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possunt habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solum unitatem, & seipsum quamuis impropria. Vt hi numeri plani 6. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur quadratus constat non esse proportionales. Quinus vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit latera tantum habet duas unitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 2. & 47. latera habent 1. 1. 29 & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

Rursus neque duo quicunq; numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; a cadet inter illos vnus medius proportionalis vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis mẽsura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minime erunt continue proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod absurdum est. Ponuntur enim neq; quadrati, neque cubi. a 19. & 19. oct.

Ex his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numerarent; b essent duo proposito numeri inter se primi ac proinde, vt proxime ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes: quod absurdum est, & contra hypothesin. Verum hoc ostensum fuit demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, minor, primus. Dico A, ipsum

ri, Nam cum A, & B ponantur A, 1.

lles, habebãt latera, ropertio- C, 1. D, 1. E,

um ergo latera numeri primi

unitas, & numerus D, ipsi A. aequalis, quod

rater C, vnitatem, & numerum D, ipsi A.

um numerum A: sint E, F, latera numeri

a, ita vt si C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur

vt E, ad F, c Igitur numerus factus ex E, primum, F,

ius esse ei, qui fit ex D. secundo in E, tertium. Et sit num.

in F, ipsum numerum F. Idem ergo numerus F, fit ex

D, ipsi F. aequalis. Metitur autem F, ipsum E, quod num.

vt E, in F. Igitur & D, id est, ipsi aequalis, numerum

est propositum.

b 25. sept.

c 19. sept.

d 4. pro.

e 4. pro.

f 1.

h 3. Hinc num.

Hinc perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Sint deinde duo ſolidi ſimiles A B ſitq; A minor primus. Dico A ipſum C, metiri. Nam cum A & B ſint ſolidi ſimiles, habebunt interea proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B, C, vnitates, & numerus D, ipſi A, aqualis, quod nullus alius numerus, praeter vnitatem & numerum D ipſi A, 3. B, 24. B, 8. C, 1. D, 3. E, 2. F, 12. G, 6. A aqualem, metiatur numeri primum A, ſint E F G, latera numeri B, lateribus b C D trigonalia, ita vt ſit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur eſt C, ad F, vt D, ad G, erit permutando C, ad D vt F, ad G. Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum aqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in F, tertium. Fit autem ex C, vnitate in G, ipſemet numerus G. Idem ergo numerus G fit ex D in F. Quare D ipſum G, metietur. Metitur autem G, ipſum B, quod G, latus ſit ipſius B. Igitur & D, hoc eſt A illi aqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

Atq; ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Itaq; facile admodum eſt inuentio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem dupl'am, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quae tradita ſunt, plani vel ſolidi non ſimiles.

Rurſus quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit alter vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles, quales ſunt 16. & 20. ſi enim eſſent plani ſimiles, & haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, vt 27. & 40. Si enim ſolidi ſimiles, & haberent proportionem quae cubus ad cubum. Exiſtente igitur 27. cubus ſit, eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non cubus.

a 19. ſep

b 4. pro nun.

c 4. pro nun.

d 11. pro nun.

e 26. oct.

f 24. oct.

g 27. oct.

h 25. oct.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

Si duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A. B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A multiplicans A, & B, produxit D, & C, *a* erit vt A. ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, *b* vnus medius cadit proportionalis. *c* Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D. E. C. Itaq; cum D, E, C, continuè sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; *d* erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. sexti.
b 18. octaui.
c 8. octaui.
d 22. octaui.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A. B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A multiplicans A, & B, fecit D, & C, erit vt A, ad B, ita D, ad C. *f* At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. *g* Igitur inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; *h* Ac propterea

A. 6, B, 54.
D, 36. C, 324.

e 17. sexti.
f 11. octaui.
g 8. octaui.
h 10. octaui.

preterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c, Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

Duo quadrati A B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; erit C, ex ijs productus, quadratus.

A, 4, B, 25. C, 100.

21. noni.

II.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

Duo numeri A B se mutuo multiplicantes faciant C quadratum; sit q; A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; erunt A & B, similes plani: atque [illegible] eos unus medius proportionalis [illegible] delicet D, d Quare A, [illegible]ente quadrato, erit & B, quadratus.

A 9. D, 12. B, 16. C, 144.

[illegible]2. no-[illegible]ni.

III.

Si duo numeri se mutuo multi[illegible]ntes faci[illegible] quadratum, alter autem sit qua[illegible]; Reli[illegible] quadratus erit.

Duo numeri A, B, se mutuo multi[illegible] faciam[illegible] dratum, sit q[illegible] quadratum[illegible] dratus, [illegible]

A, [illegible] B, [illegible]

[illegible] B.

multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C. foret quadratus, cũ producatur ex A, in B ita & quadratus, esset & B, ex theor. huius: quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur C, quadratus erit.

A,9. B,20. G, 1,80.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim G, latus cubi A; & ex C, itaque fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: & metietur C, ipsum D, per C; *b* Metietur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, unitum denominata à C; Ac proinde *c* vt vnitas ad C, ita C, ad D: Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; *d* metietur D, ipsum A, per C. Metietur autem & C ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, vnius D, quæ D, ipsius A, *e* ideoque vt C, ad D, ita D, ad A; sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. *f* At quia A, ipsum B, metitur per A quod A, seipsum multiplicans fecerit B; *g* metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B. *h* Ac proinde erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D, *i* cadent totidem inter A, & B similiter. E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, erit quoque E, quartus cubus. B, cubus igitur numerus seipsum multiplicans &c. Quod erat demonstrandum.

a 7 *pro.* 9 *num.*
b 5. *pronum.*
c 2. *def.*
d 7. *pronum.*
e 20. *def.*
f 7. *pronum.*
g 5. *pronum.*
h 10. *def.*
i 8. *ell.*
k 23. *ell.*

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

[illegible] numerus cubum numerum multiplicans [illegible] aliquem; Factus cubus erit.

[illegible] ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum [illegible] Accipiat enim A, seipsum faciat [illegible] Quoniam cubus [illegible] quoniam vero A, & B, fecit D, & C, [illegible] ad B, ita C, ad C, *n* At inter [illegible] cubos duo medij proportionales cadunt [illegible] inter

A,8. E,16. D,54. F,32. C,2. B,64. C,216.

l 3. *nonum.*
m 17. *oct.*
n 8. *oct.*
o 8. *oct.*

a 23. oct. inter D, & C, duo medij proportionales cadent; a Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerum cubum numerus multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

v.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

Fiat ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; b qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, c erit vt A, ad B; ita D, ad C; d At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent; f Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

b 12. noni.
c 17. sept.
d 12. oct.
e 8. oct.
f 12. oct.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

SCHOLIVM.

Ex hic & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I.

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

Fiat ex A, cubo in B, non cubum numerum C.

g 5. noni.

A, 8. B, 20. C, 160.

Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus, & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

II.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubum

Fiat ex cubo A, in numerum B

h 4. noni

A, 8. B, 17. C, 136.

Dico & B, non esse cubum. Si enim B, cubus, h & factus cubus C, cubus contra hypothesin.

vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si numerus seipsum multiplicans cubum [illegible] ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, [illegible] Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, tot unitatibus cubus, quot A, unitates habet; & ipse C, sit. A, in B, [illegible] adeo æqualis [illegible]

A, 8. B, 64. [illegible]

erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum. a 5. noni.

SCHOLIVM.

Aliam demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: b *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* c *Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad D quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* d *cadent quoq; inter A, & B, duo medij proportionales.* e *Atq; adeo existente B, cubo, & A cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est.*

b 12. oct.
c 17. sept.
d 8. oct.
e 23. oct.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

Numerus compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A sit compositus, f metiatur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito g multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex definitione. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

f 13. def.
g 9 prænun.

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2 E, 3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinq; intermittentes oēs.

Sint ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, I, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes; cuiusmodi sunt F, I, M, septimum vero F, cubum simul & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum

A, 3. B, 9 C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.
H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

rum M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æque metie-
a 5. pro- tur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B. *a* Metitur
num. autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, me-
b 9. pro- tietur; *b* Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Qua-
num. re B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sint
B, G, D, & est B, quadratus, erit & D, quadratus. Eadem ratione
c 11. oct. assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit
quadratus, *d* & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum inter-
d 22. oct mittentes.

Rursus quia est vnitas ad A, vt B, ad C, æque metietur vnitas
c 5. pro- numerum A, & numerus B, numerum C. *e* Metitur autem vnitas
num. ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, *f* atque adeo
f 9. pro- B, ipsum A, multiplicans procreabit nu[illegible] cum
num. A, ipsum multiplicans facia[illegible] B, mul[illegible], vt
est ostensum, erit C, cubus. Quia ve[illegible]
g 23. oct. tionales sunt C, D, E, F, & est C, c[illegible]
argumento assumptis quatuor de[illegible]
h 23. oct I, cum F, sit cubus, *h* & I, cubus erit atq[illegible]
mittentes.

POSTREMO quia F, septimus [illegible]
quadratus, & cubus; ipse erit cubus [illegible]
eodem modo M, septimus ab F, in[illegible]
G, H, I, K, L, cubus erit simul & qua[illegible]
quinque intermittentes. Si igitur ab v[illegible]
deinceps proportionales fuerint, &c[illegible]
dum.

SCHOLI[illegible]

Hoc theorema potest quoque hoc m[illegible]

Si sint quotcunq; numeri [illegible]
portionales, omnes positi in lo[illegible]
in tertio, quinto, septimo, no[illegible]
quadrati. Omnes autem, qui[illegible]
mero positos in locis tertio, [illegible]
decimoquinto, decimoctauo, [illegible]
metitur, cuiusmodi sunt numeri [illegible]
cubus, terminus decimus, decimus [illegible]
& sine cubo. Omnes vero qu[illegible]
positos in locis tertio, du[illegible]
simo quinto, septimo, [illegible]
sunt septimus, decimus [illegible]

N mprimi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt sit tertium ab vnitate. At secun i ordinis numeri omittunt semr duos numeros post quartum ab vnitate: Numeri denig tertij rdinis quinq; semper interponit post septimum ab vnitate, quemdmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, it cubus, & reliqui omnes cubi erunt. ix.

Sint ab vnitate continue proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus vnitati quadratus.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, *a* iam demonstratum est. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cum tres con- a 8. noni

Vnitas. A, 4 B, 16 C, 64 D, 256. E, 1024. F, 4096.

tinue proportionales sint A B C; sique A, quadratus; *b* erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; *c* & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales. b 22. oct. c 22. oct.

Sit iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes,

Vnitas. A 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

huiusmodi sunt C, & F, sint cubi; *d* iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit vnitas ad A, vt A, ad B; atque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: *e* Metitur autem vnitas numerum A, per ipsum A. Igitur & A, ipsum B, per seipsum metietur; *f* Atque A, cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreauit, & vnitate B, cubus est. Quoniam vero quatuor continue proportionales sunt A, B, C, D, atque A, cubus, *h* & D, cubus erit. Eadem ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit; *i* & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Nonnecus demonstrabimus, omnes cubos d 8. noni. e 5. pronun f 9. pron. g 3. noni. h 23. oct. i 23. oct.

i esse

esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Non demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus, quos primos ponit cubos, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; quia vero post vnitatem quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt est demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul & quadrati.

Verum tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam, n ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C, sunt q; A, B, quadrates; & C, quadratus,

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodē scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, sunt q; A, C, quadrates: erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadrates. Atq; ita deinceps cum ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A multiplicans D producat E, & multiplicans E, faciat F, &c.

Sit deinde A proximus vnitati cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10 lib. 8. cubus A, seipsum multiplicans

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, [illegible]

a 3. noni. *facit B; a erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C, sunt q; A, B, cubi, b erit & C, cubus. Rursus ex eodem scholio A, multiplicans C, facit D, sunt q; cubi; c erit quoq; D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex scholio A, multiplicans*

b 4. noni. c 4. noni. *D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &c.*

X. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si qui post vnitatem, non fit cubus, neq; alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

Sint ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, hoc est, præter B, L, F, H, &c. Si enim præter hos alius est quadratus, sit quadratus E.

Vnitas. A,1. B,4. C,8. D,16. E,32. F,64. G,128. H,256. I,512. K,1024. L,2048. M,4096.

a Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo, vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E. b sed B, tertius ab vnitate est quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse.

a 8. noni
b 8. noni.
c 24. oct.

Sed iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. d Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: e sed C, est cubus, cum sit quartus ab vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit, quod est contra hypothesin. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; g cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, h erit & A, cubus, quod nō ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoq; eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

d 8. noni
e 8. noni
f 25. oct.
g 8. noni.
h 25. oct.

SCHOLIVM.

Non est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul & quadrato.

Si enim primum A, qui post vnitatem, cubus quidem non au-

tem simul & quadratus. Dico B tertium esse cubum simul, & quadratum, cubum quidem, a quod primo existente cubo, omnes cubi sint, b quadratū vero, quod tertius sit ab vnitate.

Vnitas. B.8. B.64.

Sit deinde A, posit vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum

Vnitas. A,4. B,16. C,64.

esse cubum simul, & quadratum, c Cubum quidem quod quartus sit ab vnitate: quadratum vero, d quod primo existente quadrato omnes sint quadrati.

Sit postremo A, posit vnitatem neq; cubus neq; quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum præter septimum & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non existente

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

quadrato, e nullus alius quadratus sit, præter tertium ab vnitate, vt vnum intermittētes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8 huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus nonus, vndecimus decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, f nullus alius sit cubus præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus tertius decimus nonus, decimus sextus, decimus vndecimus &c. Perspicuum est, tantummodo septimum, tertium decimum, decimum nonum qui quidem omnes quinq; intermittunt, quadrat esse simul & cubos, atque de cæteris. Nam in hæc loca sola inciduut quadratus, & cubus simul: vt liquido constet ei, qui rectè propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet ma-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

iorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D, (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) g æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum

rum G: a Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur: Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit vt E, ad F, ita vnitas ad A &c. Sic quoque metietur, A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo vt A ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

a 5. prænun.

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est ex his quantum ab est maior numerus à minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonstratione apparet. Itaque E, me-

Vnitas. A 3, B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

tietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B, & F quam inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter G, & F, quam inter vnitatem & C, duo interiecti sunt numeri.

Hinc rursus efficitur, quemlibet numerum, qui seipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantò ab eo distat, quantum ipse ab vnitate Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à maiore distat, quantum minor ab vnitate, propterea quod si numerus numerum metiens multiplicet tum per quem metitur, b producitur ille, quem metitur Ergo C, seipsum multiplicans gignet F, cum F tantum absit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoq; B, multiplicans, D, faciet eundem F: quod D, ipsum F, metiatur per B, &c, & sic de reliquis*

b 9. prænun.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

Sint ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum Si namq; non metitur ipsum A: erit E, cum primus sit, ad A primus, [illegible]

A, & E, inter se primi erunt. Metiatur E, ipsum D, [illegible]
a 9. pronun. adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipsum D, [illegible]
per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vera scholio [illegible]
dentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, [illegible]
primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. *b* Quam[illegible]
b 19. se- vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. C[illegible]
c 23. sep. ergo A, & E, sint inter se primi: ac proinde in sua propor[illegible]
d 21. sep. minimi; *d* metientur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur[illegible]
e 9. pronun. ipsum C, per G, *e* atque adeo E, multiplicans G, faciat [illegible]
vero & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metietur [illegible]
f 9. pronun. *f* atque adeo A, multiplicans B, faciat C; procreabitur idem [illegible]
rus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, [illegible]
g 19. se- *g* E, [illegible]

Vnitas A, 10, B, 100. C, 1000. D, 10000. [illegible] primus ad E, [illegible]
E, 5, H, 20. G, 200. F, 2000. [illegible] in G, [illegible]
[illegible] tius ad B, qua[illegible]

Quapropter cum A, & E, sint inter se primi; *h* ac proinde [illegible]
h 23. sep. sua proportione minimi; *i* Metietur æque A, [illegible] & E, ipsum
i 21. sep. B. Metiatur E, ipsum B, per H; *k* ita vt E, multiplicans H, [illegible]
k 6. pronun. B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, ac [illegible] ideo A, [illegible]
multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedenti [illegible]
paret. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, [illegible]
& ex A, medio in seipsum. *l* Quare erit vt E, [illegible]
l 20. def. dum, ita A, secundus ad H, tertium. Cum [illegible] primi sint; *m* ac proinde in sua proportione [illegible]
m 23. se- tur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra [illegible]
prim. tur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum [illegible]
n 22. se- metiri. Nam ex eo quod E, quadratum metiri ipsum [illegible]
prim. monstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. [illegible]
ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus [illegible]
lios numeros primos ipsum D, metientes manifestum [illegible]
Eademq; erit ratio si C, vel B, vltimus numerus [illegible]

ALITER. Metiatur E, numeros primos [illegible]
o 31. sep. E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur, [illegible]
Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, [illegible] multiplicans
facit [illegible] et scholio [illegible]

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. [illegible]
E, 7. [illegible]

p 27. se- primi sunt; sit autem C, ex A, in B, per [illegible]
prim.
q 26. se- propos. *q* erit C, ad E, primus. Rursus [illegible]
prim. C, ad E, primi sunt & sit D, ex A, in C, ex [illegible]
r 26. se- dentis propos. *r* erit D, ad E, primus. Non [illegible]
prim. pitur. Quod est contra hypothesin. Metiatur [illegible]

tu. ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est quod non ponitur.

SCHOLIVM.

Est autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse albū ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum immediatum videatur asserre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in aliis nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoq; simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5 de propor. propos. 201. gloriatur q; se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim huius demōstrationis expendisset, vel certe si expendit, eam in memoriam reuocasset, quandoquidem ipso longe prior Euclides vsus est hoc etiā demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus.

Cæterum ex demonstratis perspicuum est, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios antepositum. a Cum enim metiatur proximū vnitati; hic autem omnes subsequentes; b quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris; manifestum est quod & ille omnes metiatur.

a 12. noni.
b 11. noni.
c 11. prænun.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum aũt est, E, nõ esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D, metietur quoque ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est sed cum alius; c atque adeo cum aliquis numerus primus me-

Vnitat. A, 1, B, 25 C, 125, D, 625.
E---- H---- G---- F----

d 12. noni.
c 33 sept.

tur, quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; a metietur quoq; ille alius primus eundem D; b atq; adeo & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; c & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E ipsum D, metitur,) metietur D, per E, d Cum ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B C, quod est contra hypothesin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam vero E, metitur D, per F, e metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vtimum; f metietur & A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum Igitur F, non primus est, sed compositus; g atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quæ rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F, cum F, metiatur D, extremum; b metietur quoque ille alius primus eundem D; i atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur, Iam vero quoniam E, metitur D, per F; k & D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C quartum, & ex E, secundo in F, tertium; l Ac proinde erit vt A primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G Quoniam igitur F ductus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquit enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A B, & non primum, sed compositum quem solus A, primus metiatur: quem admodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A B C, metiebatur D, vltimum.

Si etiam G, sit idem, qui aliquis ipsorum A B, metiatur que F, ipsum C, per G, metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B, m & vicissim aliquis ipsorum A B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. n Cum etgo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. Ostensum est ergo F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G,

a 11. pronun.
b 12. noni.
c 8 pronun.
d 11. noni.
e 8. pronun.
f 12. noni.
g 33. sept.
h 11. pronun.
i 12. noni
k 9 pronun.
l 19. septim.

go G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; *a* metietur vicissim G ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C, *b* metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G primus est, sed compositus, *c* ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum, *d* metietur quoque illi alius primus eundem C, *e* atque adeo ipsum A, vnitati proximum qui primus est, quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metietur. *f* Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatum C, per G; Fit autem idem C, ex A in B, vt docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. *g* Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vltimum (reliquimus enim iam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H, diuersum esse ab A, quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

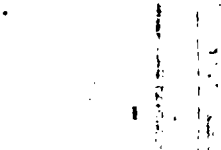
Nam si H, idem sit qui A, metiatur que G, ipsum B, per H, metietur vtique G, ipsum B, per A; *h* Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. *i* Iam vero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H; Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H primo in G, tertium, & ex A, medio in se ipsum *k* Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, metietur sum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

a 8. *prop.*
b 12. *noni.*
c 33 *def.*
d 21. *prop. noni.*
e 23. *noni.*
f 9. *prop. noni.*
g 19. *septim.*
h 8 *prop. nun.*
i 9. *prop. nun.*
k 20. *septim.*

THEOR. 14 PROPOS. 14. xiv.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos qui à principio metiebantur.

Sit numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus numerus E, diuer-



29 *trogonum.*

b 32. *septim.*

sus à B, C, D, ipsum A, numerum F. Quia, ig… E, metitur A, per F, a… tiplicans E, ipsum F, fi… A, *b* Quare singuli B, C, … alterum ipsorum E F, metientur: non quidem ipsum E, prim… & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A, Q… est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, … tiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metian… &c. Quod demonstrandum erat.

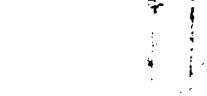
SCHOLIVM.

Addit hoc loco Campanus sequens theorema adeo, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

Sint quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G. Metiatur autem primus H, primum eorum, numerum A. Dico H,

c 2. *octau.* *metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H non primus ad compositum: sumantur in eadem proportione tres primi minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, tot semper habentes tres, uno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E.*



Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quot liberi minimi tradito in 2 propos. lib. 8. numerus A, fit ex F, in … metitur autem H, ipsum … erit H, compositus, ex … propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum: si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt constat ex demonstratione … 2. lib. 8 erit ex scholio eiusdem propos. 32 lib. 7. rursus H, … vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si vero ad I, … gnatur ex F, in se ipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem … propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem … ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

Deinde metiatur H, non primus secundum B. Quia … ex F, in N, erit vt primus H, compositus vel ad F, vel ad N. Si … habetur propositum: si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit …

quod

modo compositus vel ad F. vel ad K. Si ad F, habebitur propositum, si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

Rursus metiatur H, non primus tertium C; quicum fiat ex F, in O erit H, compositus vel ad F. vel ad O. Si ad F, habebitur propositum, si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad H. vel ad L. Si ad F habebitur propositum. si vero ad L. cum L, gignatur ex G in se, erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

Praterea A, metiatur H, non primus quartum D quicum fiat ex F in P erit H compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habebitur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad H. vel ad L. Si ad G. habebitur propositum; si vero ad L cum L producatur ex G in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H. primus sit ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

Eodem modo si H, non primus metiatur ultimum E, ostendemus H compositum esse ad H, Si vero H. primus sit, cum metiri ipsum G. atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

Itaque si H, metiatur primum numerum A. metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si vero H. metiatur ultimum E metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H metiatur aliquem præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVoniam ad theorema sequens demonstrãdum Theon quadam assumit in numeru, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis est animaduersum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quot

quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

Sint duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F ex C, in A B; Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est toti numero G K.

A . . . D . . E . B C .
F . . . . . .
G . . . . . H . . . I . . K

Quoniam enim C multiplicans A B, fecit F, a metietur A B, ipsum F, per C hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum quæ A B, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7 demonstrauimus, totius A B tertius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; b Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.

a 22. pronun.

b 4. pronun.

II.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri ipsi sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B toto in partes A C, C B similiter æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numero, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B, quod est propositum.

D . . . . .
A . . . C . . B

Idem demonstrabitur, si A B, plures partes, quam in duas secetur, vt, ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E . . . . .
A . . . C . . D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui

li, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à dicta parte efficitur, quadrato.

Sit numerus AB diuisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit toto AB, in partem AC, æqualem esse ei, qui sub partibus AC, CB continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, hoc est erit numerus factus ex D, hoc est ex AC in AB, vel (quod idem est) A .... C ..... B ex AC in AC, & ex AC in CB, numerus factus D, hoc est ex AC in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadratus scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

IV.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC in partem CB. Nam ex 1. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB in A ..... C .... B AC & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB in AC per 1. theorema æqualis numero genito ex AC, in CB una cum quadrato ipsius AC. Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB factus æqualis est quoq; numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

V.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus enim AB secetur in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij D, qui quidem ex æquo est inter emissam AC, vel C, a terminum partium inæqualium AD DB, esse æqualem quadrato, qui ex dimidi-

midio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CB, per 4. theorema, aqualis sit quadratis partium CD, DB, una cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB, numero scilicet comprehenso semel sub CD, DB, una cum quadrato ipsius DB: quod sit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB, fit, vt si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur

pro quadrato ipsius DB, una cum numero facto ex CD, in DB, numero scilicet facto ex CD, in DB, bis. Quadratus ipsius CB, aqualis etiam est reliquo quadrato ipsius CB, una cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB, hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex his numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, fit numerus ex AD, in DB, hoc est, ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, una cum quadrato ipsius CD, una cum numero qui fit ex AD, in DB, hoc est, numerus factus ex AD, in DB, una cum numero facto ex CD, aqualis erit quadrato ipsius CB. Quod erat ostendendum.

VI.

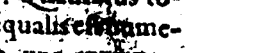
Si numerus in duas partes æquales diuidatur, cuilli aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

Numerus enim AB, secetur in partes æquales AC, CB, cuilli adiiciatur numerus BD. Dico numerum factum ex AD, in DB, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, qualem esse quadratum ipsius CD, hoc est, quadrato ipsius CD. Cum enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, aqualis sit quadratis partium CB, BD, vna cum numero bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratis partium CB, BD, vna cum numero sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, æqualibus, hoc est, quadrato ipsius BD, aqualis sit ex 3. theorema numerus factus ex AD, in BD, fit vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato partis BD, vna cum numero facto ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, ipsius scilicet reliquo quadrato ipsius CB, vna cum numero facto ex AD, in BD, hoc est, numerus factus ex AD in BD, vna cum quadrato ipsius CB aqualis sit quadrato ipsius CD. Quod erat ostendendum.

VII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

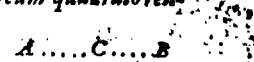
Diuidatur numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerum AC, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.



VIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

Secetur numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & predicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compositi ex AB, & BD, siue dicta parte CB, sit æqualis per 4. theorem. quadratis numerorum AB BD, vna cum numero qui fit ex AB, in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB. Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum AB CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC, sit, vt si pro quadratis numerorum AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cũ quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.



Si nume-

IX.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & [illegible] æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fi[illegible] dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & [illegible] intermedio efficiuntur.

Diuisus sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & [illegible] æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, [illegible] duplos esse quadratorum, qui ex AC dimidio, & ex CD ni[illegible] intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, [illegible] alterutram partium inæqualium AD, DB,) efficiuntur. Cum enim

A . . . . C . . . D . . B

quadratus numeri AD, æqualis sit [illegible] 4. theorem. quadratis numerorum AC, [illegible] CD, una cũ numero bis, qui fit ex AC, [illegible] in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex [illegible] & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, una cum eo, qui fit bis [illegible] CB in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis. Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

Si numerus in duas partes æquales dividatur, adiiciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratum compositi numeri ex toto & adiecto, & [illegible] numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati [illegible] midio efficitur, & eius, qui fit à numero [illegible] posito ex dimidio, & adiecto.

Sit numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, cui adiiciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratũ adiecti numeri BD, utrosque simul, duplos esse quadratorũ, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, compositæ ex CB dimidio, & adiecta BD.

A . . . C . . . . B . . D

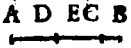
Cum enim quadratus ipsius AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD, si communis adiiciatur quadratus partis BD, erunt quadrati duorum numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD,

una

na cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. qua-
drato ipsius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, aequales
unt quadrati numerorum CB, CD; & quadrato ipsius CB, aequalis
st quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, una cum
numero, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati numerorum
CB CD, hoc est, numerorum AC, CD. erunt quadrati numerorum
AD, BD, aequales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propter-
ea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui
ex AC, CD efficiuntur. Quod est propositum.

Iam vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc
est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuida-
tur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnã partium fit, aequalis
sit quadrato reliquae partis, vt ibi monuimus, ita demõstrabimus.

Diuidatur si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus fa-
ctus ex tot. AB, in partem CB, aequalis sit quadrato reliquae partis
AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, aequalis est quadrato numeri medij AC;
erit vt AB, ad AC ita AC, ad CB: Est autem
AB maior quam AC, ita AC. Igitur & AC, maior est quam CB.
Ablato iam CD, qui ipsi CB sit aequalis, erit quoq; vt AB, ad AC, i-
ta AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC,
ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum; b erit quoq;
vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum
CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, aequalis ad AD,
ex AC, residuum. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD;
& est AC, maior quam CD, erit quoq; CD, maior quam AD. Ab-
lato ergo DE, qui ipsi AD, sit aequalis; erit etiam vt AC, ad CD,
ita CD, ad DE. Itaq; quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD,
ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum erit, c quoque
vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum
DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est DE, ipsi AD, aequalis ad EC,
ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC;
sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior quam EC:
Atq; proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, aequalis; & sic
deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod est absur-
dum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo nu-
merus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam
partium factus, aequalis sit quadrato reliquae partis. Quod est propo-
situm.



a 10. sept.

b 11. sept.

c 11. sept.

Aliter. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is
qui fit ex AB in CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC: erit
numerus, qui quater fit ex AB, in CB, qua-
druplus quadrati ipsius AC; Atq; proinde
numerus, qui fit quater ex AB, in CB, una

cum quadrato ipsius AC quintuplus erit quadrati partis AC. Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, quadratus, quippe cum aequalis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8 theorem. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater cõtinetur sub AB CB, vna cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex AB, in CB, aequalis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.

Verum hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

xvj. ## THEOR. 15. PROPOS. 15.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C; & B C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicantem facere C. *a* Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; *b* erit & vterq; D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaq; cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; *c* erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquam vno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquã vno, in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; *d* Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

a 24. sep. b 30. sep. c 26. sep. d 27. sep.

Deinde quia, vt prius, *e* vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E; efficitur, (cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) *f* numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam in E, æqualis est per 3. theorem. scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt,

e 30. sep. f 26. sep.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

unt. a atque adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi a 27. sept.
B & C, simul compositi.

Porrò iterum quia, vt prius, b vterque D, & E simul ad quemlibet b 30. sept.
ipsorum primus est: atque adeo è contrario, quilibet ipsorum D,
E primus est ad compositum ex D, E, c erit quoque qui fit ex D, c 26. sept.
ad compositum ex D, E, primus; d Ac proinde & idem fit qui ex D, in d 27. sept.
in E ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in se primus erit. Qui *prim.*
autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem.
antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt ostensum est. e Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostensum est, f erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, in E, in se ipsos fiant A, & G; Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quamobrem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

e 20. sept. *prim.*

f 30. sept. *prim.*

SCHOLIVM.

Campanus hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunq; numeris continue proportionalibus minimis hoc modo ipsum proponens.

Si quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

Sint continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos. Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.

E --- F, 2. G, 3. H --- *atque adeo eos aliquis numerus com-*

munium mẽsura metietur. Metiatur eos numerus E. Si fieri potest, sumantur quæ F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C D, continue proportionales sunt, & minimi, metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipsorum F, G, vt certe compositus erit ad alterum ipsorum

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E ---- F, 2, G, 3. H ----

F, G, ex scholio propos. 14. huius lib. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaq; cum H metiatur E; &

a 11. pronun. *E, ponatur metiri compositum ex A, B C, & ipsum D; a metietur quoq; H, eundem compositum ex A B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoq; alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 1. lib. 8. b metietur quoq; H, medios B, C; c ac propterea & compositum ex B, C. Itaq; cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex*

b 11. pronun. c 10. pronun. *B, C, vt demonstranimus: d metietur quoq; idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. e Sed & primi inter se sunt. Quod*

d 12. pronun. e 3. oct. *fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.*

Rursus, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt primus, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaq; cum H, metiatur E, & E, compositum ex A, B, D: f metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur per co-

f 11. pronun. g 11. pronun. *roll. 3 propos. 1. lib. 8 medios B, C, g metietur quoq; H, ipsos B, C Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum*

h 12. pronun. i 11. pronun. k 12. pronun. l 3. oct. *B, h metietur quoq; H, compositum ex A D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. i metietur etiam H, alterum ipsorum A D. k Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. l Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.*

Non aliter ostendemus & A, C D, compositos, esse ad B, primos; necnon & B, C. D, simul ad A. Eadem quoq; ratio est de quotlibet numeris continue proportionalibus.

xvij.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint

Sint primi inter se A, & B, Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, *a* atque adeo in sua proportione minimi; *b* ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se, Quod est absurdum, Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....
B.....
C--------

a 23. *septim.*
b 21. *septim.*

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

Sint continue proportinales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi *c* minimi in sua proportione. *d* Igitur æque metientur ipsos B, & E, nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; *e* atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, *f* metietur quoque ipsum D. Metitur vero & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E, eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A,8.B,12.C,18.D,27.E----

c 23. *septim.*
d 21. *septim.*
e 11. *pronun.*
f 11. *pronun.*

PROBL. 1. PROPOS 18. xix.

Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B, Aut igitur A, B, primi inter

se sunt, aut non. Si sunt inter se primi, ex spicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt *A*, & *B*, inter se primi; multiplicans *B*, se ipsum faciat *C*, Aut igitur *A*, metitur ipsum *C*, aut non. Metiatur primum *A*, ipsum *C*, per *D*. Dico ipsis *A*, *B*, inueniri posse tertium proportionalem, imo ipsum *D*, esse tertium proportionalem. Cum enim *A*, metiatur *C*, per *D*, *b* fiet *C*, ex *A*, in *D*: Fit autem ex constructione, idem *C*, ex *B*, in seipsum. Igitur, qui continetur sub extremis *A D*, æqualis est ei, qui ex medio *B*, describitur; *c* Ac proinde erit vt *A*, ad *B*, ita *B*, ad *D*. Quare *D*, inuentus est tertius proportionalis ipsis *A*, *B*.

A, 4. *B*, 7.

A, 4. *B*, 6. *D*, 9. *C*, 36.

b 9. pronun.

c 20. septim

Sed non metiatur *A*, ipsum *C*. Dico ipsis *A*, *B*, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit *D*, ita vt sit *A*, ad *B*, quemadmodum *B*, ad *D*. Quoniam igitur est, vt *A*, ad *B*, ita *B*, ad *D*, *d* erit numerus contentus sub extremis *A*, *D*, æqualis ei, qui fit ex *B*, medio in se ipsum, hoc est, ipsi *C*. Quare cum *C*, fiat ex *A*, in *D*, *e* metietur *A*, ipsum *C*, per *D*: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis *A*, *B*, tertius proportionalis, quando *A*, primus non metitur *C*, productum ex *B*, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis *B*, & *A*, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit *A*, vt *B*, ad *A*. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

A, 6. *B*, 4. *D* ---- *C* 16.

d 20. septim.

e 7. pronun.

XX. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

Sint dati tres numeri *A*, *B*, *C*, siue deinceps proportionales sint siue non, oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit *C*, ad aliquem alium numerum, vt *A*, ad *B*. Multiplicans *B*, ipsum *C*, faciat *D*. Aut igitur *A*, ipsum *D*, metitur, aut non. Metiatur primum *A*, ipsum *D*, per *E*. Dico ipsis *A*, *B*, *C*, inueniri posse quartum proportionalem, imo ipsum *E*, esse quartum proportionalem. Cum enim *A*, metiatur *D*, per *E*, *f* fiet *D*, ex *A*, in *E*: Fit autem idem *D*, ex *B*, in *C*, per constructionem. Igitur qui sub extremis *A*, *E*, continetur, æqualis est ei, qui sub *B*, *C*, secundo & tertio continetur; *g* Ac propterea erit vt *A*, ad *B*, ita *C*, ad *E*. Quare inuentus est *E*, ipsis *A*, *B*, *C*, quartus proportionalis.

A, 8. *B*, 12. *C*, 18. *E*. 27. *D*, 216.

A, 4. *B*, 8. *C*, 9. *E*, 18. *D*. 72.

f 9. pronun.

g 19. septim.

Sed

Sed iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalem. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quæ ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt, a erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare cum D fiat ex A, in E; b metietur A ipſum D, per E: ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſideraumus, an poſſit, &c. Quod erat faciendum.

A. 4 B. 6. C. 9. E. ---- D. 54.

A. 3. B. 4. C. 10. E. ---- D. 40.

a 19. ſeptim.

b 7. pronun.

SCHOLIVM.

Hæc quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duob. numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecũdi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 1/3, hoc modo. 3. 8. 21 1/3. Quia enim diuiſis 64. per 3. ſit numerus 21 1/3 producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis 2 1/3 per diuiſorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7 tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſeipſum, erunt 3. 8. 21 1/3 continue proportionales.

Datis autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 10. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primũ 9. reperietur quartus proportionalis 13 1/3, hoc modo 9. 6. 20. 13 1/3. Cum enim diuiſis 120. per 9 fiat 13 1/3 producetur numerus diuiſus 120. ex multiplicatione Quotientis 13. 1/3 per diuiſorem 9 ex ijs quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autem idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium. d. Igitur quatuor numeri 9. 6. 20 13 1/3 proportionales ſunt.

c 20. ſeptim.

d 19. ſeptim.

Ex his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis ſi ipſis alius poteſt inueniri, illis idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON. *& qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Euclides cum Com-*

eus Commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi. Aut non deinceps quidem proportionales sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidē proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorū extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & alii quidē demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4 8, 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quarta proportionalis 18. Quis enim non videt esse vt 4, ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Id videri potest in exemplis aliis insititiis, vt hic 2. 3. 14 Item 3. 9. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalē. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet si demonstratonem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

Sint trium numerorum A, B, C non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex aequo, vt, A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, a & ob id minimi. b Igitur metientur aequales ipsos C, E, numerum A, ipsum C, & C, ipsum E, At vero & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primus inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E. - - -

a 23. septim.

b 21. septim.

Haec est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Imo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D,

B, C, D, *quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C, cum non magu hoc constet in illu, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiã, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C D, nulla ratione fieri potest, vt detur alius ad quem ita se habeat quartus sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus* E, *ad quem ita se habeat quartus* D, *vt* B *secundus ad* C, *tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo i si vtuntur.*

Sint enim quatuor numeri A, B, C, D, *proportionales, non tamen deinceps, sintq; A & C primus, & tertius, inter se primi Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex aquo, vt A, ad C ita C, ad E; Atq; adeo*

vt ipsi ostenderunt, metietur A A.4.B.12.C.3 D.9.E----

duos A, & C, primos inter se.

Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

Primum vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus. a 17. no ni.

xxj.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. b

Sumpto enim numero D, E. minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF Aut ergo totus DF, primus est, aut non primus. sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & DF, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5.
30, 1
D---------E ∴ F

b 38. septim

SED iam non sit primus DF. c Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico, G primum nulli ipsorum A, B, C,

c 33 septim.

A,3.B,5.C,7.
105. 1.
D---------- E.F
53.
G-------

A,B,C, eundem esse. Si namque G, ut idem, qui vnus ipsorum A, B, C, metiantur autem A,B,C, ipsum D E, & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, a metietur quoque E F, reliquum; numerus vnitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A B C, Atque proinde inuenti sunt primi numeri A B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur. &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c Quod demonstrandum erat.

a 11 *pronun.*

SCHOLIVM,

Potest idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propositis, inueniri alium primum numerum ab illis diuersum.

Nam si primi quotcunq; propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est, vel certe G qui ipsum D E, metitur. Atq; eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinq; primis alium sextum inueniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

xxij. THEOR. 19. PROPOS. 21.

Si pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

Componantur quotcunque pares numeri AB, BC, CD. Dico & totum compositum AD, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione S. Ergo E, dimidia pars ipsius AB, & F, ipsius BC, & G, ipsius CD. Quoniam igitur est vt

A.....B ...C.....D
E...F..G....

AB, ad E ita BC, ad F, & CD, ad G; (quod semper sit proportio dupla) *b* erit quoque vt AB, ad E, ita AD, ad E, F, G, simul. Est autem A, B, ipsius E, duplus. Igitur & totus AD, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

b 12. *sep.*

xxiij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

Com-

COMPONANTVR quotcunque numeri impares quorum multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, D E, sint impares: differet quilibet unitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. a Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. b Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A . . B . . . . . C . . . . . D . . . . . E

a 22. noni.
b 12. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

Si impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

Quotcunque numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum, A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate a pari ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. c Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. d Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cum impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . B . . . C . . . . . E . D

c 12. noni.
d 21. noni.

SCHOLIVM.

Pari ratione. Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cũ ex defin. Impar à pari differat vnitate. e Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.

e 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS 24. xxv.

Si à pari numero par detrahatur. Et reliquus par erit.

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse, Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor.

A . . . . C . . . . . B

Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia, erit & A C, numerus par.

Sed iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidia

dias partes habent. ex definitione, sit D B. demidia pars ipsius A B, & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando vt A B, ad C B, ita D, B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad C B, ita D E, ad E B. Rursusque permutando, vt A C, ad D E, ita C, B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B duplus est. Igitur & A C, ipsius D E duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A.....C...D,..E.... B
A.... .. D... C.. E.. B

SCHOLIVM.

Facilius demonstrabimus hanc pr posi. ducendo ad impossibile, hoc modo. Sit A C, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate A D, erit reliquus D C, par. a Igitur cõpositus

A..D.... C..... B

a 23. no si. *D B, par quoque erit: ac proinde, addita vnitate A D, totus A B, impar fiet, quod est absurdum, cum ponatur.*

THEOR. 23. PROPOS. 25.

xxv j. **Si à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.**

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; b erit & reliquus A D; par, Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....C. D...,B

b 24. no si.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

xxvij. **Si ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.**

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A, D, par aufertur C D; c erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A.... C .....D.B

c 24. no si.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

xxviij. **Si ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.**

Ex

Ex impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cum detrahatur CB, par; a reliquis DC, par quoque erit: Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A . D . . . . C . . . . . B

a 24. 9no

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Fiat ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cum B, sit par; componetur C, ex tot partibus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; *b* Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . . . .
C . . . . . .

b 21. 9no.

SCHOLIVM.

Eadem demonstratione ostendemus & hoc.

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

Nam rursus C, componetur ex tot paribus i: si B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

Constat quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsi B, æqualib. quorũ multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. *c* Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . .
C . . . . . .

c 23. 9no.

COROL.

COROLLARIVM.

A... B... C..... Hinc sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

Metiatur impar A, parem B, per C.

a 29. noni. A... C.... B..... Dico C parem esse. Nam si impar sit; a erit B factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

Metiatur impar A, imparem B, per C.

b 28. noni. A... C..... B..... Dico C, imparem esse. Si enim sit par; b erit B, factus ex A, impari in C, pari, par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

SCHOLIVM.

Ex his clarissime quoq; demonstrabimus theorem. 11. lib. 2. numeris non posse accommmodari: Id quod etiam in scholio propos. 14 huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus AB, in partes AC, CB, ita vt numerus ex AB, in CB factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur vtraq; pars AC, CB, impar est; aut maior AC impar, & minor CB,

A ---- C --- B D --- E ---

par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar: aut denique vtraq; pars AC, CB,

c 22. noni. d 28. noni. *par. Sit primum vtraq; pars AC, CB, impar, c ideoq; totus numerus AB, par. d Igitur qui fit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex AC, in se; erit par numerus impari æqualis, quod fieri non potest.*

c 28. noni. *Deinde sit AC, impar, & CB, par, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar. c Quia ergo numerus ex A, B, impare in parem CB, factus par est: & numerus ex impare AC, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis: quod est absurdum.*

f 29. noni. *Tertio sit AC, par, & CB, impar, idcoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar. f Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar est: & numerus ex pare AC, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille par huic impari æqualis: quod est absurdum.*

Quarto sit vtraq; pars AC CB, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35 lib. 7 ductibus numeris minimis D E, proportione AC, ad CB; a erunt D E inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterq; impar, vel vnus impar, & alter par. Et qu a est, vt AC, ad CB, ita D ad E. b erit conuertendo, vt CB, ad AC, ita E, ad D. Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D. c Est autem vt AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod numerus factus ex AB, in CB, aqualis ponatur quadrato medy AC Igitur erit quoq; vt totus DE ad D, ita D, ad E, d ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, in E, aqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus DE, sectus est in partes D E, quarum vel vtroq; impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE in partem E, aqualis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse tam demonstratum est in numero AB, quando vtraq; pars AC, CB, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.

a 24 sep.
b 26. sep.
c 20 sep.
d 10. sep.

THEOR. 20. PROPOS. 30. xxxiij.

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

Metiatur impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo ex iis, quæ ex antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par, atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A, metiatur B, per C, e metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3 definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam vero est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsis C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. f Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . C . . . .
B . . . . . .

e 8. prænum.
f 40. sep.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiv.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus sit; & ad illius duplum primus erit.

Impar numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primum esse. Si n. A C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D, qui necessario impar erat. Nam si sit par, cum metiatur

A . . . . B . . . . .
C . . . . . D ----

a 28. noni. tur imparem A: a erit A, factus ex D, pari in eum numerum quem metitur, par. Quod eſt ſurdum, ponitur enim A, in

A..... B.....
C..... D----

Quare D, impar patem C, met (eſt enim C, par, cum dimi

b 30. noni. habeat B) b metietur quoque numerum B, eius dimidium: M tur autem & A. Igitur D, ipſos A. B, primos inter ſe metitur. Q eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt. Ergo pri Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Sequitur hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus eſt, primum quoque eſſe non ſolum ad eius duplum, vt Euclides demonſtrauit, ſed etiam ad eius quadruplum, octuplum, ſedecuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam ſi primus

c 31. noni. eſt ad duplum, e primus quoq; erit ad quadruplum, qui dupli duplus eſt: Et ſimiliter ad octuplum, qui quadrupli duplus eſt, &c.

XXXV. THEOR. 30. PROPOS. 32.

Numerorum à binario duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tantum.

Numeri à binario A, dupli quotcunque ſint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, eſſe pariter pares tantum: Quod enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt. Nam

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

expoſita vnitate, cum A, ſit binarius, & B. C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales nimirum in proportione dupla. d Quare A, quemlibet ipſo-

d 11 noni. rum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem quemtem metietur per aliquem ipſorum A, B, C, D, E: qui cum omnes ſint pares, vtpote dupli á binario: metietur quemlibet ipſorum B C, D, E, par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Quod autem iidem numeri ſint pariter pares tantum, liquido etiam conſtat. Cum enim A, B. C. D, E, ſint ab vnitate continue proportionales, ſitque A, proximus vnitati numerus primus, nimi-

e 13. noni. rum binarius: e nullus alius quemlibet ipſorum metietur, præter ipſos A, B, C, D, E: qui cum ſint omnes pares, metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par eſt tantum. Numerorum igitur á binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui ſint pariter pares tantum. Sint n. A, B, C, D. E F.

à bina.

à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter; ares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, praeter eos, qui in hoc ordine continentur. Atq; adeo si ordo numerorum à binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par, (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G pars dimidia; metietur binarius numerus par, ipsum G per H, numerum imparem; Atq; adeo G pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namq; pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nã si dicatur impar, cum sit ipsius G pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G per I numerum imparem: Atque ob id G, pariter impar erit: Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atq; i a deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I dupli. Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, praeter eos qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I — H — G —

THEOR. 31. PROPOS. 33. xxxvj.

Si numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

Habeat numerus A dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A, & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum, sipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. a Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum aequalis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium. b Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pari-

A . . . . . .
B . . . . . C . .
D —— E ——

a 9. prop. nun:

b 19. sep.

pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Itaq; si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuũ erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neq; dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, prater duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium prater ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem, & pariter imparem.

Impares	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	

xxxvij.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

Si par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

Par numerus A, neque sit á binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

A . . . . . .

Quod autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariã, & eius dimidio rursus bifariam, & ità deinceps: tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, á binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem. Alias si per imparem metiretur, & cum impar imparem multiplicãs faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdũ. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque á binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

219. noni.

SCHO-

SCHOLIVM.

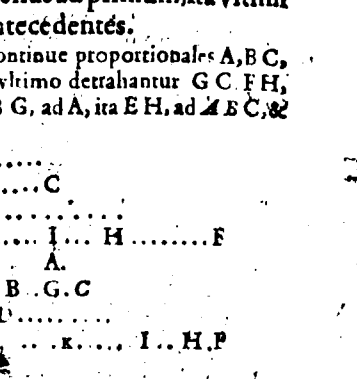
Facile ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sunt, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares & pariter pares & pariter impares.

Porro ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9 lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxvii

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F, & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur G C, F H, primo, *A*, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad *A* B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis: quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt *A*, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita *D*, ad B C, & *B* C, ad A; *atque* est E F, ipsi D, & I F, ipsi B C; &



H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; *atque* proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad *D* B C A simul. (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat. a 12. *huius primi.*

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in noti iam summa quotcunque numerorum continue proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes. Si primus à secundo, & vltimo dematur, fiatq; vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebit vt tota summa Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quando quidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inuenien dus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus vltimi. Vt in exemplo apposito si primus numerus, nimirum vnitas detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo: erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo, si secundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summa inuenta 1003 procreabitur summa omnium 3280.

1.3.9.27.81.243.729.2187.

xxxix. **PROBL. 34. PROPOS. 36.**

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

Sint ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; a 19. *septim.* sunt ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; b Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; b 17. *prop. hum.* ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8 D, 16.
E, 31. G. -- 262 H, 124. I, 248 F ----- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 48.
O----P---

E, ipſius I, duplus erit. Quare E. G. H, I. F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, ſintque reliqui exceſſus M, N. *a* Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E, (Cum enim G, duplus ſit ipſius E, ablatuſq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E G, H, I, ſimul. *A* Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & *A*. B, C, D, numeris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, ſimul. Quare cum vnitas, & omnes

a 35. nomi

Vnitas. A, 1. B, 4 C. 8. D, 16.
E, 31. G---- 62, G, 124 I, 248. F---- 496.
K, 31. M, 41. L, 31. N, 465.
O----. P----

numeri, *A*, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipſum F; (Cum enim F factus ſit ex E, in *D*; *b* metietur D, ipſum F; *c* atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, *d* qui ipſum *D*, metiuntur. Rurſus cum I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, *e* metientur quoque eundem F, numeri E, G H, *f* qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, matiatur, vt mox oſtendemus: Erunt vnitas & numeri *A*, B, C, D, E G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

b 7. pronum. c 11. pronum. d 11. pronun. e 11. pronun. f 11. nomi.

Quod autem nullus alius numerus, præter *A*, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; *g* atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium: *h* ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cum A, B, C, *D*, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, *i* vltimum D, nullus alius præter A, B, *C*, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad *D*, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipſum P, metietur Cum ergo E, primus ſit, *k* erunt E, & P, inter ſe primi; *l* ideoque in ſua proportione minimi: *m* Ac proinde æque metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. *n* Nullus vero alius præter A, B, C, ipſum *D*, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A, B, C. Sit ergo idem. qui B, & quotſunt B, C, *D*, totab E, ſumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita F, ad H; *o* Ac proinde idem numerus fiet ex *B*, primo in H, quartum, qui ex *D*, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex *D*, in E, æqualis

g 9. pronun. h 19. ſeptim. i 13. oct. k 31. ſeptim. l 23. ſep. m 21. ſeptim. n 23. oct. o 19 ſeptim.

fuit ei, qui ex P, in O. Item ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, &, atque adeo erit, vt P, ad B. ita H, ad O. Est autem P, idem qui B. Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

19. septim.

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorũ partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cũ ipsa vnitate omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1, 2, 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28 factus ex 7. in 4. est perfectus habẽs has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 30. factus ex 15. in 8. perfectus.

Denique quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

Libet hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, quam ob rem admirabilis illa proprietas, quam libro 7. septimo loco, eum de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

Quolibet numero per duos quosuis numeros diuiso erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat Quotientes D, E.
Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad finem 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem

A, fiet

A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: a erit vt B, primus ad C, a 19. *sq. secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.*

II.

Quoliber numero per quotuis numeros diuiso, erũt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

Diuiso enim numero A, per B, C D E, sint Quotientes F G H, I. Dico esse vt B, ad C, ita G, ad F Et vt C, ad D, ita H ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H Hoc autem manifestum est ex theoremate primo, proxime demonstrato. Cum enim duo B, C diuidentes A, faciant F, G, erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

A, 48.
B, 3. *C*, 4. *D*, 8. *E*, 6.
F, 16. *G*, 12. *H*, 6. *I*, 8.

III.

Quoliber numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso, erunt quotientes conuerso ordine in eadem proportione continue proportionales.

Diuiso enim numero A, per B, C, D, E, continue proportionales sint Quotientes F, G H I Dico I H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continue proportionales esse Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

A, 15.
B, 1, *C*, 2. *D*, 4. *E*, 8.
F, 15. *G*, 7½. *H*, 3¾. *I*, 1⅞.

IV.

Si sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

Sint quotuis numeri A B C, quorum summa D Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitq; vt A, ad B, ita E ad F, & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, sigillatim, ita H ad E, F, G, sigillatim.

A, 3. B, 6. C, 20. D, 29. E, 6, F, 12. G, 40. H, 58.

Cum enim sit, vt A, ad B ita E ad F erit componendo vt A B simul ad B, ita E, F, simul ad F Vt autem B, ad C, ita est F, ad G, Igitur vt ex æquo A, B, simul, ad C, ita erit E, F, simul ad G: Et componendo, vt A, B, C, simul, hoc est, vt D, ad C ita E, F G, simul, hoc est H ad G.

Quia igitur, vt D, ad C ita H ad F Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D ad B ita H ad F.

Denique quia est, vt D, ad B, ita H ad F Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E, erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E quod est propositum. Eademq; ratio est de pluribus.

V.

Si sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus, summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

Nam vt in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summæ priorum ad primum, quæ summæ posteriorũ ad primum, ac proinde vtriusq; proportionis id est denominator erit Cum ergo ex diuisione antecedentis per terminum consequentem gignatur denominator proportionis, idem Quotiens omnino procreabitur, si vtraq; summa seorsum per primos numeros, quaq; per suum, diuidatur. Eademque ratio est, si per secundos, tertios, quartos &c. diuisio fiat. Constat ergo propositum.

VI.

Si summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur; Et Quotientum summa per ipsos Quotientes; Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis semper iidem Quotientes ordine conuerso.

Sint continue proportionales quotuis numeri A, B C, D, quorum summa E, per ipsos diuisa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum summa K, per eos diuisa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine conuerso, hoc est, F, & O, eosdem esse; Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F G, H, I, eandem continuam proportionem habent conuerso ordine, quam numeri A B C, D. Et quotientes L, M, N, O, conuerso ordine eandem, quam Quotientes F G H I, hoc est, eandem eodem ordine quam numeri A B, C, D: erit per 4 theorema, E ad A, vt K ad I. Quare cum ex diuisione antecedentis termini per consequentem vocatur denominator proportionis, fiet idē Quotiens ex diuisione E per A, qui ex diuisione K, per I. Cum ergo Quotientes sint F & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G & N, H & M, I & L, &c. quod est propositum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 15.

F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$. K, $28\frac{1}{8}$.

L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $\frac{1}{2}$. O, 15.

VII.

Si summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, vel denique (si Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.

Sint primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D E, F, quorum summa G, & per ipsos sigillatim diuisa faciat

A, 1 B, 2, C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.

H, $6\frac{3}{7}$. I, $31\frac{1}{2}$ K, $15\frac{3}{4}$. L $\frac{7}{8}$. M $3\frac{15}{16}$. N, $1\frac{31}{248}$. O, $114\frac{1}{2}$.

Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summam O, æqualem esse numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M N sunt continue proportionales conuerso ordine in proportione A ad B, erit N, ad M, vt I, ad H, a Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qua ex M, in I, hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes conuerso ordine, hoc est, summa O, diuisa per H, facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N, per defin. 21 proinde & ex I, in M, & ex K, in L. a 19. sept.

Sint deinde quotuis numeri multitudine impares continue pro-

portionales A, B C D E, quorum summa F, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K L, quorum summa M. Dico summam M aqualem esse numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim aqualis sit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonstrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K continue proportionales sunt, a erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M aqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E E, 16. F, 31.
G, 3 1. H, 1 5/8. I, 7 3/4. K, 3 7/8. L, 1 15/16. M, 60. 11/8.

-20. septim.

Hinc fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientem esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

Itaq; si inueniendi sint quotcunq; numeri continue proportionales, in data proportione, quorum summa aqualis sit numero, qui ex primo in vltimū gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis aqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunq; continue proportionales, quot inquirintur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderētur quotuis numeri multitudine impares, quorū summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidē numeri cōtinue proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim dividenda. Quotiētes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eod hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sane est, posse reperiri quotcunq; numeros continue proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa aqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis aqualiter distant, inter se multiplicatis; & denicq;, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in se ipsum multiplicato.

Sic etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa aqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotiētes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa aqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa aqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; summa 11. per vtrumque dividatur. Nam Quotientes 1 5/6 & 1 1/5 sunt numeri quæsiti. Habent enim

proxi-

proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

Sint duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem & numeratorem C, ſit vnitas. Dico ita eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B in minutia A B, ineluditur; propterea quod minutia A B, diuiditur in tot minutias minutia C B, æquales, quot vnitates ſunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B.

A 229. *d.* *Igitur eadē pars eſt vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutia A B; ac proinde eſt, vt vnitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A, B: Et conuertendo, ita A, ad C numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum.* *ſin.*

Quoniam vero minutiæ ſunt fractiones ſiu particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuſpiam numeri, N, quæ enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant eas reſpectu ſolius vnitatis eſſe accipiendas, propterea quod falſo putant, ea in demonſtrationes nō poſſe omnes explicari in numeris integris, ſed ſolū in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſmuetiā numeris integris accommodabimus, & enabimur omnes minutiarū demonſtrationes numeris integris explicare vt exemplo etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes, quas afferimus.

Sint ergo data minutiæ $\frac{6}{11}$ *&* $\frac{1}{11}$ *particulæ, verbi gratia, huius numeri integri* 44. *Et quia eius* $\frac{1}{11}$ *eſt* 4. *&* $\frac{6}{11}$ *ſunt* 24. *perſpicuum eſt, ita eſſe* 4. *ad* 24. *vt eſt numerator* 1 *ad numeratorem* 6 *Velita* 24. *ad* 4 *vt* 6 *ad* 1.

Hanc porro propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. *in vniuerſum de quibuſcunque duabus minutiis eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat vnitatem.*

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denominatorem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

Sit minutia quacunque A, B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, aequalis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit aequalis. Quando enim numerator denominatori est aequalis, minutia suo integro aequiualet, quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat.

A,3. C,1. D,5.
B,5. B,5 B,5

a 1. huius. *a Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex aequo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, aequalem ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.*

Al ter. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutia ipsi A B, aequales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. b Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C quod est propositum.

A,1. D,1. B,5. C,30.

b 20. def. *DEINDE non sit Vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas, & denominator idem B, qui minutiæ A C, c Et quia est vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus; erit ex aequo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod est propositum.*

A,3. D,1. C,1.
B,5. B,5. C,30.

c 1. huius

Itaque si data minutia $\frac{3}{5}$ sit cuius numeri integri 30, erit eius $\frac{1}{5}$ numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$ numerus 18, vbi videre ita esse 18. ad 10. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

Minutia quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

Sit qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. d Quoniam enim est, vt A, ad B, nume,

d 2. huius.

B. numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad suum integrum C. erit permutando vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum E. et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cui ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est integri toties ac ea pars quoties vnitas est in denominatore E.) ab ipso denominatore B, denominata (Cum enim aque metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrũ toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt dicebamus ex 2. diffin. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B denominata quod est propositum.

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

Ponatur minutia $\frac{3}{5}$ esse huius integri 30 cuius $\frac{3}{5}$ sunt 18. Et quia numerator 3 numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator valet 150 (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$ sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinq;) iquidem constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est triũ vnitatum quarum qualibet numerũ integrum 30. significat, qua tres vnitates faciunt 90 partem, inquã, à denominatore 5. denominatã; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est quinque, vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, qua quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5 denominata.

IV.

Datæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

Quod prima propositione ostensum est de duabus minutiis, quarum altera numeratorẽ habet vnitatem, demonstratur hic de quibuslibet minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. a Quia enim est, vt A, ad B ita minutia A B, ad suum integrum E, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B: (Nam b cum sit, vt C, ad B, ita minutia C B ad integrum, erit conuertendo, vt B ad C ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C numeratorem ita minutia A B ad minutiam C B, quod est propositum.

A, 6. C, 1.
B, 7. B, 7.

a 12. huius.
b 2. huius.

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{6}{7}$ sunt 24. & $\frac{1}{7}$ sunt

& $\frac{3}{7}$ sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

Sint duæ minutiæ A B, C D: Et ex A. in D, fiat F. & ex C. in B, fiat C. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, vt est F. ad H.

Fiat enim H, ex B. in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, b ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia A B, ad integrum, ita F. ad H. Rursus quia C D, multiplicantes B, faciunt G H; c erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam C D. (Nam d cum sit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit conuertendo vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam C D. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D. quod est propositum.

a 18. septim.
b 2. huius.
c 18. septim.
d 2. huius.

F. A B,
H. Integrum.
G. C D.

Si duæ minutiæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10 ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

Itaque si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G. erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor. Et si maior, maior: propter eandem proportionem F ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

Integrum ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus, ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

Sint

Sint duæ minutiæ AB CD. Et ex B in D, fiat H: ut ex A, in D, fiat F. & ex C in B fiat G Dico ita esse integrum ad summam minutiarum AB, CD ut est H, ad summam numerorum F, G. Quoniam enim est, ut minutia AB ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, ut summa minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita summa numerorum F, G ad G. Ut autem minutia CD, ad integrum, ita est G, ad H, nam b ut minutia CD ad integrum, ita est C, ad D. Et ut C, ad D, ita est G, ad H: propterea quod G D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, in H. Igitur ex æquo erit, ut summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H Et convertendo, ut integrum ad summam minutiarum AB, CD, ita H ad summam numerorum F, C quod est propositum.

F,10. G,12. A,24. C,4. B,3. D,5. H,15.

AB, CD, F,G. CD. G. Integrum. H.

a 5. huius.

b 2. huius.

c 18. sept.

Sint rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$. *particulæ numeri* 30. *cuius* $\frac{2}{3}$. *sunt* 20. *&* $\frac{4}{5}$. *eiusdem* 24. *a. proi: de summa minutiarū* 44. *Vbi vides, ita esse integrum* 30. *ad hanc summam* 44. *vt est* 15. *ex denominatoribus productus ad summam numerorum* 10.12. *ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.*

VII.

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

Habeant duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A multiplicans C, B facit D, E; d erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, e ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod est propositum.

D,05. E,35. A,5. A,7. B,7. C,12.

d 17. sept.

e 5. huius.

Duæ minutiæ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{21}$. *sint particulæ numeri integri* 42. *cuius* $\frac{5}{7}$. *sunt* 30. *&* $\frac{5}{21}$. *eiusdem* 10. *Manifestum autem est, ita esse* 30. *ad* 10. *vt posterior denominator* 21 *ad priorem* 7.

VIII.

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

Sint duæ minutiæ AB, CD. sit autem eadem proportio A. ad B. quæ C. ad D, numerator ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. a *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrũ, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD quod est propositum.*

a 2. huius.

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

Sed sint iam æquales minutiæ AB CD. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum: b *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B, Et vt minutia CD, ad integrum ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

b 2. huius.

Deinde sit maior proportio A, ad B, quam C, ad D: Dico maiorem esse minutiam AB, quam CD. c *Cum enim sit, vt A. ad B ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum ponatur autem maior proportio A, ad B quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AC, ad integrum quam minutia CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quam minutia CD. quod est propositum.*

c 2. huius.

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

Verum sit iam minutia AB, maior, quã minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quã C, ad D Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrũ, quam minutiæ CD minoris ad idem integrum. d *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B: & vt minutia CD, ad integrum, ita C. ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod est propositum*

d 2. huius.

Minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. integer numerus sit 24. cuius tertia $\frac{3}{4}$. quidem $\frac{9}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. eiusdem numeri 24 sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem

rum numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. *Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

a 8. huius.

SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse, A, ad C, vt B, ad D. b *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.*

b 8. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D, c. ac propterea maior erit minutia A B, quam C D. quod est propositum.

A, 6. C, 3.
R, 9. D, 5.

c 8. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quam C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quam B ad D. d. Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum.

d 8. huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{7}{9}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{7}{9}$. id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorem esse minutia $\frac{7}{9}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt. E, G; c *erit vt A, ad B, ita E. ad G.* f *Quare minutia A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* g *erit vt C ad D ita F, ad G.* h *Igitur minutia C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.*

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 1.
B, 3. D, 5.
G, 15.

c 18. sexti.
f 8. huius.
g 18. sexti.
h 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum reducendum ad minutiam cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, aequalis. Dico minutiam BC, unitati A, aequalem esse. Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia BC ad integrum A: Est autem B, ipsi C, aequalis. Igitur & minutia BC, integro A, id est, unitati, erit aequalis. quod est propositum.

a 2. huius.

A, 1. — B, 6.
C, 6.

DEINDE sit integer numerus A revocandus ad minutiam, cuius denominator C. E A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A aequalem esse. Supponatur enim integro A, unitas D, vt fiat minutia AD, totí unitati, aequalis quotiens unitas est in A. Quia igitur E A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A ad D, unitatem. Cum ergo minutiarum AD, BC numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, b ipsae inter se aequales erunt. Quare cum minutia AD, sit integro A, aequalis, ob denominatorem, qui est unitas; erit quoque minutia BC, eidem integro A aequalis. est propositum.

b 8. huius.

A, 1. B, 12.
D, 1. C, 6.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Duplatur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore E: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt

A, 3. C, 6. A, 3.
B, 8. B, 8. D, 4.

fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiae AB. Cum enim minutiae AB, CB, eundem habeant denominatorem; erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiae AB, dupla erit. quod est propositum.

c 4. huius.

RVRSVS quia minutia AB, AD eundem habent numeratorem; erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem E, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiae AB, dupla erit. quod est propositum.

d 7. huius.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A. Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam AC, DB, dimidium esse minutiae AB.

A. 6. A, 6. D, 3.
B, 11. C, 22. B, 11.

e 7. huius. & 16. Cum enim minutia AB, AC, eundem habeant numeratorem; erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita AC, ad AB, minutia ad mi-

ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C minutiæ A B, dimidium quod est propositum.

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; erit vt D, ad A, numerator ad numeratorē, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex ius. 4. huius constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium, quod est propositum.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodē manente denominatore; vel (quando fieri potest) denominatori accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodē numeratore, vel (quādo fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E & valorē huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C, & G, ex B, in D. Dico datā minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B. Et quoniam est vt A, ad B, ita minutia A B, ad suū integrum, nimirum ad minutiā C D, cuius integrum est E: & Item ius. 5. huius vt A, ad B ita est F, ad H, quod A, B, B, ipsum C, multiplicantes faciant F, H. Erit quoq; vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrum E: & Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G. Erit quoq; vt C D, minutia ad suū integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cū eius valorē respectu integri E, exp-

F, 6.	H, 9.		
A, 2.	C, 3.	E, 1.	
B, 3.	D, 4.	E, 24.	
G, 12.	K, 1/2.		

b 1. huius. c 17. septimi. d 2. huius. e 17. septimi.

exprimat. Igitur erit quoq;, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E. a *Cumergo quoq; sit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem sunum integrum E; aquales erunt minutia simplices K, & F G: ac proinde cum minutia K, aqualis sit data minutia erit quoque simplex minutia F G, aqualis data minutia A B, respectu minutia C D, cuius integrum E quod est propositum*

a 2. huius.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutia $\frac{3}{4}$ respectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

SIT primum A B, minutia minutia C D.

E, 6.		*Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F.* b *Et*
A, 2.	C, 3.	*quoniam minutia E F, exprimit valorem mi-*
B, 3.	D, 4.	*nutiæ A B, respectu minutiæ C D, reducta erit*
F, 12.		*data minutia minutia ad simplicem minu-*
		tiam E F. quod est propositum.

b 13. huius.

DEINDE sit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita vt G D, sit minutia minutiæ E F, & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F, atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentu minutia ducantur Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, data minutia minutiarum æqualem esse. c *Nam minutia G H, æqualis est minutiæ A B, minutiæ C D, respectu minutiæ E F, tanquam integri cuiusdam.* d *Item minutia I K, æqualis est minutiæ G H, (hoc est minutiæ A B, minutiæ C D.) minutiæ E F, respectu integri, cuius K F, est minutia, & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiarum minutiarum. quod est propositum.*

G, 6.	I, 6.	
A, 2.	C, 3.	E, 1.
B, 3.	D, 4.	F, 2.
H, 12.	K, 24.	

c 13. huius.

d 13. huius.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius minutiæ $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. gigni minutiæ $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ minutiarum partes 24. numerus 6. respectu integri 24.

DATIS

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentę numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numerator sit C, metiatur per numerũ ex A, in D productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum, & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H, a *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* b *ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D facit, F,* c *metietur C, ipsum F per D:* d *Metietur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoq; C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutia F, respectu integri G, sunt q; numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* e *constituet C, minutia minutia F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare eum numeratores signant vnitatẽ, & denominatores numerum K, (quod numeratores sint vnitates, denominatores autẽ numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorũ multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutia F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus G, ipsum G, metietur per K, toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.*

G, 24. K, 8.
A, 2. C, 3.
B, 3. F, 12. D, 4.
H, 36. L, 9.
C, 1/4. F, 1/2. M, 1/8.

a 17. *septim.*
b 8. *huius.*
c 7. *prequa.*
d 5 *prænun.*
e 13. *huius.*

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B & C D, & ex A, in D, fiat E; atq; ex C, in B, fiat F; sintq; primum numeri E F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E factus ex A primo in D quartum æquales est numero F facto ex C secundo in B tertium, erit vt A primus ad C secundum, ita D quartus ad B tertium, denominator ad denominatorem. Quare minutia A B, C D, æquales sunt. VEL sic. Quoniam est vt E ad F ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E ipsi F æqualis; erit quoq; minutia A B minutiæ C D æqualis quod est propositum.

a 19. septim. E, 24. A, 2. B, 3. × D, 12 — F, 24. C, 8.

b 9. huius. c 5. huius.

SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum erit vt A ad C numerator ad numeratorem, ita B ad D, denominator ad denominatorem. Quapropter idem numerus fiet ex A primo in D quartum, qui ex C secundo in B tertium; ac proinde æquales erunt E, & F numeri. VEL sic. Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; proinde autem minutiæ æquales; erunt quoq; numeri E F, æquales, quod est propositum.

d 9. huius. e 19 septim. f 5. huius.

DENIQVE sit E numerus maior numero F. Dico minutiam quoque A B, maiorem esse minutia C D. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G primo in D, quartum, & ex G, secundo in B, tertium, erit vt G primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autem maior proportio A ad C, quam G, ad C; quod A maior sit quam G, h Igitur maior quoq; erit proportio A ad C, quam B ad D; ac proinde minutia A B, maior erit, quam minutia C D. i EL sic. Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, maior quam F; erit quoq; minutia A B, maior quam minutia C D. Quod est propositum.

E, 24. G, 1¾ A, 2. B, 3. × D, 12 — F, 21. C, 7.

g 19. septim. h 9. huius. i 5. huius.

VERVM

VERUM sit iam minutia AB, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB quam minutia CD, a erit maior proportio A, ad C, quam B ad D. Minor ergo numerus, quam A habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G. b Item ergo numerus fiat ex G, primo in D, quantum qui ex C secundo in B, tertium. Cum ergo ex A in D maior fiat, quam ex C, in D propterea quod A, maior est quam G, erit quoque E, factus ex A in D, maior, quam F, ex C, in B, genitus. VEL sic. Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E ad F, E; autem AB, minutia maior quam minutia CD, erit quoque E, maior quam F, quod est propositum.

a 9. huius.
b 19. septim.
c 5. huius.

ALITER. Hac est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmeticæ præceptis ad diiudicandum, vtra duarum minutiarum proportionum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem non inuti.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reuocetur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutia AB, sit æqualis. d Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad C, sumique C D, numeri minores numeris AB, non erunt A, B, minimi termini in sua proportione: e sunt autem & minimi, cum primi inter se sint, quod est absurdum.

A, 1. C, —
B, 12. D, —

d 8 huius.
e 23. sept.

SI vero A B, non sint inter se primi; f sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D, & B, per E. Dico minutiam DE, eius numerator D & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; g producentur A B ex C, in D, E. h Quare erit, vt A, ad B, ita D ad E, i ac propterea minutia AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A B metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.

A, 36. D, 3.
B, 48. E, 4.
C, 12.

f 2. sept.
g 8 prænun.
h 17. sept.
i 18. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando fieri potest, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat

C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datæ, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Qui enim B metitur D per E, a fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. b Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum ita E, tertius ad C, quartum; c ideoq; minutia A B. EC, æquales erunt. quod est propositum.

A, 3. B, 4. D, 36. E, 9. C, 12.

a 9. propun.

b 19. septim.

c 8. huius.

QVOD si B, non metiatur D. ex A in C, procreatum potuerit datæ minutiæ A B reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam EC. Quia ergo minutiæ A B. EC æquales sunt; d erit vt A, ad B, ita E, ad C. e Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C quartum, qui ex B, secunda in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. f Igitur B, metietur D per E. quod est absurdum. Ponitur enim ipsum D, non metiri.

A, 3. B, 4. D, 30. E, — C, 10.

d 8. huius.

e 19. septim.

f 7 propun.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem dividitur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor divisus, denominator vero maior numerus dividens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. g Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad dividentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Divisionis minutia AB, Quotiens divisionis numeri A per numerum B quod est propositum.

A, 6. B, 11. A, 6. B, 11.

g 8 huius.

HINC fit, si diviso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex divisione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum dividentem, qui maior est. Verbi gratia Divisio numero 23 per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc dividenda per 4. h. Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$ ita ut totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

h 19 huius.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ AB, CB, eiusdem denominationis.

nationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex additione minutiarum AB, CB, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominationem; a erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB. Et componendo, vt A C, simul ad C, ita minutia AB, CB, simul ad minutiam CB. b Vt autem C ad D, ita quoque est minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex æquo erit, vt AC, simul ad D, ita minutia AB, CB, simul ad minutiam DB. Cùm ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutiæ AB, CB, simul æquales minutiæ DB. quod est propositum.

a 4. huius.

b 4. huius.

A, 3 / B, 10. C, 4 / B, 10. D, 7 / B, 10.

DEINDE sint addenda duæ minutiæ AB, CD, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex duobus illis productu, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus.

A, 2 / B, 2. × C, 3 / D, 4 = E, 17. / F, 12.

Dico minutiam EF, esse summam ex datis duabus minutiis AB, CD, collectam. c Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita E, ad F: d Vt autem E, ad F, ita quoque est minuti. EF, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum AB, CD, æqualis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF, summa erit ex minutijs AB, CD, collecta. quod est propositum.

c 6. huius.

d 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutiis AB, CD, æquales, vt ex demonstratione propp. 5. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, summa minutiarum AB, CD, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas AB, CD, reducta sunt, vt initio huius propositionis demonstratum.

IAM vero datis pluribus minutis; addenda primum erunt duo prima: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutiis, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbigratia, $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 40. & $\frac{3}{4}$ sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc. est, totius numerus integer 60. & insuper 25 partes, quæ faciunt $\frac{5}{12}$ integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{9}$. est $\frac{2}{27}$ hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$ ipsius 12 at $\frac{4}{9}$ eiusdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB detrahenda sit minor CB, sintque primum hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, reliquam esse post detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex C & D. Minutia ergo AB, cuius numerator A ex numeratoribus C D collectus est, summa est duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis propositum ostensum est. Quare detracta minutia CB ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB quod erat propositum.

A, 7 — C, 3 — D, 4
B 10. — B, 10. — B, 10.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor CD, ex maiore AB. Ex C, numeratore minoris in B denominatorem maioris fiat E, & ex A, numerator maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, esse reliquam post detractionem minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H: b vt autem A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit vt F ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicat C, D, facit E, H, c erit vt C, ad D, ita E, ad H. d Vt autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque vt E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est vt E primus ad H, secundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum quartum numerum: e Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia GH, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutia CD, GH,

A, 3 — C, 2 — C, 7.
B, 4. — D, 5 — F, 20.

a 17. septim.
b 2. huius.
c 17. sept.
d 2. huius.
e 2. huius.

tertium

tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis. (Nam E, ex F, detractis reliquis G) ad eundem H. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia C D, G H simul ad integrũ. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutia A B, ad integrum; erit quoq; vt minutia A B, ad integrũ, ita minutia C D, G H simul ad idem integrũ: ac propterea æquales erunt minutia A B, & minutia C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H, quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignũntur duæ minutiæ eiusdem denominationis minutiis datis æquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E fuerit ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, vel qua post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, vetuti initio huius propos. ostendimus est.

IAM vero si dentur integra una cum minutiis, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutiæ a minutiis. Quod si minutia detrahenda, maior sit quam ea, à qua fieri debet subtractio, a reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, a quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$, subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$ ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quatum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{4}{7}$. remanebuntque 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. 11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$ hoc est, ex 30. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam G D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, b Erit q; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita C, ad H. Quia vero C, multiplicans A F, facit E H; c erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit C, & F;

H, 60. 40.

A, 2 C, 4. E 8. b 5. 3 ita
B, 3. D, 5. F, 15.

c 17. 7 ita

a 17. sep. A. E. B. G. F. H. a erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex aequalitate perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: b Et vt A, ad B, ita

b 2. huius. est minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiae A B, in minutiam C D, quod est propositum.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositae minutiae per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiae propositae denominatur; propterea quod vnitas integro numero supposita in denominatore data minutia ducta eundem denominatorem datae minutiae non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$ per 5 fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

c 11. huius. SI vero integris minutiae adhaerent, c reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhaerente, atque ex numeratore huius minutiae, & numeratore minutiae adhaerentis vnus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$ per $4\frac{1}{2}$, fient hae duae minutiae multiplicandae, $\frac{23}{3}$ & $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris acciden modemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac substractione factum est, sed cum quadrato numeri integri assumpti; quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, cōferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiae huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc est quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT dividenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita vt

A, 12. C, 5. E, 4.
B, 16. D, 8. F, 2.

diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam B F, esse Quotientem diuisionis minutiae A B,

A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D metitur B per F, gignetur A, ex C, in E & E, ex D, in F. b Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D; ac proinde ex diffin. multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cum sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1; erit ex diffin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. quod est propositum.

a 9. primum.
b 21. huius.

A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.

DEINDE numeri C, D. minutia C D, non metiantur numeros A, B, minutia A B c Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C D, minutia C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, producti: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A. B, vt gignantur E, F, velut i propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F. per G H, erit minutia G, H, Quotiens diuisionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, vt initio huius propos. demonstratum est, quod est propositum.

c 15. huius.

E, 24.	A, 2.	K, 12.	C, 3.	G, 8.
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.

E, 90.	A, 6.	K, 15.	C, 3.	G, 30.
F, 135.	B, 9.		D, 5.	H, 27.

QVIA vero G H numeri minutia Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiusuis minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutia diuidenda in D denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atq; hoc verum est in omnibus minutiis, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet. atq; in hoc apposito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A B metiuntur per G H, & numeros E F, procreatos ex A, B, in K, productum ex G, in D, siue numeri C, D, metiuntur per E, M. atq; adeo tam

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4.	L, 24.
P, 54	B, 9.		D, 3.	H, 3.	M, 18.

minutia G H, quam L M, Quotiens est minutia A B, per minutiam C D, diuisa.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 2. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{2}{1}$. vt in appositio priori exemplo perspicuum est. Si autē minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerū 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

$\frac{8}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{16}{1}$.

$\frac{1}{2}$ $\frac{8}{1}$ $\frac{1}{16}$.

QVOD si munitia adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cū minutia adhærente, vel-uti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutia dividenda in denominatorē minutia diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutia, denominatorem autē ex numeratore minutia diuidentis in denominatorem minutia diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutia diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{2}$. vt his vides. Nam hac ratione numerator minutia dividenda semper ducitur in denominatorem minutia diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, qua præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

$\frac{3}{4}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{21}{8}$.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{5}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est, minutiam $\frac{5}{8}$ quæ proxime inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inserenda, sitq; primum sensus, addendam esse minutiam A B, vnius particulæ munitia C D, ad minutiam C D: hoc est, addendus esse $\frac{3}{4}$. vnius septimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutia in B, denominatorem prioris minutia fiat F, cui addatur A, numerator prioris, &

F, 24.

A, 3. C, 6. G, 27.

B, 4. D, 7. H, 28.

ru, & compositi numero G supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B D procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam GH, æqualem esse minutiæ A B, respectu unius particulæ minutiæ C D addite ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia unius particulæ minutiæ C D, a reducitur ad simplicem minutiam A H, cuius numerator idem est, qui M, productus nimirum ex unitate in A, denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D procreatus, vt in apposito exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C D, faciat F H; b erit vt C, ad D, ita F, ad H; c ac propterea minutia B D F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F A, minutiarum F H, A H, componitur, in mirum ex numero ex C, in B producto, & ex A, denominatore autem H idem qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt initio proposito ostensum est: hoc est, summam ex minutia A B, respectu unius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D quæ ostensa est æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insinuatione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutiæ A B, unius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D simul, quod est propositum.

a 14 huius.

b 17. septimi.

c 8. huius.

IAM vero si plures minutiæ A B, C D E F G H, sint inserendæ, hoc est, si minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, unius particulæ minutiæ E F unius particulæ minutiæ G H, & minutia C D, unius particulæ minutiæ C F, unius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, unius particulæ minutiæ G H addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex C, numeratore postremæ minutiæ G H, in H, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde productio ex K, in C, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Productio quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P. Atq; ita deinceps ducatur semper vltimus numerus cōflatus in denominatorē proxi-

A, 3.	I	M, 3	
B, 4.	D, 7.	H, 28.	
P, 119.	M, 59.	K, 14.	
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.
—	—	—	—
A, 1.	B, 2.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

proxime antecedentis minutia; productoq; numeratori eiusdem proxime antecedētis minutia adiiciatur, donec nulla minutia superstit. Numero autē P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primū H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, post hac N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam vt in duabus minutiis ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutia E F, in minutiam G H, hoc est, aqualis est summa ex minutia E F, vnius particula minutia G H, & ex minutia G H, collecta. Deinde minutia C D, vnius particula minutia E F, vnius particula minutia

a 14. huius. G H, a facit minutiā simplicem, cuius numerator C, (productus nimirū ex C, in vnitatē bis positā hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N: ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F D, procreatus: Minutia quoq;, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, produ-

b 8. huius. ctus, b aqualis est minutia K L; c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe

c 17. sep. cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutia. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrabimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, aqualis sit summa collecta ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atq; ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atq; ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; aqualis quoq; erit eadem minutiæ M N, summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particula minutia G H, atq; ex minutia C D, vnius particula minutia E F, vnius particula minutia G H. Rursus minutia A B, vnius particula minutia C D, vnius particula minutia E F, vnius parti-

d 14. huius. cula minutia G H, d facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoq;, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus

e 8. huius. Q, ex B, in N, productus, e aqualis est minutiæ M N, (quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem

f 17. sep. habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutia. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, aqualis sit summa collecta ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propos. 20. monstratum est; aqualis quoq; erit eadem minutia P Q, summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particula minutia G H, & ex minutia C D, vnius particula minutia E F, vnius particula minutia G H, & ex minutia A B,

vnius

unius particulæ minutiæ CD, unius particulæ minutiæ EF, unius particulæ minutiæ GH, quod est propositum. Eadem quæ ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, constatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G, H, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, a reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus AC, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus, B, D, productus, ut exemplum appositum demonstrat: b Minutia quoq; FH, æqualis est minutiæ CD; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quæ ex iis, quæ ad initium propos. 20. ostendimus æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiæ CD, in hoc posteriori sensu. Quod est propositum.

E, 18.	F, 24.		
A, 3	C, 6	G, 42	
B, 4.	D, 7.	H, 28.	

a 14. huius.

A, 3	C, 6	E, 18	
B, 4.	D, 7.	H, 28.	

b 8. huius.

c 17. septimi

QVOD si plures sint minutiæ inferendæ AB, CD, EF, GH, hoc est, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutiæ EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, producto numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, ut fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adjiciatur numerus ex C, E, G, factus, ut fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, ut fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus ultimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum usque locum assumptarum productus, donec nulla superstet minutia. Numero autem P, qui ultimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, ut

P, 232.	M, 104.	K, 20.			
A, 1	C, 3	E, 2	G, 4		
B, 2.	D, 14.	F, 3.	H, 5.		
Q, 120.	N, 60.	L, 15.			

in priori sensu. Dico minutiam P Q, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, ut dictum est. Nam ut in duabus minutiis demonstratum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiarum E F, G H, id est, aequalis est summa collecta ex minutia EF, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, a *facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus:* b *aequalis est minutiæ K L:* c *quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, aequalis sit per ea, quæ initio propos. 20. ostensa sunt, summa collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò est idem N; aequalis erit etiam eadem minutia M N, summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutia G H, & ex minutia C D, minutia* d *G H. Rursus minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia G H,* d *facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, sive ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq;, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem est idem Q, ex B, in N, procreatus,* e *aequalis est minutiæ M N:* f *quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem: cum B, in M, N, faciunt numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum aequalis sit, ex iis, quæ initio propos. 20. demonstrata sunt, summa collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem est Q, atq; ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q; aequalis quoq; erit summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutia G H, & ex minutia C D, minutia E F, minutia G H, & ex minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia G H, quod est propositum. Eademq; de pluribus est ratio.*

a 14. huius.

b 8. huius.
c 17. septimi.

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

d 14. huius.

e 8. huius.
f 17. septimi

DE

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquum eſt, vt compoſitionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. libr. 5. & ad defin. 5. libr. 6. & ad propoſ. 23 libr. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. libr. 5. & defin. 5. libr. 6. in iis propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe vero additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatiue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit vere totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclid. exiſtimant, ex hoc perſpicue confirmari poteſt: quod pars eſſet vel aqualis, vel maior toto. Nam cum hac compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. libr. 5. oſtendimus, ſi poſitis his tribus terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult. defin. 10. libr. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionib. 1. ad 10. & 10. ad 100. aqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem aqualem eſſe toti? Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ij dem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2 maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8 Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret aqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod ſequuntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8 Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris vero 3 & 16.

Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24. ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum, hoc eſt, ex proportione 12 ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (ſi hæc compoſitio eſt vera additio) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. vere totum eſt, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harum ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

24. 48.
12. 2. 3. 16.

subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione sub octupla 2. ad 16. ex proportione subdupla 24 ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta est subtractio. Quod si posterioris numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4. erit una partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. aequalis totis proportioni videlicet 24. ad 48. Et subtracta proportione 2. ad 4. ex proportione, aequali 24 ad 48. superesset adhuc proportio aequalitatis 12. ad 12.

24.	48.	
12. 2.	12. 4.	

qua maior est quam totum, hoc est, quam proportio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totum non augeri, etiam si ei infinita partes adderentur. Positis enim hus quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. vere coacervatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt ha proportiones simul sumptæ proportioni 12. ad 1 sint aequales: si cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12, 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres sunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coacervatum. Hæc autem omnia absurda sunt, & contra principia Mathematicorum. Hæc accedit, quod secundum communem hominum sensum duæ proportiones triplæ constituant proportionem sextuplam, non autem nonuplam, vt prædicti auctores volunt, quamquam nonupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in his ce numeris apparet, 9. 3 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, vt 3. illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5. moueant simul sumpta, vt 8. non autem ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem composita esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non posse dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non posset habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non statim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quam agens vt 6?

LIQVET ergo huiusmodi compositionem proportionum non esse additionem, sed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. libr. 6. demonstrauimus, vbi etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus composita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur positis tribus, quatuor aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius

propor-

proportionis, quam primi duo termini habent. Hac autem planius percipientur ex iis, quæ iam iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE *omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutia, vt libr. 5 docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionum denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunq;, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.*

PRIMVM *enim sint in vnam summam colligenda duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, suppositis primis vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos data proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraq; octupla est. Sic etiam ex proportione duplæ superquadripartientis septimas, & sesquialteræ, quarum denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadruplæ sesquidecimæ quartæ, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi primùm sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$ reuocauimus ad $\frac{18}{7}$ & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.*

3	×	5	12	×	40
1		5	4		8
		8			256
		1			32
18	×	3	54	×	6
7		2	21		4
		57			342
		14			84

DEINDE *si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & duplæ superquadripartientis septimas, vt hic perspicuum est.*

8	×	3	256	×	12	57	×	3	342	×	4
1	×	1	32	×	4	14	×	2	84	×	4
5			40			72			864		
1.			128.			28			336		

TERTIO *si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est per proportionem duplam: item proportio sesquialtera per superbipartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.*

3	—	2	6	12	—	10	120	3	—	8	24	9	—	16	144
1	—	1	2	4	—	5.	20.	2	—	5.	10	6	—	10	60

QVARTO *& vltimo si proportio sextupla dividenda proponatur per proportionem triplam: item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si divisorum termini permutentur, vt in divisione minutarum docuimus, sta instituetur operatio.*

6	—	1	6	120	—	4	480	24	—	2	48	144	—	6.	864
1	—	3.	3.	20	—	12.	240	10	—	5.	30.	60	—	9.	540

VIDES *ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutis.*

IAM *vero multiplicationem proportionum à nobis præscriptam, quam auctores additionem falso nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10 lib. 5 & defin. 5. lib. 6. egit, connumerare, atque adeo compositionem illam Euclidis vere esse multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, sive æquales, sive inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex consequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur,*

A, 6.	C, 12.	A, 3	C, 6
B, 2.	D, 4.	B, 1.	D, 5.
E, 72,	F, 8.	E, 18.	F, 10.
G, 24.		G, 12.	

esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C,

B, in C, fiunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt, G, & F, b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib 6 ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

a 18. septim.

b 17. septim.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam idem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatam, essequæ compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuisione proportionis, A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt diximus, esse eã, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atq; hac de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptum.

A, 9.	C, 3.		A, 4.	C, 6.	
B, 1.	D, 1.		B, 2.	D, 3.	
E, 9,	F, 3.		D, 8.	F, 12.	
G, 27.			G, 24.		

c 1. septimi.

d 17. sept.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

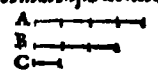
DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantùm satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solida, tum planas, neque perfectè intelligi possunt, neque cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes rectè intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmeticæ, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quam irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Imo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest,

abeſt, vt exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum perceptarum, quam qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod illæ demonſtrationes ad vſum poteſt reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vſurpaſti, vt ea res & maiori voluptati eſſet, & cõmodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius effuſuri, quam lucem aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis; quippe ita ingenia ſtudioſorum pro ædimento, ac luce, quam his noſtris commentariis afferre laboramus, plus caperent incommodi, minus q; demonſtrationes ipſas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſola neceſſaria ibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſeipſos, quando volunt, præſertim cum iam hoc ipſum nõ multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetice in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQVE, *vt ad inſtitutum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erat: declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadem menſura metitur.* 

Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem menſura, C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles. Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas lineas tam vnius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi &c. metitur. Similiter commenſurabiles dicuntur ſuperficies, quas vna, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidaque commenſurabilia, quæ metitur idem corpus, ſeu ſolidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES *magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, & latus eiuſdem quoniam nullam habent menſuram communem, vt propoſitio-*

positione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua cõmunis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quadam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTÆ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM *rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam vero longitudine incõmensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, alia sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; alia vero ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarũ quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusq; lineæ quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.*

QVOD *si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superque esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cum huiusmodi lineas una communis mensura metiatur, vt dictum est: At vero quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.*

IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit cõmunis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS *reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.*

HABENT *autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi communientiam inter se, & connexionem, vt li-*

vt linea longitudine cõmensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nulla linea dari possint commensurabiles longitudine, quin earũ quadrata commensurabilia quoq; sint, quoniam quadratum ex cõmuni earum mensura descriptum metitur tanquam mensura cõmunis earũ quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoque quadratum AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autem, vt omnes linea potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multa enim linea sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, qua tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incõmensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes linea potentia incommensurabiles; sint etiam incõmensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes linea longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multa linea reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata commensurabiles existant. Qua quidem omnia perspicua erunt ex corall. propos. 9. huius libri.

V.

His positis, ostenditur, cuicunq; rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potẽtia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis erunt omnium aliarum, qua cum ipsa comparantur, quadam illi commensurabiles lõgitudine ac potentia, quadam vero potentia tantum. Item quadam illi incommensurabiles longitudine tantum, quadam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictu ostendi, seu colligi, (quanquam eius verba hoc sonare videantur) hac sta se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse proposita recta linea commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

Linea *autem illa proposita, ratione cuius alia cõmensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Graecis ῥητὴ; Latinus vero Rationalis; quoniã ea ponitur semper certa, & nota, alia vero cum illa comparata non semper nota sunt, quamuis figulatim sumpta existant certa quoque, ac nota; cum qualibet in quotcunq; partes aequales possit diuidi.*

VI.

Et huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET *lineas alias illi, qua Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunq; appellari quoq; Rationales, non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparata reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.*

ITAQVE *ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis linea Rationali; (est enim tam numerus 20. quam 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui ideirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.*

VII.

Hvic vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM *antecedenti defin. Euclides lineas illas, qua longitudine & potentia, vel qua potentia tantum sunt commensurabiles posita recta Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, qua proposita recta Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine & potentia, sed longitudine tantum Rationali linea proposita incommensurabilis.*

VIII.

Et quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM *linea illa, qua certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius alia superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.*

IX.

Et huic commensurabilia quidem Rationalia.

OMNES *plana superficies quadrato Rationalis linea proposita commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illud, sed quia cum eo collata reperiuntur ei vel commensurabiles,*

vel

vel incommensurabiles : quemadmodum etiam linea, qua Rationali linea quomodocunque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia, quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles Lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac linea, qua Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dicta.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, qua possunt spatia quadrato Rationalis linea incommensurabilia, Irrationales : quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia : Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia : si vero non fuerint quadrata, sed alia quacunque figura rectilinea, appellentur rectæ, qua describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis linea, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis linea, appellari debere Rationales. Nam linea, qua possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4 diximus, demonstrabiturque ijs coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, qua possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis linea, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces : longitudine & potentia, atque potentia tantum : *apponere fere semper vocibus istis :* commensurabiles ac incommensurabiles : *Vix autem, & rarissime his :* Rationales, & Irrationales : *Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine*

dine & potentia, vel potentia tantum: Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt varie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusq; fint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum conferri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONVNciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum hue possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

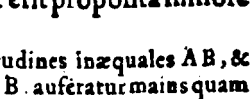
CÆTE-

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, vt ad propos. 13. diximus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, vt docuimus ad initium primi libri: curauimus, vt duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

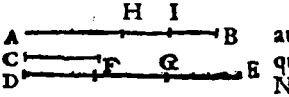
THEOR. 1. PROPOS. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quam dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine. 1.

PROPOSITÆ sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB. auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit quam AB, ita vt DE. sit multiplex ipsius C, proxime maior quam AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quã C dimidiũ HI, atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quam AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quam dimidiũ, vel certe dimidiũ, si DE, ipsius sit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB; maius. (Cum enim DE, maior sit quam AB; si ex DE, dimidium auferretur, nec nõ & ex AB, dimidium, esset quoque reliquũ ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidiũ, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quam HB, auferatur que ex FE; dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, maior sit quam duplex ipsius C; at ex HB, maius quam dimidium HI: erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem, ipsius DE, qualis hic est GE, ma-

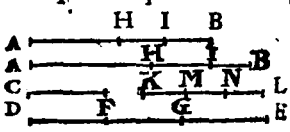


GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cum ex maiori DE, ablatum sit DB, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

ALITER Facta constructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH, maior est quam HB, vel certe illi æqualis sit, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, maior est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atque adeo tota AI, maior, quam tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quam AB, Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cum sit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit



214. *quinci.* KL, ipsius IB, tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,) & erit quoque C, maior quam IB. Ac proinde relicta est IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

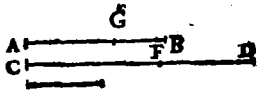
LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, dum quantitates inæquales proponi debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

ij. ## THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVA-

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarũ minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi A B, vel minor. Detracta aut F A B, ex C D, quoties potest, relinquat F D, se minorem, ita vt A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minorem G B, ita vt F D, metiatur ipsam A G; atque hoc semper fiat. *a* Relinquetur ergo tandem ex C D, vel A B, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum A B, ablata ex C D, relinquat F D, se minorem, erit C F, ablata maior, quam dimidia ipsius C D; alias si esset dimidia, vel minor quam dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius, quam dimidium, *b* relinquetur tandem magnitudo quædam minor quam E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur C F; *c* metietur quoque E, ipsam C F: Metitur autem E, & totam C D. *d* Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G; *e* quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: *f* ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.



a 1. *dec.*

b 1. *dec.*

c 2. *pronun.*

d 3. *pronun.*

e 2. *pronun.*

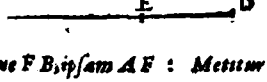
f 3. *pronun.*

SCHOLIVM.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

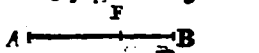
SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturque minor A B, ex C D, & reliqua sit E D, Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturque F B, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D: & E D, metitur A F: g metietur quoque F B, ipsam A F: Metitur autem



g 2. *pronun.*

a 1. *pronun.* b 2. *propun.* c 1. *pronun.*



autem & seipsam. a *Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE.* b *Igitur & FB ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED:* c *Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autem & FB; ipsam AB, metiri. Quare FB; vtramque AF, ED, metietur, quod est absurdum, ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua, aliqua precedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.*

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

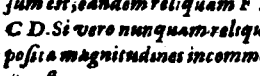
NAM si nunquam reliqua metiatur precedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

ITAQVE facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione. si reliqua quapiam metiatur precedentem: erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositam, vt constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur precedentem ED, ostensum est, eandem reliquam FB, metiri vtramque magnitudinem AB, CD. Si vero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire:

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD, commensurabiles sunt, fit vt si minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties potest, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties



potest, relinquat FB, & hoc semper fiat alterna quadam detractione, tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholii. Metiatur iam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, esse maximam mensuram communem magnitudinem AB, CD. Quod enim vtramque metiatur, ostendo

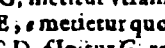
ostendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur AF; a metietur quoque FB, ipsam AF: At metitur FB, & seipsam. b Igitur FB, totam AB, metietur; c atque adeo & ipsam CE, quam AB, metitur. Cum ergo & ipsam ED, metiatur; d metietur quoque FB, totam CD, Metitur ergo FB, vtramque AB, CD. Quare vtriusque AB, CD, communis mensura est FB.

a 2. pronun.
b 1. pronun.
c 2. pronun.
d 1. pronun.

QVOD autem FB, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earū mensura, maior quam FB. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem & AB, ipsam CE; e metietur quoque G, ipsam CE: At metitur quoque totam CD, f Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipsam AF. g Ergo & G ipsam AF, metietur. Quare cum G, totam etiam AB, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam FB, maiorem minorem. h Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis mensura est ipsarum AB, CD, Quare FB, maxima earum communis mensura est.

e 2. pronun.
f 3. pronun.
g 2. pronun.
h 7. primi.

QVOD si minor magnitudo AB, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis: cum & seipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.



COROLLARIVM.

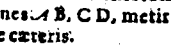
EX hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

ELIGITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum AB, CD. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoq; maximam mensuram FB. Eademq; est ratio de cæteris.

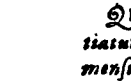
SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B; commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

Si vero A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D: quæ si metiatur quoq; magnitudinē C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

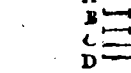


QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C: erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si



enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesin.

Si vero C, & D, sunt commensurabiles, e-



a 3. *dec.* *runt quoq; tres A, B, C, commensurabiles a Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D: cum E, metiatur D: & D, ipsas A, &*

b 2. *pronun.* B: b *metietur quoq; E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoq; C: metietur E, tres magnitudines A, B, C, Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

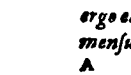
SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles; necne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primum in tribus: si quinq;, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

iiij. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. c Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C,

c 3. *dec.*



perspicuum est, D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nã si maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius libr. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D. maior magnitudo minorem, quod fieri non potest. Si vero D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commẽsurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur

d 3. *dec.* quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. d Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; e metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur au-

e 2. *pronun.* tem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarũ A, B, C, quemadmodum asseruimus.

QVOD

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quam E, fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

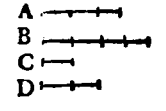
INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus cõmensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura cõmunis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

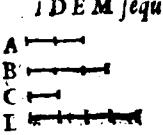
SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt,



num, & compositas proportionales, nempe A, ad D, & E, ad H. æquales esse: hoc est esse vt A, ad D, ita E ad H. Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A. ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.



SCHOLIVM.

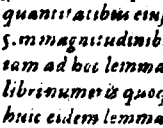
QVONIAM præcedentis lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Liber vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Velcerte demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportionis habent easdem, quas numeri E, F, G, H, ratarum induant numerorum.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. *a* Sic enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atq; numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

a 3. decimi.



SCHO-

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas libere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Ha enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atque adeo in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi linea ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quæ numerus ad numerum, quia commenſurabilia, atq; ideirco menſuram habent communem, ipſiſq; demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſa linea nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, communis menſuras non habent, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum cõmunis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E, per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E quos vnitas æquat, ac cõmunis magnitudinum cõmenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E

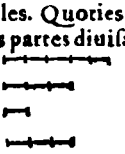
QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quamcunque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demonſtrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inuenientur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniam vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omnium eandem cum ipſis proportionẽ habentium; propterea fortaſſe Euclides in demonſtratione maximam cõmunem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.

A ——— D, 6.
C ——— Vnitas.
B ——— E, 4.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

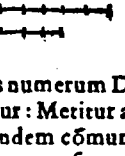
SI duæ magnitudines inter ſe proportionẽ habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico AB, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas cõtinetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarum partium, vni



æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinẽ quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties *in* A continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Est autem etiam vt C, ad D, ita
a 9. quinti. A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, *a* ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsum F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramq; A, & B, metitur:
b 1. def. *b* Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æque metiantur; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius. ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D. Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo B, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoq; A. Igitur A, & B, habentes



c 1. def. eãdem cõmunem mensuram E, *c* commensurabiles sunt Quod est propositum.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; sumenda alia linea, in tot æquales partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quadam arte posse inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum

ita

ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quam si se habeat A, vt C, ad D. a Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A. ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cùm sit vt A, ad F, ita C, ad D, sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterq; descripta.

a 13 sexti.

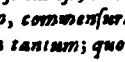
SCHOLIVM.

In hoc etiam theoremate manifestum est, lineam proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quamadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicātur habere, quam numerus ad numerum: *b* erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.



c 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue lōgitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 6. viij.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse.

2 5. *decimi.* Si enim A, & B, eredantur esse commensurabiles; erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

A ——
B ——

SCHOLIVM.

Quod si linea proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsa necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; imo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

Si sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam. Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

Sint continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non: sitq; vt A, ad C, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.

A —— D, 49.
B —— E, 42.
C —— F, 36.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplica-

plicata, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

QVÆ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

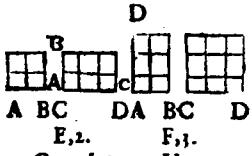
SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; *a* erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: *b* habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: *c* Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

a 5. *decimi.*
b 20. *sexti.*
c 11. *oct.*

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11 lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad

a 21 *sexti.* AB, ad CD, vt E, ad F: *a* Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt F, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum, ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad

b 1. *sexti.* F. *b* Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB. rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.



Sit secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine commensurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex BD,

c 20. *sexti.* d 11. *oct.* vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: *c* Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD proportionem duplicatã lateris AB, ad latus CD. *d* Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ AB. CD,

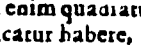
e 6. *decimi.* f 1. *sexti.* proportionem habeant, quam numeri E, F, *e* ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

Aliter. Repetatur constructio figuræ posterioris. *f* Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rursum ad CD, ita rectangulum BD. ad quadratum ex CD, vt supra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD. Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt supra ostendimus; ponitur que quadratum ex AB ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. igitur erit per lemma prætedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc est, vt E,

g 6. *dec.* ad F; *g* ideoq; AB, CD, rectæ proportionem habentes quã numeri E, F, commensurabiles sunt longitudine Quod est propositũ.

SINT

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratū. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratū ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.



QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod est absurdum. ponuntur enim non habere Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: *a* ipsa commensurabilia erunt; *b* Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. a *6. dec.* b *3. def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commensurabiles sunt, *d* cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis. c *3. def.* d *6. decimi.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse,

les esse, solum enim ex lineæ longitudine incommensurabiles, quarum
a 4. *defin.* quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a po-
b 8. *decimi.* tentia quoque incommensurabiles sunt, b cum earum quadrata incommensurabilia sint.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarii. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

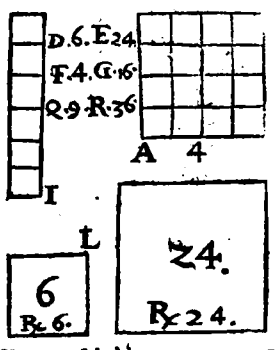
SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæ, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur: quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta A B, 2, & C D, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri. si cum Rationali linea proposita conferantur: Demde è contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illi, in quas quadratum Rationalis linea resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus: cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta (continet enim quadratum ex A B, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex C D, nouem: quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato linea Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali linea proposita sunt longitudine incommensurabiles: Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum: at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Has autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, expressa numero 4. cuius quadratum A C; continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, similes non quadrati, habentes tamen proportionem, c vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus
c 26. *octau.* *numerus F, ad quadratum numerum G; nempe 4. ad 16. Deinde se-*

mper

datur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati A C, quoi nimirum vnitates in D, numero continentur: a a quoi- a 14 secundi
psi H I, quadratum æquale constituatur K L, cuius latus K M. Postremo per ea, quæ in corollar. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum recta K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem: continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadratum K L, æquale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum N P, earundem mensurarum quadratarum 24. ac præterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntque linea Rationalis A B, longitudine incommensurabilis; inter se autem commensurabilia longitudine ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex corollar. propos. 20. libr. 6. duplicatam laterum K M, N O; sit autem quadratorum proportio sub quadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. b Quare longitudine commensurabiles sunt b 6. decimi,
rectæ K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eadem lineæ K M, N O, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si K M, dimidiatur in duas partes æquales, dimidietur N O, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis A B, imo illi omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.



RVRSVS

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, *proportionem habentia, quam quadratus numerus* F, *ad quadratum numerum* G, *plures quadratas mensuras continent aequales illi, in quas* AC, *quadratum Rationalis linea* AB, *resoluitur, quam unitates sunt in dictis numeris quadratis* F, G: (*Nam* KL, *aequale est sex huiusmodi mensuris, &* NP, *continet* 24. *At numerus quadratus* F, *componitur ex quatuor unitatibus, &* G, *ex* 16.) *Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur* Q, R, *pauciores tales mensuras complectuntur quadrata* KL, NP, *quam sunt unitates in numeris quadratis* Q, R, *cum alter ex* 9. *alter vero ex* 36. *unitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quae pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam unitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato linea Rationalis propositae. Quod si eadem quadrata* KL, NP, *considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati* AC, *ex Rationali linea* AB, *descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot unitates in quadratis numeris* F, G, *vel* Q, R, *continentur. Nam si recta* KM, *dividatur in duas partes, &* NO, *in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum* KL, *quatuor mensuras quadratas, & quadratum* NP, *sexdecim, quot scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris* F, G. *Item si eadem linea secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas* 9. *&* 36. *quot numerum unitates comprehenduntur in numeris quadratis* Q, R, *&c. At huiusmodi mensura nullo modo aequales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum* AC, *Rationalis linea* AB, *resoluitur.*

IDEM dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos: cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. *&* 3. *habentes proportionem, quam quadratus numerus* 16. *ad quadratum numerum* 4. *&c.*

ITA QVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationalis linea incommensurabiles sint, vt sit sensus: Quadrata quae describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineae Rationali propositae, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis linea conferantur, saepenumero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sive hae quadrata numeris quadratis possint exprimi, sive non, si comparentur cum quadrato

Rationa-

lationalis linea, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi linea Rationalis sint longitudine incommensurabilia, &c.

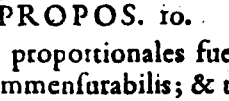
COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus: Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis: vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. libr. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

xj. x.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis: & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt, *a* habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. *b* Quare C, & D, cõmensurabiles inter se sunt.



a 5. decimi.

b 6. decimi.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, *c* non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam numerus ad numerum. *d* Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c 7. decimi.

d 8. decim.

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secunda cõmensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia

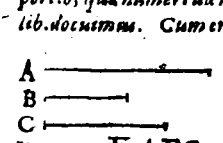
quarta longitudine commensurabilis. vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est potentia ipsi B, a *erunt earum quadratа commensurabilia,* b *ac propterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum.* c *Est autem vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ proposita A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterque descriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum.* d *Quare commensurabilia erunt :* e *Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus : Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.*

a 3. def.
b 5. decimi.
c 22. sexti.
d 6. decimi.
e 3. def.

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles: erunt ipsarum potentia commensurabiles: ac propterea ipsa potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles : Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ; duæ vero reliquæ superficies, vel solida: sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles; & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum ex iis, qua in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliqua duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, qua numeri ad numerum: f atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles sint, siue non, non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt



f 6. decimi.

rum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illa proportionem habentium, proportio erit, qua numeri ad numerum. a Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum. a 8. huius.

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ, linea, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineæ longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidave commensurabilia sint, b habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ diximus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. b 5. decimi.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani non similes, per ea, quæ ad finem libr. 8. diximus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunq; numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. diximus. A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad

quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Itaigitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D; ita vtnod sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpenumero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habent 3. & 4. proportionalia lateribus posterioru 6. & 8. vt constat: quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, nõ autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius. qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

x. xj. PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autẽ proportio B, ad C, quæ nũmeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerum quadratũ

A ——— B, 10.
E ———
D ——— C, 6.

Igitur

Igitur *a* rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. *a* 9. *dec.*
Quod autem tantum lõgitudine sint incommensurabiles; patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, *b* ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt. *b* 6. *decimi.*

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. *c* Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incõmensurabilem esse longitudine, & potẽtia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum: *d* erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll propos. 9. huius libr. & omnino longitudine incõmensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incõmensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum. *c* 13. *sexti.* *d* 10. *dec.*

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensuratæ cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CÆTERVM *ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atq; adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemq; argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratam ex E, ita recta D, ad rectam A. Est autẽ recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. e Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia. atq; adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*

A ——— B, 10.
E
D ——— C, 6.

e 10. *dec.*

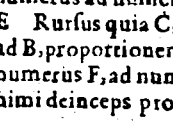
In codicibus vulgatis proponitur hæc undecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur. vt ex dictis apparet.

xij. viij.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

Sit vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, a habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, b sumantur tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, c inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.



a 5. decimi.

b 4. oct.

c 6. decimi.

SCHOLIVM.

Quod si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstrationis theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6 diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles, potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, d erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G. e Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. f Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt, atque

d 5. dec.

e 4. oct.

f 6. dec.

eique adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inuenietemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

Sed & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

Sint enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

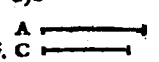
A ------
C ------
B ----------

Quod si magnitudines A B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, cõmensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraq; B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

THEOR. 10. PROPOS. 13. xlj.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

Sint duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensu-



rabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. decimi.

SCHOLIVM.

Si magnitudines A, B, C, sint linea, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, b *esteneremus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles (cum hoc positio, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoq; B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

b 12. dec.

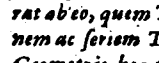
Qvoniam vero hac propositio 13. apud Theonem lemma est, fit, vt post hac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

xiij. viij.

THEOR. II. PROPOS. 14.

Si sint autem magnitudines commensurabiles; altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; c erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines cõmensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.



c 12. decimi.

SCHOLIVM.

Hic *quoque, si magnitudines A, B, C, sint linea, & A, B, cõmensurabilis longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue lon-*

sue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, a *essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, vtraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi G, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles;* b *& A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, vtraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.*

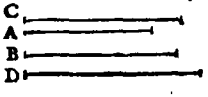
a 12. decimi

b 12. dec.

COLLIGVNT *porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.*

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT *duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis;* c *erit quoq; reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ablata ipsi C, incommensurabilis;* d *erit & reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.*



c 14. dec.

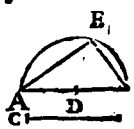
d 14. dec.

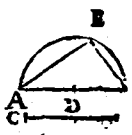
Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine incommensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS *id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo data duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteat q; inue-*





a 1. quarti. *nire, quo AB, plus possit quam C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturq; recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ* b 31. tertii. EB. b *Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* c 47. primi. c *erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atq; idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. Similiter*

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

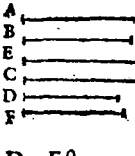
HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura data duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungãtur ad angulum d 47. primi. *rectum E poterit eas recta ducta AB,* d *quippe cum quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.*

XIV. XII.

THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quam B, secunda quadrato rectæ L, & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si B, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C. Si vero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; e erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothe-



e 22. sexti.

potheſin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; *a* Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoq; vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoq; ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. a 22. ſexti.

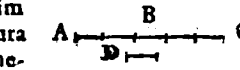
SCHOLIVM.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantum commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.

THEOR 13. PROPOS. 16. xv. ix.

SI duæ magnitudines cõmenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines cõmenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipſarum AB, BC, cõmenſurabilem eſſe. *b* Sit enim ipſarum AB, BC, commmunis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, *c* metietur quoque D, totam AC, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur AC, & A; erunt AC, AB, commenſurabiles: Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, AC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.



b 3. decimi. c 1. pronun.

SED iam tota AC, ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi AB. Dico & AB, BC, inter ſe commenſurabiles eſſe. *d* Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; *e* metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commenſurabiles erunt AB, BC, inter ſe. Eo enim argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

d 3. dec. e 9. pronun.

COROL-

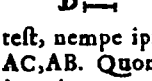
COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus compositæ, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cum mentiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

xvj. ix. THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri po-



a 3. decimi. test, nempe ipsi AB, a sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB;

b 3. pronun. b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramq; AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB: Eademq; ratione neq; ipsi BC, commensurabilis erit. Quare vtriq; ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles,

c 16. dec. c erit quoque tota AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarū, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incōmensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse queque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoque AC, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ AB, commen-

commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC. ipsi BC. commensurabilis. sed incommēsurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumq; corollariis, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusq; propositionis demonstrationem communis mensura D, *&c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habēt, vt ex defin. apparet.*

LEMMA I.

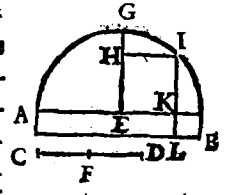
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammū applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

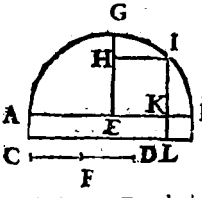
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. libr. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteque figura quadrata, vt vult propos. illa 28. libr. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris linea descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. libr. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitque figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. libr. 6. licet tamen idipsum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione facilliori. Sint igitur data recta inæquales AC, CD, quarum AB, maior sit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-



mum



mum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta CD, descripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, semicirculus AGB: & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est, EG, ipsi AE, æqualis, maior quam CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpendicularis, & sit KL, ipsi kB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim kI, media proportionalis est inter Ak, kB, vt

a 17. sexti. *in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus; a erit rectangulum sub Ak, KB hoc est rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc est,*

b 34. primi. *quadrato ex EH: b (est enim KI, ipsi EH, æqualis, oō parallelogrammum EI,) hoc est, quadrato ex CF: Est autem quadratum ex CF, quartæ parti quadrati ex CD: quod quadratum ex CD, per scholium propos. 4 lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensque quadrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti. Quod est propositum.*

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate absolumus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus cōtentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum à dimidia lineæ descriptum.

SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus AK, KB

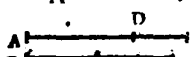
æquale

æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum, quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quàm recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata: Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; *& ad maiorem* AB, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore* C, *descripti, ita vt* DB, *latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta* AD, DB, *inæqualia esse.*



Sienim AD, DB, *segmenta dicantur esse æqualia: tum ex* 1. *lemmate parallelogrammum applicatum ad* AB, *deficiensque figura quadrata ex* DB, *descripta, æquale sit rectangulo sub* AD, DB, *sit autem quod sub æqualibus* AD, DE, *quadratum: erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* AD, *dimidio ipsius* AB, *descriptum: atque adeo ex scholio propos.* 4. *libr.* 2. *quadratum ex* AB, *quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex* C, *per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quarti partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarum ex* AB, & C, *æqualia sunt, atque rectæ* AB, & C, *æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta* AD, DB. *Quod est propositum.*

HOC facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH, *æqualis dimidiatæ parti ipsius* CD, *nempe ipsi* CF, *ductaque* HI, *parallela ipsi* AB, & *tandem demissa perpendiculari* IK, *vt partes factæ ex applicatione sint* AK, KB: *manifestum est* AK, KB, *segmenta esse inæqualia, cum* AB, *in* E, *secta sit bi-*

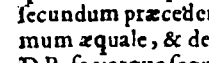
fit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij. xiij.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, D B, faciatque segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse quam C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propos. A D, maior est, quam D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cum totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A F, B D, æquales: Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D, a erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadratum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B. Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectãgulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D, (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cum F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B, (quod quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. libr. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B



a 5. secundi.

AB: Ac proinde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc ig tur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles: *a* erunt quoque tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis: (quod composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B,) Igitur cum vtraque AB, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B, *b* erunt quoque AB, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex coroll propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

a 16. *decimi*

b 12. *decimi.*

SED iam A B, plus possit quam C; quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi F D; erit eadem A B, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex A F, D B, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla. Igitur cum vtraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis compositæ ex A F, D B; *c* erunt quoque A B, D B, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeo cum tota AB composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine ipsi D B; *d* erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

c 12. *decimi.*

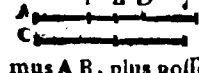
d 16. *decimi.*

THEOR. 16. PROPOS. 19. xviij. xiv.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum

est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus posse quam C; quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; a erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: b erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B, erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ E D, longitudine sibi incommensurabilis.



a 17. decim.

b 14. decim.

IAM vero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse quam C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota A B, componitur ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per corollar. propos. 17. huius libr. & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incom-

incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur tum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; *a* erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac proinde cum tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; *b* erunt & ipsæ A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. decimi.

b 17. decimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus: nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia vero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis: dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

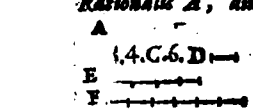
LEMMA II.

EX PROCLO. *Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles: atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales*

commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et siquidem longitudine, dicuntur & ipsa Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse: Si vero potentia inter se solum sunt commensurabiles: dicuntur ipsa quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

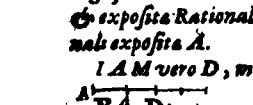
SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est expositae Rationali: ac proinde vtraque Rationali commensurabilis quoque longitudine: Aut nostra Rationalis expositae aequalis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis: Aut denique vtraque expositae Rationali commensurabilis est solum potentia. Hac autem tria genera inuenietur hoc modo. Sit expositae Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt



in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectae A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine aequalibus, quae quidem magnitudine aequales sunt ipsi D; ipsae aequales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D, communem mensuram. Inuentae ergo sunt duae Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositae Rationali A, & quarum vna nempe E, aequalis est Rationali expositae A.

I AM vero D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per dues numeros F, G quorum neuter idem sit qui B, ita vt

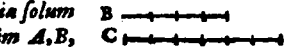


vtraque linea C, & E, inaqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectae A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuentae erunt duae Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositae Rationali A, quarum neutra aequalis est Rationali expositae A.

x. decimi. *POSTREMO expositae Rationali A, a inueniatur recta B, longitudine tantum incommensurabilis, qua secetur in quotcunque*

partes

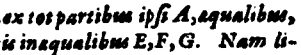
partes aquales, & sumatur C, composita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine aquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico eadem expositæ Rationali A, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia; a Igitur quadrata rectarum A, & C, commmensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; b erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationalis expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.



a 12. decimi.

b 12. def.

Quod si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo: Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt unitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.



Cæterum & omnes lineæ Rationales, non solum expositæ Rationali, sed etiam in se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. c Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; d quæ autem eidem commensurabiles, inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunq; inter se commensurabiles esse.

c 6. defin.

d 12. sexti.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, & rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT *duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex*

quantacunque enim linea recta CD, *abscindatur* CE, *ipsi* A, *æqualis, &* EF, *ipsi* B. *Deinde super* CE, *describatur quadratum* CG, *perficiaturq; rectangulum* GF, *contentum sub* CE, & EF, *hoc est, sub* A, & B. a *Quoniam igitur est vt* CE, *ad* EF, *hoc est, vt* A, *ad* B, *ita parallelogrammum* CG *hoc est, quadratum ex* A, *ad parallelogrammum* GF, *sub* A, & B, *comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

a 1. sexti.

EODEM *modo erit, vt* B, *ad* A, *ita rectangulum* FG, *ad quadratum* GC. *Quod est propositum.*

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali spacio commensurabile, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, *commensurabile Rationali spatio* B. *Dico &* A, *Rationale esse. Sit namque* C, *quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia aiuntur, vel Irrationalia, quod ni-*

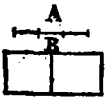
mirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam b 9. def. *igitur* B, *Rationale est,* b *erit ipsum Rationali* C, *commensurabile: Est autem &* A *ipsi* B, *commensurabile. Igitur* A, & C, c 12. dec. *cum commensurabilia sint ipsi* B, c *inter se quoq; commensurabilia erunt; ac proinde spatium* A, *Rationali quadrato* C, d 6 def. *ex Rationali linea exposita descripta commensurabile,* d *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

XIX. XV. THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum BD, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorum, (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio 2 antecedentis propos. explicuimus) ita vt vel altera ipsarum BC, CD, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico

BD, ip-



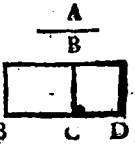
ΔΕ, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, commēsurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum: *a* erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex A, cōmensurabile: *b* Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. *c* Igitur & BE, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero BC, hoc est, EC, & CD, longitudine commensurabiles sunt, (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter se longitudine cōmensurabiles) *d* & est vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; *e* erunt quoq; EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedētis propos. BD, Rationali BE, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 3. *defin.*
b 8. *defin.*
c 9. *def.*
d 1. *sexti.*
e 10. *dec.*

THEOR. 18. PROPOS. 21.

xx. xvj.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19 exposuimꝰ, hoc est, sive BC, æqualis sit Rationali expositæ A, sive non, commensurabilis tamen ei vel lōgitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, *f* ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; *g* Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: *h* Est autem vt BE, ad BD, ita BC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 19. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, commensurabilis longitudine; *i* sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

f 9. *def.*
g 12. *dec.*
h 1. *sexti.*
i 6. *def.*

LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eim quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, a inueniatur C, longitudine tantum incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum incommenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuenta ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

a 11. *dec.*

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantum incommenſurabilis b *inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles*

b 11. *decimi.*

Quæ

Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraque B, C, exposita Rationali A, sit potentia commensurabilis; a *erunt B, C, Rationales. Inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.* a 6. *defin.*

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunq; linea Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur in hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. libr 9. docuimus, tot numeri primi, quot linea Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius libr ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H. Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterq; quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D) b *erunt ipsa inter se commensurabilia; ac propterea & rectæ ipsa potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D; numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem libr. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* c *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensa sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.* b 6. *decimi.* c 9. *decimi.*

A, 5. E
B, 7. F
C, 3. G
D, 2. H

QVOD si propositis quotcunq; Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint proposita duæ

A ——— C, 10.
B —— D, 6.
F ——— E, 7.

Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, quorum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D, primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, a *commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem libr. 8. ostendimus; (quod D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoq; plani non similes, ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 26. lib 8. ostendimus, proportionem* b *non habeant, quam quadratus ad quadratum) erunt rectæ E, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia solum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia tantum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, vt idem demõstrauimus de numeris D, & E) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.*

a 6. decimi.

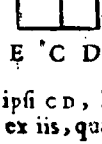
b 9. decimi.

xxj. xix.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum sub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorũ, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.) Dico rectangulum BD, esse Irrationale, & rectam, cuius quadratum ipsi BD, æquale est, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demonstratione propos 20. diximus. c Et quoniam est vt EC, hoc est, BC, ad CD, vt BE, ad BD: Est autem BG, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD, in-



c 1. sexti.

BD, incommensurabile. *a* Quare cum BE, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A, sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; *b* erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, *c* Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis. a 9. def. b 14. dec. c 10. def.

VOCATVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, *d* propterea quod media proportionalis est inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod monstrandum erat. d 17. sexti.

SCHOLIVM.

ITAQVE *omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter se commensurabiles, Media vocabitur.* c*Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus; sed discamus eam esse lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hac linea Media hoc loco appellatur.* c 17. sexti.

VT *autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres linea sint continuè proportionales, quales sunt* BC, & *recta Irrationalis, qua Media dicitur, &* CD; *erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio prop. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum medium proportionale est inter quadrata rectarum* BC, CD, *ideoque Medium appellatis potest.*

HOC *autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium* BD. *Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contingi possit sub duabus Irrationalibus, nempe*

Mediis

Mediis longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuerse tamen omne spatium Medium aquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

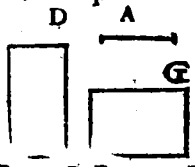
VNDE *Medium describi sic poterit, vt dicamus illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso aquale est, ita vt ipsum possit linea recta, qua Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.*

xxij. xx.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicantum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, siue ea sit expositæ, siue expositæ commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum *a* applicetur que ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, longitudine incommensurabilem. Quoniam enim A, Media est ipsa poterit rectangulum sub duab. rectis Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus cõtentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, sub Rationalibus EF, FG, potentia tantum commensurabilibus contentum Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum BD, æqualia erunt BD, & EG, *b* lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos,



a 45. *primi.*

b 14 *sexti.*

gulos, nempe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD; *a* Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratum ex BC, commensurabile est quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF, ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur *b* & quadratum ex FG, commensurabile erit quadrato ex CD: propterea que, & rectæ FG, CD, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est expositæ Rationalis; erit quoque CD, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi BC. Quoniam enim EF, FG, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt EF, ad FG, ita quadratum ex EF, ad rectangulum EG, sub EF, FG, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. *c* erit quadratum ex EF, incommensurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex EF, commensurabile est quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) igitur cum quadratum ex CD, commensurabile sit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato ex EF, incommensurabile; *d* incommensurabilia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad rectam BC. *e* Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali BC, longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 22. *sexti.*
b 10. *decimi.*
c 10. *decimi*
d 13. *decimi.*
e 10. *decimi*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadratæ ex A, æquale si fiat BC, & A, f sumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; g erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

f 11. *sex.*
g 17. *sexti.*

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicanda erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

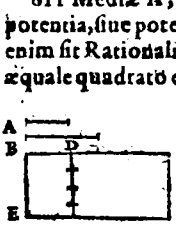
PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, factum, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale,

tionale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunq; Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse Exposita
a 45. *primi.* enim sit Rationalis C D, *a* ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; *b* erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem *c* applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles; erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æ-



b 23. *decimi.*

c 45. *primi.*

qualia, D E, D F, commensurabilia. *d* Est autem vt D E, ad D F, ita
d 1. *sex.* recta E C, ad rectam C F. *e* Igitur E C, C F, longitudine sunt com-
e 10. *decimi,* mensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi
f 14. *decimi.* C D, incommensurabilis. *f* Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scr. ps imus) erunt C D, C F, Rationales po-
g 22. *decim.* tentia tantum commensurabiles, *g* Ac proinde recta B, potens rectangulum D E, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium, nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, potest ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius libr. tradidimus) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D

com-

commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B. ipsis æqualia, cõmensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A, Media erit & B, illi commensurabilis Media; vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DF. Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media. Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

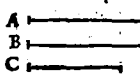
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius libr. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si verò rectæ quadam lineæ Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C: illa quidem longitudine, hæc verò potentia tantum: a erit vtraque B, C, Media A, commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles: & A, C, potentia tantum: erunt inuentæ A, B, Media longitudine commensurabiles: & A, C, Media potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.



224. decim.

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Media commensurabilis, Media sit: non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis: cum duæ Medix dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inuestigandæ sint duæ Media longitudine & potentia incommensurabiles.

THEOR.

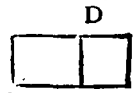
xxiv. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

Qvod sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Mediis AC, CD, longitudine commensurabilibus. Dico AD, Medium esse. Describatur ex CD, Media quadratum BD, quod erit Medium. *a* Et quo-

a 1. *sex.*



niam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autem AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine cõmensurabiles; erunt AD, DB, commensurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

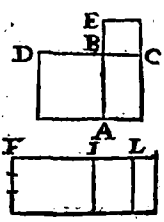
xxv. xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

Qvod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus, cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG,

b 45. *primi.*



b ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, descripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & deniq; ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, descripto: eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia vero AD, CE, Media sunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationalem FG, KL, (*e* est enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis) faciant quelatitudines GH, KM, *d* erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipsi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo & ipsis æqualia rectangula FH, LM, commensurabilia: *e* Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad KM. *f* Igitur GH, KM, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH, KM, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali vero FG, solum eom-

c 34. *primi.*
d 23. *decimi.*
e 1. *sex.*
f 10. *decimi.*

mensu-

mensurabiles potentia, cum ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; *a* Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Rationale est. E: quoniam est, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E, (quod D B, B C, ipsis A B, B E, sint æquales vtraque vtrique) *b* & vt D B, ad B C, ita A D, ad A C; & vt A B, ad B E, ita A C, ad C E: erit quoque vt A D, ad *A* C, ita A C, ad C E, atque adeo A D, A C, C E, proportionalia erunt: Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt; *c* Habent autem rectæ G H, H K, K M, easdem proportiones, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales sunt; *d* propterea que rectangulum sub G H, K M, quadrato ex H K, æquale est. Est autem rectangulum sub G H, K M, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex H K, Rationale est; ideoque & recta H K, Rationalis erit: *e* & ob hoc ipsi F G, Rationali expositæ, hoc est, ipsi H I, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel solum potentia. Et si quidem H K, ipsi H I, longitudine sit commensurabilis, *f* rectangulum H L, sub Rationalibus H I, H I, longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, A C, illi æquale, erit Rationale. Si vero H K, ipsi H I, potentia solum commensurabilis sit, *g* erit rectangulum H L, sub Rationalibus H I, H K, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, A C, illi æquale, Medium. Est ergo A C, rectangulum sub Mediis A B, B C, potentia tantum commensurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 20. *decimi.* b 21. *sexti.* c 1. *sexti.* d 17. *sexti.* e 6. *defi.* f 20. *decimi.* g 22. *decimi.*

SCHOLIVM.

Facilius quam ex 45 propos. lib. 1. applicabimus ad H I, rectangulum ipsi A C æquale, h si tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis sumatur pro latere H K. Nam rectangulum sub extremis H I, H K, æquale erit rectangulo sub mediis A B, B C. h 12. *sexti.*

Hac eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo i 16. *sexti.*

Quoniam vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propos. 18. quanam ratione inuenienda sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propos. vero 19. duas Mediæ potentia solum commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

Itaque habemus ex his k *rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationales;* l *Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellarique Mediū,* k 20. *decimi.* l 22. *decimi.*

I 3 *& rectam,*

& rectam, qua ipsum potest, Medium. Rursus ex demonstratis constat, a rectangulum comprehensum sub duabus Mediis longitudine
a 25. decimi. commensurabilibus esse Medium. b Rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus comprehensum esse
b 26. decimi. vel Rationale, vel medium.

Quod si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe æquale esse rectangulo quod cõtinetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

Sit enim rectangulum A C, comprehensum sub duabus Mediis A B, B C longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico A C, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas G H, K M, Rationales esse, & ipsi F G, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt
c 1. sex. & earum quadrata A D C E, atque adeo ipsis æqualia rectangula
d 10. decimi. F H L M, incommensurabilia. Vt autem F H, ad L M, ita est recta
e 22. decimi. G H, ad rectam K M, d Igitur rectæ G H, K M, longitudine inter se junt
f 17. sexti. incommensurabiles. Quare G H, K M, ostensa Rationales sunt potentia tantum inter se commensurabiles; e Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Irrationale est, quod Medium appellatur. & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media Potest autẽ recta rectangulum sub ipsis G H, K M, recta H K; (Nam vt primum ostendemus, tres G H, H K, K M, esse proportionales.) Igitur H K, Irrationalis est, & Media. Quare I K, Rationalem non est; si enim Rationale esset,
g 21. decimi. g faceret ipsum ad Rationalem H I, applicatum latitudinem H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum, ostensa enim est H K, Irrationalis, ac Media. Eodem mo-
h 23. decimi. do neque I K, media est; si enim esset Medium, h faceret ipsum applicatum ad Rationalem H I, latitudinem H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine incommensurabilem, quod est absurdum, ostensa est enim H K, Irrationalis, & Media. Itaq; cum I K, neque Rationale sit, neque Medium, accessario neque A C, illi æquale, Rationale erit neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi I K, quod sub Rationali, & Media continetur, cum H I, Rationalis sit, & H K, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur A B, B C, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod est propositum.

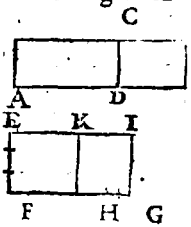
xxvj. xxij.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

Medium non superat Medium Rationali.

Supe-

superet Medium AB, Medium AC, rectangulo DB, Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, *a* ad ipsam applicetur rectangulum FG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum E, H, æquale, vt sit reliquum HI. Rationale DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata, *b* erunt rectæ FG, FH, Rationales & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK, (*c* est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) *d* erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; *e* erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabili. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. *f* Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH commensurabile est quadratum ex HG, (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) *g* atque adeo & duo quadrata ex FH, HG simul quadrato ex EH, commensurabilia sunt. Et rectangulo sub FH HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH HG simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH HG bis *h* Quare & compositum ex quadratis rectarum FH HG, & ex rectangulo bis sub FH HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH HG, *i* At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis sub FH HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propositi 19 huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic compositi, quod Rationale est incommensurabile sit quadratum ex FG, *k* erit quadratum ex FG, Irrationale, ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationale. Quod erat ostendendum.



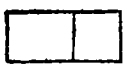
a 45. primi.
b 23. decimi.
c 34. primi.
d 21. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.
h 7. decimi.
i 4. secundi.
k 10. def. 1. decimi.

SCHOLIVM.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

Rationale superat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale. Quoniam enim AB, AC Rationalia sunt; a erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationali expositæ; b atq; adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB compositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC, erit quoque idem AB, reliquo DB commensurabile, ex corol propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale Igitur & DB ex lemmate 4. propos. lib. Rationale est. Quod erat propositum.



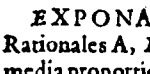
a 9 def. fin.
b 12. decimi.

xxvij. o.

THEOR. 4. PROPOS. 28.

Medias inueniri potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, c inter quas media proportionalis sumatur C, d fiatque vt A, ad B, ita C ad D. Dico C, D, esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; e erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur, atque adeo f cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, sunt q; A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoq; C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius libr ostendimus. g Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C D, potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A. ad B. ita C. ad D. & permutando vt A. ad C ita B. ad D. Vt autem A. ad C, ita est C. ad B; erit quoq; vt C. ad B. ita B. ad D. ideoq; B. media proportionalis inter C. & D. h poterit rectangulum sub ipsis C. D. comprehensum. Est autem quadratum ex B. linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C. D. Rationale est. Medias ergo inuenimus C. D. potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.



c 13. sexti.
d 12. sexti.
e 22. decimi.
f 17. sexti.
g 24. decimi.
h 17. sexti.

xxviij. o.

PROBL. 5. PROPOS. 29.

Media inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

Expo-

Exponantur per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demõstrauimus, tres rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, *a* & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. *b* Deinde a 13. *sex.*
sit vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E. Medias esse potentia tãtum b 12.
commensurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim AB, *sexti.*
Rationales sunt potentia solum commensura-
biles: erit rectangulum sub A, B, atque adeo &
quadratum ex D, *c* quod illi æquale est, *d* Irra-
tionabile, quod Medium dicitur; & ipsa recta
D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E, c 17.
sunt autem B, C, ra Rationales, & potentia solum commensurabi- *sexti.*
les; erunt quoque D, E, potentia solum commẽsurabiles, vt in scho- d 22. *de-*
lio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D. Media *cimi.*
sit, *e* erit & E, illi potentia solum commẽsurabilis, Media. Ac pro- e 24. *de-*
pterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles. Di- *cimi.*
co iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C,
ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B,
ad D, ita D, ad A: erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. *f* Rectan- f 16.
gulum igitur sub D E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem *sexti.*
quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus.
g Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Mediũ g 22.
est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commensura- *decimi.*
biles, quæ Medium contineant. Quod faciendum erat.

A
B
C
D
E

SCHOLIVM.

In iis quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

Duos numeros planos similes inuenire.

Sumantur quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.		*C*, 12.
B, 4.		*D*, 8.
E, 24.		*F*, 96.

Quoniam autem in lib. 9. h *ostensum est, si impar numerus; vel* h 28.
par parem multiplicet, procreari numerum parem: Imparem vero, & 29.
si impar multiplicet imparem, perspicuum est, quonã modo inueniri *noni.*
possint plani similes, quorum vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horũ vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

LEMMA. I.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

Inueniantur per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes A B, *&* C, *quorum vterque vel par sit, vel impar.*
a 24. & 26. noni *a Et quoniam, siue à pari, par auferatur siue ab impari impar, reliquus par est; detracto* B D, *ex* A B, *qui æqualis sit ipsi* C, *erit reliquus* A D, *par. Quo diuiso bifariam in* E; *Dico numerum factum ex* A B, *in* B D, *b qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri* E D, *facere quadratum. Quoniam enim numerus* A D, *bifariam, & diuisus in* E, *& ei additus* D B, *erit ex 6. theorematum eorum quæ ex propos. 14. lib. 9 demonstrauimus, numerus qui fit ex* A B *in* B D, *vna cum quadrato numeri* D E, *æqualis quadrato numeri* E B. *Quare duo quadrati, nempe qui fit ex* A B, *in* B D, *& quadratus numeri* D E, *compositi faciunt quadratum, cum videlicet, qui ex* B E, *gignitur. quod est propositum.*

b 1. noni

A ..... E ..... D ..... B
C .....

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, quando A B, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum excessus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus sit.

Quod si numeri sumantur A B, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenientur eodem modo duo quadrati numerorum B E, E D. quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex A B, in B D, non est quadratus. Si enim quadratus esset. c numeri A B, B D, hoc est, A B, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

c 2. noni.

SCHOLIVM II.

Itaq; si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumamus vt prius, duos planos similes quorum vterq; par, vel impar sit, nempe A B, *&* C, *& reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex* B E, E D, *descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex* B E; *quadratum ex* E D, *numero, qui producitur ex* A B, *in* B D *qui etiam quadratus est.*

A ..... E ... D ..... B
C .....

Siue

Si vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AC, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. *Nam similiter ostendemus quadratum ex BE, aqualem esse quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE, ED, est numerus factus ex AB, in BD, qui cum non sit quadratus, (Si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.*

Hoc posterius facilius absoluemus, si quemcunq; quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36 diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrat. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11 superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.

LEMMA II.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

Sint duo numeri plani similes AB, & C, pares, vel impares, vt in lemmate precedenti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, aqualis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel aqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac proptera latus ipsius maius latere BF. Erit

ergo latus ipsius vel æquale numero BE, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur: Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius ponere-

A..H..I..E..F..G...D.....B
C.....

tur quam BF, minus vero quam BE) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex BE, æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex AB, in BD, & ex quadrato numeri DF; cum eidem quadrato ex BE sit ostensus ex præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE; erit, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex AB, in BD: erit reliquus quadratus ex DF, æqualis reliquo quadrato ex DE: Idcoque & latus DF, lateri DE, æquale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF in se fit, æquale est numero BE. Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius æquale numero BI, qui maior sit, quam BE, ita vt quadrato ex BI, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex BI, latere maiore, maior est quadrato ex BE, latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, (cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex BI,) maior quadrato ex BE. Est autem quadrato ex BE, ostensus in lemmate præcedentis æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex AB, in BD; erat reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex DE, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi in quadratis, quorum alter sit ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se, maius est latere BE. Sed neque æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex BF.

Sic

Sit iam, si fieri potest, A..H..I.F.G...D.....B numerus qui fit ex AB, in C.....
BD, vna cũ quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus EH, duplus vnitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus est, (diuisus enim est AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablatæ vnitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex iis quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis est ei, qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cum HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipsi AB æqualis pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. seq.

Sit tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod sit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuiditur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, vna cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vna cum quadrato ex DG, æqualis est ei, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex

AB, in BD, maior ea, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neq; maior est ostensus, neque aequalis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

A..H..I..E..F..G...D.....B
C.....

SCHOLIVM III.

Ex hoc facile inuenientur duo numeri, ita vt ex illis compositum ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quã quadratus ad quadratum. Si enim per lemma praecedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

Idem obtinemus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum

xxix. xvij.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

Inuenire duas Rationales potentia tãtum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

Exponatur linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in scholio 1. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodetur que AF, in semicirculo ABF, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB. *a* Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo: *b* erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB: hoc est, recta AB, plus poterit quam AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, *c* erunt quadrata ex AB, AF, commensurabilia; atque adeo cum quadratum ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB: descriptum, erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea que & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF, atque adeo commensurabiles saltem potentia.

a 13 tertij.
b 47. primi.
c 6. dec.

Quia

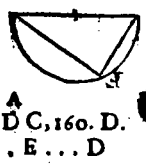
Quia vero quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; alias & DE, quadratus esset, *a* vt in Arithmeticis est demonstratum, quod non ponitur) *b* erunt rectæ AB, AF, longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur AB, AF, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. a 74. oct. b 9. decimi.

Iam vero, quoniam est vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB (sicut enim CD superat DE, quadrato CE, ita etiam quadratum ex AB superat quadratum ex AF, quadrato ex FB.) *c* Quare rectæ AB FB, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat. c 9. dec.

PROBL. 7. PROPOS 31. xxx. xviij.

Inuenire duas Rationes potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

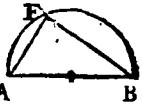
Exponatur Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propos. 29 huius lib. duo numeri quadrati CE, E[illegible] ita vt ex illis compositus CD, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros nō quadratos CE, ED: Verumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipsorum CE ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias secundum priorem modum, esset totus CD, etiam quadratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, *d* vt in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturque AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles. Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos.



C,144. E,16. D C,160. D.
C . . . . . E . . . D

d 14. 8.

propoſ. Quoniam vero rurſus, vt prius, eſt per cõuerſionem rationis, vt C D, ad C E, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex F B; Non habet autem C D, ad C E, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoq; quadratum ex AB, ad quadratũ ex F B, proportionem,

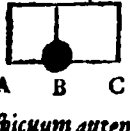


C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C..... E ... D

29. *dec.* Quam quadratus numerus ad numerum Quadratum. *a* Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſſit quam minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine incommenſurabilis Quod erat faciendum.

LEMMA.

Si ſint duæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



Sint duæ rectæ inæquales A B, B C, in rectũ conſtitutæ quarum A B, maior ſit. Dico eſſe, vt A B, ad B C, ita rectangulum ſub A B, B C, ad quadratum ex B C. Deſcribatur enim ex B C, quadratum B D, compleaturq; rectangulum A D; erit q; rectangulum A E, ſub A B, B C, contentum; quod B E, ipſi B C, ſit æqualis; b *perſpicuum autem eſt, eſſe vt A B, ad B C, ita A E, ad B D.*

b 1. *ſext.*

Eodem modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub eis contentum, ad quadratum maioris vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua A B, minor eſt, quam B C,

xxxj. xxiv. xxv.

PROBL. 8. PROPOS 32.

Inuenire duas medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale cõtineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

c 30. *decimi.* *c* Repertæ ſint duæ Rationales, A, B, potentia tantum commenſurabiles: ita vt A, maior plus poſſit quam B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B: & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles

les, *a* erit rectangulum sub A B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media, Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, vt in scholio propos. 10 huius libri ostendimus *b* Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; *c* Ac propterea rectangulum sub C &, D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, ill æquale Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles Rationale. Quoniam vero est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; *d* poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medeas, C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineat, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

a 22. decimi.

b 24. decimi.

c 17. sexti,

d 15. decimi.

Quod si reperte sint A, B, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

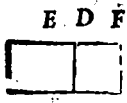
SCHOLIVM.

Alij hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius libri.

LEMMA.

Si sint tres lineæ rectæ; erit vt prima ad tertium, ita rectangulum sub prima & secunda contentũ, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

Sint tres rectæ A B, B C, C D, in rectum constitutæ, Dico esse vt A B, ad C D, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum



lum sub B C, C D. Describatur enim ex B C, quadratum B C D E, perficiaturq; rectangulum A F; Eritq; A E, contentum sub A B, B C; & C F, sub B C, C D; quod B E, C D, i. si B C, æquales sint. a Perspicuum autem est esse A B, ad C D, vt A E, ad C F. Quod est propositum.

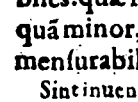
a 1. sexti.

xxxij. xxvj.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

Inuenire duas Medias potentia solum commensurabiles. quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quã minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Sint inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum.) Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inuenjatur alia B, vtrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quę in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus: & ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C; e Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D. f & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E. Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. g Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; h erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, i quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles) æquale esse rectangulum sub D, E, erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; k poterit et-



b 30. decimi.
c 13. sexti.
d 12. sexti.
e 17. sexti.
f 16. sexti.
g 22. decimi.
h 24. decimi.
i 22. decimi.
k 15. decimi.

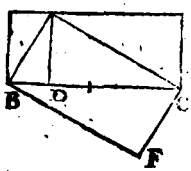
iam D, plus quam E. quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

Quod si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem cõstruantur, vt prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

Sit triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C, & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum deniq; sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.

Quoniam ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter C D, B D; a erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.



a 17. sexti.

Eadem ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C media proportionalis est inter B C, C D.

Rursus quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

POSTREMÒ, b *quia triangula A B C, A B D, similia sunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* c *Quare rectangulum sub B C, A D, æquale est rectangulo sub A B, A C. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum sub B C, A D: Item rectangulum A F, sub A B, A C, contentum.* d *Quoniã igitur rectangulum C E, duplum est trianguli A B C, nempe dimidium rectanguli*

b 8 sexti.
c 16. sexti.
d 41 primi.

gulum

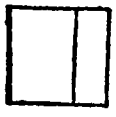
gulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se aequalia rectangula CE, AF. quod est propositum.

LEMMA II.

Si recta linea secetur in duas partes inæquales; erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

Secetur recta AB, non bifariam in C. sitq; maior pars AC, Dico esse vt AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum AB, DE, ducaturque CF, ipsi AE, parallela; eritque AF, contentum sub AB, AC & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, aequales sint. a Quoniam igitur est vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.

E F D



a 1. sext.

A C B

Eadem ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectāguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

Sint duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum constituentes ABC, secturq; minor BC, bifariam in D, Dico rectangulum sub AB, BC, duplum esse rectanguli sub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, sub AB, BC; ducaturq; DE, ipsi AB, parallela, eritq; BE, contentum sub AB, & BD, dimidia minoris. b Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quod & basis BC, duplæ sit basis BD, constat propositum.

A E

b 1. sext.

B D C B D C

EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub

sub A B, B C, continetur, duplum eius, quod continetur sub A B, minore, & B D, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

PROBL. 10 PROPOS. 34. xxxiij. xxvij.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a Reperiantur duæ Rationales A B, C D, potentia solum commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secenturque C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C E, hoc est quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quoq; sub A F, F B, continetur. Postremo descripto semicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad A B, perpendicularis, connectanturque rectæ A G, G B. Quoniam igitur A B, plus potest, quam C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad A B, rectangulum sub A F, F B, æquale quartæ parti quadrati ex C D, deficiens figura quadrata; b erit A F, ipsi F B, longitudine incommensurabilis. Est autem vt A F, ad F B, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub A B, A F, ad rectangulum sub A B, F B; Rectangulum vero sub A B, A F, quadrato ex A G, & rectangulum sub A B, F B, quadrato ex G B, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis c; quod angulus A G B, rectus sit in semicirculo A G B. Igitur quoque erit vt A F, ad F B, ita quadratum ex A G, ad quadratum ex G B, ac propterea cum A F, F B, longitudine sint incommensurabiles; d erunt quadrata ex A G, G B, incommensurabilia e Igitur rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali A B, Rationale est, f æqualeque quadratis ex A G, G B; erit etiam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub A F, F B, quod quadrato ex C E, æquale est factum, g æquale est quadrato ex F G, (propterea quod angulus A G B, rectus est & F G, ad A B, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, C E, æqualia; ac proinde & rectæ F G, C E, æquales. Quare C D, dupla existens ipsius C E, dupla etiam erit ipsius F G. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub A B,

a 31. decimi.
b 29. decimi.
c 31. tertij.
d 10. decimi.
e 4. def.
f 47. primi.
g 17. sexti.

C D, duplum erit rectanguli sub A B, F G. (cum F G, dimidia sit minoris C D.) a Sed rectangulum sub A B, C D, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedētis æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub A G, G B, Medium quoq; est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Iuuentæ ergo sunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

a 22. decimi.

SCHOLIVM.

Demonstratur hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

Exponatur Rationalis linea A B, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem quam quadratus ad quadratum; sintq; vt C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E; & tandem descripto quadrato ex A B, educatur E F, ad A B, perpendicularis. Quoniam igitur est, vt C, ad D ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E: Non habet autem C, ad D, proportionem, quam quadratus ad quadratum; b erunt latera A B, A E, dictorum quadratorum proportionem nō habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum A B, tota longitudine sit incommensurabilis parti A E, erit eadem A B, & reliqua E B, c 1 sext. longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. c Vt autem A B, ad A F, ita quadratum ex A B, ad A F. Igitur cum A B, d 10. decimi. A E, incommensurabiles sint longitudine, d erunt quadratum ex A B, & rectangulum A F, incommensurabilia. Quare quadrato ex A B, existente Rationali, quod & A B Rationalis ponatur; erit A E, dicto quadrato incommensurabile Irrationales. Eodemq; argumento ostendemus B F, Irrationale esse. Quia vero A F, B F, componunt quadratum Rationale ex A B; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

b 9. decimi.

At verò si A F, F B, Rationalia sint, ostendemus & totum A F B, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim vtrumq; A F F B Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia. e Igitur & totum A F B, ex ipsis compositum vtriq; eorum commensurabile erit. Quare A F B, totum commensurabile vtriq; Rationali A F, F B, f Rationale quoq; est. Quod est propositum.

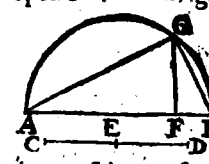
e 16. decimi. f 9. def.

PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

Innenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale. xxxiv xxxviij

a Reperiantur duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum cõmensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas A G, G B, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, b æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Mediũ est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commẽsurabile. Quare cum rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub A B, F G, illi incommensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub A G, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ A G, G B, quæ ostensæ sunt potentia incõmensurabiles, faciunt cõpositum ex earum quadratis Medium, & rectangulũ sub eisdem cõprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. decimi.

b 47. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. xxxv xxix

c Reperiantur duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse

c 33. decimi.

247. primi. les esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est, a & quadrati rectarum A G, G B, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub A B, C D, duplum esse rectanguli sub A B, F G; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub A B, C D, Medium sit; erit quoque rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium; ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi C D: Est autem eidem C D, ipsa C E, longitudine commensurabilis; quod illa huius sit dupla; b erunt A B, C E, longitudine incommensurabiles. Sed vt A B, ad C E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, C E, hoc est, ad rectangulum sub A B, F G; hoc est, sub A G, G B. (sunt enim rectangulum sub A B, F G, & sub A G, G B, per 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia.) c Igitur quadratum ex A B, incommensurabile est rectangulo sub A G, G B. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ A G. G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

b 37. decimi.

c 10. decimi.

SCHOLIVM.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24 huius lib. nos demonstraturos recepimus. nimirum.

Inuenire duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

Quoniam ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, quam rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium. Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata hoc est, compositum ex quadratis rectarum A G, G B, & rectangulum sub A G, G B, commensurabilia. quod non ponitur. Quocirca si sumatur A B, potens compositum ex quadratis rectarum A G, G B, & alia recta potens rectangulum sub A G, G B, id est, media proportionalis inter A G, G B, inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

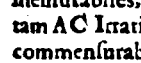
Prin-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj.

Si duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. xxx.

Componantur duæ Rationales AB, BC, potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lemma propos. 21. huius lib. Dico totam AC Irrationalem esse. Quoniam enim AB, longitudine incommensurabilis est ipsi BC: & vt AB, ad BC, ita est rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propos. 31. huius lib.



a erit rectangulum sub AB, BC, quadrato ex BC, incommensuabile. Sed rectangulo sub AB BC, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB, BC, continetur, & quadrato ex BC, commensurabile est quadratum rectæ AB; (omnia enim sunt Rationalia) *b* atque adeo & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, in scholio. propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub AB, BC, & ex composito quadratorum rectarum AB, BC, hoc est, quadratum ex tota AC, (*c* Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis) compositio ex quadratis rectarum AB, BC, *d* incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quod commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rationali. Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommensurabile, *e* Irrationale est; atque adeo & recta ipsa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia solum commensurabilibus cõponitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. decimi.
b 16. decimi.
c 4. secundi.
d 17. decimi.
e 10. decimi. fin.

SCHOLIVM.

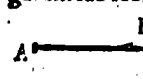
Itaq; ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas f *est medio loco proportionalis,* f *Irrationalis est, quæ media vocatur. At vero compositum ex ipsis,* g *Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.*

f 22. decimi.
g 37. decimi.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

xxxvij. xxxj. Si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis mediis prima.

a 28. decimi. Componantur duæ Mediæ *a* superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia enim AB, est ad BC, vt rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propos 31. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; *b* erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex *BC*, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, *c* atq; adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea quę in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, *d* quod huic composito æquale est, *e* incommensurabile quoq; est rectangulo sub AB BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, commensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cum hoc sit illius dimidium. *f* Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autem rectangulum sub AB BC, Rationale. *g* Irrationale ergo est quadratum ex AC, *h* & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.



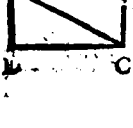
b 10. decimi.

c 16. decimi.

d 4. secundi. e 17. decimi. f 15. decimi. g 10. defin. h 11. defin.

LEMMA.

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.



Contineatur rectangulum ABCD, sub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, i *faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est absurdū. po-*

i 21. decimi.

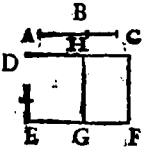
nitur

nitur enim BC, Irrationalis. Non ergo AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxviij. xxxij.

Si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur; quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur ex binis Mediis secunda.

Componantur duæ Mediæ *a* superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, *b* ad quam explicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & composito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, *c* æquale est duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. Quoniam vero ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, HF, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; *d* erit & compositum ex ipsis nimirum rectangulum DC, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorum ex Mediis AB, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; (*e* est enim GH, Rationali DE, æqualis) *f* erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt AE, ad BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum AB, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommensurabile rectangulo sub AB, BC, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex AB, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum AB, BC; & rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod continetur bis sub AB, BC, cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, rectangulo HF, *g* Cum ergo sit vt DH, ad GF, ita EG, ad GF; *h* erit EG, ipsi GF, longitudine incommensurabilis: Ostensum autem iam fuit EG, GF, esse Rationales. Rationales igitur sunt EG, GF, potentia tantum commensurabiles,



a 29. *decimi*, *b* 45. *primi*. *c* 4. *secundi*. *d* 10. *decimi*, *e* 34. *primi*. *f* 23. *decimi*, *g* 1 *sext*. *h* 10. *decimi*,

ac propterea & tota E F, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum ſub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex A C, ipſi D E, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda, ſeu vt aliis placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potẽtia tantum commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 37. decimi.

SCHOLIVM.

Vocauit Euclides in præcedenti propoſitione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus mediis potentia tantum commenſurabilibus, quæ Rationale cõtineant, ex binis Mediis primam. Hic vero lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantum commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis ſecundam quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.

LEMMA.

Si recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, quæ maior pars minorem ſuperat.

Secetur recta AD, in B, non bifariam, ſitq; maior pars AB; in quaſumatur BC, minori BD, æqualis, vt ſit AC, exceſſus, quo AB, ſuperat BD, hoc eſt, BC, ipſi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub AB, BD, quadrato recta AC.

Quoniam enim quadrata ex AB, BC, b *æqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC, eſtq; BC, ipſi BD, æqualis: erunt quoque quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis ſub AB, BD, vna cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora ſunt, quam rectangulum bis ſub AB, BD, quadrato recta AC: quod eſt propoſitum.*

b 7. ſecundi.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur,

ꝟ 32 ix.
ꝟ 22 iii

tinetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

Componantur duæ rectæ *a* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Dico totam A C, esse Irrationalem. Quoniam enim rectangulum sub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub A B, B C, illi commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. *b* Incommensurabile ergo est rectangulum bis A B, B C, composito ex quadratis rectarum A B, B C. *c* Igitur & rectangulum bis sub A B, B C, vna cum qudratis ex A B, B C, hoc est, quadratum ex A C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A B, B C. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale: *d* erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale. *e* Ac propterea recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia *f* cum possit duo quadrata ex A D, B C; & rectangulum bis sub A B, B C; compositum ex quadratis rectarum A B, B C, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub A B, B C. Quare cum compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale sit, rectangulum vero bis sub A B, B C, Medium: recte vocabitur A C, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

a 10. *decimi.*

b 10. *defin.*

c 17. *decimi.*

B

A C

d 10.

defin.

e 11. *defin.*

f 4. *secundi.*

THEOR. 29. PROPOS. 41. XL

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens. XXXIV.

Componantur duæ rectæ *g* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Medium est; quod vero continetur bis sub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub A B, B C, semel continetur, Rationale ponatur, *h* erit compositum ex quadratis rectarum A B, B C, in

g 35. *decimi.*

B

A C

h 10. *defin.*

a 17. *decimi.* commensurabile rectangulo bis sub AB, BC. *a* Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; *b* erit quadratum ex AC, illiincommensurabile, Irrationale; *c* Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationali Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

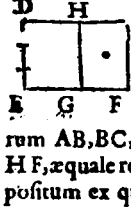
b 10. *decim.* *c* 11. *decim.*

xlj. xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

Si duæ rectæ lineæ potentia commensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. *decimi.* Componantur duæ rectæ *d* superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, *e* ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et compositò ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, *f* æquale est composito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, quam rectangulum sub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis sub AB, BC, nempe ipsum HF, (cum illi sit commensurabile.) Medium ponitur, *g* facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine Incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB, BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB, BC: Eidem autem rectangulo sub AB, BC, commensurabile est ipsius duplum, nempe



e 45. *primi.* *f* 4. *secundi.* *g* 23 *decimi.*

erod

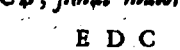
quod bis continetur sub AB, BC, hoc est, ipsum HF; a erunt & DG, HF, incommensurabila. Quare b cum sit vt DG, ad HF, ita EG, ad CF; c erunt EG, GF, longitudine incommensurabiles; Arqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; d Ac propterea tota EF, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate prop. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; e ideoq; & recta ipsa AC Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. *decimi.*
b 1. *sexti.*
c 10. *decimi.*
d 37. *decimi.*
e 11. *decimi.*

LEMMA.

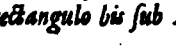
Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

Secetur recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sint q; priores partes AC, CB, magis inæquales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, F. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale est quadrato ex EB; f *item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniam vero quadratum ex AB,* g *æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, quam rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB, erit rectangulum*



f 5. *secundi.*
g 4. *secundi.*

gulum bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB.



Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AB, DB. Quod est propositum.

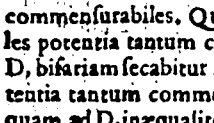
Sed cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cum AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaq; quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, a æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AB, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

a 5 secundi.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

xxxiij. xxxvj. Quæ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabilia, vt vult propos. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantum commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quam partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens quadrata ex AC, CB, vel minora



sunt

sint quadratis ex A D, D B, vel maiora. (Neque enim partes A D, D B, vbicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraq; vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis sub A D, D B, *a* quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex A B; fit vt qui excessus fuerit ablati cõpositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum *A* D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B Sed excessus compositi ex quadratis rectarum *A* C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (Cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in scholio propositionis 3 4. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27 huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub *A* D, D B, spatium Rationale est. *b* Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi comensurabile, ex coroll. prropo. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. *c* Quare cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

a 4. *secundi.*

b 22. *decimi.*

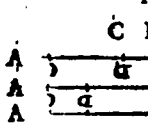
c 27. *decimi.*

THEOR. 32. PROPOS 44. xliij.

Quæ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. xxxvij.

Sit ex binis Mediis prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt A C, C B, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum dimidi non posse in alia nomina, quæ scilicet

ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei quod continetur ſemel ſub AC, CB, commenſurabile, Rationale. Eodemq; modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cũ Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 17. huius lib. oſtendimus: perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earũ quadrata Media quoq;, & commenſurabilia. a Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis per coroll. propoſ. 14. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarũ AD, DB. b Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quamobrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.



a 16. decimi.

b 27. decimi.

xliv. xxxviij.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

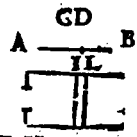
Quæ ex binis Mediis ſecunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis Mediis ſecunda AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint et ám lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuiditur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex AC, CB, maiora

eſſe

esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis EF, *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, *b* æquale est quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipsius FH. Eadem ratione ostendemus FK, maiorem esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensuabile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. *d* Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC, CB, ponatur Medium, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IC, illi commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, *e* erit HG, Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL; longitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine, sunt incommensurabiles, & est vt AC, ad CB, ita per lemma 1. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB; *f* erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; *g* erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 10. huius libri,

a 45. primi.
b 4. secundi.
c 16. decimi.
d 23. decimi.
e 23. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.



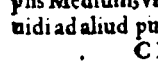
libri, rectangulo bis sub A C, C B, hoc est ipsi I G. Quocirca a cum sit, vt E H, ad I G, ita F H ad H G. b erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. c Igitur F G, tota Irrationalis est quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum G. Eodem modo ostendemus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, d vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad G. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

a 1. sex.
b 10. decimi.
c 37. decimi.
d 43. decimi.
xlv.
xxxix.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit Maior A C, diuisa in sua nomina ad punctum D, ita vt A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis Mediũm, vt vult propos. 40. huius lib: Dico A B, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoq; sint potentia facientes



compositum ex ipsarum quadratis Rationale & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, eum esse, qui rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum vtrumque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoq; eorum excessus spatium Rationale, vt in scholio propos 27. huius lib, ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub A C, C B, Medium ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis sub A D, D B. c Igitur cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale; Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad

c 27. decimi.

vnum

num duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47. xlvj. xl.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

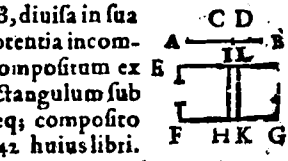
SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri

potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarū AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: & Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctū diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat. a 27. decimi

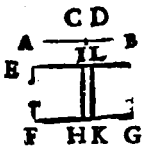
THEOR. 36. PROPOS. 48. xlvij. xlj.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex earū quadratis, vt vult propos. 42 huius libri.



Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum



ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunq; hoc punctum D, exiſtat. Cõſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſ. 45. oſtendemuſque vt ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales eſſe, ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi cõmenſurabile eſt. Igitur Media E H, I H, applicata ad Rationalem E F, (eſt n. I H, ipſi E F, æqualis) *a* faciunt latitudines F H, H G, Rationales longitudine ipſi E F, incommenſurabiles. Eadem quoq; ratione probabimus, & rectas lineas F K, K G, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi E F. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum ß H, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub A C, C B, nempe rectangulo I G: *b* eſtque vt E H, ad I G, ita F H, ad H G: erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, *c* iam ante demonſtratũ eſt. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctũ diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

a 23. *decimi.*

b 1. *ſex.*

c 43. *decim.*

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quę ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudi-

dine

linę sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina linea, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit vtrumque nomen expositæ Rationali commensurabiles esse longitudine: (alias enim nomina ipsa essent quoque linea longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus: vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt: (alias enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabili, efficientur vna cum eisdem tribus generibus alię tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

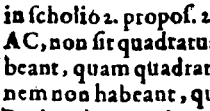
RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium posuit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali: & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius naturam antecedit minus, cum minus à maiori contineatur: tertiam verò, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans: secundam, quintam: & tertiam, sextam.

xlviij. xlij.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex iis quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico FG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC,



a 6. *decimi.* a commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF,

b 9. *decimi.* FG Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus

c 37. *decim.* AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, sit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate pro

pos. 14

pos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac proinde rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionē, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominib. primam. Quod faciendum erat. *a* 9. *decimi.*

PROBL. 14. PROPOS. 50. XLIX. XLIIJ.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

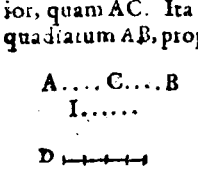
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propositione, expositaq; Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis FG. Erit ergo & FG. Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex FC. EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, *b* commensurabilia sunt; erunt & rectæ FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; *d* Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicit. Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque minus nomen FG, expositæ Rationali D, commensu- *b* 6. *decimi.* *c* 9. *decimi.* *d* 37. *dec.*

rabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I. qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I. non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum.



Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem, quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si AC, sit 8, erit non quadratus proxime maior 10 differens ab 8 binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5 erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vti scholio propos. 8. libr 8. ostendimus, nõ cadet inter I, ad AC, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani, ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, *a* erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, EF commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *b* erunt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. sit vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG. *c* Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *d* erunt EF, FG, longitudine incõmensurabiles. Sunt ergo EF, FG, Ra-

tiona-

1. xvij.

2. 6. dec.

b 9. dec.

c 6. dec.

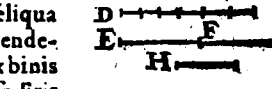
d 9. dec.

tionales potentia tantum commensurabiles; a Atq; idcirco to- a 37. dec.
ta EG, Irrationalis ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autem I, ad AC, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; b ac propterea re- b 9. dec.
ctæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sic ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus EG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine cõmensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 52. 43. XLV.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cum Rationali D, cõmensurabilis sit. Quod si reliqua cõstruantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, totã EG, ex binis nominib. esse. Dico & quartã esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quã quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49 propos. per conuersionẽ rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neque quadrati m ex EF, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad nu merum quadratũ c Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ EF, c 9. dec.
& H. Itaq; cum maius nomen EF, plus possit, quã minus FG, qua-



drato rectæ H, sibi longitudine incommẽsurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuemmus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

LIJ. XVJ.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duabus numeris AC, CB, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostẽdemus ergo vt in propos. 40. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG: Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est perconuersionem rationis est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas, EF, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen FG, longitudine cõmensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

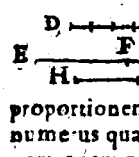
LIIJ. XLVIJ.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, plabis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demõstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunq; I; qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quinis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. & rel-

a 30. *septim.*

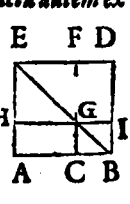


& reliqua fiant, vt in propos. 51. ostendemusque vt ibi, rectas D & EF, esse longitudine incommensurabiles; atque totam EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & FG, longitudine esse incommensurabiles, esseque quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius quadrato rectæ H. Ostendemus quoque vt in propos. 49 per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Itaq; cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine sit commensurabilis, & vtrum ipsorum nominum EF, FG, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat. a 9. dec.

LEMMA.

Si recta linea secta sit vtcunq;: erit rectangulum sub partibus contentũ, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum cõtentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

Secta *sit recta AB, vtcunq; in C. Describatur ex AB, quadratum ADBE, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipsi BD, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propos. 4. libr. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumq; autem rectangulorum DG, GA, comprehensum eisdem partibus: At vero rectangula CD, AI, sub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, medium proportionale esse inter quadrata FH, CI: At CD, medium esse proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim* b *vt HG, ad GI, ita est tam FH, ad DG, quam AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* c *Est autem AG, ipsi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita ita DG, ad CI: Atque adeo DG, medium proportionale est inter quadrata FH, CI.*



b 1. *sexti.*

c 43. *primi.*

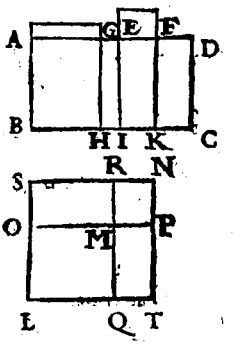
a 1. *sexti.* RVRSVS *quia est,* a *vt* AB, *ad* CB, *ita tam* AD, *ad* CD, *quam* AI, *ad* CI; *erit vt* AD CD, *ita* AI, *ad* CI: *Est autem* AI, *ipsi* CD, *æqualis. Igitur erit vt* AD, *ad* CD *ita quoq;* CD, *ad* CI. *Quare* CD, *medium proportionale est inter quadrata* AD, CI. *Eodem modo erit* AF, *medium proportionale inter quadrata* AD, FH.

xliiij. xlviij.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis; & denique AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ si longitudine cõmensurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum sub AG, GE, contentum, per 1. lemma propos 17 huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; b in partes longitudine commensurabiles ipsum diuidet. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis AB, BC, parallelæ GH, EI, FK. c Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN; coniungantur q; quadrata LM, MN, ita ad angulũ M, vt latera MO, MP, vnam rectã lineam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnam rectã QR, vt demonstratum est à nobis ex Proclo ad propos. 15 lib. 1. propterea q; anguli OMQ, PMR, ad verticẽ M, sunt æquales, nempe recti. Completo aũt rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint; ideoq; & tota OP, toti QR, d sit autem OP, ipsis SN, LT. & QR, ipsis LS, TN. æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoq; quadratum.



b 18. *dec.*

c 14. *secundi.*

d 34. *primi.*

Quo-

QVONIAM VERO rectangulum sub AG, GE, æquale est, per
structionem, quadrato ex EF, *a* erit vt AG, ad EF. ita EF, ad a 17. *sexti.*
GE. *b* Ac properea & vt AH, EK, ita EK, ad GI. Quare EK, b 1. *sexti.*
medium proportionale est inter AH, GI, hoc est inter quadrata
LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, me-
dium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Æquale
igitur est TM, ipsi EK. *c* Cum ergo ipsi TM, æquale sit MS, *d* & c 43. *primi.*
ipsi EK, æquale sit FC, erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca to- d 36. *primi.*
tum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atq; adeo
recta OP, potest spatium AC, contentum sub AB. Rationali, &
AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ
ex binis nominibus dicitur.

QVONIAM enim AG. GE, ostensæ sunt longitudine com-
mensurabiles, *e* erit & tota AE, vtrique ipsarum longitudine e 16. *dec.*
commensurabilis: Est autem AE, cum sit maius nomen ipsius
AD, ex binis nominibus primæ Rationali AB, commensurabilis
longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12.
huius lib. longitudine cõmensurabiles sunt; Atq; adeo cum AB,
sit Ration. lis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula f 20. *dec.*
AH, GI sub Rationalibus longitudine commensurabilibus con-
tenta Rationalia sunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipsis æqualia,
Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erũt.

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis
est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa cõmensurabilis AG,
& ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; e-
runt ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudi-
ne incommensurabiles. Quare & AH, EK, *g* eandem proportio- g 1. *sexti.*
nem habentia, quam AG, EF, *h* incommensurabilia sunt, ac h 10. *dec.*
proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. *i* Igi- i 10. *dec.*
tur rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, *k* cum k 1. *sexti.*
eandem habeant proportionem, quam LM, MT Sunt autem &
OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt
potentia solum commensurabiles. *l* Quapropter tota OP, po- l 37. *sexti.*
tens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.
Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nomini-
bus prima &c. Quod demonstrandum erat

THEOR. 38. PROPOS. 56. LIX. XLIX.

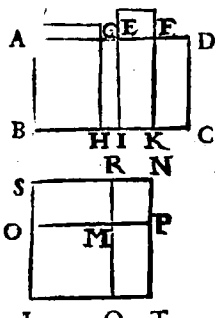
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

CONTINEATVR spatiũ AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spa-

tium

tium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur Sit enim ipsius AD, mainus nomẽ AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua constructur, vt in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine cõmensurabilis est Rationali AB;
a 13. *dec.* *a* erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles;
b 16. *dec.* *b* erit quoq; tota AE, vtrique ipsarum cõmensurabilis. Quare cum AE, maius nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cum ergo vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at vero AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis;
c 14. *dec.* *c* erit vtraq; AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur *d* rectangula AH, GI, Media sunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.
d 22. *dec.*



QVIA vero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles;
e 10 *dec.* *e* erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi vero AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius l. b. AG, EF, longitudine incommensurabiles: Ac proinde
f 10. *dec.* AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, *f* incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia,
g 10. *dec.* incommensurabilia sunt; *g* Ideoque & rectæ OM, MP, longitudi-

tudine sunt incommensurabiles, *a* cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo ostensum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles, erunt O M, M P, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quoniam denique E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoq; longitudine commensurabilis; *b* erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. *c* Quare E K, rectangulum, Rationale est; Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleque continentes; *d* atque adeo O P, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda. &c. Quod ostendendum erat.

a 1. *sext.*

b 12. *decim.*

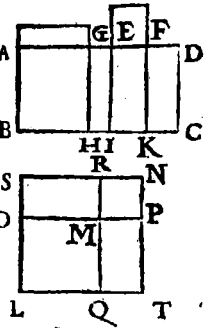
c 20. *decim.*

d 38. *decim.*

THEOR. 39. PROPOS. 57. LVI. L.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Mediis secunda. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex definitione, Rationales potētia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum A E, E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam O P, posse spatiū A C: Et vt in antecedenti propos. 55. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantum commensurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipsi A B, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam vero E D, E F, sunt commensurabiles longitudine; estq; E D, ipsi A B, Rationali, hoc est ipsi E I, longitudine incommensurabilis; *e* erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommensurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quod E F, dimidia sit ipsius E D, Ra-



e 14. *decim.*

ED, Rationalis: & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur & EI, EI, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles: a Ac propterea EK. Medium est: ideoq; & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Mediis OM, MP, continetur. Itaq; cum OM, MP, Mediæ sint potentia solum commensurabiles, contineantque spatium Medium: b erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominib. tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

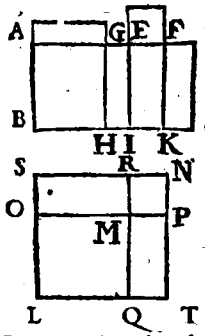
a 22. decim.

b 22. decim.

lvij. lj.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.



CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles: & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propos. 55. c Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE longitudine incommensurabiles sunt: d erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia: atque adeo & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB: erit & AE, Rationalis: e & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM, MN. Rationale est.

c 19. decim.

d 10. decim.

e 20. decim.

Et quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, longitudine incommensura-

surabilis; Et est EF, Rationalis, cum sit Rationali ED, cōmensurabilis. Igitur EF, & AB Rationales sunt potentia solū commensurabiles. a Quare EK, Medium est, sub ipsis contentum: ideoq; & MT, illi æquale, cōtentumq; sub OM, MP, Mediū est. Quocirca cum OM, MP, sint potentia incōmensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Rationale: Rectangulum vero sub ipsis MT, Medium, b Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali: & ex binis nominib. quarta, &c. Quod erat ostendendū. a 22. *decim.* b 40. *decim.*

THEOR. 41. PROPOS. 59. Ivilij. lij.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatiū AE, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles: & AE, plus pōt, quam ED, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: & deniq; ED, longitudine cōmensurabilis est expositæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 55. c Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incōmensurabiles. Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectā OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantum commensurabiles. d Quare rectangulum AI, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudinē commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, commensurabilis longitudine, & Rationalis. e Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, longitudine commensurabilibus, Rationale est: atq; idcirco & MT, sub OM, MP, contentum Rationale erit, cum ipsi EK, sit æquale. Quamobrem cum rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles sint, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale: f Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contine-

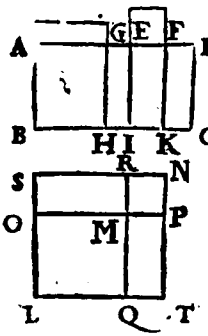
c 19. *decim.* d 22. *decim.* e 20. *decim.* f 41. *decim.*

tineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erit demonſtrandum.

lix. liij. THEOR. 42. PROPOS. 60.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſexta A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipſius A D, maius nomen A E. Sunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles, & A E, plus poterit, quam E D quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum A E, E D, longitudine erit commenſurabilis a 19. decim. Rationali A B. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus, & erunt; A G, G E, lõgitudine incommenſurabiles. Iam vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam O P, poſſe ſpatium A C. Itẽ vt in propoſ. 58. rectas O M, M P, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L M, M N, Medium. Vt autem in propoſ. 58, erit quoq; M T, ſub O M, M P, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum A E, E F, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi E D, hæc vero eidem commenſurabilis; b 13. decim. *b* erunt A E, E F, longitudine incommenſurabiles. *c* Igitur & A I, E K, incommenſurabilia ſunt, *d* cum eandem rationem habeant, quam A E, E F. Quare & compoſitum ex quadratis L M, M N, quod ipſi A I, æquale eſt, & rectangulum M T, quod ipſi E K, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ O M, M P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis L M, M N, Medium, & M T, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum b 42. decim. quadratis, *e* erit tota O P, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.



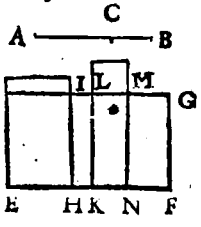
c 10. decim.
d 1. ſex.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

lx. liiij. QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus

bus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; *a* & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB *b* æqualia sint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale est, per constructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipsis LK, GF, parallela agatur, MN: eritque vtrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur. *c* Et quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia solum cõmensurabiles, quod tota AB, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; *d* quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis: erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.



RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, *e* erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem, *f* facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. *g* Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commensurabiles; *h* ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, CB medium proportionale est inter quadrata ex AC, CB: erit quoq; LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo *i* cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeant, quam DH, LN, IK: erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL. *k* Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commensurabilia sunt, quod AC, CB, ponantur potentia commensurabiles:

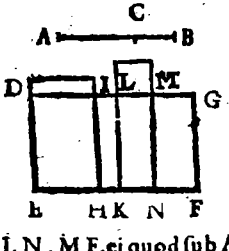
a 45. primi.
b 4. secundi.
c 37. decimi.
d 16. decimi.
e 22. decimi.
f 23. decimi.
g 13. decimi.
h 7. huius.
i 1. sexti.
k 17. sexti.

a 10. *decim.* erunt & DH IK, ipſis æqualia commenſurabilia. *a* Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint per lemma propoſ. 59 huius libri, quam rectangulum bis ſub A C, C B; erit & recta
b 1. *ſex.* DL, maior quam LG, *b* cum DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam D L, maior eſt, quam L G, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub D I, IL,
c 18. *decimi.* æquale quadrato ex LM) diuiditurque DL, ad I, in partes D I, IL, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; *c* poterit DL, maior plus quam L G, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum D G, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & D L, maius nomen plus poſſe, quam L G, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen D L, longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. D G, ex binis nominib. prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum erat.

lxj. lv.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.



d 45. *primi.*

SIT ex binis Mediis prima A B, cuius maius nomen AC, *d* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens DG. Dico D G, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituantur n. eadem, quæ in propoſ. præcedenti, ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex A C, C B, & vtrumque ipſorum L N, M F, ei quod ſub A C, C B, continetur. Quoniam igitur
e 38. *decim.* A C, C B, ex binis Mediis primam A B, componentes *e* Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent: erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipſis
f 16. *decim* æqualia DH, I K, commenſurabilia, atque Media. *f* Cum ergo propterea & totum D K, vtrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile; erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius libr. D K, Me-
g 23. *decimi.* dium, quod cum applicatum ſit ad Rationalem D E, *g* erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſur-

b

bis Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est, & eius duplum, nempe L F, Rationale, quod cum applicatum ad Rationalem L K, a erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; b erunt D L, L G longitudine incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; c ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam vero, vt in antecedenti propos. demonst. habimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secundâ. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

a 21. *decimi.*

b 13. *decim.*

c 37. *decim.*

THEOR. 45. PROPOS. 63. lxij. lvj.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Mediis secunda A B, cuius maius nomen A C, & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis secundam A B, componentes, e Mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent: Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, & Media. f Cum ergo propterea & totum D K, vtrique ipsorum D H, I K, f incommensurabile, erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, g erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & eius duplum L F, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; h erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, longitudine est incommensurabilis: estque vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propositionis 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, i erit quoque quadratum ex A C, rectangulo sub A C, C B, incommensurabile. k Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex qua-

d 45. *primi.*

e 39. *decim.*

f 16. *decim.*

g 23. *decimi.*

h 23. *decim.*

i 10. *decimi.*

k 16. *decim.*

dratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, commensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur commẽsurabiles; & rectangulo sub A C, C B, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub A C. C B. Igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, C B hoc est, rectangulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habentes a longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum cõmensurabiles; b ac propterea tota D G, ex binis nominibus est.

a 10. decim.

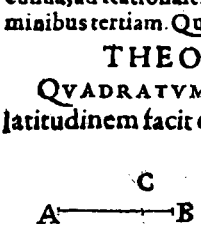
b 37. decim.

Iam vero vt in propos. 61. ostendemus D L, esse maius nomen, posseq; plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cum D L, maius nomen plus possit, quam L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum D L, L G, Rationali expositæ D E, fit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

LXIIJ. LVIJ.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



c 45. primi.

d 45. decim.

SIT maior A B, cuius maius nomen A C, c & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartam. Constituantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, d potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Mediũ; erit quoque D K, cõposito ex quadratis rectarũ A C, C B, æquale existens, Rationale; At vero L F, duplum eius quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalẽ D E, est applicatum; e erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit applicatum ad Rationalem L K, f erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, D E, longitudine incommensurabilis. Quare cum duatum rectarum D L, E G, illa quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitudine: hæc vero eidem D E, longitudine incommensurabilis; g incommensura-

e 21. decimi.

f 23. decimi.

g 13. decimi.

bilis

lgerunt lõgitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sintigitur DL, LH, Rationales potentia tantum commensurabiles; a Ideoq; DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia aũt quadrata ex AC, CB, commensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensurabilia, b atq; adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos 61. ostendimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL, ad I, in partes longitudine incommensurabiles, c poterit DL, plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa DL, (maius nomen ipsius DG, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DI; erit ex defin. DG, ex binis nominib. quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 37. *decim.*

b 10. *decim.*

c 19. *dec.*

THEOR. 47. PROPOS. 65. LXIV. LVIIJ.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC, d & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, e potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum; Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarũ AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum, LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, f facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, g facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa vero longitudine incommensurabilis, h erunt DL, MG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG Rationales sunt potentia solum commensurabiles, i Ac propterea DG, est ex binis nomi-

d 45. *primi*

e 41. *dec.*

f 23. *dec.*

g 21. *decim.*

h 13. *decim.*

i 37. *decimi.*

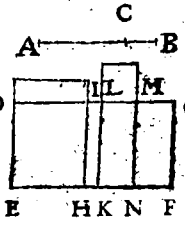
nibus. Iam vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DL, IL æquale esse quadrato ex LM, & vt in antecedenti propos. DL, maius nomen esse, atq; posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

LXV. LIX.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

a 45. primi. SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, a & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, b potentia incommensurabiles sunt, faciuntque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile compositum ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quã LF rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE, c eruntque eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. d Quoniam vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; e Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, BC; hoc est, ipsi LF. Ac propterea rectæ DL, LG, eandem Rationem habentes cum DK, LF, f longitudine incommensurabiles sunt Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; g Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen, posseq; plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. 90. ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quę bina Media potest, a Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.



b 42. dec.

c 23. dec.
d 42. dec.

e 13. dec.

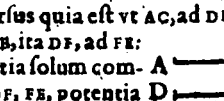
f 10. decim.
g 37. dec.

THEO

THEOR. 49. PROPOS. 67. LXvj. LX.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atq; ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitq; recta DE, ipsi AB, longitudine commẽsurabilis. Dico DE, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. *a* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *b* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; *c* erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis: *d* Sunt autem AC, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE:



Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; *e* erunt & DF, FE, potentia solum cõmensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; *f* Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; *g* poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si AC, commensurabilis sit lõgitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima; *h* erit & DE, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit cõmensurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositæ longitudine cõmensurabilis. Quare & DE, ex defin est ex binis nominibus secunda. Si deniq; neutra ipsarum AC, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominib. tertia; *i* erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

AT si AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; *k* poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

a 12. *sexti.* b 19. *quinti.* c 10. *dec.* d 37. *dec.* e 10. *dec.* f 37. *dec.* g 15. *dec.* h 12. *decim.* i 12. *dec.* k 15. *decim.*

quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD *si recta* DE, *potentia tantum commensurabilis sit ipsi* AB, *qua est binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco* : *Commensurabilis longitudine ; in demonstratione repenamus ubique* : *cõmensurabilis potentia tantum* :) *&* DE, *esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi* AB, *cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si* AC, *maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali ; &* DF, *maius nomen eidem esse commensurabile longitudine ; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationali, &* DF, *eidem* AC, *longitudine commensurabilis est, sed Rationali quidem commensurabilis longitudine : At vero* DF, *potentia tantum, ex hypothesi. Imo vero, si* AB, *sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt* DE, *illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus eraine eadem.*

SIT *enim* AB, *ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad* C, *si q. ei commensurabilis potentia tantum* DE, *quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq. esse in sua nomina ad* F, *& partes* AC, CB *partibus* DF, FE, *proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota* AB, *ad totam* DE. *Dico nullo modo fieri posse, vt* DE, *ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi* AB. *Nam si potest fieri, sit vtraq. ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumq. maius nomen* AC, DF, *ex defin. Rationali expositæ commensurabilis*
a 12. dec. *longitudine.* a *Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt.*
b 10. dec. *Et quoniam est vt* AC, *ad* DF, *ita* AB, *ad* DE, b *erunt propterea &* AB, DE, *longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim* DE, *ipsi* AB, *potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque* AB, DE, *ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq. vtraq. ex binis nominibus quarta erit. Sed neq. secunda vel quinta. Esset enim vtrumq. nomen minus* CB, FE, *ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq. adeo & inter se. Igitur & tota* AB, DE, *longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.*

SEMPER *tamen verum est, si* AB, *est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam* DE, *ipsi* AB, *potentia solum commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eandem sit. Nam hoc posito, poterit* AC, *plus quam* CB, *quadrato rectæ si longitudine commensurabilis. Cum ergo sit, vt* AC, *ad* CB, *ita*
c 15. dec. DF, *ad* FE, c *poterit quoque* DF, *plus quam* FE, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit* DE, *ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si* AB, *est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt* AC, *plus*

posse

posſit, quam CB, quadrato rectæ ſi longitudine incommenſurabilis, & poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex definit. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel ſexta, licet non eadem ordine ipſi AB. a 15. decim.

IN *ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſarium erit DE, eadem ordine ipſi AB, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.*

THEOR. 50. PROPOS. 68. LXVIJ. LXIJ.

EI, quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atq; ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, ſique ei rectæ DE, longitudine commenſurabilis. Dico DE, quoque ex binis Mediis eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. *b* Fiat enim vt tota AB ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF, *c* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, ponitur longitudine cõmenſurabilis DE; *d* erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. *e* Igitur & DE, FE, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: *f* Sunt autem AC, CB, potentia ſolum commenſurabiles; *g* erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cum ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commenſurabiles; *h* Atq; idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipſi AB, eandem eſſe ordine. Quoniam enim eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3 propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. *i* Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, cõmenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; *k* atq; adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, ſit ex binis Mediis ſecunda: erit & rectangulum ſub DF, FD, ci

b 12. ſexti. c 19. quinti. d 10. dec. e 24. dec. f 38. dec. g 10. dec. h 38. vel 39. decimi. i 10. dec. k 18. dec.

commensurabile, Medium, ex corollario propos 24. huius lib.
a 39. def. a Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

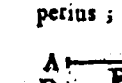
EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atq; ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

LXVIIJ. LXIJ.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel lõgitudine & potẽtia, vel potẽntia tantũ; b erunt quoq; tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita
b 10. def. DF, ad FE, c erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita
c 22. sexti. quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & po-
d 10. def. tentia, vel potentia tantum. d Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis
e 40. def. rectarum DF, FE. e Est autem compositum illud Rationale, cum,
f 9. defin. rectæ AC, CB componant Maiorem AB. f Igitur & hoc Rationale est.



RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lem-

ex lemmate 3. propos 19. huius libri; erit quoq; vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB; ad rectangulum sub DF, FE: Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. *b* Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, *c* sunt que AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componant Maiorem AB; *d* Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaque cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; *e* erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis & ipsa Maior est Quod demonstrandum erat.

a 10. *dec.* *b* 40. *dec.* *c* 40. *dec.* *d* 10. *dec.* *e* 40. *dec.*

LXIX.
LXIII.

THEOR. 52. PROPOS. 70.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac medium potens est.

SIT (repetita figura antecedentis propos.) recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE. siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem quæ supra, ostendemus, vt in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, CB, cõmensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, FE: *f* Est autem illud compositum Medium, cum rectæ AC, CB, cõponant ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub AC, CB, *g* quod Rationale est, cõmensurabile rectangulo sub DF, FE, atque adeo & rectangulum sub DF, FE. Rationale est, ex 9. defin. Denique vt in eadem superiori propositione erant DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demonstratũ est; *h* erit tota DE Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

f 41. *dec.* *g* 41. *dec.* *h* 41. *dec.*

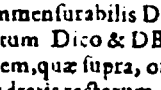
THEOR.

LXX. LXIV.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia siue potentia tantum Dico & DE, esse bina Media potentē. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum AB, CB, composito ex quadratis rectarum DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub AC, CB, esse commēsurabile rectangulo sub DF, FE. a Cum ergo tam compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulum sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius lib. tam compositum ex quadratis rectarum DF, FE, quam rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incōmensurabiles sunt, vt prius. Postremo b quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub AC, CB, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod AB, bina Media potest; Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulo sub AC, CB, probauimus commensurabile rectangulum sub DF, FE; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque c composito ex quadratis ipsarum; c erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.



a 42. decim.

b 42. dec.

c 42. dec.

LXXI. LXV.

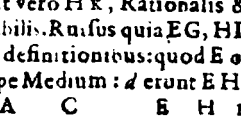
THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale spatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum spatiū AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorē, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias cum AB, sit Rationale, esset & illi æquale CD, Rationale quod nō ponitur. Sit primo

maius,

maius, *a* & expositæ Rationali E F, applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B, & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, vt totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium, erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem E F, *b* erit E H, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis; *c* At vero H K, Rationalis & eidem E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia E G, H I, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus: quod E G, Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Medium: *d* erunt E H, H K eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles; *e* Ac propterea E K, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc est, E G, quam H I: erit quoque E H, maior quam H K, *f* cum D H, H K, eandem rationem habeant, quam E G, H I. Iam vero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, *g* Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

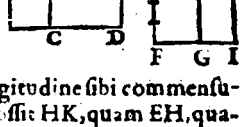


a 45. *primi.*
b 21. *decim.*
c 23. *decim.*
d 10. *decim.*
e 37. *decim.*
f 11. *sex.*
g 55. *decim.*

Si vero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit E A, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & spatium A D, *h* Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

h 58. *decim.*

Sit deinde A B, minus quam C D, & eadem constructa, quæ prius. Erit ergo, vt prius, E K, ex binis nominibus & E H, ipsi E F, longitudine commensurabilis. Et quia A B, minus est quam C D, hoc est, E G, quam H I: erit quoque recta E H, minor quam H K. Potent igitur rursus H K, maius nomen ipsius E K, quæ est ex binis nominibus, plus quam H K, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis: erit E K, ex binis



nomini-

nominibus secunda; cum E H, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali E F, vt ostensum est. Quare rectapotens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus secunda E K, atque adeo & spatium A D, ex Rationali AB, & Medio C D, compositum, a Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima.

a 56. decim

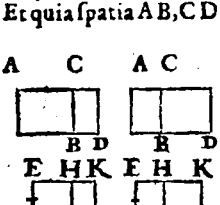
Si vero H K, plus possit quam E H, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atque adeo & spatium A D, b Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

b 59. decim.

lxxij. lxvj. THEOR. 55. PROPOS. 73.

Si duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommensurabilia A B, C D. Dico rectam quæ potest totum spatium A D, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus A B, vel maius, quam C D, vel minus: Æquale siquidem non erit: alias essent A B, C D, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia A B, C D, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia E G, H I, Media & incommensurabilia: cum illis sint æqualia.



c 10. decim.

c Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt: & vtraque (cum E G, H I, Media sint, applicenturque ad Rationalem E F,) d Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis, Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles: e ac propterea E K, ex binis nominibus est. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit vt in antecedenti propos. E H, maius nomen ipsius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi cõmensurabilis longitudine,

d 23. decim.

e 37. decim.

cum

dum vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit lõgitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, a Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. a 57. decim.

Si vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, b Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. b 60. decim.

Quod si AB, minus sit, quam CD, non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se commensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se easdem esse.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, c latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. c 23. decim.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61. decim.

ET quadratum eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, e latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, f latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. e 62. decimi. f 63. decimi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum g latitudinem facit ex binis nominibus quartam. g 64. decim.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, h latitudinem facit ex binis nominibus quintam. h 65. decim.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, i latitudinem facit ex binis nominibus sextam. i 66. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus: perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senarijs.

I N primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ordinem sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus: & eius, quæ ex binis Mediis prima: & eius, quæ ex bina Me-

dijs se-

dia secunda; & Maioris; & eius, qua Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47 & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse in sua nomina.

IN *tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.*

IN *quarto, quem absoluunt propos. 55 56 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex linea Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quænam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.*

IN *quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63 64. 65. & 66. docuit, qualnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.*

IN *sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69 70. & 71. absolvitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.*

IN *septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73 explicauit rursus differentiam aliam ex prædictarum Irrationalium.*

REPERITVR *autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, qua quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis linea Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.*

SIT enim quælibet Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C, & diuidatur A B, bifariam in D; & eius dimidia A D, vel D B, æqualis sumatur E.

Dico E, mediam esse secundum Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & esse quoque ex binis nominibus. Quoniam enim A C, superat dimidiam A D, recta D C, & dimidia D B, superat ipsam C B, eadem recta D B: perspicuum est, dimidiam ipsius A B, nempe E, esse mediam proportionalem inter A C, C B. in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commensurabilis est longitudine toti A B, cum hæc illius sit dupla erit & E, Irrationalis eadem: si A B, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SE-

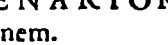
SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem gignuntur, quas in præcedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. lxxiij. lxviij.

Si à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius libr. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB ad rectangulum sub AB, AC; Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles:



a erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. c Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale: (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale: atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. decim.
b 16. decim.
c 7. secundi.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles: a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

a 37. decim.

lxxiv. lxix. THEOR. 57. PROPOS. 75.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale cõtineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles: erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia, b atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius libr. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale: erit & rectãgulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incõmensurabile est cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. c Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoq; rectangulum bis sub AB, AC, vna cũ quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. d Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt: Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali: erit quadratum ex BC, Irrationale: ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

b 16. decim.

c 7. decimi.

d 17. decim.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

Si à

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, sint Media potentia solum commensurabilis, contineantque Rationale; a erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB. vt relinquatur BC, Mediæ Apotome prima. a 38. decimi.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

lxxv. lxx.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; *b* erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: est autem vtrumq; ipsorum Mediū, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis vtriq; commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24 huius lib. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videl. bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarū AB AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. *d* Medium autem non superat Medium Rationale. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 16. decimi.

c 7. secundi.

d 27. dec.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

Si à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

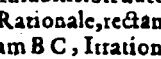
QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum commen-
a 39. decim. *surabiles, continentque Medium: a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome secunda.*

lxxvj. lxxj.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

Si à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis: Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius libr. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale: *b* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. rel. quo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.



b 10. decim. c 7. secundi. d 10. defin.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

Si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod au-
c 40. decim. *tem sub ipsis continetur, Medium: c erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, cuiusque maius nomen AB, minus autem AC*

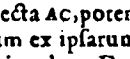
Auferatur

Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.

THEOR. 60. PROPOS. 78. LXXVij. LXXij.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota facit cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis cõtinetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incõmensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atq; adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, AC, Rationale; *a* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *b* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. *c* Sunt ergo rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; *d* erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existẽs toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. *defin.* b 7. *secundi.* c 17. *decim.* d 10. *defin.*

SCHOLIVM.

HOC *etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.*

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM *enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale;* c *erit compositum ex ipsis Irratio-* c 41. *dec.*

nalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiés relinquatur.

lxxviij. lxxiij.

THEOR 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. a Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex corol. propos. 24. huius lib. Medium etiam est (cum Medio, quod sub AB AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. b Medium autem non superat Medium Rationale. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB AC, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

A ——— B

a 47. secundi.

b 37. dec.

SCHOLIVM.

IN *hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.*

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

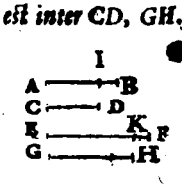
QVONIAM *cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, qua bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.*

LEM

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT *quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitque IB, excessus inter AB, CD, aequalis excessui KF, inter EF, GH, Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, aequalis. Eodem modo aequalis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hae magnitudines illis sint aequales, singula singulis. Est autem totorum AB, EF, expronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, aequales ponuntur. Igitur idem quoq; excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.*



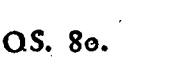
COROLLARIVM.

EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse, inter primam, & tertiam magnitudinem, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundã, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, & hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 64. PROPOS. 80. LXXIII. LXXIV.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalẽ non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD. ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; erit AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantũ commensurabiles. Eodẽ



modo erunt & AD, BD. Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD, BD; (superat enim compositum ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis sub AC, BC. quadrato ex AB; *a* quod compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum AD BD superat rectangulum bis sub AD, BD, quadrato eodem ex AB; *b* cum & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cum quadrato ex AB,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27 huius lib. quod vtrumq; Rationale sit. (Nam cum AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata Rationalia, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium Rationale est. *d* Et quia rectangulum sub AC, BC Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24 huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. *e* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Rationalis nō congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 7. *secundi.*
b 7. *secundi.*
c 16. *dec.*
d 22. *dec.*
e 27. *dec.*

A B C D

LXXX.
LXXV.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat AC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC,

AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, continearque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitq; rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC Media est potentia solum ipsi AC, commensurabilis; *a* erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumque sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC BC, illi commensurabile, Rationale. Atq; eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AB, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile est, atque adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarū AD, BD. *c* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter cōpositum ex quadratis rectarum AC, BC, & cōpositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

a 24. decim.

b 16. dec.

c 27. dec.

LXXXj. LXXVj.

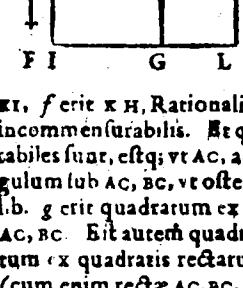
THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Medium. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatq; cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia

BD Mediatori AD, potentia tantum commensurabilis, fitque rectangulum sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, a 45. primi. a ad quam applicetur rectangulum EG, æquale composito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale composito ex quadratis rectarum AD, BD. b 7. sec. b Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, una cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, c 24. dec. c erit & AC, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia.

Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtriq; eorum; d 16. dec. atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. d Igitur & EG, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cum e 23 dec. applicetur ad Rationalem EF, e erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib & eius duplum, nempe KG. Medium: quod cum applicetur ad Rationalem f 23. dec. KI, f erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad propos 19 huius g 10. dec. lib. g erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; h 16. decim. erunt & earum quadrata commensurabilia. h Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, est iis, quæ in scholio propos 14. huius lib. docuimus, i 10. dec. i Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, k 74. dec. potentia solum commensurabilis ipsi EH, k erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Aporomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens



existens toti; quod est absurdum. Vnam enim tantum cõgruere, a demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum. a 80. *dec.*

82.
77.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam nõ congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulũ sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos 80 demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est aũt excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulũ bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. *b* Quare vnum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommẽsurabilis, &c. Minori ergo vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

b 27. *dec.*

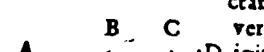
85.
78.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC potentia incommensurabilis, faciensque

cienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium rectangulũ vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam nõ congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cum vtrumq; ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

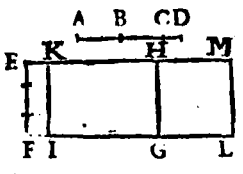


a 27. dec.

LXXXIV.
LXXIX.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipſi vero congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, facienſque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub AC, BC, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia BD, toti AD, potentia commenſurabilis, ita vt & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, Medium ſit, & rectangulum ſub AD BD, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam EG, illi æquale, Medium

lium. *a* Recta igitur E H, Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AG, BC, Medium est; erit & eius duplum x G, Medium. *b* Igitur & recta K H, Rationalis est, longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Et quoniam x G, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub A C, B C, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC: *c* erit quoque x G eidem composito, hoc est, ipsi E G, incommensurabile: ac propterea rectæ E H, x H, eandem habentes cum E G, x G, rationem, *d* longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali E H, auferatur Rationalis x H, potentia solum commensurabilis ipsi E H; *e* erit E x, Apotome, & ei congruens x H. Non aliter ostendemus E x, esse Apotomen, & ei congruentem esse x M. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. *f* Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. *decimi.*
b 23. *decim.*
c 14. *decim.*
d 10. *decim.*
e 74. *decim.*
f 80. *decim.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis: Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis: Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudinè commensurabilis: Vocetur Apotome quarta.

SI

V.

Si vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

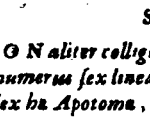
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

81. 80. PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus A C, non sit quadratus: ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum: at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E B. Eritque E F, cum commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad numerum A C, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, esse primam Apotomen.



a 6. decim. *a* Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo E F, ostensa sit Rationalis: erit & G F, Rationalis. Quia vero A B, A C, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. *b* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantum commensurabiles; *c* atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E F, plus quam recta G F, quadrato ex H. Et quia est, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati.

b 9. decimi.

c 74. decim.

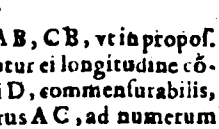
Igitur

igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; a Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estq; tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine: erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 9. decim.

PROBL. 20. PROPOS. 87. 86. 81.

Invenire secundam Apotomen.

Repertis duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. præcedenti: expositaq; Rationali D, sumatur ei longitudine cõmensurabilis G F, eritque G F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratũ ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico E G esse secundam Apotomen. Quoniam b enim quadrata ex G F, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ G F, E F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo G F, sit ostensa Rationalis: erit quoque E F, Rationalis. Quia vero numeri A C, A B, atque adeo & quadrata ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati: c erunt G F, E F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt G F, E F, potentia solum commensurabiles; d Ideoque E G, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta E F, plus quam G F, quadrato ex H. Quoniam ergo est vt A C, ad A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: Ostendemus iam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi E F, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota E F, plus possit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine cõmensurabilis, sitque congruens G F, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis: erit E G, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.



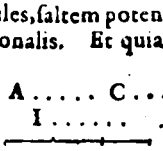
b 6. decim.
c 9. decim.
d 71. decim.

PROBL. 21. PROPOS. 88. 87. 82.

Invenire tertiam Apotomen.

Repertis duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propositione 86. sumatur alius numerus I, vt in propositione 1. huius libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Ex posita deinde Rationali D, fiat vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum

a 6. *decimi.* tum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. *a* Eruntque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & E F, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionem non habent,

b 9. *decimi.* 

quam numeri quadrati; *b* erunt rectæ D, & E F, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F ex eodem corollario propos. 6. huius lib. Dico E G, esse tertiam Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem habentia,

c 6. *decim.* quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo E F, ostensa sit Rationalis erit & G F, Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia A B, A C, atque adeo & quadrata ex E F, G F, proportionem non habent, quam numeri quadrati;

d 9. *decimi.* *d* Erunt rectæ E F, G F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia solum commensurabiles: Ac propterea cum ex E F, auferatur G F, potentia illi solum commen-

e 74. *decim.* surabilis: *e* reliqua E G, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam a. est, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratū ex E F; & vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F: Non habent autem numeri I, & A C, proportionem, quam numeri quadrati. Neq; igitur quadrata ex D, & G F, proportionem

f 9. *decim.* habebunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & G F, lōgitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H; Ostendemusque, vt in propos. 86. rectam H, esse ipsi E F, longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota E F, plus possit quam congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ: erit ex defin. E G, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

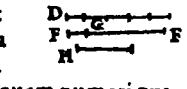
88. 83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 19. huius lib.

ius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F; eritque propterea & E F, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



a 9. decimi.

PROBL. 23. PROPOS. 90. lxxxix. lxxxiv.

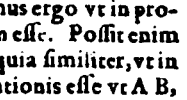
INVENIRE quintam Apotomen.

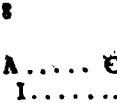
REPERTIS (repetita figura proxime antecedentis propositionis) duobus numeris A C, C B, vt in propositione præcedenti fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt A B, ad C B ita quadratum E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine: erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91. xc. lxxxv.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionē habeat, quā quadratus ad quadratū: exponatur Rationalis D, & reliqua fiāt, vt in propos. 88. Ostēdemus ergo similiter, vt ibi D, & E F, lōgitudine incōmensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse; & E G, Apotomē esse. Dico & sextam esse. * Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles: Atque adeo neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D,



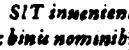


nali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit cõmensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, ferta Apotome. Inuenimus ergo sextã Apotomẽ. Quod erat faciendũ.

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

249. decim. *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. a Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles: erunt etiam AC, DC, Rationales potentia tantum commensurabiles.* b *Est ergo AD, Apotome. Et quia*

b 74. deci. 

AB, plus potest, quam CB, hoc est, quam DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, qua ex binis nominibus prima dicitur: erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta, sextam, si numera nomina ex maioribus auferamus.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

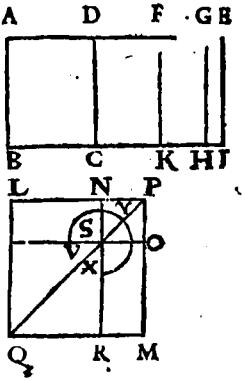
xcj. lxxxvj. **SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea spatium potens Apotome est.**

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit i, si AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commensurabiles: & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB: & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quam congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, b fariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius libr. Et quia AE, plus potest, quam DE, quadrato rectæ si-

c 18. decim. bi longitudine commensurabilis: c erunt rectæ AG, GE, lon-

d 16. decim. gitudine commensurabiles; d Ac propterea & vtraque totî AE, longi-

longitudine commensurabilis erit: Est autem AE, Rationali AB, longitudine commensurabilis. *a* Igitur & vtraque AG GE, ipsi AB, longitudine est commensurabilis: atque *ex* definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, parallelis, quæ ipsi BC, productæ occurrant in HI, *b* erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraque DF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & AE, sit eidem AB, longitudine commensurabilis, *c* essent AE, DE, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solum potentia commensurabiles;) *d* erit etiam vtraque ipsarum DE, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quoniam vtraq; DF, FE, Rationali DF, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB FE Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, *e* erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.



Iam vero ipsi AH, *f* fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, angulum LPM. *g* Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniã igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem, æquale est quadrato ex FE, *h* erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; *i* Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis habeant rationem: erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc est inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propositi 4 huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: *k* Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO. Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale: Ac propterea recta TS, potest spatium AC. Dico TS, Apotomen esse.

Quoniam enim spatia AH, GI, ostensa sunt Rationalia: & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoque quadrata LM,

a 12. *decimi.*
b 20. *dec.*
c 13. *decim.*
d 14. *decim.*
e 22. *decim.*
f 14. *secund.*
g 26. *sexti.*
h 17. *sexti.*
i 11. *sext.*
k 3. *decim.*

NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum: erit & LO, illi æquale Mediũ. Incommensurabilia ergo sunt LO & NO, cum vnum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO a eandem rationem habentes cum LO, NO, b longitudine incommensurabiles sunt; c Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

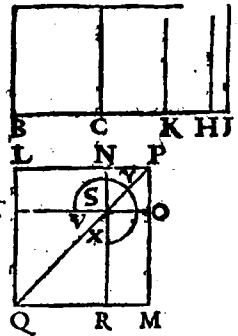
a 1. *sex.* b 10. *decim.* c 74. *decim.*

xcii. lxxxvij.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles: & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia constituantur, vt in propositione præcedenti. d Erunt-que rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine commensurabiles: e Ac præterea & vtraque toti AE, longitudine ὁmensurabilis. Est autem AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi AB, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commensurabilis; f essent AE, DE, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles. g Igitur & vtraque ipsarum AG, GE, longitudine incommensurabilis est eidem AB. Est autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam AE, AG, quam AB, GE, potentia solum commensurabiles: h Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est, &



d 18. *decim.* e 16. *decim.* f 12. *decim.* g 14. *decim.* h 22. *decim.*

est; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commensurabilis; erit quoq; vt in scholio propos. 12. huius lib ostendimus, eidem AB Rationali longitudine commensurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. a Vtrumq; ergo rectangulum DK, FI, a 20. *dec.* contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primam.

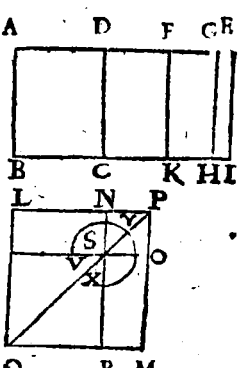
QVONIAM enim AG, GE, longitudine sunt commensurabiles, b erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, b 10. *decim.* commensurabilia; atq; adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO SO, saltem potentia erunt cõmensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia. (ostẽsa enim sunt AH, GI, Media esse.) Media sint. Et quoniam FI, atque adeo sibi æquale LO, Rationale est, propterea q; Medio NO, incommensurabile; c erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis ra- c 10. *decim.* tionem habentes, longitudine incõmensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles, erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum; d erit TS, Mediæ Apotome pri- d 75. *dec.* ma. Si ergo spatium contineatur sub rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, longitudine cõmensurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ si longitudine commensurabiles. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; e Ac propterea & vtraq; toti AE longitudine com- e 16. *dec.* mensurabilis erit. Est autem AE posita incommensurabilis longitudine Rationali AB. f Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, f 14. *dec.* longitudine erit incommensurabilis. Cum ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales potentia solum commensu-

a 24. dec.



rabiles; a Ac propterea vtrumq; rectangulum AG, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incõmensurabilis Rationali AB; erit quoq; vtraq; DF, FE, ipsi DF, longitudine incõmensurabilis existens. b eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo vtraq; DF, FE, Rationali: DE, cõmensurabilis Rationalis; erunt tam AB, DE, quã AB, GE, Rationales potentia tantum cõmensurabiles; c atque propterea vtrumq; rectangulũ DK FI, Mediũ erit. Similiter iam demõstrabimus, vt in porpos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

b 14. dec.

c 22. dec.

QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE quas ostendimus commensurabiles esse, a commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles sunt, saltem potentia. At vero quia AE DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AB, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE, incõmensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incõmensurabiles; ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, hoc est illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit LO, Medium.) f erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

d 10. decim.

e 10. dec.

f 76. dec.

XCIV. LXXXIX.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Ra-

DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. *a* Erunt ergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidẽ AE, plus poteſt quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulum ſub AG GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensq; figura quadrata. Et quia AE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; *b* erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, *c* erit DI, atq; adeo & eius dimidium FI; Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; *d* incommenſurabilia erunt AG, GI, eandem cum illi proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC Dico TS, eſſe minorem.

a 10. *dec.*
b 10. *dec.*
c 12. *dec.*
d 10. *dec.*

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis rectarũ TO SO, Rationale Idem quia F, Mediũ eſt oſtenſum; erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeo rectæ TO, SO, potentia incommẽſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitq; compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; *e* erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

e 77. *dec.*

THEOR. 72. PROPOS. 69. XCV. XC.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proxime antecedente) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totũ efficit Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE Rationales potentia tantum commenſurales, & DE, Rationali AB, [illegible]menſurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit, quam D[illegible]adrato rectæ ſi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & rel.qua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo

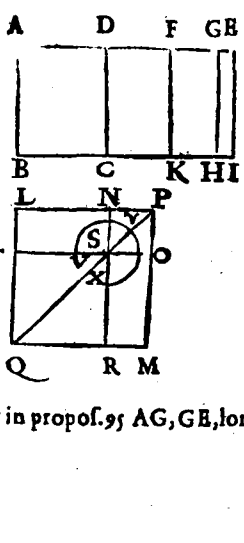
rursus, vt in antecedenti propos. AG, GE, longitudine incõmensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incõmensurabilis
a 22. *dec.* est Rationali AB, vt in propos 93. diximus; *a* erit rectangulum
b 20. *dec.* AI, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; *b* erit DI, atq; idcirco & eius dimidium FI Rationale. Rursus erunt, vt in p. æcedenti propos. AH, GI, incommensurabilia; poteritque, vt ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit

QVONIAM enim ostensum est AI Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demõstratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis. Medium; rectangulum vero sub ipsis, Rationa-
c 78. *dec.* le; *c* erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

xcvj.
xcj.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. *Sit enim* ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potẽtia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua constr[illegible]tur, vt supra. Erunt ergo [illegible], vt in propos. 95 AG, GE, longitudine incõmensurabiles. Et quia tam

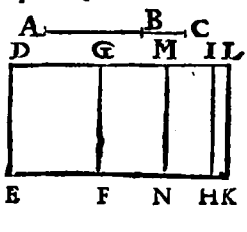
tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AE, longitudine incommensurabilis; *a* erit tam AI quam DI, atq; adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntq; vt in propos. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; *b* Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atq; adeo cum DI, FI, cõmensurabilia sint, *c* erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam vero demonstrabimus, vt in propos. 92, rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. *a* 22 *dec.* *b* 10. *dec.* *c* 14 *dec.*

QVONIAM enim AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumq; sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI est incõmensurabile, vt ostendimus; erit quoq; LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO, propterea quod LO ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabiles sunt vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO SO, sint potentia incommensurabiles, & cõpositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile; *d* erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum. *d* 79. *dec.*

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatũ, latitudinem facit Apotomen primam. xcvij. xciij.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BG, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; *e* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK, æquale sit composito ex quadratis rectarum AC, BC, *f* Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; sin auferatur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam *e* 45. *primi.*



f 7. *secundi.*

riam in M, ductaque MN, ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC, BC, Rationalia; ideoque commen-
a 16. *dec.* surabilia. *a* Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad
b 21. *dec.* Rationalem DE, *b* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum cõmensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeo & eius duplum GK, Mediũ. Quod cum applicetur ad Rationa-
c 23. *dec.* lem GF; *c* erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Me-
d 10. *dec.* diũ, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt: *d* erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum cõmen-
e 74. *dec.* surabiles; *e* Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam esse.

QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC CB, hoc est, MK, medium est proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue propor-
f 17. *sexti.* tionales sunt. *f* Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensura-
g 10 *dec.* bilia sunt, *g* erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine cõmensurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, aplicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensque figura quadrata, atque sit ostensa DI, ipsi IL,
h 10. *dec.* longitudine commensurabilis; *h* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam cõmensurabilem esse longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomes ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

xcviij. xciij

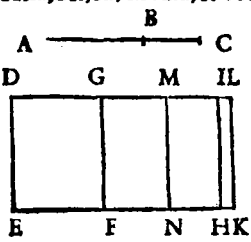
THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, continentque Rationale: a Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG Dico DG, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propos. ita vt ius. sus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia cõmensurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commensurabilia; b ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium per coroll propos. 14. huius libr. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, c erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale, ponitur, erit quoq; eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, d erit GL, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incõmensurabilia sunt; e erunt rectæ DL, GL, eandē habentes cum illis rationem lõgitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum cõmensurabiles; f Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentē GL, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome *secunda*. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

a 45. *primi*.



b 16. *dec*.

c 23. *dec*.

d 21. *dec*.

e 10. *decim*.

f 74. *dec*.

XCIX.
XCIV.

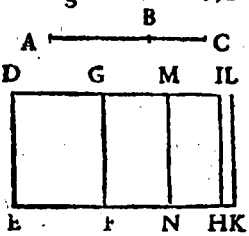
THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentq; Medium: g Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG, Dico DG, esse tertiam Apoto-

g 45. *primi*.

Apotomen. Eadem enim fiant, quę ſupra. Oſtendemus iam. vt in
a 23. dec. propoſ. præcedenti DK, Medium eſſe, *a* atq; adeo rectam DL, Rationalem ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Et quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt, atque ob id & eius du-
b 23. decim. plum GK, *b* erit quoq; GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Quia vero AB, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtq; vt AC, ad BC, ita per lemma 3 propoſ 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, *c* erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. *d* Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia incommenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc
c 10. dec. eſt, ipſi GK. *e* Atq; adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incõmenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſæ & Rationes. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; *f* Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ 98. demonſtrabimus DL, totum plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit commenſurabilis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.



f 74. dec.

C.
XCV.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint. facientesq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationales; rectangulum vero ſub
g 45. primi. AC, BC, Medium: *g* & ad Rationalem DE, applicetur ſpatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG Dico DG, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC,
h 21. dec. hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt; *h* erit DL, Rationalis ipſi DE, lon-

DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium est; a erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium incommensurabilia sunt: b erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum cōmensurabiles: c Ac propterea reliqua LG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles: Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; d Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum: e potent it DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabili, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis: erit ex defin. D G. Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. *decimi.* b 10. *decim.* c 74. *decim.* d 10. *decim.* e 19. *decim.*

THEOR. 78. PROPOS. 102. c 1. xcvj.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium: rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: f Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constructis enim eadem, quæ supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale DK, Medium est; g erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum GK, Rationale est; h erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt: i erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensura-

f 45 *primi.* g 23. *decim.* h 21. *decim.* i 10. *decim.*

mensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationalet ergo sunt DI, GL, potentia solum commensurabiles: a Atq; ideirco reliqua D G, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrauimus D L, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens G L, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex d. fin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

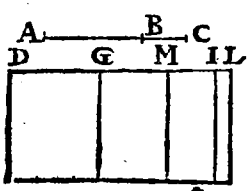
a 74. *decs.*

cij. xcvij.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens BC, ita vt A C, BC. potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C. Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. b Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato, ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, ill. æquale D K, quam rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; c Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, BC; Et sunt rectangulum sub AC, B C, & eius duplum G K, commensurabilia: d Erit & G K, eidem composito, hoc est ipsi D K, incommensurabile: e propterea q; rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles, f Atq; idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter vt propos. 101. totam DL, plus posse quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cũ Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.



b 45. *primi.*

c 23. *decim.*

d 14. *decim.*

e 10. *dec.*

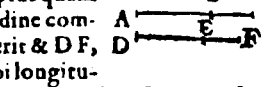
f 74. *decim.*

THEOR.

THEOR. 80. PROPOS. 104. oiij. xcviij.

Recta linea Apotomæ longitudine commensurabilis: & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

Sit Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine cõmensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB; *a* Fiat n. vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. a 12. *sexti.*
b Erit ergo tota AC, ad totã DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. b 12. *quinti.*
Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles: *c* Erunt quoq; AC, DF, nec non & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF: & permutãdo vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solũ commensurabiles: erunt quoq; ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF potẽtia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, *d* reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, *e* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit cõmensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; *f* erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commensurabilis Rationali: erit eodem modo EF, Rationali lõgitudine commensurabilis: Atq; adeo vtraque AB, DE, ex defin erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commẽsurabilis sit longitudine expositæ Rationali; *g* erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



c 10. *decim.*
d 74. *decim.*
e 15. *decim.*
f 12. *decim.*
g 14. *decim.*

Possit iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, *h* poterit & DF, plus quã EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

h 15. *decim.*

SCHOLIVM.

HIC EM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius libr. de linea

linis ex binis nominibus scripsimus. Nimiram si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem i si AB Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est: sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine. At vero DF, potentia tantum ex hypothesi. Imo vero, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta vel quinta, eique congruens BC, & sit DE, ipsi AB, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem EF, & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ prima, Rationali expositæ commensurabilis longitudine: a *atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt* b *AC, & DF. Quare cum sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE: b erunt quoq; AB, & DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est Eodem modo neq; quarta Apotome erit. Sed neq; secunda, vel quinta. Esset enim vtraq; congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atq; adeo & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.*

a 12. decim.
b 10. decim.

SEMPER tamen verum est, si AB, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipsi AB, potentia solum est commensurabilis, esse quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, c poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quare ex ac fin erit DE, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quamuis ordine non eadem ipsi AB: quia rursus, cum sit vt AC, ad BC, ita d DE, ad EF, d poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.

c 15. decim.
d 15. decim.

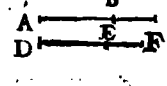
IN

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit D E, eadem ordine ipsi A B, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

Recta linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem. cIV. xcIX.

Sit Mediæ Apotome quæcunque A B, eiqui congruens B C, ita vt A C, B C, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, commensurabilis D E, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & D E, Mediæ Apotomen esse, & ipsi A B, ordine eandem. *a* Fiat enim vt A B, ad D E, ita B, C, ad E F. *b* Erit ergo tota A C, ad totam D F, vt A B, ad D E, & vt B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque B C, E F, & A C, D F, eodem modo commensurabiles. Et quia A C, B C, mediæ sunt, *d* erunt quoque D F, E F, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt A C F, ad B C, ita D, ad E F: Sunt autem A C, B C, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex *scholio* propos. 10 huius lib. D F, E F, solum potentia commensurabiles. Quare cum D F, E F, Mediæ sint ostensæ, *e* erit reliqua D E, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi A B. Quoniam enim est vt A C, ad B C, ita D F, ad E F; & vt A C, ad B C, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt D F, ad E F, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, E F; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum sub A G B C, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F E F; Et permutando vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, B C, ad rectangulum sub D F, E F. Igitur cum quadratum ex A C, commensurabile sit quadrato ex D F, quod rectæ A C, D F, ostensæ sint commensurabiles; *f* erit & rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, E F, commensurabile. Quare si rectangulum sub A C, B C, sit Rationale, ita vt A B, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub D F, E F, Rationale, cum illi sit commensurabile; *g* atque adeo & D E; Mediæ Apotome primæ erit. Si vero rectangulum sub A C B C, sit Medium, ita vt A B, sit mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulum sub D F, E F, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. *h* Ac propterea & D E, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.



a 12. *sexti.*
b 12. *quinti.*
c 10. *decimi.*
d 24. *decimi.*
e 75. *vel* 76. *dec.*
f 76. *decimi.*
g 75. *decimi.*
h 76. *decimi.*

cv. cxvj c.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

Recta linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

Sint Minor *A* B, ipsique congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensuribiles, faciantesque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; rectangulum vero sub iisdem *A* C, B C, Medium. Sit autem D E, ipsi *A* B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. *Dico* & D E, Minorem esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus *A* B, B C, ad *D* E, E F, eandem habeant rationem, quam *A* C, ad D F. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. D F, E F, ipsis *A* C, B C, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt *A* C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt *A* C, ad B C, ita *D* F, ad E F, *a* erit vt quadratum ex *A* C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F: & permutando vt compositum ex quadratis rectarum *A* C, B C, ad compositum ex quadratis rectarum D F, *E* F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Est autem quadratum ex B C, commensurabile quadrato ex *E* F; quod rectas B C, E F, ostenderimus commensurabiles esse. *b* Igitur & compositum ex quadratis rectarum *A* C, B C, composito ex quadratis rectarum D F, E F, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum *A* C, B C, ex hypothesi, Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub *A* C, B C, rectangulo sub D F, E F, esse commensurabile; ponitur autem rectangulum sub *A* C, B C, Medium: Erit quoque rectangulum sub D F, E F ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt *A* C, ad B C, ita D F, ad E F, *c* sunt quæ A C B C, potentia incommensurabiles: *c* erunt etiam D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum D F, E F, Rationale, rectangulum vero sub iisdem D F, E F, Medium; *d* erit D E, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. sexti. b 10. decimi. c 10. sexti. d 77. decimi.

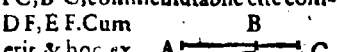
THEOR. 83. PROPOS. 107.

cvj. cxvij. 9.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit, & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

Sit

Sit recta A B, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt B C, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; at rectangulum sub A C, B C, Rationale: Sit autem D E, ipsi A B, commensurabilis quocunque modo. Dico & D E, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub A C B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectæ D F, E F, potentia incommensurabiles. Igitur cum D F, E F incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; erit D E, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



278. decim.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

cvij. ciij.

Recta linea commensurabilis ei, quę cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

Sit recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomodoliber commensurabilis. Dico & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles. Postremo, quia composito ex quadratis rectarum A C B C, commensurabile est compositū ex quadratis rectarum D F, E F, vt dictum est; rectangulo sub A C, B C, commensurabile rectangulum sub D F, E F. Sunt autem compositum

ex quadratis rectarum *A C*, *B C*, & rectangulum sub *A C*, *B C*, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius libr. compositum ex quadratis rectarum *D F*, *E F*, & rectangulum sub *D F*, *E F*, incommensurabilia. Quocirca cum *D F*, *E F*, potentia sint incommensurabiles & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; *a* erit *D E*, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

a 79. *decimi.*

cviij. ciij

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

Detrahatur á Rationali *A D*: Medium *C D*. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum *A B*, esse vel *Apotomen*, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis *E F*, *b* ad quam applicetur rectangulum *E G*, æquale ipsi *A B*, & ad *G H*, aliud *H I*, æquale ipsi *G D*, ita vt totum *E I*, toti *A D* sit æquale. *Quoniam igitur* *E I*, æquale Rationali *A D*, Rationale est; *c* erit *E K*, Rationalis, Rationali *E F*, longitudine commensurabilis. Rursus quia *H I*, Medio *C D*, æquale Medium est *d* erit *H K*, Rationalis, ipsi *E F*, longitudine incommensurabilis. Itaque cum *E K*, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi *E F*, at *H K*, eidem *E F*, longitudine incommensurabilis, *e* erunt *E K*, *H K*, longitudine incommensurabiles Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles *f* propter eaque reliqua *E H*, Apotome est, & ei congruens *H K*. *Aut igitur E K*, *plus potest* quã *H K* quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabis. Si plus potest *E K*, quam *H K*, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota *E K*, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali *E F*; erit ex defin. *E H*, *Apotome prima*. Quare recta potens spatium *E G*, contentum sub Rationali & *Apotoma prima* *E H*, hoc est, spatium *A B* sibi æquale, *g* *Apotome* est, *S.* vero *E K*, *plus potest*, quam *H K*, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota *E K*, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali *E F*; erit ex definitione *E H*, *Apotome quarta*. Quapropter recta potens spatium *E G*, contentum sub Rationali *E F*, & *Apotoma quarta* *E H*, hoc

b 45. *primi.*

c 21. *decimi.*

d 23. *decimi.*

e 13. *decimi.*

f 74. *decimi.*

g 92. *decimi.*

EH hoc est, spatium AB, illi æquale, *a* Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat. a 95. *decimi.*

THEOR. 86. PROPOS. 110. CIX. CIX.

Rationalia à medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

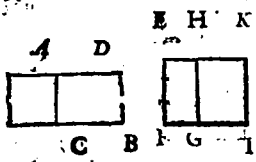
Detrahatur à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB potest, esse vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim construantur quæ supra. Et quia EH Medio AD, æquale, Medium est; *b* erit EK, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale est; *c* erit HK, Rationalis ipsi EF, longitudine commensurabilis. Itaque cum HK, quidem ipsi EF, sit commensurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommensurabilis; *d* erunt HK; EK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles; *e* Ac proinde reliqua EH Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *f* Mediæ est Apotome prima. Si vero EK, plus possit, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc est, spatium illi æquale AB, *g* est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem rationali à Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat.

b 23. *decimi.* c 21. *decimi.* d 13. *decimi.* e 74. *decimi.* f 93. *decimi.* g 96. *decimi.*

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX. CV.

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB,



potest, esse vel Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem quæ supra; quoniam EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia Media sunt, a erunt EK, HK, Rationales ipsi EF; longitudine commensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia; b erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales, Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; c Ac propterea reliqua FH Apotome est, & ei congruens HK. Autigitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, q̄ HK quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH hoc est, spatium AB, illi æquale; d Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus, erit ex defin. EH. Apotome sexta. Quamobrem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, e est ea, quæ cum tum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

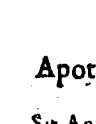
a 13. decimi.
b 10. decimi.
c 74. decimi.
d 94. decimi.
e 97. decimi.

cxj. cvj.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest A, aliqua ex binis nominibus. Exposita autem Rationali BC, f applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est: g erit latitudo BD, Apotomæ prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus: h erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nomi-



f 45. primi.
g 98. decimi.
h 61. decimi.

nibus prima est, B F, F D, Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine sit commensurabilis eidem B C; *a* erunt quoque B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, sit longitudine commensurabilis parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B F, longitudine incommensurabilis est ipsi D E; (quod B E, D E, Rationales sint potentia solum commensurabiles) *b* erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua F D, *c* Apotome est; Atque ideo irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

a 12. decimi.
b 14. decimi.
c 74. decimi.

CORLLARIVM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse eaidem.

Quadratum enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum *d* latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

d 23. decimi.

At quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, *e* latitudinem efficit Apotomen primam.

e 98.

Et quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, *f* latitudinem efficit Apotomen secundam.

f 99. decimi.

Quadratum vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatū, *g* latitudinem efficit Apotomen tertiam.

g 110. decimi.

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem efficit Apotomen quartam.

h 101. decimi.

At vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem efficit Apotomen quintam.

i 102. decimi.

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *k* latitudinem efficit Apotomen sextam

k 103. decimi.

Itaque cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se: à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales: inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam cōsequentes, & à Media, & inter se differre.

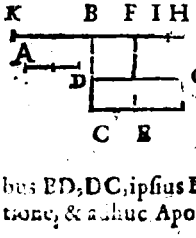
Quoniam vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, qui ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinq; Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur,

ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam eiusdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium: quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quamobrem cum & tam illa, quam hæ a media differant: efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas irrationales inter se differentes, de quibus hactenus disputauimus: Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus cuius sex sunt species inuentę.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

cxij. o. Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



a 45. primi. Sit rationalis A, & ex binis nominibus C B, cuius maius nomen C B, a & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus E D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione, & adhuc Apotomen B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis

binis nominibus. *a* Applicetur enim rursus ad DC, minus nomen, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqualis IH. Et quoniam æqualia sunt BE, CG, *b* erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc est, sibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Est autem BD, maior quam DC. Igitur & IF, maior est quam FB. Ponatur FI, ipsi FB, æqualis; *c* & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc est, ad sibi æqualem BF, ita FK, ad BK. Ostensum est autem esse vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. *d* Igitur & FK, BK, potentia solum commensurabiles sunt.

a 45. *primi.*
b 14. *vel* 16. *sexti.*
c 12. *sexti.*
d 10. *decimi.*

Rursus quia est vt HF, ad BF, ad FK, ad BK, *e* erunt quoque HF, FK, antecedentes simul, nempe tota HK, ad BF, & BK, consequentes simul, hoc est, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac propterea FK, media proportionalis est inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum *f* facit DG, latitudinem Rationalem ipsi DC, longitudine commensurabilem; Erit quoque HB, ipsi LG, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse vt BD, ad DL, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoquod vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. *g* Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex DC, (quod recta BD, DC, sint Rationales potentia commensurabiles, cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus.) *h* Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratum ex FK; ita recta HK, ad BK. *i* Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; atque adeo reliqua BH, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, commensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa FK, ipsi BK, potentia solum commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales sint, & potentia tantum ostensæ commensurabiles, *k* erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod est primum.

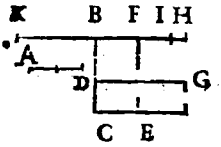
e 12. *quinti.*
f 21. *decimi.*
g 22. *sexti.*
h 10. *decimi.*
i 10. *decimi.*
k 74. *decimi.*

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, totam parti BK, longitudine commensurabilem, *l* erunt propterea & BK, BH,

l 16. *dec.*

BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi DC; erit quoq; BK, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt BD, ad CD, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles; a Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.

a 10. decimi.



Item quia demõstrauimus esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erũt idcirco Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominib. ipsius BC, quæ est ex binis nominib. Quod est tertium.

Postremo vel BD, plus potest, quam DC, quadrato rectę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest BD, quã DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; b poterit quoq; FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si BD, plus potest quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Et si quidem BD, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & FK, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi BD, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demõstrauimus. Si verò DC, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine cõmensurabilis. Si deniq; neutra ipsarũ BD, DC, sit Rationali longitudine commensurabilis; c erit quoque neutra ipsarum FK, BK, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome BF, ipsi BC, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. decimi.

c 14. decimi.

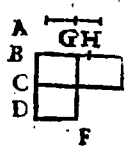
ex iij. o.

THEOR. 39. PROPÕS. 114.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & ad adhuc, quæ ex binis nominib. fit, eundem habet ordinem, quẽ ipsa Apotome.

Sit Ra-

Sit Rationalis A, & Apotome B, C, cui congruat C D, *a* & ad BG, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc ipsam B E ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomę ordine eandē. *b* Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale, eidem quadrato ex A, h. e. ipsi C E, latitudinem faciens B G. Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; *c* erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoq; E G, ad H, secundum proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G ex G E, ablatam; erit quoq; B H, reliqua ipsius B E, ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E. Erat autem vt B E, ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoque vt B H, ad H E, ita E H ad G H, atque adeo H E, media proportionalis est inter B G G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertium, ita quadratum ex B H prima ad quadratum ex H E secunda, per coroll propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cum sint nomina Apotomę B C. Rationales potētia tantum cōmensurabiles. *d* Erunt quoq; B H H E, potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandē habent rationem cum quadratis ex B H, H E vt demonstrauimus, *e* longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. 16. huius lib. At vero cum B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; *f* erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeo *Rationalis* existit; quandoquidem B H B G, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia vero B H, H E, ostensę sunt commensurabiles potentia tantum, & B H Rationalis; erit quoque H E, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solum commensurabiles: *g* Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.

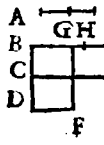


Quoniam vero ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D, atque adeo permutando E H, ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; *h* erit quoque

a 45. *primi.*
b 45. *primi.*
c 14. *vel* 16. *sexti.*
d 10. *decimi.*
e 10. *decimi.*
f 12. *decimi.*
g 37. *decimi.*
h 10.

que H E, ipſi C D, commenſurabilis longitudine. Quare B H, H E, nomina ipſius B E, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus B D, C D, Apotomæ B C. Quod eſt ſecundum.

Immo & in eadem proportione, cum demõſtratum ſit eſſe B H, ad H E, vt B D, ad C D. Quod eſt tertium.



Poſtremo vel B D, plus poteſt quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel E incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, *a* poterit quoque B H, plus quam H E, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi B D, plus poteſt, quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam B H, plus quam H E, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem B D, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoq; B H, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi B D, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12, huius *lib.* Si vero C D, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione, H E, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum B D, C D, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; *b* erit quoque neutra ipſarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis atque tertiis definitionibus, ipſa B E, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ B C. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 15. *decimi.*

b 14. *decimi.*

exiv. o.

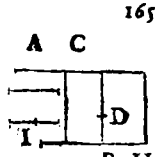
THEOR. 91. PROPOS. 115.

Si ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

Contineatur ſpatium A B, ſub Apotoma A C, & ſub C B, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commenſurabilia ſint nominibus C E, A E, Apotomæ A C; & in eadem ratione, nempe C D, ad D B, vt C E, ad A E. Poſſit autem recta F, ſpatium A B. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, *c* applicetur ad G B, quæ ex binis nominibus rectangulum C H, æquale quadrato ex G,

c 45. *primi.*

ex G a E: sit ergo latitudo E H, Apotome, cuius nomina H I B I, longitudine commensurabilia E I sunt nominibus C D, D B, & in eadem ratio F ne, nimirum H I, ad B I, vt C D, ad D B; atqui a- G deo vt C E, ad A E, & permutãdo vt tota H I, ad totam C E, ita ablata B I, ad ablatam A E, b E: it



a 113. *decim.*

b 19. *quint.*

ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, vt tota H I, ad totam C E; c Commensurabilis autem est longitudine H I, ipsi C E, quod vtraque H I, C E, commensurabilis fuerit longitudine ipsi C D. d Igitur & B H, ipsi A C, Longitudine est commensurabilis, e Atque idcirco & H C, ipsi B A, commensurabile erit, f cum sit vt H B, ad A C, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrate Rationalis G, æquale Rationale est. Igitur & B A, illi commensurabile, Rationale erit, propterea que & recta F, ipsum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub A Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus A poromæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium poteus, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.

c 12. *decim.*

d 10. *decim.*

e 10. *decim.*

f 1. *sext.*

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, fieri, posse vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub A C, C E, Apotama, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

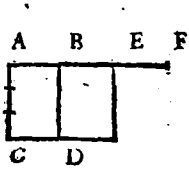
In proximu autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina C D, D B nominibus C E, A E, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

cxv. cvij.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

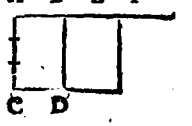
Sit Media A B Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius libr. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatium A D.



Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum,

tentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E, quæ ex defin. 11 Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, *a* latitudinem faciat Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perspicuum est Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

a 23. *decimi*.



Quod si compleatur rectangulum D E; erit & hoc contentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. 11 Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi B E. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à B E, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales ipsimitæ inuenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

cxviij. vij.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommensurabilem esse lateri A B. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; ac propterea A C, A B, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G; sintque numeri E F, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt A C, ad A B, ita numerus E F, ad numerum G, Erit quoq; vt qua-

b 5. *dec.*

m

dratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G. a (Cum enim quadrata habeant ſuorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum ſint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum eſt quadrati ex AB, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex C; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariam poſſit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſeipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod eſt abſurdum oſtenſus eſt enim par.) Quia vero EF, & G, in ſua proportione minimi, c inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par; erit G, impar. (Si enim pareſſet, metiretur vtrumque EF, & C, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus eſt numeri EH, d & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. eſt quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB, Igitur incommenſurabilis longitudine.

a 20. ſext. & 11. octauæ

b 29. nonæ

c 24. ſeptim.

d 11. eſt.

Aliter. Sit ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex EF, du-

pus

duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex E F, *a* ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, seipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

a 14. octaui.

SCHOLIVM.

Sed & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2 ad 1, vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunq; numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c, b solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnũ intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non fuerunt solum binumeri 4. 16. 64 quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratũ. (c alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. d Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

b 10. noni.

c 14. octaui.

d 9. decimi.

Hoc etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8 lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentib. Stereometria libru pendet, vt merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometria, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & alia quam plurima magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incõmensurabiles inter se. Sint enim rectæ A C, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6 vt A, ad C, ita est figura rectilinea quauis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem

similem

milem, similiterq; positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; a erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & B, incommensurabiles. a 10. decimi.

Rursus b quoniam circuli, quorum diametri A, B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B descripta: Quadrata autē hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; positæ proportionem habent, quam recta A, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. c Habebunt quoq; circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam recta A, C. Sed recta A, C, incommensurabiles sunt longitudine. d Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. b 2 duo decimi. c 11. quinti. d 10. decimi.

Iam verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, B, e habebunt pyramides atq; prismata eandem propotionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum; f incommensurabiles etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata. e 5. 6. vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

Quòd si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, g habebunt huiusmodi coni, & cylindri eādem proportionalem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, h Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solum linea & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum. g 11. duodecimi. h 10. decimi.

Eadem autem ratione, si recta A, & B, longitudine commensurabiles sint, i ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon & iarum circulos, commensurabiles esse, i 10. decimi.

k atque adeo & earundem pyramides, & prismata; ac denique coues, & cylindros, si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est. k 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POstquam Euclides in prioribus sex libris alunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam propriũm, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atq; incommensurabilium, quam idcirco luculentissime in lib. 10. deinde exposuit vt constructio, atq; natura quinq; corporum regularium, de quibus in postremo tribus libris nimirum in 13. 14. & 15 subtilissime disseritur, perfectius possit cognosci. Nunc tandem aggreditur in hoc lib. 11. eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioq; vocabulo Stereometria est appellata.

Explicat autem prius, more suo, vocas ad eam rem perneccssarias, quarum prima est: Solidum siue corpus nemine tertiũ genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari solidum, siue corpus. quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adijcit, superficies vocatur, vt in primo libro diximus.

Porro

Porro quemadmodum Mathematicus, vt rectè intelligamus lineam percipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hac enim describit vestigium quoddam legum tantum, hoc est, lineam, praterea quod punctum omnis est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hac enim describit vestigium longum & latum duntaxat, longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motū illum qui in transuersum est factus: carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers. Ita quoq; vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione praditam, conjulunt, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob superficiem qua longa & lata existit: profundum vero eu crassum propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propter a quod trip'ex tãtum dimensio possit assignari, vt perspicue in commentariis, qui in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratum ex Ptolemæ in l bello de Anatemmate.

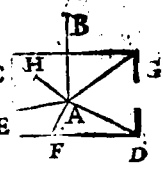
II.

Solidi autem extremum, est superficies.

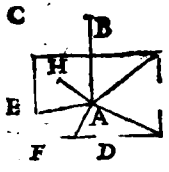
Quemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, superficies verò lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ai Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus essi tatur ex illo motu imaginario superficiei: perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

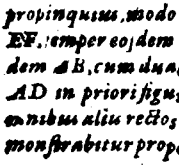


Vt linea recta AB plano D, insistens ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum CD at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter insistat plano CD, & non magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit & quo-



G deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eadem q; ratione protracta quælibet linea in plano CD faciet AB, cum illa suos angulos æquales. Et propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri possit, vt AB cum vna linea ex A, in plano CD educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB recta ad planum CD esse; quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

Vt autem recta quæpiam plano cuicunq; insistens rectos cõstituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoq; angulos efficere, vt perspicuum est ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duab. non efficientibus lineam vnã: aliasi duæ linea componant vnã rectam lineam, non necessario efficietur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectis conficere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis EAF quæ rectam vnam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; ac q; idcirco non esse rectam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cum AB circa EF velut axem, circumverti queat ita vt puncto B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius, nihilominus tamen semper eosdem rectos angulos & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quæ sint AG, AD in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. huius lib.

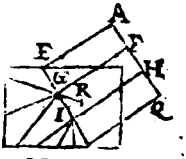


IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

Insistat planum AB, plano [illegible]

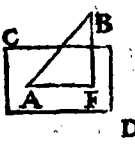
ſublimi hoc eſt, extra planum ſubiectum CD, at EB in ipſo eodem plano. Sit autem horum planorum communis ſectio EB, qua vt demonſtratum eſt propoſ. 3. huius recta erit linea. In hac autem ſumpto quotcunque puncto G, ex ipſo in plano AB ducantur GF, IH perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur linea FGHI ad planum alterum CD recta fuerint, hoc eſt, rectos angulos efficerint cum lineis GK, GL, GM, IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD à puncto G, & I ductis; dicetur planum AB ad planum CD rectum, quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit quam in alteram. ſed aequabiliter illi inſiſtet. Si enim KG producatur ad R, cum anguli FGK, ponantur recti; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi aequalis. Eadem ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique à lineis FG, HI, anguli aequales. Quare planum AB, aequaliter plano CD inſiſtet. Quotie ſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe concedetur ad planum aliud, concedendum quoque erit lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas rectas eſſe ad reliquum planum.



V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea & adiuncta comprehenſus.

Inſiſtat recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, puncto vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; erit profecto angulus BAE, acutus, a 17. primi. in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad

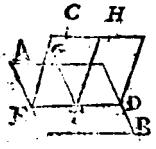


AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus BAE.

VI.

Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis cõtentus, quæ in vtroque planorũ ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

Plano namque AB, insistat planum CD, ita vt pars ad C sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB, & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; FG quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictus rectus comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



Interdum Geometra angulum CFH dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtususue: quanquam propriè solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem elevationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quendam modo vnius ab altero. Verumtamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu elevationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit à plerisque anguli inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares; cui usmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Non obscura est hæc definitio, precedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis recesserit.

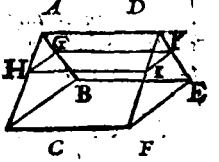
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

Intel-

Intellige. in quamcunq; partem, etiam infinite, producantur: hoc est, siue ad dextram, siue ad sinistram: & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana nō conuenient, quāuis producantur infinite ad dextrā & ad sinistrā: Sed tamen quia sursū protensa coeunt, nimirū in ipso fastigio idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D cuius Basis B C, F E, auferaturque fastigium A C H D K I. Quo facto perspicuum est, reliqua plana G B E K. H C F I non conuenire inter se, si ad partes G B H C, vel ad partes K E, I F, producantur nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes G H, K I, conueniant in fastigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem linea in eodē plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nēpe ad sinistrā, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum atq; deorsum. Ita q; duo plana quacunq;, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea vero recta, vel sunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallela, neq; vnquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum posita. V. de in definitione lenearum parallelarum in 3. lib additum fuit: quæ cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur, quæ nunquam conueniunt.



IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

Potuisset Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11 patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

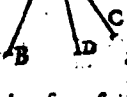
Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribantur, sint æqualia singula singulis, dicentur eiusmodi figuræ solidæ non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida neutrum alterum excedet, propter æqualitatem ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus: ex eorundem vero æqualitate laterum proportionali æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent: ac propterea inter se existent æqualia.

XI.

Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

Duæ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt efficiunt angulum planum, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam si videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planum duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositum. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non cõponetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dicas, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.



ALITER.

Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

Hæc

Hac definitio secunda anguli solidi facilis est, precedenti recte intellecta. Cum enim saltē tres linea in eodem non existentes plano necessaria sint ad anguli solidi constitutionem perspicuum est cum minimum tres planos angulos requiri vt angulus solidus efficiatur vt, ex superiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano est, in quo recte A B A D, & angulus D A C, in plano, in quo recte A D, A C; angulusque C A B, in plano, in quo recte A C, A B, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiam si in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis prebēt duo parietes cum pauimento domus vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earū superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex hu vero perspicuū cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse aquales qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine aqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodū autē in 1. lib. Euclides ex omnib. angulis planis solum rectilineū assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quē plures linea recta quam duo, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua cōtinetur; neq; is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidē plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticē secetur.

XII.

Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.

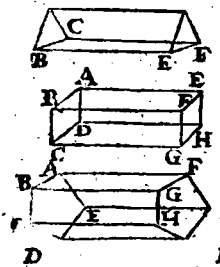
VIDELICET figura solida planis A B C, A B C D, A B C D E, ad puncta D, E, F, constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana quibus Pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, ad quod omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel trian-

triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictũ continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin triangulam sunt A B D, A C D B C D, Quadrangula vero A B E, A D E B C E, C D E B. Pentagona denique A B F A E, B C F, C D F, E D F.

XIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela. alia vero parallelogramma.

Figura scilicet solida quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula A B C, D E F: vel quadrangula A B C D, E F G H: vel pentagona A B C D E, F G H I K, &c. parallelogramma vero A C F D, A B E D C B F: vel A B F E A D H E D C H G C B G F: vel A B G F, A E K F, D E K I, D C H I, B C H G dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit quam columna quadã laterata æqualis crassitudinis, cuius bases appositæ sũt æquales similes & parallelæ. sive hæ sint triãgula, sive quadrangula, sive pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma cõtinebit prisma quodlibet, quot latera, sive anguli, in vnoquoq; oppositorũ planorũ reperiũtur, vt figura indicãt.



Ex his manifestum est quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidã duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela æqualia similiaq;, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quã quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio antè tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurima demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex aquo omnibus prismatibus cõueniunt; perspicuũ est eos hallucinari, qui vnũ tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autẽ animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illu aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorũ triangulorũ

oppositorum, eo quod tali prismati solum demōstratio illa conuenit. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c cum nullū aliud prisma daretur. Imo in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, altitudinem æqualem. Licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt vult definitio Exq[illegible] uce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atq; adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum nempe circa diametrum, circunductus figuram describit, quam Geometra sphæram appellat. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi linea circumuoluta. Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametri dicti iam circuli æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

Sphæra est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

Cicero in libro de Vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergò globosus est fabricatus, quod quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

Axis

XV.

Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

Has tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vade quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

Conus est: quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

Vt si triangulum rectangulum A B C, circa latus quiescens A B, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem explet, describetur solida quædã figura, qua continetur duab. superficiebus, circulari vna ac plana, quã B C, latus alterum circa angulũ rectum, suo motu describit: & curua alia, eaque conuexa, quam latus A C, recto angulo oppositum delineat. Hac igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

Quod si latus quiescens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cũ enim

latera

latera AB BC, ponantur aqualia, a erunt & anguli BAC, BCA, a 5. primi.
aquales, qui cum aquiualeant uni recto, eo quod ABC, rectus est, e-
rit angulus BAC, semirectus. Eodemq; modo angulus BAD, ex par-
te opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si
vero quiescès latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in secun-
da figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusan-
gulus; quoniam scilic. angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum
enim BC, latus latere AB, sit maius; b erit angulus BAC, maior b 18. primi.
angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea
quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC semirecto maior. Si-
militer BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto
maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circumducto
BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius,
seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticē A acutus est. c 18. primi.
Cum enim latus AB, maius sit latere BC, erit & angulus BCA,
angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo uni recto aquinaleāt,
quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ide-
oq; reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus
BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

XIX.

Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

Vt in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

Basis vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

Nimirum circulus, qui describitur ab altero latere rectum angulum, quale est BC, in superioribus cono. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

Quemadmodum vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin. Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est: placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem, qua & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, qua Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniungatur recta linea in vtramque partem producatur; [illegible]e

puncto, cõuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cæpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

Verticem ipsius manens punctum.

Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

Conum autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

Verticem coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

Axem, rectam lineam, quæ à vertice circuli centrum producitur.

Basim, circulum ipsum.

Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

Hæc autem omnia ita explicat Eutocius in commentariis, quos in Apollonium scripsit.

Sit circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaq; D B, in infinitum ex vtraq; parte producatur ad puncta E. F. Si igitur recta linea D B, feratur eou, que circuli A B, circumferentia, quousq; punctum B, rursus in eum locum restituatur,

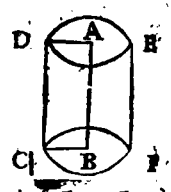
à quo cæpit moueri: describit superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D punctum sese tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficem, q. & augetur in infinitum, cum recta linea D B ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D Axem, rectam D C.

Conum vero appellat figuram contentam circulo A B & ea superficie, quam D B, sola describit. Coni verticem punctum D. Axẽ D C. Basim A B

sim AB, circulum. Quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus Scalenum.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumassumpta figura.



Veluti si rectangulum parallelogrammum ALC, circa latus quiescēs AB, circumuoluatur, donec integrū explent reuolutionem, appellatur figura descripta cylindrus, quæ quidē tribus superficiebus continetur, duabus videl. planis circularibus, quas latera AD BC, describunt; & altera curua, eaq; connexa, quam latus CD, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

Nempe recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

Quales sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositis descripti.

Euclides porro solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramq; basim, at q; de hoc solum in lib. 11 disputaturus. Cum igitur nos in eadem fere theoremata, ex aliis Geometris simus proposituri in eod m 12. l b. de cylindro inclinato, qua Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est primum ex Serenio Anti sensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit, Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsę in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos

ex ea-

ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cæpit: Superficies, quæ à circulata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

Cylindrus est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

Cylindri bases sunt circuli ipsi.

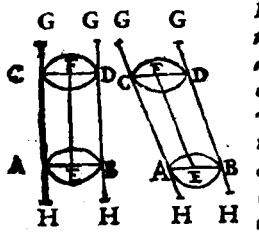
Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

Latus autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtraſq; contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus

Cylindrorum, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

Sint duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra EF, & diametri æquidistantes quoque AB, CD: Iunctaq; recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F in plano circulorum semper æquidistantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri caperunt, describetur à linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitū, producitur.



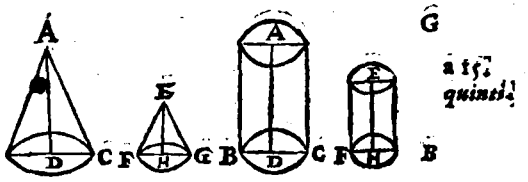
Cylindrum vero appellat figuram AB DC circulis AB CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD, Axem, rectam EF, qua circulorum centra cõiungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum; Si non minus, Scalenum.

XXIV.

Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

Recte

Recte Euclides similitudinem conorum, atq; cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri, in conis autem Axes AD, EH, & basium diametri BC FG; similiter & in cylindris. Itaq; si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diametri basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se, quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundū profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB EHF ex quorū reuolutione descripti sunt coni, necnon rectangula AB EF quorū conuersiones cylindros effecerunt hac ratione similia inter se erunt. Cū enim sit vt AD, ad EH, ita BA, ad FG. Sit autem vt BC, ad FG, a ita dimidia ED, ad dimidiam FH: erit quoq; vt AD, ad EH, ita DB, ad HF. & permutando vt AD,



a 15. quinti.

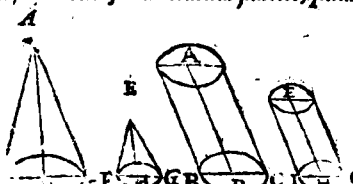
ad DB, ita EH, ad HE. Quare tam in triangulis, quā in rectangulis latera, circū æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erunt: Triangula quidē, b propterea quod triāgula vnum angulum vni angulo habentia æqualē, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt; c ideoq; latera omnia circa angulos æquales habēt proportionalia atq; adeo in eer se similia existunt: Rectangula vero, d eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD. DB, sunt æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionē habent.

b 6. sexti.

c 5. sexti.

d 34. primi.

Quod si coni vel cylindri fuerint inclinati, (de recto enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorū axes, & diametri basium erunt proportionales, anguli q; inclinationū quos axes efficiūt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint



enim coni inclinati, similiter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG, similiter & in

bb cy. in-

cylindri. Itaq; si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintq; anguli inclinationum ADB FHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni inter se, & cylindri quoq; inter se similes quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisq; demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Hæc sunt quinq; corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus cõtinentur, æqualia sint, æquilatera, & æquia gula; vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinq; mũdi corpora, quæ simplicia à philosophis nuncupãtur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram, quinq; hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omniũ constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14 Dodecaedri autem propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimũ est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formam quis intueatur Trademus tamen propriũ in locu praxes admodum faciles, quibus ea quilibet fo-

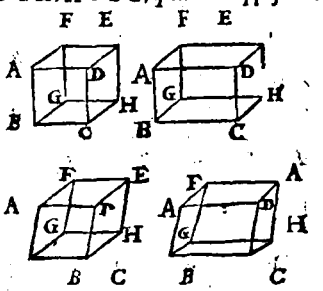
bus secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare praeter quinque illa dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

Quoniam vero frequens hoc lib 11. fit mentio Parallelepipedi & lib 12. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quid sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, patellæ sunt contenta.

Veluti solida figura comprehensa sex quadrilateris A B C D, D E F A, A B G F, F G H E, E D C H, H C B G, quarum oppositæ A C F H Item F C G, Item A G, D H, sunt parallela, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallela opposita sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur prop. 24. huius lib.



Sunt autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud cubus, respondebitq; æquadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi;

quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel deniq; in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

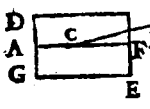
Non est necesse, vt anguli interioris figura constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura cum interdum figura exterior plures interdū pauciores angulos cōtineat, vel latera, vel plana, quam interior: sed satis est, vt omnes anguli figura interioris tangāt vel aliquot angulos vel aliquot latera, vel deniq; aliquot plana exterioris figura; ita vt nullus angulus figura interioris intactus reliquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel deniq; à planis figura exterioris.

Verum duæ hæ postremæ definitiones planius percipiētur ex l. b 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiose agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1. Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

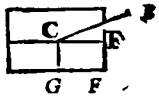
Sit enim si fieri potest, rectæ lineæ, AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars vero CB, in sublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE ipsi AC, rectæ lineæ continuæ quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. Quod est absurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

Hæc est communis demonstratio interpretum. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur rectā AC, esse aliquam rectam in plano DE in directum. & continuum positum. Qui enim concedit rectā AB, partem quidem AC, esse in plano DE, partem vero CB, in sublimi, vtique negabit, rectā AC, in plano DE, dari

DE, dari posse aliam rectam in cõtinuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, qua ex aequali suas interiacet lineas, hoc est, qua recte, & aequaliter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrẽ si AC, in plano DE, producatur vsq; ad F, erit CF, recta recta AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometrice, in plano videl. DE, ipsi AC, dare posse aliã rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineã constituat, quamuis quis dicat AB, esse quoq; rectam, eiusq; partem AC, in plano DE, partem vero CB, in sublimi esse positam. a Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG, & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC positam in continuũ & rectum. Cum enim AC & FC, in eodem plano DE cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione, b erunt AC & FC, in directum & continuum posita. Quamobrem etiamsi quis cõtendat AB esse rectam, cuius quidem pars AC in plano DE, subiecto, pars autem CB in sublimi sit constituta; tamen in eodẽ plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atq; adeo duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.



a 11. primi.

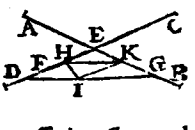
b 14. primi.

Nunc sit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam in vno existere plano,

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omnem in vno est plano.

Rectæ lineæ AB, CD, se mutuo secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quidem nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra: Existent quoq; rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra: quod fieri non posse, iam supra c demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse; pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK,



c 1. vndecimi.

F I, in vno plano, partes vero K G, I G, in sublimi, vel contra. Si ergo & eiusdem trianguli pars quidem F H K G, in vno concedatur esse plano pars vero E H K, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum F E, G E, partes quidem F H G K, in vno plano, partes autem H E, K E in sublimi vel contra. Quæ omnia absurda sunt, [a] vt est demonstratum. Quare triangulum E F G, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

[a] 11. undecimi.

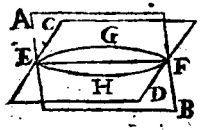
Quia vero, in quo plano est triangulum E F G, in eodem existunt eius latera E F, E G: I in quo autem sunt rectæ E F, E G: [b] in eodem sunt rectæ totæ C D, A B, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ A B, C D, in vno plano in quo nimirum triangulum E F G, *consistere* demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod *erat demonstrandum.*

[b] 1. undecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

Secent se mutuo plana A B, C D, sitque communis eorum sectio E F, *Dico* E F, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano *A B*, recta E G, F & in plano C D, recta E H F. Rectæ igitur E G F, E H F, cum eosdem habeant terminos E, & F superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio E F, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta Quod erat ostendendum.



Aliter. Secent se rursus plana A B, C D, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta E F Sigitur recta E F, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero E F, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc *si in* alterutro eorum recta ducatur E G F, concludent rursus duæ rectæ E F, E G F, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta E F, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta E G F, includent iterum duæ rectæ E F, E G F, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta E F, in vtroque plano A B, C D; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo se cantibus, in

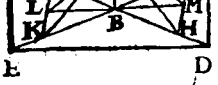
bus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illa ducto etiam per ipsas plano ad angelos rectos erit.

Recta linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B, a erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectos GK, IH, in punctis L, & M. Dimittantur quoq; ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; b & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales. c Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BGK, BIH, inter se quoque æquales.

a 2. undecimi.

b 15. pri.

c 4. pri.



Rursus d cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint, æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. e Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

d 15. pri.

e 26. primi.

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex cōstructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, f erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

f 4. pri.

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; g erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi æquales.

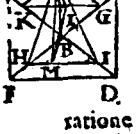
g 8. pri.

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI IM, trianguli AIM: & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus: h erunt quoque bases AL, AM, æquales.

h 4. pri.

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis: i erunt quoq; anguli ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cū sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos effieit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Ademq;

i 8. pri.

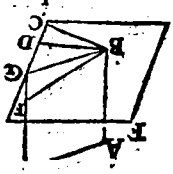


ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta, G I, & K H, ductæ sint, dūmodo rectæ GI, KH iungantur: vel certæ literæ disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen L M, non ducitur á sinistra in dextram, vt in priori figura, sed á superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano C E, D F, quod per rectas CE, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3 huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea rectis tribus lineis, se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; illæ tres rectæ in vno sunt plano.

Insistat recta linea AB, tribus rectis lineis B C, B D, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi eorum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. *a* Cum enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint F C, B D, in plano F C; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. *b* Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B, sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. *c* Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; *d* erit propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipsam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B G, B D, in vno plano F C, existentibus, non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.



a 2. *vndecimi.*

b 2. *vndecimi.*

c 3. *vndecimi.*

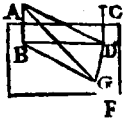
d 4. *vndecimi.*

THEOR. 6. PROPOS 6.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint anguli; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B. & D. Dico illas esse parellelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoq; ipsis contenti ABD, GDB; æquales, nempe recti; a erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, b erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniã vero ex eadem defin. anguli quoq; GDC, rectus est: erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. c Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: d Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eod. plano erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; e erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duę itaq; rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

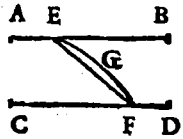


a 4 primi.
b 8 primi.
c 3. vndecimi.
d 2. vndecimi.
e 20. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ sint parellelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parellelis plano.

In parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parellelæ AB, CE. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra, secet iam aliud planum superficiem parellelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, f quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. quod est absurdum. Non ergo extra planum parellelarum AB, CD, erit recta EF, Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



f 3. vndecimi.

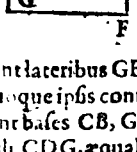
SCHOLIVM.

Hæc eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodo in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione

viij. **THEOR. 8. PROPOS. 8.**

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit,

Sint parallelæ rectæ AB CD: sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB eidem plano EF esse ad rectos angulos. Ducta enim BD, in plano EF, erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: *a* sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD: ponanturq; æquales BG, CD. Conjungãtur deinde rectæ DG, GC. CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti: *b* Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & basis est communis CH: *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B, (siquidem producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD) ad rectos angulos existent: *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB: *e* propterea quod rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD: cum puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum AB recta sit ad rectas BG, BD; *f* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat ostendendum.



a 29. *primi.*

b 4. *pri.*

c 8. *pri.*

d 4. *undecimi.*

e 7. *undecimi.*

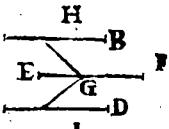
f 4. *undecimi.*

ix. **THEOR. 9. PROPOS. 9.**

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano; Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

Sint rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem

in eodem cum E F, plano. Dico A B, C D, parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto C ducatur recta C G, ad ipsam E F, ducantur duæ perpendiculares, G H, quidem in plano parallelarum A B, E F, at G I, in plano parallelarum A C, D, E F. Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas G H, G I se tangentes mutuo in G; a erit recta quoque ad planum per ipsas G H, G I, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ A B, E F, & E F, sit recta ad planum per G H, G I, ductum; b erit quoque A B, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ C D, E F, sit autem E F, recta ad planum per C H, G I, ductum c erit etiam C D, recta ad idem planum. Atque proinde rectæ A B, C D, cum rectæ sint ad idem planum per G H, G I, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano, hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.



a 4. undecimi.
b 8. undecimi.
c 8. undecimi.
d 8. undecimi.

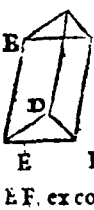
SCHOLIVM.

Dicta opera Euclides voluit duas rectas A B C D, non esse in eodem plano cum recta E F, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa E F, essent A B, C D, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas ex se mutuo tangentes sint parallelæ, non aût in eodem plano: illæ angulos æquales comprehendent.

Sint rectæ A B, A C, se tangentes in A, parallelæ rectis D E, D F, se tangentibus in D; non sint autem A B, A C, in eodem plano, in quo D E, D F. Dico angulos B A C, E D F, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim A B, D E, inter se æquales, & A C, D E, inter se; ducantur quoq; rectæ B C, E F, B E, A D, C F. Quoniam igitur A B, D E, parallelæ sunt & æquales; e erunt quoque B E, A D, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales C F, A D. Quare cum B E, C F, parallelæ & æquales sint eidem A D, f erunt etiam B E, C F, inter se parallelæ, & æquales; g A c propterea parallelæ & æquales erunt rectæ B C, E F. Quia ergo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sunt lateribus D E, D F, trianguli D E F, ex constructione; & basis B C, basi E F, æqualis, vt modo demonstrauimus; h erunt & angul. B A C, E D F, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.



e 33. primi.
f 9. undecimi.
g 33. primi.
h 8. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

Concluſio huius theorematis vera etiam eſt, quando priores duæ * *recta in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ* AB, AC DE, DF *in eodem plano, ſitque* AB, *ipſi* D

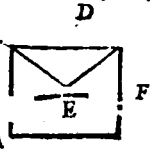
E *&* AC, *ipſi* DF, *parallelæ. Dico angulos* BA C, E DF, *eſſe æquales Nam ponantur æquales* AB, DE, *&* AC, DF, *ducanturque rectæ* BC, EF, *quæ aut in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta* BF. *Quoniam igitur parallelæ ſunt* AB, DE, *æquales erunt anguli* a BC. DEF *interni & externi. Similiter æquales erunt anguli* ACB DFE. *Sunt enim &* AC, DF *parallelæ. Quare duo anguli* ABC. ACB, *trianguli* ABC, *æquales ſunt duobus angulis* DEF, DFE *trianguli* DEF. *Igitur anguli quoque reliqui* BAC EDF, *æquales erunt Quod eſt propoſitum.*

a 29. primi.

b 32. primi.

Non ſint iam BC, EF, *in vna recta linea conſtituta. Ductis rectis* AD, BE, CF, *cum* AB, DE, *ſint parallelæ & æquales;* c *erunt &* AD, BE *parallelæ & æquales. Eadem ratione* AD. CF, *parallelæ*

c 33. primi.



erunt & æquales, eo quod AC, DF, *parallelæ ponuntur, & æquales. Quare &* BE CF, *eidē* AD, *parallelæ exiſtentes & æquales,* d *inter ſe parallelæ erunt & æquales;* e *Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt* BC EF *Itaque cum duo latera* AB, AC, *trianguli* ABC, *æqualia ſint duobus lateribus* DE. DF, *trianguli* DEF, *& baſis*

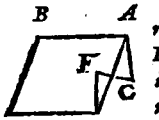
d 30. primi.

e 33. primi.

f 8. primi.

BC, *baſi* EF, f *erunt anguli* BAC, EDF, *contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.*

Cæterum vt concluſio huius theorematis recte ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas (ſiue omnes ſint in eodem plano ſiue non,) vt tres rectæ AD BE, CF, *nullo ratione ſe mutuo ſecent, vt ex prima & vltima figura apparet. Nā aliter concluſio vera non erit.*



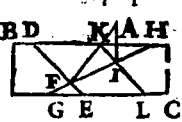
Sunt enim rectæ AB, AC, *rectis* DE DF *parallelæ in hac figura; & tamen anguli* BAC, EDF, *quos comprehendunt, non ſunt æquales cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod* AD, CF, *ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis* AC, DF, *ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea* AD, CF, *quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.*

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit a puncto A in sublimi ad subiectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC recta vtcunque DE, *a* ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF; & in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH, *b* ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. *c* Ducta enim in plano BC, per I ipsi DE, parallela KL, cum DF, *d* rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, *e* ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, *f* erit quoque KI ad idem planum per FA FH, ductum recta. *g* Quoniam verò AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulis KIA: rectus; atque adeo AI ad rectos angulos erit duabus KI IF. *h* Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam diximus. Quod faciendum erat.



a 12. *primi.*
b 11. *primi.*
c 12. *primi.*
d 31. *primi.*
e 4. *undecimi.*
f 8. *undecimi.*
g 12. *undecimi.*
h 4. *undecimi.*

SCHOLIVM.

Quod si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis, i erit ipsa AF, ab initio ad DE ducta perpendicularis, ad subiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.

i 4. *undecimi.*

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, rectos angulos rectam lineam excitare.

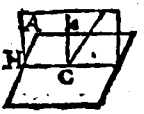
Sit à dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. *k* Ex quouis puncto D, in sublimi dimittatur ad planum BC perpendicularis DE quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E, ejecta recta per E, & A, *l* ducatur per A ipsi DE, parallela AF, in dato GH, per E ductæ. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cum enim DE AF, parallelæ sint, & DE, recta ad planum EG, ex constructione: *m* erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

k 11. *undecimi.*
l 31. *primi.*
m 8. *undecimi.*

THEOR.

xiij. ## THEOR. 11. PROPOS. 13.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eadem partes.



Sit datum planum *A B* Dico à dato eius puncto C, ad eadē partes nō posse educi duas perpendiculares ad planum *A B* Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum *A B*, & per C D, C E, *a* quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum F G, secans planum A B per rectam lineam G H. Cum igitur E C, D C, rectæ sint ad planum A B; erunt per defin. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datū est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eadem partes. Quod erat demonstrandum.

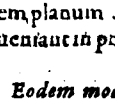
a 12. undecimi.

Aliter. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cum igitur duæ D C, E C, rectæ sint ad idem planum *A B*; *b* erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. undecimi.

SCHOLIVM.

Eodem modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ linea ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A



punctο in sublimi ad subiectum planum B C, si fieri potest, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E, c quæ in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cum igitur A D, A E, rectæ sint ad planum A C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D. E. Quod est absurdum: d cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.

c 2. undecimi.

d 17. primi.

Aliter. Si A D, A E, rectæ sunt ad planum B C, ipsæ e erunt inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

e 6. undecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

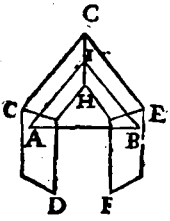
xiv. **AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.**

Sit recta *A B*, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E. *e* & faciant communem sectionem rectam lineam G H; In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I *A*, I *B*, in planis G C D, G E F. Quia

e 3. undecimi.

igitur

igitur AB, recta ponitur ad plana CCD, GFF, erunt per defin. 3. huius duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. a Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quę igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



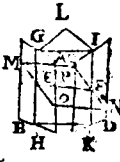
a 17. primi.

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrari poterit conuersum huius, Videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnũ eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

Sint duo plana parallela AB CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea erit recta EF. Dico EF rectã quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD per lineam rectam EF, incidens faciatq; communes sectiones cũ dictis planis rectas GH, IK, erunt q; anguli GEF, HEF, recti per defin. 3 huius lib. Ac proinde recti etiã erunt anguli IFE, KFE (Si enim alter eorum, nempe IFE dicatur acutus, erunt duo anguli GEF, IFE duobus rectis minores Quæ recta FG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient nimirum in puncto L; atq; adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; b cum tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta c quoque erit EF, ad CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.



b 1. vndecimi.

c 4. vndecimi.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

XV.

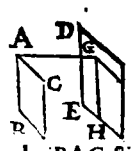
Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, d enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. e Deinde in

d 11. vndecimi.

e 31. pri-

plano



plano EF, per G, ducantur GH. GI, ipsis DE, DF, parallel. Quoniam igitur rectæ AB, GH, GI, parallelæ sunt ipsi DE; *a* erunt & AB, GH, inter se parallelæ; *b* Ac proinde anguli BAG, ACH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, *c* recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. *d* Igitur parallela sunt plana BC EF. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

a 9. undecimi. *b* 29. primi. *c* 4. undecimi. *d* 14. undecimi.

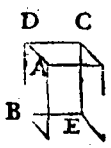
SCHOLIVM.

Quod si perpendicularu ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto quod in plano EF, non sunt ducenda alia parallela. Vt si lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum &c.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlic t.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parellelum planum ducere.

Datum planum sit AB, punctumq; extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, e tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta adducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB DC, ducto, e agatur CE, ipsi DB, parallela. E in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum parellelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illo plano parallelæ sint, f parellela erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.



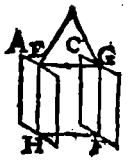
e 31. primi. *f* 15. undecimi

THEOR. 14. PROPOS. 16. xvj.

Si duo plana parallela plano quopiam secetur: communes illorum sectiones sunt parellelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GE, esse lineas

deas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in puncto I. a Quia ergo tota recta HEI in uno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in uno quoq; est plano, videlicet in CD, producto: conueniens etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. undecim.

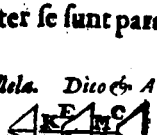
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm, sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, b erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, c atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano: d erunt plana AB, CD, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.

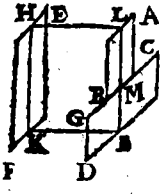


b 16. undecimi.
c 9. undecimi.
d 15. undecimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad

planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana a 14. vn. decimi. *AB, CD; a parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.*

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur paral-

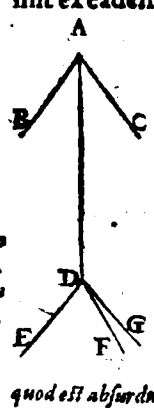


b 16. vn. decimi. *lela sunt plana AB, EF,* b *erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallela erunt IM, HK. Quamobrem cum recta LM, IM, parallelæ sint ipsi HK; existantq; in eodem plano secante HI, & conueniant in M ipsa erunt in rectum & continuum posita, per ea, quæ ad* a 2. vn. decimi. *30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient, c propterea quod recta LI, in vno iacet plano. Quod est propositum.*

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certè si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuersum quoq; propos. 10. facile demonstrabimus, hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallela ducti.



IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, *sitque* AB, *ipsi* DE, *parallela;* & AC, DE, *sint ad easdem partes plani per* AB, DE, *ducti. Dico* AC, DF, *parallelas quoque esse: hoc est, ducta recta* AD, *planum per* AC, AD, *ductum transire etiam per rectam* DF: *ita vt* AC, DF, *sint communes sectiones facta à plano per* AC, AD, *ducto, in planis parallelis per* AB, AC, & DE, DF, *ductis.* d *Hinc enim efficitur, sectiones* AC, DF, *parallelas esse. quod est propositum. Si namque planum per* AC, AD, *ductum non facit in illis planis parallelis sectiones* AC, DF, *faciat sectiones* AC, DG, e *quæ parallelæ erunt.* f *Igitur anguli* FDG, *angulo* BAC, *hoc est, angulo* EDF, *æqualis erit.*

d 16. vn. decimi. e 16. vn. decimi. f 10. vndec.

quod est absurdum, cum vnus sit totum, & alter pars.

THE.

THEOR. 15. PROPOS. 17. XVII.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In eadem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (sive ex parallelæ sint, vt in figura, sive non, existentes tamen in eodem plano: sive in transversum positæ, in diuersis existentes planis) secetur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, *a* Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, *b* erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. *c* Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

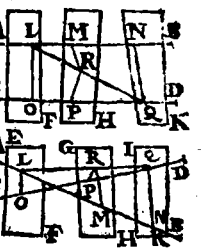
a 2. vndecimi.

b 16. vndecimi.

c 2. sexti.

SCHOLIVM.

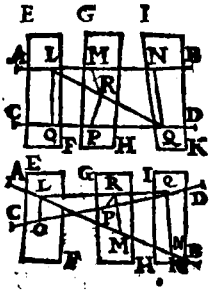
QVOD, *si data recta AB, CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit triaplana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectam AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.*



d 16. vndecimi.

Si vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia e cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno itidem plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa

e 2. vndecimi.



a 1 undecimi

triangula in uno eodemque plano existentia essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesin.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorum: ac proinde vnam rectam non constituent; a alias in uno essent plano. quod est absurdum.

EADEM hac propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc RMP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quam tria, rectas AB. CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD. in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

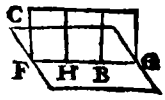
EX demonstratione porro perspicuum est, si quotlibet linea in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearum inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunq; in vno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad interfectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ. Iuncta enim recta LQ, b 2. sexti. erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ. quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademq; ratio est de pluribus. Vt autem recte demonstratio procedat in quibusuis duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis vnius recta ad vltimum sectionis punctum alterius. Ita videlicet in duabus AB, CD, ductam esse rectam ex L. primo puncto rectæ AB, ad Q. vltimum punctum rectæ CD. Idemq; seruatum est in figuris huius propos. 17.

XVIII. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum, CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam c 3. pri. FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, educatur in pla

in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; a erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FC, per pendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similiq; argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



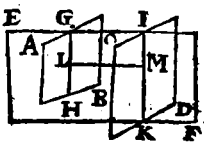
a 28. undecimi.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum & idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: b *eademque perpendicularis erit ad IK, ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumq; planum AB, CD, recta est,* c *ipsa parallela erunt.*



b 19. primi.

c 14. undecimi.

SED iam parallela sint plana AB, CD: sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, recta GH, IK; d *quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM: erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit.* e *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum: ideoq; vicissim planum CD, ad planum EF, erit rectum. Quod est propositum.*

d 17. undecimi.

e 18. undecimi.

HINC etiam problema hoc absolue tur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.

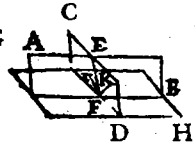
SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oportea

tentq; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit. Ex quo-
a 12. undecimi. *uis puncto B, recta FG, a erigatur ad planum CD, perpendicularis BA,*
& per rectas AB, FG, planum ducatur EF. b *quod ad planum CD,*
b 18. undec. *rectum erit. Quod est propositum.*

xix. **THEOR. 17. PROPOS. 19.**

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, rectam. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, c recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturq; in plano CD, ad planum GH, recto. Si deniq; EF, ad neutram BF, DF esse credatur recta; d ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI: Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoq; perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non e 13. undec. posse supra e demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



c 4. vndecimi.

d 11. primi.

xx. **THEOR. 18. PROPOS. 20.**

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis

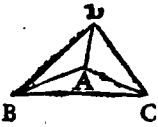
planis BAC. CAD. DAB. Dico quolibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuū est, quosuis duos maiores esse reliquo: si vero duo tantum sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB. AC, ducto *a* fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniungantur-que rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem æquales; *b* erunt bases BC; b 4. *primi*. BE, æquales. *c* Quia vero latera DB, DC, maiora sunt latere BD; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior c 20. quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sint *primi*. lateribus AE, AC, trianguli EAC: & basis CD, maior basi CE: *d* e- d 25. rit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus *primi*. angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. *primi*.

THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A contentus tribus planis angulis BAC. CAD. DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ducatur enim recta BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC, At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. *e* Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD: similiterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD: & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. *f* Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus f 32. *primi*. rectis



e 20. *vndecim*.

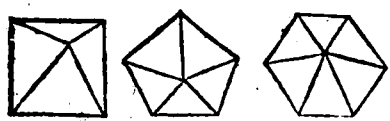
rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, a(sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 32. primi.

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex, datus angulus solidus, tot laterum, angulorúmve, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorum, (b cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per 21. quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum propè basim maiores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, c & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod erat propositum.



b 32. primi.

c 20. vndec.

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemq; plano, in ea videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F, ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum solidum A. d *Quia vero omnes anguli*

d 32. primi.

quinq;

quinq; triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis: quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis.

a 22. vndec.

THEOR. 20. PROPOS. 22. XXII.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FC, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, *b* ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. *c* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti, DAK, & B, æquales; *d* erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; *e* erit & basis EK, maior basi HI: *f* Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK,

b 22. primi.

c 23. primi.

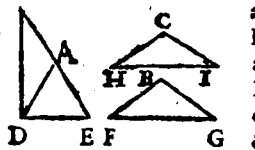
d 22. primi.

e 24. primi.

h 20. ostensa primi.

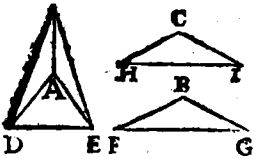
ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE, quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponatur que AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. *a* Erit igitur, vt prius, DK, ipsi FG, æqualis. *b* Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE; & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoq; ED, DK, maiores duabus CH, HI: *c* Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



a 4. pri. *b* 20. primi. *c* 20. primi.

CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK: quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponatur que rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. *d* Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. *e* Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & constructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI. *f* Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG, erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. *g* Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonstrandum.



d 4. pri. *e* 21. primi. *f* 20. primi. *g* 22. primi.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales: *b* erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si verò duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor: *i* erunt quoque duæ illorum bases æquales, *k* & basis tertii vtraque minor. Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; *l* erit quoq; basis DE, omnium

h 4. primi. *i* 4. primi. *k* 24. primi. *l* 24. primi.

omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. *a* Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE, propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem: erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales: *b* erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; *c* erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE. *d* Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

a 23. primi.

b 4. primi.

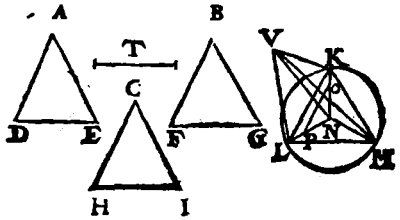
c 24. primi.

d 20. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 23. XXIII.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunq; assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

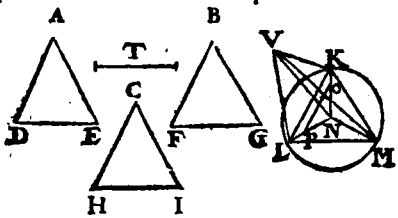
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponatur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturq; bases DE, FG, HI. *e* Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulũ KLM, sitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. *f* Describatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum



e 21. vndec.

f 5. quarti.

trum N, à quo ducantur rectæ NK, LN, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygoniū, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL, & basi DE, basi KL, æqualis: æ erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores sint AD, AE, quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia: erunt latera NK, NL, trianguli NKL, secta proportionaliter; *b* ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. *c* Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulū. *d* Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autem NK, maior quam NO. *e* Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP, *f* erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores.



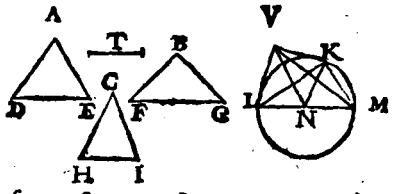
a 8. *pri.*

b 2. *sexti.*
c 29. *primi.*
d 4. *sexti.*
e 14. *quinti*
f 25. *primi.*

CADAT deinde centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL: erunt quoque

BF, BG,

BF, BG, æquales eisdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Posita autẽ fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur

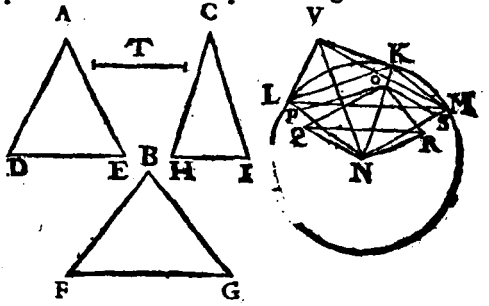


BF, BG, æquales quoq; sunt rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF, BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL: erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æquales sit ipsi NM: minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, *b* cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

a 20. *primi*

b 20. *primi*

CADAT postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto propos 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicãtur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis: *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B, Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis: *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL, Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL: si abscindantur NO, NP, ipsi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP: demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP: & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. *e* Fiat angulus ONQ, angulo A: & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales

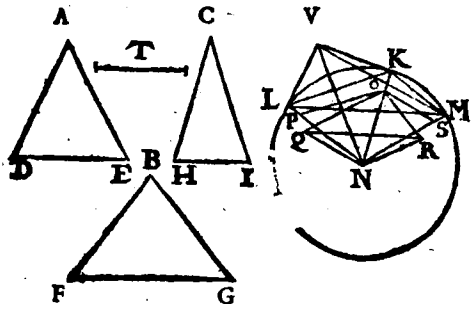


c 8. *primi*

d 8. *primi*

e 23. *primi*

ipsis



les ipſis AD, AE, & connectantur OQ. OR, caderque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta cum æquales ſint rectæ NO, NP, NQ, *a* Quare cum angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno: erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadat enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE: Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem: *b* erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ. OR, trianguli OQR: & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus: *c* erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſunt lateribus NQ. NR, trianguli NQR: & baſis FG, maior baſe QR: *d* erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A, & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdũ, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſũt AD, AE, quã NK, NL: ſed neq; æquales: ſunt igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat: poſsit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. *e* Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM *f*ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV. æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtructione,

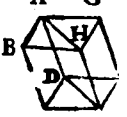
a 29. primi.
b 4. pri.
c 24. primi.
d 25. primi.
e 12. vndec.
f 46. primi.

ctione, eisdem quadratis rectarum KN, NV, æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erũt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL: & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti: *a* erit basis VK, æqualis basi VL: Atq; eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & obid, rectis AE, LF, BC, CH, EI. Quamobrem cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE: *b* erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C, ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum. 24. pri. b 8. pri.

THEOR. 21. PROPOS. 24. XXIV.

Si solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin 30, huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sunt parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC: *c* Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC: erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ: Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis: *d* erunt anguli ABH, DCE, æquales: eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. *e* Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AD: & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est: erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE: Ac propterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales proportionalia: ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, *f* cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trian-



c. 16. undec.

d 10. undec.

d 34. primi.

f 34. primi.

a 10. undec. b 4 pri. c 34. primi.

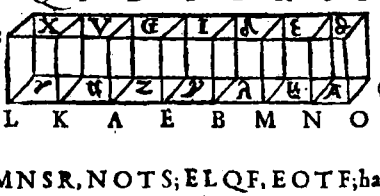
CE, trianguli DCE; *a* & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; *b* erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se, *c* Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia. Quot erat demonstrandum.

XXV.

THEOR 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est, basis AG, ad basim BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, sumanturq; in AB, protracta quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AE: & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana, K, P, L Q, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypothesi, ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, *d* habebitque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP: EBCF, BNRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; *plana* opposita, parallelogramma similia, & æqualia *e* Quoniam veroparallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AB, AK, KL, æqualia sūt: & similia quoq;, *f* cum anguli vnius sint æquales angulis aliorū, & latera circa angulos vnius æqualia lateribuscirca angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia, sunt parallelogramma AY, KZ, LA. Cum igitur æqualia quoq; sint, & similia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AE, FD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus planis LX, LA, LQ, solidi KLQP: *g* Sunt autem tria in vnoquoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZP: & AY, ipsi VE: & AD, ipsi EP, &c. Igitur



d 24. undec.

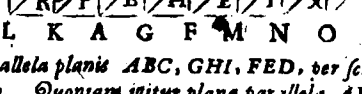
d 36. primi. f 29. primi.

g 24. vnnec.

Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD, Et quam multiplex est basis OG, basis BH, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BC, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis maior est basi, solidum quoq; solido maius est; & si minor, minus inquacunq; hoc fiat multiplicatione. Erit per defin. 6. lib. 5. vt basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinẽ, ita solidũ AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY, ad basin CY, & vt basis AY, ad basin BY, & vt basis DG, ad basin CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma ABCDEF, cuius plana aduersa sint triangula ABC, DEF, secenturque plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta vtrinq; capiantur quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS,



MTV, NXY, OZa; parallela planis ABC, GHI, FED, per schol. propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI, a erunt communes sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi ob parallelogrammum AD: igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH, b erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelo-

a 16. undec.

b 16.

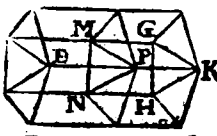
grammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem modo parallelogrammum ostenditur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, aequalia sunt lateribus GI, GH, trianguli GHI;
a 34. primi. *a cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit aequale: b & anguli CAB, IGH, sunt quoque aequales, eo quod recta CA, AB, parallela sunt rectis IG, GH, & non in eodem plano; c Erunt triangula ABC, GHI, aequalia inter se, & aequiangula. d Quare latera circa aequales angu-*
b 10. undec.
c 4. pri. sex.
los proportionalia habebunt: Atq; ideirco similia erunt. Igitur solidum
d 4. sex. *ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, aequalibus & similibus, atq; parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadem arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO, LRSIHG, OZaIHG. Quo-*

niam vero parallelogramma AI, KC, LQ, aequalia sunt, & similia; nec non AH, KB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana prismatis ABCIHG, aequalia & similia omnibus planis prismatum ABCQPK, KPQSRL. Quare per defin. 10. huius lib. aequalia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione aequalia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG, & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZaIHG, prismatis FEDIHG. Quare vero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magnitudinis) aequalis est basi OI, (multiplici est basis FI, secunda magnitudinis,) aequale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertia magnitudinis,) prismati OZaIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarta magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus aequalibus, aequalia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZaIHG: Si autem basis LI, maior est basi OI, prisma quoque prismate maius est, & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin FH, & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, sintq; plano LMNOP. Dico rursus ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resolvantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata

tri-

ta, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis RP, ad basin MK, sta prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF. per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, sta prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. a *Ut autem EP, ad MK,* a 1. *sex*



CP, ad NK, ita vtrecta EP, adrectam PK, hoc est, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter se. b *Vt autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur* b 12. *erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis quinta. CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus constatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.*

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramq; partem, e- c 16. *runt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, c pro-* vnde-
pterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones pa- vnde-
rallelorum planorum, d ac proinde angulos æquales comprehendunt, d 10. *&c. Vnde vt prius ostendetur prismata ex vna parte inter se æqualia,* vnde-
nec non & prismata ex altera parte &c.

COROLLARIVM

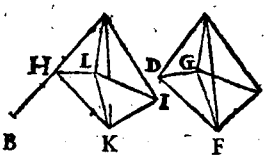
(*EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dicas de parallelepipedo.*)

PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvi.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. e Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, f fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. e 11. *vnde-* f 23. *primi.*

Rursus in plano per AH, AI, ductum constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit: & a 12. recta AL, rectæ CG, æqualis. Ex L, vero ad planum, in quo sunt *vndec.* tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur rectæ KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL: cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales per b 4. *pri.* constructionem: *b* Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, c 4 *pri.* per constructionem: *c* æquales quoq; erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF: & anguli HLK, d 4. *pri.* DGF, recti ex defin. 3 huius lib. *d* erunt & bases HK DF, æquales



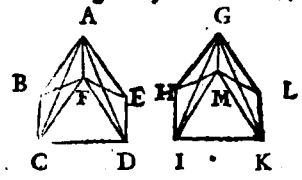
Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex constructione (cum enim AL LK, latera lateribus CG, GF, æqualia sint ex cõstructione, comprehendantq; angulos æquales, nimirum c 4. *pri.* rectos, ex defin 3 huius lib. *c* erunt bases AK, CF, æquales) *f* Erunt f 8. *pri.* quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti g 4 *pri.* ex defin. 3. huius lib. *g* Erunt bases IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli, AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, h 4. *pri.* sint æqualia ex constructione: *h* Erunt quoq; anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus. Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidũ constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulis planis recta in vno eodemque existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant, pyramisque quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in trianqula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quod triangula in figura polygona continentur. Stgitur angulus soli-

lis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur; quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resoluatur BCF, BCF, FGD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD,



DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.

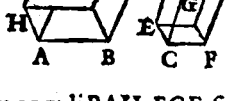
THEOR. 5. PROPOS. 27. XXVII.

ADATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, eiusque punctũ A, angulus solidus æqualis angulo solido C, sta vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis EGG, GCF, FCE. Deinde vt est, CF, ad CG, *b* sic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt GF, ad CE, ita AB, ad AH. Post hæc, perficiatur parallelepipedũ AK, completis nimirũ parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positũ. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, CF. Tria igitur

a 26. *undec.*

b 12. *sexti.*

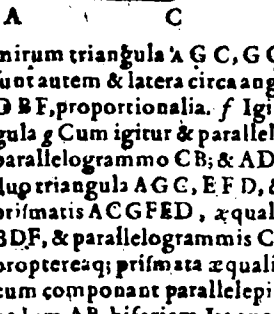


plana B H, H I, I B, solidi A K, similia sunt, similiterque posita
a 24. vndec. tribus planis F E, E G, G F, solidi C D. a Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi A K, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi C D: Ac proinde ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterque posita solida A K, C D. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

XXVIII. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint A H, E B, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F.
b 34. primi. Quoniam igitur vtraque C D, G F, parallela est, b & æqualis ipsi A E, cum sint parallelogramma C E, G E; c erunt & inter se paral-
c 9. vndecimi. lelæ, & æquales C D, G F. d Ac proinde, quæ ipsas coniungunt
d 33. primi. C G, D F, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. e Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, ni-
e 24. vndec. mirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G, F E D,
f 6. sexti. D B F, proportionalia. f Igitur similia quoq; erunt dicta triangula g Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile
g 24. vndec. parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B; & C F, commune: erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, G F, prismatis A C G F E D, æqualia similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, B G, C F, prismatis H G C D B F: propterea q; prismata æqualia erunt, ex defin. 10 huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

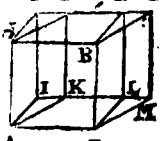


XXIX. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin A B, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana

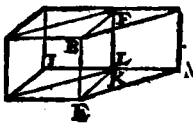
plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in rectis IM; & HC, HF, BD, BG, in rectis CG. Dico parallelepipeda ADCE, AFGE, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta: erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoq; inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales. (*f* Nam cum rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoq; inter se æquales: quare communi ademptæ KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

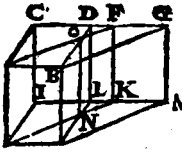


a 35. primi.
b 34. primi.
c 4. sexti.
d 24. undec.
e 26. primi.
f 4. primi.

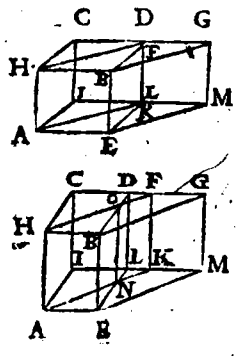
SCHOLIVM.

HÆC propositio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere mediis, dummodo loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit: vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. Vnde vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.





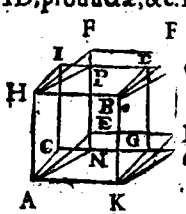
IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, demetur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, aqualia: quib si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, aqualia fient. Vnde, vt prius, aquilia erunt prismata AIK, FCH, ELM-GDB, à quibus si auferatur prisma commune KLNODF, (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO,) remanebit solidum comprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, aquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se aqualia.



xxx. THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, nõ sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, neque, CG, ID, productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, ALMFK, esse æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur, in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiungantur q; rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelo grammum HIDB. Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedũ est APQR. c Quamobrem parallelepi-



a 34. primi.

b 33. primi.

c 29. primi.

lelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque precedens, in hunc modum.

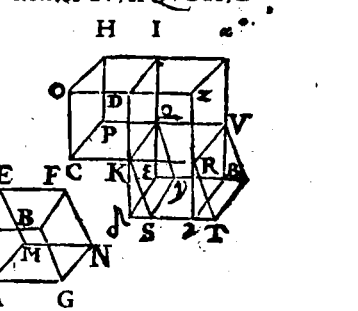
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eidem colloçentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnum dicatur altius; si eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale: æquale erit abscisso toti. Quod est absurdum. a 29. vel 30. vndecimi.

THEOR. 26. PROPOS. 31. XXXI. XXXII.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandē parallelepipedorū altitudinē. Producatur CK, in rectum, sitq; KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA: & perficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, construatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelo-



gramma KT, LG, æqualia & similia: Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin 3 huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia: *a* tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, *b* tam autem illa, quã hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF: inter se æqualia.

a 24. *vndec.*
b 24. *vndec.*

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in *d*: & IQ, KY, in *s*, compleaturq; parallelepipedum Q*d*γV. Item HI, βV, protractæ conueniant in α: & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα.

Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, R*d*γV, eandem habent basin KV, sunt que in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, *d*X, & insistentes ipsorum lineæ KS, K*d*, RT, Rγ, Qι, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis *d*T, ιX, ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Q*d*γV.

c 19. *vndec.*

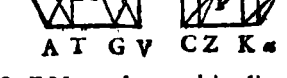
d QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se: & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale: cum bases LG, CD, ponantur æquales. *e* Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: *f* Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidũ CHIK, ad solidum KLαR: cum parallelepipedum CHαR, secetur plano IK, planis oppositis, CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidum Q*d*γV, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum I*d*γα, secetur plano KV, oppositis planis D α*d*β, parallelo. *g* Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Q*d*γV, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kγ, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum Q*d*γV, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoq; erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositũ.

d 25. *primi.*
e 7. *quinti.*
f 25. *vndecimi.*
g 9. *quinti.*

SINT iam neque insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB, neq; CP, KQ, OH, DI, ad basin, CD, perpendiculares.

Ità

Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, ES, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares; item a punctis H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autē omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepidorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantq; insistētes lineas perpendiculares, cum inter se æqualia. vt ostensum est. b Sed parallelepipedū ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistētes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

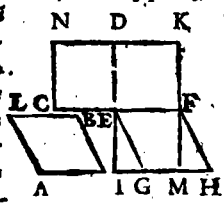


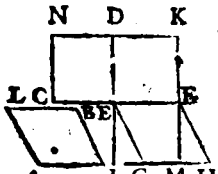
a 11. vndecimi.

b 29. vel 30. vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ista demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L: & recta EF, rectæ LB, & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super AC, CD, constructis; sintq; insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super EH, æquale esse & simile solido super AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint





sint & similia planis huius, per constructionem. a *Sunt autem & aequalia parallelepipeda super EH, IF, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus EF, erectam super planum IK; item plana basi opposita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH, atque insistentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eisdem rectis lineis IH, &c. Igitur aquale erit parallelepipedum super IF, parallelepipedo super AB.* b *Quoniam vero parallelogramma EH, IF, aequalia sunt; & EH, aequale est ipsi CD. aequalia erunt IF, CD.* c *Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK;* d *Est autem vt IF, ad EK, ita solidum super IF, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super EF, erecto parallelo planis super DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super CN, FK, erectis. Quare erit vt solidum super IF, ad solidum super EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK.* e *Ac proinde aequalia erunt parallelepipeda super IF, & CD. Ostensum est autem parallelepipedum super IF, aequale parallelepipedo super AB. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda super AB, CD. Quod est propositum.*

a 29. undecimi. b 35. eiusdem. c 7. quinti. d 25. undecimi. e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque haec propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, & fiant aequalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aquale alteri; aquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

f 31. undecimi.

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis aqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse aqualem. Quod est absurdum.

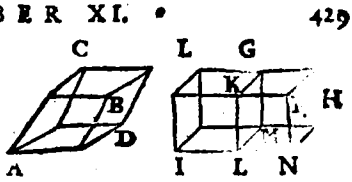
XXXIII. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, vt est basis ad basin. g *Super rectam enim EK, constituatur parallelogram-*

g 45. primi.

grammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit æqualis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum



parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum vnum parallelepipedum IFLH: erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypothesi. *b* Quare erit vt solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad idem solidum EFGH: *c* Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, vt basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

a 31. vn. decimi.
b 7. quinti.
c 25 vn. decimi.

SCHOLIVM.

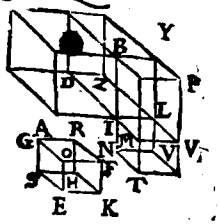
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo, ex maiori abscindantur minori aqualis, & ducatur planum basi parallelum, d erit, vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. Abscissum ergo aquale est toti. Quod est absurdum.

d 32. vn. decimi.
e 9. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 33.

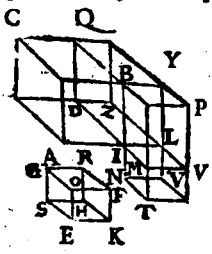
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. xxxvi.

SINT similia parallelepipeda ABCD, EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR: Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO, Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde compleatur parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO: *f* & anguli contenti æquales, cum angulus ILM



f 15. primi.

LIM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, RS: item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: *a* Sunt autem tria cuiusq; similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, *ex* defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL: item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedū IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinē parallelepipedorū ABCD, EFGH, est vt AI, ad EK, hoc est ad IL, ita DI. ad HK, hoc est, ad IM: & BI, ad FK, hoc est, ad IN. *b* Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL: Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM: & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad CL, ita DL, ad LM, & BL, ad LN. *c* Sed vt AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedū DLYQ; & vt basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & vt basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, vt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, *ex* defin. 10. lib. 5. *d* Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; *e* Et vt AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonstrandum.



§ 24. *vndec.*

b 1. *sex.*

c 32. *vndec.*

d 32. *vndec.*

e 1. *sex.*

COROLLARIVM

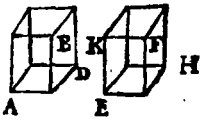
(EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primā descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedū ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 34. xxxiv. xxxv.

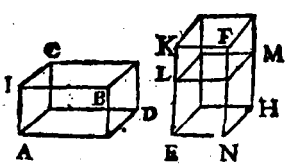
ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse vt AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum insistentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita vt AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales: cum & parallelepipeda æqualia ponantur: erunt & bases AD, EH, æquales, per ea quæ ad finem propos 31. huius lib. ostendimus. Quare erit, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.



QVOD si altitudines AI, EK, inæquales fuerint: sit EK, maior, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis: & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF: a erit vt ADCB, ad solidum EHML, ita EHGF, ac idem solidum EHML: b Vt autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL. Et vt solidum EHGF, ad solidum EHML, ita est eadem ratione basis NM, ad basin LN. cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN: erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: c Sed vt KN, ad LN, ita est, recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.

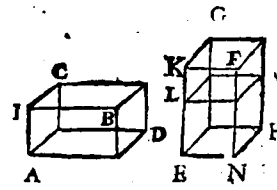
a 7. quinti
b 32. undec.
c 1. sexti



SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales: cum sit basis AD, ad basin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi: erunt & bases AD, EH, æquales d. Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

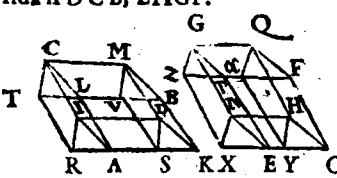
d 31. undec.

QVOD



QVOD si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem: [a] Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur. [b] Et vt EK, ad EL, ita est KN, ad LN: [c] Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hæ ratione inter plana parallela KN, GH: Erit vt solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML: [d] Ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

[a] 23. vndecimi. [b] 1. sexti, [c] 32. vndecimi. [d] 9. quinti.



SED proponátur iam parallelepipeda BACD, EFGH, æqualia, quorũ insistẽtes lineę AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, nõ sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem a punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Itẽ a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Q[a], GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Z[a], XZ, Y[a]: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico Rursus, vt basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. [e] Cum enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale solido X[a]GH: Erunt & parallelepipeda RVCD, X[a]GH, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH erit, vt iam demonstratum est, vt basis CD, ad basin GH, hoc est, vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

[e] 29. vel 30. vndecimi.

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt prius; Cum sit vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI, [f] Sit autem AB, ipsi CD, & EF, ipsi GH, æqualis; erit quoque vt basis CD, (scilicet RVCD, ad basin GH, solidi X[a]GH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, sint insistentes

[f] 24. vndecimi.

, lineæ

neæ perpendiculares ad bases CD, GH; erunt vt iam ostensum est, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. a Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idemque ostenderur, ti insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum. a 29. vel 30. vndecimi.

SCHOLIVM.

OMNIA hac, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; prismatis, quæ habẽt duo plana opposita triangularia, si prædicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. b Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia. b 29. 30. vel 31. vndecimi.

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. c Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin: d Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula. c 32. vndecimi. d 15. quinti.

PRÆTEREA, si duobus prismatis prædictis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, e quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, f cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum. e 33. vndecimi. f 15. quinti.

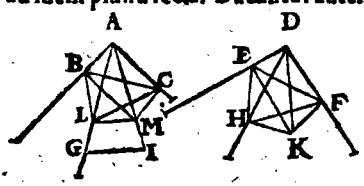
DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cum prismatis. g Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangula eorum dimidia h eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca. g 34. vndecimi. h 15. quinti.

XXXVII.

THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: à sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nam si AG, DH, sunt in æquales, auferatur à maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipsi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ sunt GI, LM, & est GI, ad planum anguli BAC, recta; a erit quoque LM, ad idem planũ recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. b Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; c Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML; d At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CL; e Ac proinde angulus ACL, rectus erit. f Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: g Est autem quadratum rectæ AM, æquale



a 8. undecimi.

b 48. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.
e 48. primi.
f 47 pr.
g 47 pr.

æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: *a* At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; *b* propterea queangulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera AL, DH, æqualia; *c* Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; *d* erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFF, æquales: cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; *e* erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, sunt recti; *f* erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: *g* Quia vero quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqualis; *h* erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistent, &c. Quod ostendendum erat.

a 47. primi.
b 48. primi.
c 26. primi.
d 4. pri.
e 26. primi.
f 4. pri.
g 47. primi.
h 8. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique: Erunt & puncta

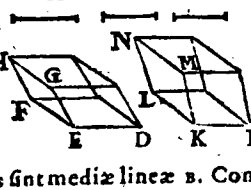
extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſa perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE. Item LAC, HDF: demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.)

XXXVIII THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo; quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturq; angulus ſolidus E, extribus angulis planis quibuſcunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A: & EF, ipſi B, & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH: quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur

a 26. vn decimi.



contineri, aut ex ipſis fieri. a Deinde ad rectam IK, eiuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, extribus angulis plauis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG, ita vt rectæ IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur ſub linea B, ſe ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IM. Cum enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B, & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: b Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales quorum verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo poſitis, ex conſtructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales per co-

b 14. ſexti.

c 31. vn decimi.

roll. propoſ. præcedentis. c Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeant baſes DG, IM, æquales & æquales quoque altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

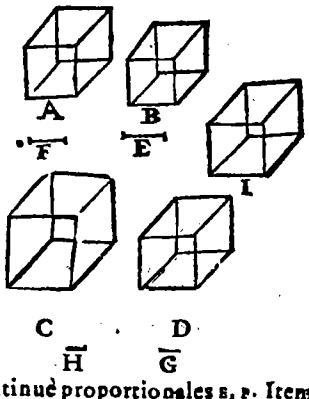
SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media linea de-

nea descripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto a media B. Dico tres A, B, C, esse continuè proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex FL, demissæ esse æquales. Quare cum & ipsæ ponantur æqualia; erunt eorum bases DG, IM, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales D E G, I K M, ex constructione: a habebunt latera a 14. *sexti.*
circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt DE, ad IK, ita KM, ad E G. Quapropter cum DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 32. PROPOS. 37. XXXII.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D: constituanturq; super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterq; descripta: item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterq; posita, siue hæc sint illis similia siue non. Dico esse quoq; solida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem solidum A: ad solidum B, ita solidum C, ad solidū D. Inueniantur enim per scholium propos. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sūt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur: erit ex æquo vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, Et vt C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B: ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

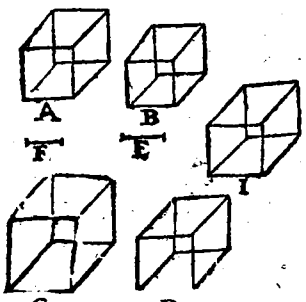
SINT iam è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoq; proportionales. *b* Tribus enim rectis b 12. *sexti.*

a 27. undec. A,B,C, inueniatur quarta proportionalis I, a super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterq; positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I: erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D. Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. b Atque eidem circo æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per definitionem huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

b 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoq; vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. c Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoq; vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. d Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B, Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erũt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B: & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

c 33. vn decimi.



d 33. vn decimi.

SCHOLIVM.

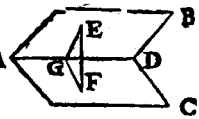
EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales, Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstra-

sum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & lineæ secundæ æqualis tertia linea: perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hac propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia sunt triangula. vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. a *Cum igitur, prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.* a 15. quinti.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC, sitq; eorũ cõmunis sectio recta AD. Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionẽ AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, *b* & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planũ AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3 defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, *c* cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

b 12. primi.

c 17. primi.

SCHOLIVM.

HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem, d *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.*

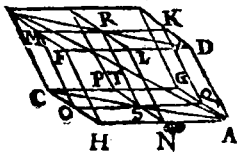
d 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxx.

SI solidi parallelepipedi eorum; quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & soli-

di parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secent.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I,K,L,M,N,O, P,Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorũ sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC: considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia



sunt lateribus CO, OS, trianguli COS: (Sunt enim AQ, CO, dimidiæ rectarum æqualium AG, CH, *a* & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) *b* & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: *c* Erunt & bases AS, CS, æquales: & anguli ASQ, CSO, æquales, *d* Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: *e* Ac propterea AS, CS, vnam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, *f* ipsæ quoque inter se parallelæ erunt & æquales. *g* Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales: Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; *h* erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. *i* Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT: & latus AS, lateri BR: *k* Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia: Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

a 34. primi. *b* 29. primi. *c* 4. primi. *d* 13. primi. *e* 14. primi. *f* 9. vndecimi. *g* 33. primi. *h* 7. vndecimi. *i* 29. & 15. primi. *k* 26. primi.

COROLLARIVM.

(HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutua bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est rectam RS.)

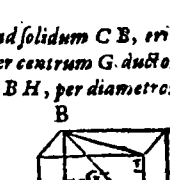
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad prop. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum:

trum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sic enim primo planum CD, oppositis planis AE, BF, parallelum.



a Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem BA, bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque quo & bases AH, BI, bifariam. b Cum igitur sit vt basis KC, ad basim CH, ita solidum AD, ad solidum CB, erit parallelepipedum AB, sectum bifariam plano CD, per centrum G ducto.

a 17. vndec.

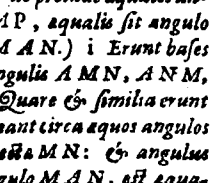
b 25. vndecimi.

TRANSEAT secundo planum secans AI, BH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum, quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, imo per totam diametrum AB, c cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI. d Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.

c 7. vndecimi.

d 25. vndecimi.

TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM: e erunt communes sectiones AM, BK, parallelae. Similiter parallela erunt [illegible]K, BM. cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, facta à plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM: f ideoq; tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, inter se erunt aquales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, aequalia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN: & angulus KBL, angulo MAN, aequalis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelae: g ac proinde aequales anguli erunt OAP, LBK. h Cum igitur OAP, aequalis sit angulo MAN: aequales quoque erunt anguli KBL, MAN.) i Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, aequales: & triangulum triangulo aquale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN, k cum latera habeant circa aquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, rectae MN: & angulus BKL, angulo AMN: & angulus KBL, angulo MAN, est aqualis, vt ostendimus: erit & reliqua IK, reliquae HM: & reliquus angulus



e 16. vndecimi.

f 34. primi.

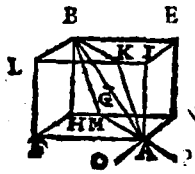
g 10. vndec.

h 15. primi.

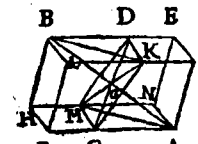
i 4. pri.

k 4. sex.

gulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, aqualis. (Est enim tota LI, toti NH, aqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis aquales: & totus angulus LBE, toti angulo NAF, aqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, aqualia: & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogrammo LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & aquilaterum, & aquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea aquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo aqualia erunt & similia triangula BHM, AIK: & quadrilatera AKLF, BMNE: cum inter se sint & aquilatera & aquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKRM, MHB, BKL, LBHF, aquale erit solido contento planis BMNE, RIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & aqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.



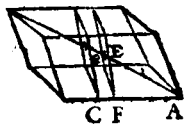
POSTREMO planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per rectos angulos eorum ductum, sed vtrumq; secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK, esse aquales. Ducantur in parallelogrammo GD, diametri CD, KM: connectanturque rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, a inter se sunt parallelæ: b Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano: ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. c Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, aqualis est: d Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem aqualis: & latus BG, lateri AG, aquale, quod AB, bifariam secetur in G, centro: e Erit & latus DG, lateri CG, aquale. Cum ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, aqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC: f & angulus BGD, aqualis angulo AGC: g Erit & basis BD, aqualis basi AC. Eodem argumento aquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, aqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM: Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1.



a 9. vndecimi.
b 7. vndecimi.
c 29. primi.
d 15. primi.
e 26. primi.
f 15 primi.
g 4. primi.

lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius aquales: Est autem totus DBL, toti CAN, aqualis, ob similitudinem parallelogrammorum Bl, AH. Igitur & reliquus KRL, reliquo MAN, erit aqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, aqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, aqualis;
a *Erit & basis KL, basi MN: & reliqui anguli reliquis angulis aquales.* a 4. pri.
Si igitur aqualibus angulis BKL, AMN, aquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, aquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & aquilaterum est, & aquiangulum: Ac propterea aquale & simile, cum singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota Ll, toti NH, est aqualis, erit & reliqua lK, reliquae HM, aqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliqua CF, aqualis erit: Ac propterea quadrilaterum DEIK, aquilaterum est quadrilatero GFHM: Sed & aquiangulum; cum anguli DEl, EIK, aquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum Bl, AH: & anguli EDK, lKD, angulis FCM, HMC, aquales, quod aquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, aqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, aqualia esse & similia & quadrilatera ACKl, BDMH: Item DENM, GFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. aquale est solido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN: cum hisce illa sint demonstrata & aqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum AB, dimidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non dimidiatur bifariam, dimidiatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam



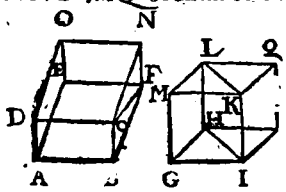
secari plano GD: Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se aqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, praeter G, dimidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

XI. THEOR 35. PROPO 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ: Quod quidem fiet, si plana triangulorū extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO, GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. a Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. b Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis, super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (c Nam parallelepipeda AN, GQ per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.



a 34. prim.

b 31. undecimi.

c 32. undecimi.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita: cum imperet parallelepipeda compleri: quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim tum parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

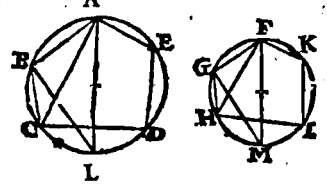
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et ſolidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH: *a* erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: *b* Eſt autem angulus ALB, angulo ACB: & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, *c* nempe recti in ſemicirculis exiſtentes: *d* erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. *e* Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG: & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. *f* Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG: cum tam quadratum, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ. Quæ itaque



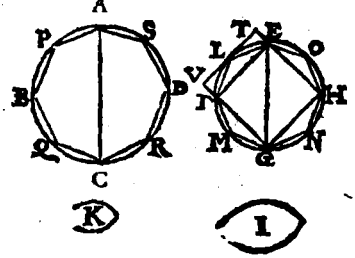
a 6. ſexti
b 21. tertij.
c 31. tertij.
d 32. pri mi.
e 4. ſex.
f 22. ſexti

itaque in circulis polygona similia, inter se sunt, vt diametri quadrata. Quod erat demonstrandum.

12. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quę vel minor erit vel maior circulo EFGK. Si enim
a 7. quinti. esset æqualis *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I. & K, simul. Inscribatur in



circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. osten dimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF; MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L. recta TV, tangens circulum in L. quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos 27. lib. 3. ostendimus, occurrat
b 41. primi. quæ rectis HE, GF, productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG
a 1. def. &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; *a* relinquitur tandem

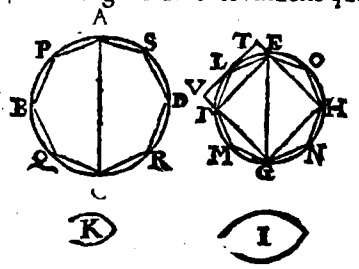
tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulū EF, GH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmētis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D, & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quod distributa est circūferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. *a* Quoniam igitur est polygonum APB. a 1. *duo decimi.*
QCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. *b* Igitur & polygonum ELFMGNHO, b 14. *quinti* minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

QVAM QVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratū diametri minoris EG, ad quadratū maioris diametri AC, Ita vt generaliter & vniuerse demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinē posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratū diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, *c* maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. c 14. *quinti* Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in prior parte generaliter, nō posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

Quam

Quamuis autem circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor: eadem tamen ratione ostendemus quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandē habere proportionē, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demōstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandē habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinē posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I: a sit autem vt circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I: Erit quoque vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodū à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.



a 7. quinti.

COROLLARIVM.

CHINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.)

p 11.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturq; rectæ

rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D: nec non in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF: huius vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI: & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, nec non eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti: Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter: *a* erunt HI, AB, parallelæ. Eadem *a* 2. *sexti.* ratione parallelæ erunt IK, BC: & HK, AC: & EG, BC: & EF, AC: & FG, AB: & EH, BD: & EI, AD: & IF, DC: & HG, DC.

b Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ: Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ: *c* erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem rationes æquales erunt anguli HEG, DBC: & HGE, DCB, *d* proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos: ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9 lib. 11 Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ: *e* erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC: & HKI: ACB. *f* Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia: ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11 Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoq; inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HI, constituta: ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22 lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum

b 9. *vn* *c* 10. *d* 4. *sexti.* *e* 10. *vn* *f* 4. *sexti.* *g* 21. *sexti.*

similia sint ostensa triangulo A D C, & constituta super æquales rectas A H, H D. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula A E G, H I K, cum similia sint ostensa triangulo A B C, & super rectas positas A E, H I, æ quæ æquales sunt, ob parallelogrammum A E I H. Non secus æqualia erunt & simili triangula E H G, I D K, cum sint ostensa similia triangulo B D C, & habeant rectas H E, D I, b quæ æquales sunt, ob parallelogrammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi. RVRSVS, c quia rectæ E H, H G, G E, æquales sunt, & parallelæ rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B, F G H I, B F G E; Erunt triangula E H G, B I F, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos 8. lib. 1. Ac propterea & similia: d Sunt autem & parallela, cum E H, H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ sint rectis B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur solidum B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G, B I F, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis, & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum C F G H I K. e Cum enim rectæ F C, C G, G F, æquales sint, & parallelæ rectis I K, K H, H I, ob parallelogramma C F I K, C G H K, F G H I; erunt triangula C F G, H I K, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: f Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, per quas ducitur planum C F G, parallelæ sint rectis K I, K H, per quas planum K I H, ducitur. Igitur solidum C F G H I K, contentum duobus triangulis C F G, K I H, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H, prisma est. Quoniam vero prismata E B F G H I, C F G H I K, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K: & parallelogrammum E B F G, basis illius, duplum est trianguli C F G, basis huius, per scholium propos. 41 lib. 1. g Ipsa inter se æqualia erunt.

d 15. vndecimi.

e 34. primi.

f 15. vndec.

g 40. vndec.

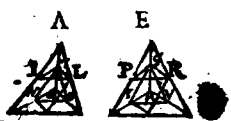
DENIQVE quia prisma E B F G H I, maius est pyramide E B F I, totum parte; Est autem pyramis E B F I, æqualis & similis pyramidi A E G H, nec non pyramidi H I K D, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata E B F G H I, C F G H I K, pyramidibus A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis A B C D, excedent, hæ vero à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor re-

nor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraq; diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, IK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD, EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propositio præcedens: Eodemq; modo intelligatur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD, EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterq; posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST *b* ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide AIBCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in



2. 12. xii.

b 12. quinti.

pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum: & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LK, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, vt basis A B C, ad basin E F G, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH. Ac propterea erunt quoque vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH: & ita deinceps. Quare cum sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, a ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia: Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

a 12. quinti.

LEMMA.

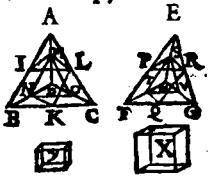
QVOD autem sit LKC, & RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana b parallela ABC, MNO, b 17. vndecimi. secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem D C, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. v.

SINT pyramides eiusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X: quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plusquam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV; *a* quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plusquam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps: *b* relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y: erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. *c* Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, vt basis ABC, ad basin EFG, hoc est, vt pyramis ABCD, ad solidum X. Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD: *d* erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.



a 3. *duo decimi.*

b 1. *dec.*

c 4. *duo decimi.*

d 14. *quinti.*

SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, vt basis ABC, ad basin EFG: Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, vt basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH, erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit vt basis EFG, ad basin ABC, e 14. *quinti.*

ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est basis ad basin, ita pyramidē ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum X, pyramide EFGH, sed aeque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt
a 9. quinti. basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; a fit autem pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM

CONVERSO modo si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea aqualis minori, & à puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. b *Pyramis ergo constituta aqualis erit toti pyramidi,*
b 9. quinti. *pars toti. Quod est absurdum.*

COROLLARIVM

CHINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel aquales bases triangulares constitutas, esse inter se aquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, qua aquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

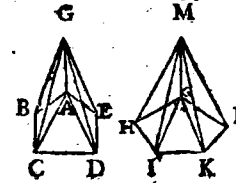
ITEM sequitur à converso, pyramides triangulares aquales super eandem, vel aquales bases eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares aquales eandemque habentes altitudinem, bases habere aquales, si non eandem habuerint. Qua quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in converso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

vt.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidē ad pyramidem, vt est basis ad basin.



c 5. duo decimi.

Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia: erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. c Quia vero est, vt basis ABG, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF: erit componendo vt basis ABCD, ad basin

basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: a Sed rursus est vt basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF Componendo ergo erit vt basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt basis GHIKL, ad basim GKL, ita pyramis GHIKL, ad pyramidem GKLM: & conuertendo vt basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. b Rursus quoniam est, vt basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM: Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionib. cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit vt basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. duodec.

b 5. duodec.

ABCDE	ABGDEF
ADE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

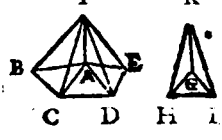
SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygona latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, *quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa.* c *Quoniam vero est, vt basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis, ABGF, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: & eodem modo, vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF; sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* d *Erit vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis* ABCDF, *tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin* GHI, *secundam*

c 5. duodec.

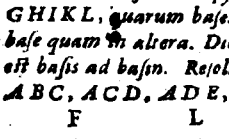
d 24. quinti.

cundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo est ostensum:
a 5. duo decim. a & vt basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem
b 24. quinti. GHIK, quartam quantitatem: b Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem,



ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin, triangulare m GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK: Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam obrem duæ pyramides qualibet, quarum vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere à triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.

SED tam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygona, sintque plura latera in vna base quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratum, est vt basis ABC, triangularis



prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: & vt bases ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quan-
c 24. quint. titatem: c Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem,

vt ante

vt ante est ostensum; a Erit etiam vt basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, sta pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi ABCDE. 224. huius.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem

QVOD non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 3. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM

(PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra sit, pyramides multangulas æquales & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Has autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.)

THEOR. 7. PROPOS. 7. VL

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, cuius duo triangula opposita æqualia ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma sacari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in trib. parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD: CF, in BCEF: FD, in ADEF. *b* Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt: estque vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinẽ, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam: Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planũ ADEF, demissa Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF: hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi

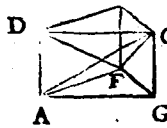
b 34. primi. & 5 duo decimi.

ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, vt perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF, in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

(HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Sine prisma quodlibet triplum esse pyramidis, qua eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem)

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularē ABE. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis.



Nam si ducatur recta D[illegible] erit prisma diuisum in tres pyramides aquales ABCF, ADCF, CDEF, a vt demonstratum est: Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hac illi sit aqualis, imo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF.

Cum igitur pyramis ABFC, aqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & supereandem basin ABF, constituta, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est. quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplam.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum: & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero aqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, vt demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma GDHGFB: b Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam

b 7. duodecimi.

b 12. quinti.

tiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aequales pyramidi ABCDE: propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt aequales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione aequales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basem, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, *erit & pyramis* ABCDE, *tertia pars prismatis* ABCDEFGH. *Cum igitur pyramis* ABCDE, *aequalis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basim* ABCD, *constitutae, per coroll. propos. 5 huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.*

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertia partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes ha pyramides aequales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

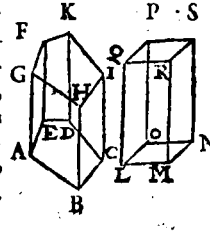
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis aequalem. Nam eiusmodi pyramis, aequalis est pyramidi illi, quae eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib: Quam quidem tam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases, inter se sunt, vt bases.

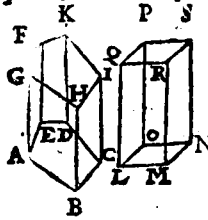
QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & aequalia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero linea recta: nec non de parallelepipedis, quae nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases



sint

sint figura multilatera. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, linea recta ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per corell. præcedens huius propos. qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. a Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est, propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.

a 15. quinti.



CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodemmodo ostendemus, quo scholium propos 5. demonstratum est.

COROLLARIVM II.

(VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quæcunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.)

SCHOLIVM. II.

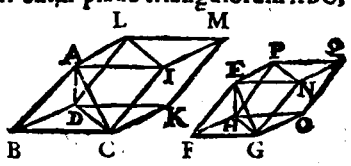
CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelligantur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertia partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent. 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelopipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelopipedi, ex corolla-

corollario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, Non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hac enim ratione, vt vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemq; altitudinis, duæ tertiæ partes prismatum, vt modo demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

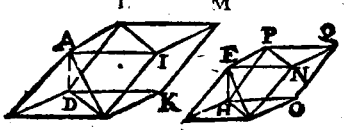
THEOR. 8. PROPOS. 8. VIII.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidũ esse triplicatã proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedũ BM, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi BM, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, atque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erunt & parallelogramma AL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia,



24. undec. similia. a Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, b sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia



sunt sex planis solidum FQ, ambientibus: Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis

c 15. quinti. LI, PN, c prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla: d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi

d 11. quinti. e 32. undecimi. BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoq; proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

(EX hoc quoq; est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam)

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam sint

f 20. sexti. *angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos recta EB, EC, LH, LI, f dissæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia: nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH, & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM;*

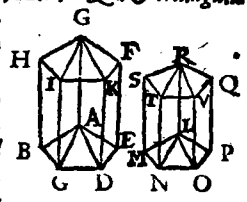
g 5 sexti. *erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH, g Quare æquian-*

gula,

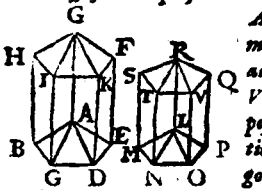
gula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11 similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. a Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, a 8. duo CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singula ad singulas, tri- decimi. plicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL, habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; b Atque idcirco erit vt b 12. vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyrami- quinti. des, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quamobrem, c cum pyramis ABEF, ad pyrami- c 12. dem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum duodec. AB, GH: habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK. LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducan- d 12. se- tur rectæ AC, AD: LN, LO, d erunt, vt de pyramidibus dictum est, xti. triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK: RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cũ omnia plana trismatũ opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogrammum CH, NS, similia sunt: erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM, Vt autem CB, ad CA: ita quoq; est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum: si ille huic superponatur, omnia inter se cõuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autè & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt, Ac propterea cũ latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia,



nalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendemus esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV, nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quæ paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.



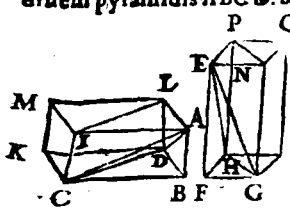
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

VII. THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, PQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia: Ac proinde parallelepipeda BM, PQ cum sint



sint prismatum dupla; æqualia quoque erunt. a Quare bases co- a 34. vn
rum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad decimi.
basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: b Vt b 15.
autem basis BI, ad basim FN, ita est triangulum ABC, ad trian- quinti.
gulum EFG. Igitur erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Cum altitudines pyramidum eædem sint, quę parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

Sint iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; c cum sit vt ABC, c 14. quinti.
ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoq; bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ: d Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda d 34. vndec.
BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Eadem ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habetium reciprocantur bases & altitudines, illa sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, basin habeant triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, qua demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super KLM. fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem, ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; e erit vt basis e 9 duo-
ABC, ad basin KLM, hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita decimi.
altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur autem hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis

ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

Sed reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales.

Conſtructa enim figura eodem modo cum baſi KLM, æqualis ſit baſi EFGH; & altitudo pyramidis KLMN eadem, quæ pyramidis EFGHI, ponaturque autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt baſis ABC, ad baſin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. a Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.

a 19 duodecimi

Sint deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multangula. Fiat rurſus triangulum MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE. Erit, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt hanc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur hæ altitudines æquales,) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIkL, baſes & altitudines reciprocantur.

Sed reciprocentur iam harum pyramidum atq; altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſi MNO, æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ALCDE; ponaturque autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis ABCDE: Erit quoq; vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIkL. Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis in propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

Omnia hæc facile quoq; demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyrami-

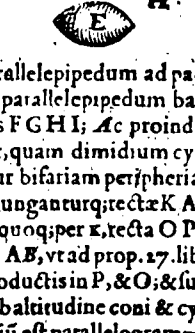
pyramides earundem altitudinum cum ipsis, & super easdem bases, æquales; cum sint eorū tertia partes, ex coroll. propos. 7 huius lib. Vel certe dua tertia, si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorū vertices, lineæ rectæ, vt in scholio eiusdem propos. ostensum est. Quare vt modo demonstrauimus, bases harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum, reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

Rursus si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismata habentium. Quare, vt demonstratū est, pyramides æquales sunt; & propterea prismata, cum eaū sint tripla, vel certe æqualtera, æqualia quoq; sunt. Quod est propositū.

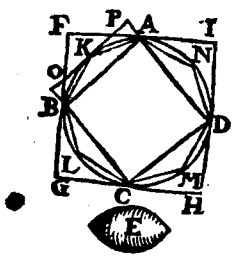
THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem. ix.

Habeant conus & cylindrus basin eandem circulum A B C D, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I, intelligaturq; super hæc quadrata sub altitudine coni & cylindri, tria parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ait propos. 9. lib. 4. ostendimus; atq; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis A B C D, dimidium parallelepipedi basis F G H I; Ac proinde parallelepipedum basis A B C D, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius basis circulus A B C D. Secentur bifariam peripheriæ A B, B C, C D, D A, in punctis K, L, M, N, adiungantur q; rectæ K A, K B, L B, L C; M C M D, N D, N A. Ducatur quoq; per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad prop. 17. lib. 3. ostendimus, occurrat q; rectis D A, C B, productis in P, & O; & super A k B, A B O P, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. *b* Quia ergo triangulum A k B, dimidiū est parallelogrammi A B O P, erit quoque prisma basis A k B, dimidium prismatis, seu



parallelepipedi basis *A* B O P: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstratum est; *A*c propterea prisma basis A k B, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta *A* B, & peripheria A *K* B. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula *B* L *C*, C M *D*, *D* N *A*, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ *A* k, x B, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam vero si a cylindro, cuius basis circulus *A* B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C *D*, & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium A k-



a1. *dec.* B, B L C, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; *a* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium *A* k, k B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; & ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni, vna cum magnitudine E ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ *A* k B *L* C M *D* N, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum tripli coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. *E*rit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

Sit deinde cylindrus minor tripli coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelligantur-

b6. *duo decimi.* que super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, *b* est-

que vt

que vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin *A* B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus *A* B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D *A*, bifariam in κ, L, M, N, adiunganturque rectæ A κ, K B, B *L*, *L* C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per κ, recta O P, tangens circulum in κ, quæ parallela erit ipsi *A* B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P & O, & super A κ B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo triangulum A K *B*, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis super basin A κ B, dimidium pyramidis super basin A B O P, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A κ B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A κ B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B *L* C, C M D, D N *A*, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ *A* K, *k B*, B *L*, L C, C M, M D, D N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si a cono, cuius basis circulus *A* B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin *A* B C D, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus *A* B C D; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium *A* k B, B L C, C M D, D N *A*; atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium *A* k, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N *A*, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponantur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum *A* K B L C M *D* N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in co-

a 41. *primi.*

b 6. *duo decimi.*

c 1. *dec.*

rollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demonstratum, erit huiusce modi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus, minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni. propterea conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

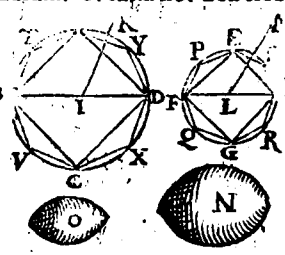
Quamuis propositio hæc solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspicue est vius demonstrationem diligenter intuenti. Itaq; propositio vniuersè ita proponi poterit.

Omnis conus siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases.

Sint sub eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli *A B C D*, *E F G H*, altitudines vero æquales I K, L M. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit vt basis *A B C D*, ad basim *E F G H*, ita conus *A B C D K*, ad aliquam magnitudinem, nempe ad M, quæ vel maior erit, vel minor cono *E F G H M*. Si enim esset æqualis, habueret conus *A B C D K*, ad conum *E F G H M*, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum vt basis ad basin: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus *E F G H M*, magnitudine O, ita vt conus *E F G H M*, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo *E F G H*, quadratum *E F G H*, diuidanturque peripheriæ *E F*, *F G*, *G H*, *H E*, bifariam in *P*, *Q*, *R*, *S*, & adiungantur rectæ *E P*, *P F*, *F Q*, &c. Quoniam igitur à cono *E F G H M*, detrahitur pyramis super basin *E F G H*, eiusdem



p 7. quinti,

eiusdem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium E P F, F Q G, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est: a relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni E F G H M, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium E P, P F, F Q, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est: erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQCRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo A B C D, polygonum A T B V G X D Y, simile polygono E P F Q G R H S, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. huius lib. est vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita polygonum A T B Y C X D Y, ad polygonum E P F Q G R H S: Vt autem circulus A B C D, ad circulum E P G H, ita ponitur conus A B C D k, ad magnitudinem N, b & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis: Erit quoque vt pyramis A T B V C X Y D k, ad pyramidem E P F Q G R H S M, vt conus A B C D K, ad N. Cum igitur pyramis A T B V C X D Y k, minor sit cono A B C D k, pars toto, c erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quam N. Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

a 1. *dec.*

b 6. *duo decimi.*

c 14. *quinti.*

Sit Secundo N, maior cono E F G H M. Cum igitur ponatur vt circulus ABGD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDk, ad N: Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDk Ponatur vt N, ad conum ABCDk, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono E F G H M, maior quoque erit conus A B C D k, quam O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O, quæ [illegible] est cono ABCDk. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque maior est ostensa: Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDk, ad N:

d Sit autem vt conus ABCDk, ad N, ita idem conus ABCDk, ad conum EFGHM, erit quoque vt basis ABCD, ad basin E F G H, ita conus ABCDk, ad conum EFGHM.

d 7. *quinti.* e 15.

e Quoniam autem, vt conus A B C D k, ad conum EFGHM, *quinti.*

ita est cylindrus A B C D K, qui triplus est coni A B C D G,) ad cylindrum E F G H M; (qui triplus est coni F E G H M,) Erit quoque vt basis A L C D, ad basin E F G H, ita cylindrus A B C D K, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo vsi sumus in conis, si loco conorum & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, in se sunt, vt bases. Quod demonstrandum erat.

SCHLIVM.

Perspicuum quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solu rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifeste indicat, ita vt propositio vniuersè proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Conuertetur hæc propositio hoc modo.

Si coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiusdē altitudinis semper eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti vel scaleni, siue vnus, rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel vna & eadem.

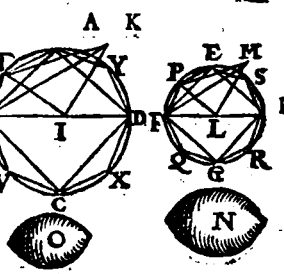
Item sequitur, conos & cylindros æquales, super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. [illegible] demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

Sint coni & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F, G H, axes vero L K, L M, & diametri basium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non creditur, habeat conus A B C D K, ad aliquam [illegible] altitudinem N, pro-

proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, vel minor, vel maior cono E F G H M. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis E P F Q G R H S M, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T, M F, M P, vt habeantur duo triangula B K T, E M P, pyramidum A T B V C X D Y K, E P F Q G R H S M; & connectantur rectæ T I, P L. Quoniam igitur coni A B C D K, E F G H M, similes ponuntur; erit ex 24. defin. lib. 11. vt diameter B D, ad diametrum F H, *b* ac propterea vt semidiameter B I, ad semidiametrum F L, ita axis I K, ad axem L M; Ac permutando vt B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cum igitur anguli B I K, F L M, recti sint ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorum bases; *c* Erunt triangula B I K, F L M, æquiangula; *d* Ac propterea vt K B, ad B I, ita erit M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad E P, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P. (Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus arcubus B T, F P, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est: sitque vt B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æqualitatem tam linearum B I, I T, quam F L, L P; & erunt triangula B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, vt K B, ad B T, ita M F, ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sunt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. eum axis I K, rectus ponatur ad circulum A B C D, *f* erunt bases K B, K T, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ M F, M P: Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erunt, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. *g* Quoniam vero vt K B, ad B T, ad eandem B T: Item vt M F, ad F P, ita M P, ad eandem autem vt K B, ad B T, ita M F, ad F P; Erit quoque vt ita M P, ad F P; Et conuertendo vt B T, Quare cum sit vt T K, ad K B, ita P M F, ad F P; Et vt B T, ad T K, ita habebunt triangula B K T, E



a 7.

b 15. quinti.

c 6. sex.

d 4. sex.

e 6. sex.

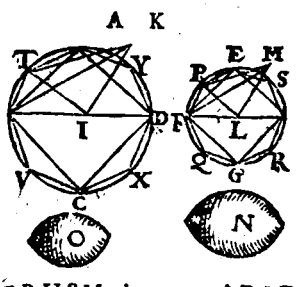
f 4. tert.

g

5. sex.

que æquiangula erunt: Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides A T B V C X D Y k, E P F Q G R H S M, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æquali, erunt dictæ pyramides similes ex defin. 9 lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum B T, F P, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem B T, ad F P, ita est B I, ad F L similitudinem triangulorum B I T, F L P: a E-vt BI ad FL, ita BD, ad FH Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum B D, F H: Ponebatur autem & proportio coni A B C D k, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus A B C D k, ad N. Quare cum pyramis A T B V C X D Y k, minor sit cono A B C D k, pars toto, b erit: & pyramis E FQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono EFGHM.

a 11. quinti.



b 14. quinti.

Sit deinde N, maior cono E F G H M. Cum ergo ponatur conus A B C D K, ad N, habere proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autem & pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime ostendimus: Erit vt conus A B C D k, ad N, ita pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M: & conuertendo vt N, ad conum A B C D k, ita pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y k Quare cum ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y k, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P E, ad T B, hoc est, diametri F H, ad diametrum B D: habebit quoq; N, ad conum A B C D k, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Ponatur vt N, ad conum A C B D k, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur quam conus E F G H k: c erit quoque conus A B C D k, maior quam O. Quapropter conus E F G H M, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D k, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem

c 14. quinti.

alio

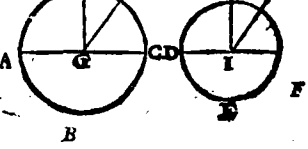
alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGH. Sed neque minor est ostensa. Æqualis igitur est; ac proinde conus ABCDK eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABGDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata. a 7. quinti. b 15.

b Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoq; obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atq; prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat. *b* quinti.

SCHOLIVM.

Quod si minor conus, & cylindrus cum minore conferatur perspicuum est, in secunda parte huius propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8 huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterũ homologorum triplicatã. Id quod ad defin. 10. lib. 5 monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatẽ ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

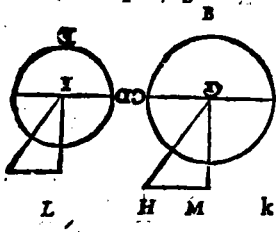
Hæc porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cũ in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABC, DEF, axes vero CH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrũ triplicatam.



Intelligãtur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundẽ cũ scalenis altitudinũ quorũ axes GL, IM, Ducanturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secãtia bases lineis rectis AC, DF, quæ diametri basiũ erũt. Quoniã igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF, cerũ & plana per GH, CL; & per IK, IM, ad easdẽ recta. Ac propterea perpendiculares lineæ ex vndec. c 18. H, K, ad bases demissæ cadẽt in AC, DE, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationũ, qui æquales inter vndec. d 38.

se erunt

se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem
a 32. primi *& anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Reliqui igitur, HGL, kIM, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL,*
b 29. primi. *per axium vertices ducta ipsi AC parallela; brideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli*



c 4. sex. *CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIk. Triangula igitur GHL, IkM, æquiangula sunt; c atque idcirco erit vt GH, ad GL, ita Ik, ad IM; & permutando, vt GH, ad Ik, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem Ik, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, vt diameter AC ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylin-*
d 12. duodec. *dri recti ABCL, DEFM, similes erunt ex definition. d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFk, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFk, itaque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFk, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.*

xj.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

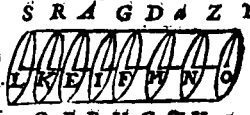
Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Secetur cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico vt est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantum libet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ Ek, kL, æquales ipsi EI. Item quotcunque rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, k, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, kP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, describent circulos GH, PQQS,

T *a*, V Z X Y, parallelos æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quę semper inter se æquidistantes circumferuntur. *A*: propterea cylindri erunt S P, P *A*, A H, H D, *D* T· T 7, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum S-Q X Y. Quoniam vero tam cylindri S P, P A, A H, super bases æquales Q Y, P R *B A*, & sub altitudinibus æqualibus k L, E k, *I* E, æquales sunt, quam cylindri X Z, Z T, T D, *D* H, super æquales bases X Y, V Z, T *a*,, C D, & sub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri *A* H, quam multiplex est axis I L, ipsius axis *I* E; I cm tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quam multiplex est axis I O, ipsius axis I F, Quoniam autem si axis I *L*, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis est axi I O, (multiplici axis I F, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propos. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior. est axe, cylindrus quoque cylindro maior est. Et si minor, minor, in quacunque hæc contingat multiplicatione; Erit, per defin 6: lib. 5 ita axis *I* E, prima magnitudo ad axem I F, secundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Etsi hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat, tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodare, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidea assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in cono rectus rectangulũ circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, k R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, k, E, &c. vna cum recta S Y, semidiametros coniungente. Hæc enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quæ scribit Serenus in l. de sectione cylindri.

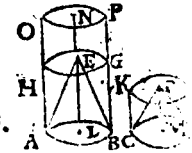


THEOR. 14. PROPOS. 14. xj.

Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

Sint

Sint ſuper baſes æquales A B, C D, duo coni A B E, C D F, & duo cylindri A B G H, C D I k, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) L E, M F. Dico eſſe conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I k, vt eſt altitudo L E, ad altitudinem M F. Extendatur enim cylindrus A B G H, ad partes G H, vna cum eius axe L E, & rectangulo A G; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O P, eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I k. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. a cylindrus A G, ad ipſos eandem habebit proportionem. b Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, vt axis ſeu altitudo L E, ad axem ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo L E, ad altitudinem M F.

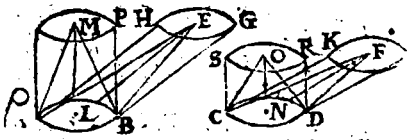


a 7. quinti.
b 13. duode.
a 10. duode.
d 15. quinti.

c Quia vero coni A B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; d ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem: Atque proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, vt altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Hoc idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E, C D F, & cylindri A B G H, C D I k, ſcaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I k, eſſe, vt eſt altitudo L M, ad altitudinem N O. Super baſin enim A B, conſtituatur cylindrus rectus A B P Q, ſub altitudine L M, & ſuper baſin C D, cylindrus C D R S, ſub altitudine N O. Quoniam igitur eſt cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrum rectum C D R S, vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Eſt autem cylindrus A B P Q, cylindrus A B G H. Item cylindro C D R S, cylindrus C D I k, æqualis, ex coroll. prop. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus A B G H, ad cylindrum C D I k, vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod eſt propoſitum.



e 14. duod.
f 10. duode.

Quoniam autem coni, ſeu ſint tertiæ partes cylindrorum,

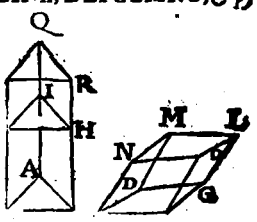
eam ra-

eandem habeant proportionem, quam cylindri. Erit quoq; conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, eandem altitudinem cum cylindris ABPQ CDRS. a 15. quinti.

Idem cõcluditur quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE & cylindrus ABGH fuerit scalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus, CDRS, rectus. Nam cũ cylindrus scalenus ABGH, aequalis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demõstrauit: Erit quoq; cylindrus scalenus ABGk, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

b Quoniam vero coni eandem habent proportionem quam cylindri, c cum illi horum sint tertiae partes. Erit etiam conus scalenus ABE ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO, Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est. b 15. quinti. c 10. duodec.

Eadem quoq; haec propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super aequales bases constitutis. Sint enim super bases aequales ABC DEFG, prismata ABCHIk, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinib. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namq; insistentes lineae AI, CH, Bk prismatis ABCHIk, ad bases ABC, perpendiculares, ita vt Bk sit altitudo prismatis ABCHIk. Productis autem rectis AI CH Bk, sumantur IQ HR, kP, aequales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, complentur prisma HIkPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Erunt q; prismata HIkPQR EL, cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se aequalia, ex coroll 2 propos. 7 huius lib. d Ac propterea prisma ABCHIk, ad vtrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25 lib. 11. prisma ABCHIk, ad prisma HIkPQR, est vt planum BI, ad planum kQ. e Et vt planum BI, ad planum kQ, ita est recta Bk, ad kP; erit prisma ABCHIk, ad prisma HIkPQR, hoc est, ad prisma EL, vt Bk, altitudo prismatis ABCHIk, ad kP, altitudinem prismatis HIkPQR hoc est, prismatis EL. Quod propositum.

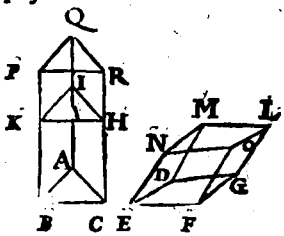


d 7. quinti. e 1. sexti.

Quod si insistentes lineae AI, CH, Bk, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma

cuius

enim insistentes sint perpendiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cum ex 2. coroll propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habeant altitudinem, & basin, sint æqualia; sitq; prisma constitutum ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem, erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.



a 25. quinti. a *Quoniam vero pyramides eandem proportionem cum prismatis,* b 10. quinti. b *quod illæ sint horum tertiæ partes: Perspicuum est, ita quoq; esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.*

Eadem prorsus ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

Hæc omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

Omnia quoq; hæc facile conuerti possunt hoc modo.

Coni & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines bases habebunt æquales.

Nam alioquin pars æqualis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

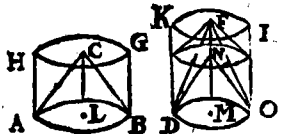
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

Sint æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudines ve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur: Si altitudines LC, MF, sint æquales; cum cylindri ponantur quoque æquales, erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.

Quod

QVOD si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, maior, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis: & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum, vt in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK: a erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. b Est autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: c Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, imo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huic æqualem LC: Ac propterea reciprocæ sunt bases & altitudines.

a 7. *quinti.* b 11. *duodec.* c 14. *duodec.*



IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales: erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales. dcũ coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt ostensum est, etc. ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas: Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demõstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituantur duo coni, vt in figura.

d 10. *duodec.*

SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris cõfirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC: erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN: e Est autem vt basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: f Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO: g Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

e 11. *duodec.* f 14. *duodec.* g 9. *quinti.*

AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam

obrem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrati tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

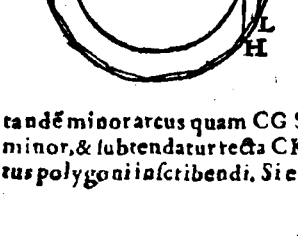
NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti eadē cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoq; erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

XIII. PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & pariū laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli A B C, D E, circa idem centrum F, oporteatque in maiori A B C, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta A C, secans circulū DE, in E, puncto, & per E ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulū DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniā igitur arcus AGC, maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidiū IK, & sic deinceps; relinquetur tandē minor arcus quam CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes



e 1. decimi.

numero & magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHG, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, & quæ æquales quidem erunt ipsi recta a 29. CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum tert. erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AG, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt: b erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tan- b 29. gat circulum DF, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neq; alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, c ideoque æqualiter cum CK, à centro F, distent, cir- c 14. culum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum. tertij.

COROLLARIVM.

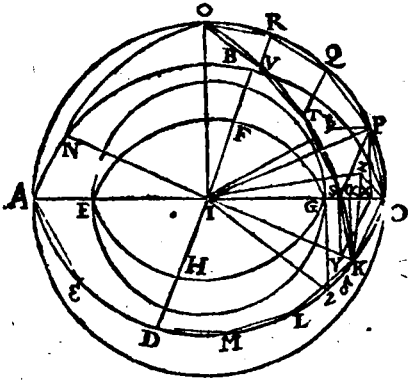
(HINC est manifestum, si ab extremitate Lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totam extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.)

PROBL. 2. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatq; in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum. sintq; communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarum ad earum superficiem; erunt ipsæ sectio-

nes, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BC, sese in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint
a 16. duodec. quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. a Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex C, ad EG, ducatur perpendicularis
b 1. quarti. G γ, ad circumferentiam vsque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tangit in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, b applicetur in circulo ABCD, recta æqualis A ε. Quia vero si arcui
c 19. primi. C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, c latus Cγ, oppositũ maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ,



quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maiorem, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo
d 2. dec. CL, dimidium LK, & sic deinceps: d relinquetur tandem arcus minor arcu Cδ, seu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tangat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet: multo minus recta
e 12. vn decimi. CK, subtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulũ tanget. Rursus ducta diametro KN, e erigatur ex centro I, ad planã circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN,
f 18 vn decimi. plana ducantur, f quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti
g schol. 3 def. 11. sunt, ex defin. 3. lib. 11. g quadrantes erunt OC, OK: atque adeo cum circuli ABCD, DOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, quoque quadrantes CD,

jes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL: & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD: *a* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD: CP, PQ, QR, RO, KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittatur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY *b* quæ in communes sectiones AC, NK, cadent: *c* eruntque inter se parallelæ.

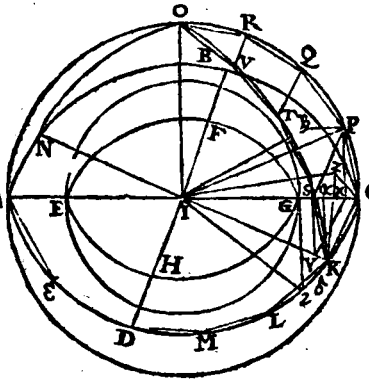
a 29. tertij.
b 38. vndec.
c 6 vndecimi.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKI, anguli PXC, SIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *d*. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt: (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. *e* Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PY, SY, æquales sint & parallelæ: si connectatur recta XY, *f* æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter se. *g* At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, reliquentur & IX, IY, æquales: AC proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad IK.) *h* Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi XY, *i* ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CK, SP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas: atque adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, sint parallelæ: totumque quadrilaterum PSTQ, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterū QTVR. *k* Est autem & triangulum RVO, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis, inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptū dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

d 27. tertij.
e 26. primi.
f 33. primi.
g 2 sex.
h 8. duodec. 17. vndecimi.
i 2. vndecimi.
k 2. vndecimi.

DVCATVR enim ex I, ad planum GKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IK, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequenti

ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3 lib. 11. anguli rze, rzx, a 47. 1. mi. recti sunt; a erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia: Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erũt, ideoque & ipsæ rectæ ZC, zx, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum



ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P transibit. Eadem q; ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ. QTVR, & triangulũ RVO, circulos describi posse: demostrabimus. Quoniam vero, vt postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est: b erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarũ ZG, ZK: ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC. b 12. secund.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendiculares K, α. Cum igitur AC, dupla ipsius AI, & A α, maior sit, quam AI, erit AC, minor duplo ipsius A α. Quam ob rem cum sit, c vt AC, ad A α, ita rectangulum sub AC, αC, ad rectangulum sub Aα, αC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aα, & eadem altitudo αC: erit quoque rectangulum sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. d Est autem rectangulum sub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK, & rectangulum sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα: quod recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis, & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim conecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratũ rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. e Quoniam vero quadratum rectæ IG, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis re- c 1. sext. d 17. sexti. e 47. primi.

ti rectarum I α, α K; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Stergo ex his demantur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorem EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta K α, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint a sphæra EFGH, quam punctum Z. vt mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem EFGH, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Cγ: a Est autem a 19. CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, vt mox primi. demonstrabitur; Multo maior erit Gγ: quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. b Quia vero b 47. quadratum rectæ Iγ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & primi. quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur, quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quamobrem, cum IG, sit Sphæræ minoris EFGH, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget.

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ. descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus sit, ex 3 defin. lib. 11. c erit quadratum rectæ IP, æ- c 47. quale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia vero & quadratum rectæ primi. IC, (quod æquale est quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarū IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum, IZ, ZC, æqualia; Est autem quadratū rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior sit, quam linea βP, vt posſea ostendemus. Reliquum igitur quadratū rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoq; & linea, Iβ, maior quam linea IZ. Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram EFGH, existet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphæram maiorem EFGH. Eodem modo demonstrabimus,

quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM

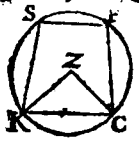
EXiis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quã habent sphæraru diametri. Nam si ex centris sphæraru ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphæraru: vt constat, si intelligatur harum sphæraru minor intra maiorem circa idem centrũ descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cũ singulæ pyramides in una sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphæraru: vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autẽ, vt una pyramis ad unã pyramidẽ ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphæra ad polyedrum alterius sphæra proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphæraru, a cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

a 15. quinti.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera: quæ tamen nondum sunt demonstrata: idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, similia sint.) Est autem IK, maior quam IY: b erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostensæ ipsi SP, erit quoque KC, maior quam SP. Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. c Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ: (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figura superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores: Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS,

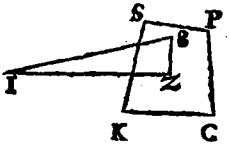


b 14. quinti.

c 24. 10. ij.

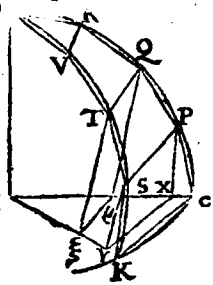
CP, KS, quadrantem circuli CK, SP, excedet: atque à semicirculo superabitur: ac proinde multo magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad planam aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Kβ, cadere intra quadrilatera: nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus GK, quadrante maior est: angulus CZK, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est scholio propos. 27. lib. 3.

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunq; aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo Iθ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius à centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.



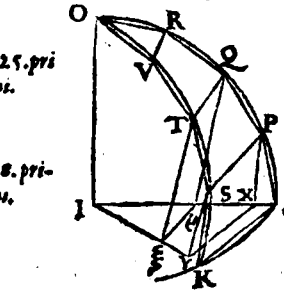
a 19. primi

TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, qua continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, O ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, b quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, c erunt q; inter se parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ: erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse æquales SP, XY. d Quia vero μξ, ipsi CK, parallela est quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY: e erunt quoq; μξ, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ: mi. Est autem IY, maior quam Iξ. f Igitur & YX, maior erit quam ξμ: f 14. Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, maior erit quam QT; quæ quinti æqualis est ipsi ξμ.



b 38. undec.
c 6. undec.
d 2. sex.
e 30 pri

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, C, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli egredianturque à centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP: CP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo

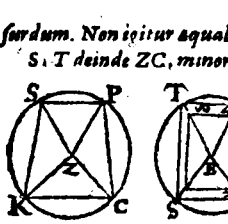


a 25. primi.

b 8. primi.

latera ZK, ZC, aqualia, ponuntur lateribus βS, ζP, & basis KC, maior est basi PS; a erit angulus KZC, maior angulo SζP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TζQ. At quoniam bases KS, GP, basibus ST, PQ. sunt aquales; b erunt anguli KZS, CZP, angulis SζT, PζQ. aquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad ζ: Sunt autem & aquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint aquales, ex coroll 2. propos. 15. lib 1. quod est absurdum. Non igitur aqualis est recta a ZC, recta ζP.

S, T deinde ZC, minor quam ζP, & abscindantur ζπ, βϱ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, aquales, connectantur ϱπ, rectis πϱ, ϱω, ωΦ, Φπ, c quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ. QP, eo quod recta ex centris sectas sunt proportionaliter; ac proinde ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit ut βS, ad SP, ita βϱ, ad



c 6. sexti.

d 14. quinti.

ϱπ. Cum ergo βS, maior sit quam βϱ. d erit & SP, maior quam ϱπ. Eadem ratione maiores erunt ST, TQ. QP, rectis ϱω, πΦ, Φπ: Ac propterea cum PS, minor sit, quam CK, & ST, PQ. aquales rectis KS, CP: & TQ. minor quam PS, erunt recta πϱ, ϱω, ωΦ, Φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum recta βπ, βϱ, βω, βφ, rectis

e 25. primi.

ZC, ZK, ZS, ZP, sint aquales: e erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & aquales. quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis aquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non ergo minor est recta ZC, quam βP: Sed neq; aqualis est ostensa: Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

XV. THEOR. 16. PROPOS. 16.

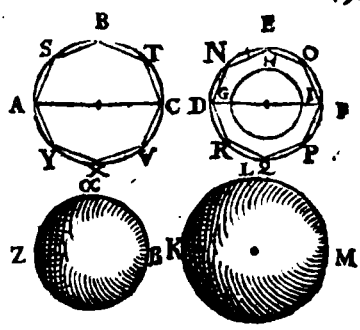
SPHÆRÆ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quam DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum AC, ad diametrũ DF. Habeat primum sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæræ DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; in-

f 14. duo decimi.

telligaturque sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. f Inscribatur

batur in ſphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI: Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. a 14. quinti.



HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedẽtis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrũ DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, : Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphærã Zαβ, proportionẽ triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoq; ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphærã Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatã diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt,

non

non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem non habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphæram KLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neq; ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter se sunt triplicata ratione suarum diametrorum, Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM

(HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum simile habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.)

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI

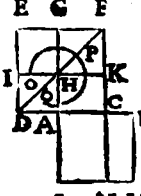
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et ſolidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducta diametro BF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela, ipſi GD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. *a* Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: *b* erit rectangulum CM, ſub AB, CB. æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB: & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: *c* Eſt autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, qua-



a 3. *defi. ſexti.*
b 17. *ſexti.*
c 1. *ſexti.*
d 43. *primi.*

AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4 lib. 2. quod si linea AB, dupla ponatur lineæ AD, erit & gnomon OPQ eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.

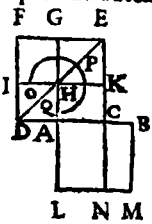
ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB. dupla lineæ
b 2. sec. AD, ponatur. a Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectanguli sub AB, AC, & sub AB, BC, cõprehen- A C
sis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est D B
ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB,
b 1. sexti AD, est dupla, b ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplũ ipsius cum vtriusq; rectanguli eadẽ sit altitudo AC Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumc 17. se ptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) c Quod vero sub AB,
xii. BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD.
d 4. sec. d Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD. AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

11. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, positq; quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratũ BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in pũcto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB; Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturque EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum

plum ponitur quadrati CI: Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus. Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomō OPQ quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD: & CH, ipsi AC, æqualis: erit & LC, ipsius CH, dupla. *a* Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK: erit quoque illud huius duplum: *b* Est autem CK, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB, ipsis CK, HF: Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD: estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB: *c* Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD Quam ob rem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum CB.

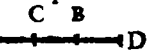


a 1. sext.

b 43. primi.

c 17. sexti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC: *d* estque quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo sub AC, CB, bis: Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vna cum rectāgulo sub AC: CB, bis quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratū rectæ CB, & rectāgulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdē quadrati rectæ AC: Est autem & quadratū rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2: Aequale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB; bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectangulo subCD, CB: (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, *e* ita quoque duplum erit rectangulū sub CD, CB, rectanguli subAC, CB: cum vtriusque rectāguli eadem sit altitudo CB: Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum subCD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: *f* At quadratū rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulū sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CC, & sub, CD, BD: Ac proinde dempto communi rectāgulo subCD, CB, relinquetur quadratū rectæ CB, æquale rectangulo subCD, BD: *g* ideoque erit vt CD, ad CB, ita CE, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque segmentū maius CB. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum posit, &c. Quod erat demonstrandum.



d 4. sexti.

e 1. sexti.

f 2. sexti.

g 17. sexti.

LEM-

LEMMA.

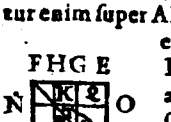
QVOD autem recta GD, maior sit necessario quam CB; ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, 2 cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: At propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua GB, Quod est propositum.

§ 4. secundi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Erunt que ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, *b* erit rectangulum sub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD: erunt earum latera HK, IQ, æqualia: ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. *d* Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. *e* Est autem IO, ipsi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æquale



b 17. sexti. § 34. primi. *d* 36. primi. *e* 43. pr.

æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ: erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD.

ALITER. Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita CB, a erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum sub AA, CB, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum sub AB, AC, æquale quadrato rectæ AC: quod cum ex scholio propos. 4. l. 2. quadruplum sit quadrati rectæ CD: erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulũ sub AB, BC, vna cũ quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

a 6. secundi.

b 17. sexti.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoq; cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura prioris huius propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus, (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ,) ex rectæ CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, vt supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, recta AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum: c *Ac proinde erit, vt AB,* c 17. sexti. *ad AC,*

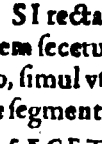
ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, secta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

a 6. secundi. *ALITER Cum AC, aut sa sit bifariam in D, & ei addita GB, aerit rectangulum sub AB, BG, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD: Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD: rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ*

b 17. sexti. *AC, æquale est rectangulum sub AB, BC.* b *Quamobrem erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde secta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

v. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur, quadrati.



SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius AC, & minus CB, Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC, Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in punctο G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC,

c 17. sexti. ad CB: c erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD: erit gnomon KLM, vna cum quadrato GH, duplus quadrati IF: Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectæ BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

d 17. sexti. ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: d erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC,

e 7. secundi. triplum quadrati rectæ AC. e Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrati rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta secundum extremam & mediam

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.)

SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraque simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, vna cum quadrato CH, duplum eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD: igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC: a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema ac media ratione. a 17. sexti.

ALITER. *Cum quadrata rectarum* AB, BC, *tripla sint quadrati rectæ* AC; b *Sint vero quadrata rectarum* AB, BC, *æqualia quadrato rectæ* AC, *& rectangulo sub* AB, BC, *bis: erit &* b 7. secundi.

quadratum rectæ AC, *vna cum rectangulo sub* AB, BC, *bis, triplum quadrati rectæ* AC. *Demptis ergo quadrato rectæ* AC, *relinquetur rectangulum sub* AB, BC, *bis, duplum quadrati rectæ* AC. *Et proinde rectangulum sub* AB, BC, *semel, æquale quadrato rectæ* AC. c *Quare vt prima erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB: *ideoq;* AB, *in* C, *secta erit extrema ac media ratione.* c 17. xii.

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: R

illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento BC, aqualis. Dico quadratum totius AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmento. a *Quoniam enim quadratum ex AD, aquale est rectangulo sub AB, BC, quater comtento, una cum quadrato ex AC:* b *Rectangulum autem sub AB, BC, aquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continuè proportionales) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC, atque adeo rectangulum sub AB, AC, quater una cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod aquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod est propositum.*

a 2. secundi.

A C B D

b 17. sexti.

SIT dein recta AB, secta inaqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, aqualis, sitq; quadratum ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac media ratione. c *Quoniam enim quadratum ex AD, aquale est rectangulo sub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, una cum quadrato ex AC; quintuplum quadrati ex AC: ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, aquale quadrato ex AC.* d *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

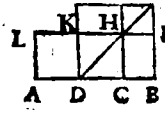
c 2. secundi.

d 17. sexti.

17. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea.

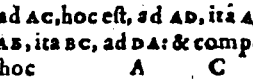
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentū AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectā BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BP, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur



atur ipſi AF, parallela DL, occurrens ipſi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *a* Erit rectangulum IF, contentum ſub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. *a* 17. ſexti.

Eſt autem CK, ipſi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi AL: *b* 36. primi. additoque communi BK, erit rectangulum BL, contentum ſub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB: *c* Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AB. *b* 36. primi. *c* 17. ſexti.

ALITER. Quoniam eſt vt AB, ad AC, hoc eſt, ad AD, ita AC, ad CB: Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad DA: & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, opponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER *cum Campano & hoc demonſtrabimus.*

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum AB, minus autem ſegmentum AD, & ex maiori ſegmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori ſegmento AD. Dico maius ſegmentum AB, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figura conſtructione, cum ſit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD, d *erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB: & ablato communi BK, erit AL, æquale ipſi IF:* e *Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF,* e *contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC:* f *Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum.*

d 17. ſexti. e 36. primi. f 17. ſexti.

ALITER. Quoniam eſt vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB; g *erit quoque ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius quoque AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc eſt, vt AB, ad AC: Ac propter-*

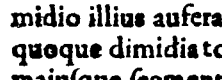
g 19.

ea diuisa erit AB, *in* C, *extrema & media ratione. Quod est propositum.*

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, *extrema ac media ratione in* C, *sitque* DE, *dimidium totius, &* DF, *dimidium maioris segmenti* AC. *Dico* DE, *in* F, *secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse* DF.



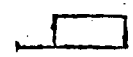
Cum enim sit vt AB, *tota ad* DE, *totam, ita* AC, *ablata ad* DF, *ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla:* a *erit quoque reliqua* CB, *ad reliquam* FE, *vt tota ad totam: Ac proinde &* CB, *dupla erit ipsius* FE. b *Quoniam vero est, vt* AB, *ad* AC, *ita* DE, *dimidia illius, ad dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione,* AB, *ad* AC, *vt* AC: *ad* CB: *erit quoque* DE, *ad* DF, *vt* DF, *ad* FE: *Ac proinde ex eadem defin.* DE, *secta erit in* F, *extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

a 19. quinti.
b 15. quinti.

91. **THEOR. 6. PROPOS. 6.**

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumq; segmentum AC. CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. c Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD: habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. d Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD: propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD. Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD. Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. e 9. dec. Habent enim proportionem quam 5. ad 4. vel 25. ad 5.) erunt rectæ



c 1. terdec.
d 6. dec.

rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantū commensurabilis: a erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome. a 74. decimi.

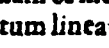
RVRSVS applicata ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, b erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, c facit alterum latus BE, hoc est rectam CB, illi æqualem, Apotomē primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. b 17. sexti. c 98. decimi.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum lineæ Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, *extrema ac media ratione diuisa in* C, *sitq; maius segmentum* AC, *linea Rationalis. Dico minus segmentum* CB, *esse Apotomen. Diuisa enim* AC, *bifariam in* D: *erit* CD, *dimidia ipsius Rationalis* AC, *Rationalis, cum sit ipsi* AC, *commensurabilis.* d *Quoniam autem quadratum rectæ* BD, *quintuplum est quadrati rectæ* CD; *habebunt quadrata rectarum* BD, CD, *proportionem, quam numerus ad numerum:* e *ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ* ED, CD, *commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur* CD, *sit Rationalis, erit quoque* BD, *Rationalis. Quia vero quadrata rectarum* BD, CD, *non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24 lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5 ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ* BD, CD, *longitudine incommensurabiles: Ac proinde si à Rationali* BD, *detrahatur* CD, *Rationalis potentia tantum commensurabilis;* f *erit reliqua* CB, *Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*



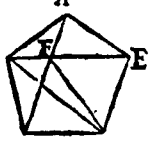
d 3. tertij dec. e 6. dec. f 74. decimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. VII.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint; Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonū esse

æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD: & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ BF, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD, & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; *a* erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; *b* Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD: Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi: *c* Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; *d* erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera AF, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, trianguli FCD: & basis communis FD; *e* erunt & anguli dictis lateribus contenti GED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi æquales. Æquales igitur sunt toti anguli AED, BCD: Ac proinde cum angulo AED, ostensus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE: erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.



a 4. pri.
b 5. pri.
c 4. pri.
d 6. pri.
e 8. pri.

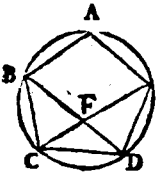
SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD: & anguli quoque ipsis contenti, æquales, ex hypothesi: *f* Erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales: *g* Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE: erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D: Ac proinde, vt iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

f 4. pri.
g 5. pri.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæc extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, D, rectæ DA, CA, se



CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni. *a* Descripto enim circulo circa pentagonum; *b* erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, CB, trianguli DCB; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi: *c* Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales: ac proinde cum in triangulo CDE, duo anguli ECD, EDC, sint æquales, *d* & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: *e* Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt: *f* Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. *g* Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBE, CDB, triangulis BCD, æquales duobus angulis DCF, EDC, trianguli CFD. *h* Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. *i* Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD: Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum DF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. quarti. b 28. tertij. c 4. primi. d 32. primi. e 33. sexti. f 6. primi. g 27. tertij. h 32. primi. i 4 sexti.

SCHOLIVM.

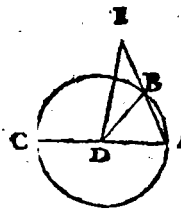
FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est. BD, parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum. k *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus simul rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales:* l *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod erat propositum.*

k 22. tertij. l 28. primi.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectum adda-



tur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diametra AC, coniungantur; rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruples erit arcus AB. *a* Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) *b* erunt & anguli BDE, BED, æquales: *c* quibus cum æqualis sit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: *d* Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. *e* Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC, erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensum fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD, *f* erunt triangula ADE, ABD, æquiangula *g* Igitur erit vt EA, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis ad BA: Atq; idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.

a 33. *sex.* *b* 5. *pri.* *c* 32. *pri* *d* 5. *pri.* *e* 32. *pri* *f* 38. *pri.* *g* 4. *sex.*

SCHOLIVM.

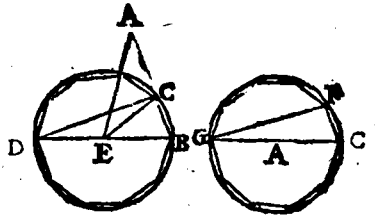
QVIA verò demonstrauimus ad propos 5. huius lib. si minus segmentum linea diuisa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum secari quoq; extrema & media ratione, eiusq; segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonstrabimus Videlicet.

SI

SI linea diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB, *diuisa in* C, *extrema & media ratione, sitque primum* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Dico minus segmentum* CB, *esse eiusdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim* BC, *in circulo, ita vt* CA, *extra circulum cadat. Et ducta ex* B, *per centrum* E, *diametro* BED, *connectantur recta* EA, EC. *Quia ergo est, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB: *& est* AC, *latus hexagoni æquale semidiametro* EB, *ex coroll. propos. 15. lib. 4. Erit quoq; vt* AB, *ad* BE, *ita* EB, *ad* BC, *ideoque triangula* ABE, EBC, *æquiangula erunt, cum habeant latera circa communem angulum* B, *proportionalia: eritque angulus* A, *angulo* BEC, *æqualis. Rursus quia latera* CA, CE, *æqualia sunt, nempe latera hexagoni;* b *erunt anguli* CAE, CEA, *æquales; quibus cùm æqualis sit externus* BCE, *erit* BCE, *duplus anguli* A: d *Est autem angulo* BCE, *angulus* CBE, *ob æqualitatem laterum* EB, EC, *æqualis. Igitur &* CBE, *duplus erit anguli* A; *Ac proinde duo anguli* BCE, CBE, *simul quadrupli erunt eiusdem anguli* A. e *Cùm ergo angulis* BCE, CBE, *æqualis sit externus* CED; *erit quoque angulus* CED, *eiusdem anguli* A, *& propterea angulo* BEC, *qui æqualis ostensus est angulo* A, *quadruplus.* f *Quare & arcus* CD, *quadruplus erit arcus* BC; *Ac proinde arcus semicirculi* BCD, *eiusdem arcus* BC, *quintuplus existet. Ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus* BC. *Quapropter recta* BC, *latus est decagoni.*



a 6. sex.

b 5 pri.

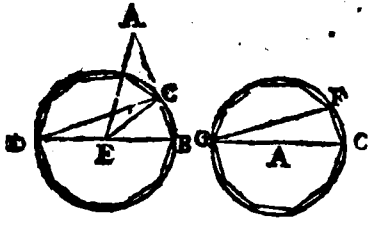
c 32. primi.

d 5. pri.

e 32. primi.

f 33. sex.

SIT deinde ☾B, *minus segmentum, latus decagoni circuli* BCD. *Dico maius segmentum* AC, *esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus* BC, *in circulo* BCD; *ducaturq; diameter* BED. *Deinde inter eundem* AC, *describatur circulus* CFH, *cuius diameter* ☾AG; *eritq; ex coroll propos. 15 lib. 4.* AC, *latus hexagoni circuli* CF. *Quoniam igitur* AB, *secta est in* C, *extrema ac media ratione, estq; maius segmentum* AC, *latus hexagoni circuli* CFG: *erit vt iam ostensum est, minus segmentum* CB, *latus decagoni eiusdem circuli* CFG, *Describatur ergo in circulo* CFG, *decagonum æquilaterum, & æquiangulum* CFG: *Item in circulo* BCD: *decagonum æquilaterum, & æquiangulum* BCD: *erunt q; latera* BC, CF, *inter se æqualia. Quoniam verò, si cen-*



si connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, sunt æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistant arcubus similibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoq; anguli BCD, CFG, in semicirculis æquales, a nimirum recti: b Erunt quoque latera BD, CG, inter se æqualia Quamobrem cum diametri BD, CG, sint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde cum recta AC, sit latus hexagoni circuli CFG, erit quoque eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod est propositum.

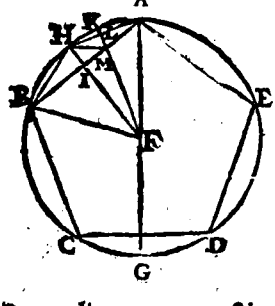
a 31. tertij.

b 26. primi.

X. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

In circulo ABCDE, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vna cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta EB. Diuiso deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, secans rectam AB, in I: eritque recta AH, latus decagoni, & EF, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, secans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniam igitur arcus AH, BH, æquales sunt; c erunt & anguli ipsis insistentes AFH, BFH, æquales. Quare cum latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia sint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipsi contenti æquales quoque; d erunt & bases AI, BI, æquales & anguli AIF, BIE, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus AB, DG, AEDG, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquentur arcus CG, DG, inter se æquales, ideoque erit arcus CG, dimidium arcus CD. Est autem & arcus AH, dimidium arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales sint: erunt quoque eorum



c 27. tertij.

d 4. primi.

torum dimidii arcus CO, AH, æquales; Ac proinde cùm arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales sunt, & est arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, eiusdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquè multiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH: *a* Ac propterea totus arcus BG, duplus quoq; erit totius arcus BK, *b* & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: *c* Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; *d* Ac propterea triangula ABF, FBM, cùm habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; *f* ideoque rectangulum sub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 1. quinti.
b 33. sexti.
c 20. tertij.
d 32. primi.
e 4. sexti.
f 17. sexti.
g 4. primi.
h 5. primi.
i 32. primi.
k 4. sexti.
l 17. sexti.
m 2. secundi.

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia sunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: *h* Est autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia fiat. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. *k* Quamobrem erit vt AB, ad AH, ita AH, ad HM; *l* ideoque rectangulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostensum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarum BF, AH; *m* At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

(HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quemcunque bifariam, diuidere quoq; rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademq; in cæteris est demonstratio.)

COROLLARIVM II.

(PERSPICVVM quoq; est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductum diuidere & arcum, quē latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppositum CD, subtendit, bifariam. Quare ex prefato corol. cum transeat per centrum, secabit quoq; latus CD, bi-

CD, bifariam & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua una eademque operatione in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusq; demonstrationem in hunc locum distulimus; pausis nunc à nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, eiq; æqualis abscindatur EF, adsumaturque recta AF. Dico rectam AF, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD secta sit bifariam in E, eique addita DF, a erit rectangulum sub CF, DF, una cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF, est æqualis. b Est autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum sub CF, DF, una cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarum AD, DE. Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc est, quadrato rectæ CD. c Quamobrem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF, propterea quæ recta CF, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. d Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, una cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli; e Est autem eiusdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF: erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF: ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.

a 6. sec.

b 47. primi.

c 17. sexti.

d 10. ter vsjdem.

e 47. primi.

XII. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem: describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secentq; AG, latus CD, in I, connectanturq; rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in

K. Ab-

K. Abscindatur quoq; ex semidiametro FH, quarta eius pars FL: item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis: erunt quoque FL, BF, illi commensurabiles: cum sint eius partes aliquotæ, Rationales: Atque idcirco & tota BL, composita, *a* cum sit commensurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.

a 16. decimi.

RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat arcum AC, bifariam in B: secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I. bifariã, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI. AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, *b* æquiangula inter se erunt. *c* Quamobrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, siue ad FH, ipsi FA, æqualem. *d* Vt autem CA, ad FH, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL: & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL; *e* Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia verò si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) *f* maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD; *g* Erit quadratum rectæ compositæ ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, *h* ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL. Ac proinde rectæ KL, FL, cõmensurabiles quoque erunt, saltem potentia; Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. primi. *c* 3. sext. *d* 15. quinti. *e* 22. sexti. *f* 8. tertij. *g* 1. tertij. *h* 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25 qualium 1. est quadratum rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5 25. *i* habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. est quadratum rectæ FL, talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25 est quadratum rectæ BL, talium 5. est quadratum rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionẽ non habent, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum,

i 20. sexti.

dratum (vt patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) *a* Erunt rectæ BL, KL, longitudine incommensurabiles: ideoq;, cum ostentæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali BL, dematur Rationalis KL, potentia tantum commensurabilis; *b* erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit KL.

a 9. *dec.*

b 74. *decimi.*

IAM vero recta BL, posit, plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum KL, & N: Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ BL, talium 1. fuit quadratum rectæ KL. Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. *c* Quare commensurabilia erunt: propterea quæ rectæ ipsæ BL, & N, commensurabiles, saltem potentia; Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quòd proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) *d* Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali BH: (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) posit quæ plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est: Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

c 6. *dec.*

d 9. *dec.*

POSTREMO quia recta AB, est media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quòd triangulum ABH, habeat angulum BAH, rectum, à quo ducta est AK, ad basim perpendicularis.) *f* erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo sub BH, BK. Quocirca cum superficiem contentam sub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, posit recta linea AB: *g* Erit AB, linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

e 31. *ter.*

f 17. *sex.*

g 95. *decimi.*

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN cir-

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum eſſe, quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex coroll. 2. propoſ. 10 huius lib. arcum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariã quoq;, & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus BC, ſit tertia pars totius peripheriæ: erit arcus BE, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoq; coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. li. 4 Quod etiã ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli: arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus BE, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta BE, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4.

a Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum AB, BE, b quod angulus ABE, in ſemicirculo rectus ſit: Eſt autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla ſit lineæ BE: erunt quadrata rectarum AB, BE, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ BE: Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum eſt quadrati rectæ BE, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 47. primi
b 31. tertij

COROLLARIVM. I.

(SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli aquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cum latus AB, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri AD, poſito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex ſcholio propoſ 4 li. 2. quadruplum eſt quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. vt eſt AE, ad AB, ita ſe habet AB, ad AF; erit quoq; latus trianguli aquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad baſin demiſſa potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib 14. propoſ. 12.)

COROLLARIVM II.

(HINC facilè etiam colligi poteſt, ſemidiametrum DE, bifariam ſecari in F, à latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplũ ſit quadrati rectæ BE; ſi ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. c Eſt autem quadratum rectæ

c 47. primi

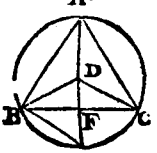
BE, aquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partiũ 4, erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratũ rectæ BF (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratũ rectæ BE, hoc est, quadratum rectæ DE, sibi aquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex scholio propos. 4. lib. 2. rectæ DE, dupla erit ipsius FE. Quocirca DE, bifariam secatur in F.)

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito:

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum aquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, secari à latere BC, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; cum latera AB, AD, aqualia sint lateribus AC, AD, trianguli CAD, & bases BD, CD, aquales quoq; : a Erunt anguli BAD, CAD, aquales. Quod est primum.



a 8. primi.

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, aqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti aquales ostensi: b Erunt & bases BF, CF, & angulo ad F, aquales, ideoque recti. Quod est secundum.

b 4. primi.

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse aquales; c erunt & arcus BE, CE, aquales. Quare cum BEC, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit BE, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD, aqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. d Igitur anguli BDE, BED, aquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, aquales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; e Erunt & latera DF, EF, aqualia. Quod est tertium.

c 26. tertij.

d 5. primi.

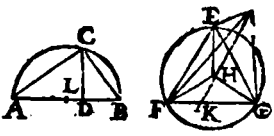
e 26. primi.

XIII. **PROBL. 1 PROPOS. 13.**

PYRAMYDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT

SIT datæ sphæræ diameter AB, circa quam semicirculus describatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta DG, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur EFG, adiungantur q; rectæ HE, HG, quæ singulæ æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi HE, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum contentum quatuor triangulis FEG; IEF, IFG, IEG, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam enim latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipsis contenti, recti ex hypothesi, & 3. defin. 11. a erit basis AC, basi IE, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC, æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt AD, ad DC, ita quadratum rectæ AD, ad quadratum rectæ DC; & componendo, vt AB, ad DB, ita quadrata rectarum AD, DC, simul ad quadratum rectæ DC: b Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectæ AC. Igitur erit quoq; vt AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratum rectæ DC: Ac proinde cum AB, sit ipsius DB, tripla, erit quoq; quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis sit ipsi DC: c Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit: & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum rectæ AC, ostensa quoq; sit æqualis rectis IE, IF, IG: erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu, Tetraedrum, cuius basis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter AB: & diametrum sphæræ AB, potentia sesquialteram esse lateris EF, vel AC.



EXTENDATVR perpendicularis IH, vsq; ad K, vt sit HK, ipsi DB: & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH, HE, HK: erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cum HE, sit ad IK, perendicularis & media proportionalis inter IH, HK, semicirculus circa IK, descriptus in plano rectarum IK, HE, transibit per E, vt mox ostendetur: Eodemque

a 4. prim.

b 47. primi.

c 12. tertij.

argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutũ Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehenderitur idem Tetraedrum ſphæra data.

QVONIAM verò tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, talium 2. ſit AD. Igitur & quadratum rectæ AB, ſeſquialterum erit quadrati rectæ AC: Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat circa D, vel vltra, nempe per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.

à 17. ſexti.

HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum

ſcriptum circa IK, *in plano rectarũ* IK, HE, *tranſire per* E, *cum* HE, *ſit ad* IK, *perpendicularis, & media proportionalis inter* IH, HK.

COROLLARIVM I.

(*HINC facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſin pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis* EF, *erit quadratum rectæ* EF, *talium partium 6. qualium 9. eſt quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratum rectæ* EF, *talium partium 2. eſt quadratum rectæ* HE, *a quod quadratum rectæ* EF, *triplum ſit quadrati rectæ* HE. *Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ* HE: *Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri* HE, *cum proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2.*

I.

a 12. ter tijdoc.

COROLLARIVM II.

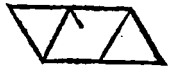
RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ACB, erit q L, *centrum quo* q *ſphæra. Dico rectam* LD, (*quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin* EFG, *ducitur perpendicularis: cum AD, æqualis ſit ipſi* IH, & *ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ*) *eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB: Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.*

SIMILITER altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. Vt hic apparet 9. 6. 4.)

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, vt hac figura indicat, facilè ex ipſis rectè inter ſe complicatis componatur Tetraedrum, ſecundum totam ſoliditatem. Hanc verò praxin, & ſequentes quatuor, quibus re-



liquæ quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

XV. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris istius octaedri.

SIT sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque
a 4. pri. rectæ AC, BC, *a* quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuo secantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales; cum sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. lib. demonstratum est. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K. & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH: LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus FI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3.
b 8. pri. lib. 11. At vero EIG, *b* eo quod sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH,
c 4. pri. GH,) *c* Erit & basis EK, basi BH, æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diametri AB, quæ nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL: (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semi-

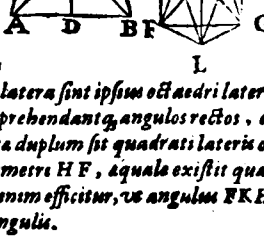
semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB, (Nam cum rectæ AC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

QVIA vero quadratum rectæ AB, *a* æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt: erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaq; octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, quæ & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

a 47. primi.

COROLLARIVM I.

(EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atq; proinde, cum IK, recta sit ad lineas EG, HF: b recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsius ductum: c ideoq; ad plana KELH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Imò eadem ratione, vt pauciis rem complectar, erit tria plana EFGH, KELH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt: Qua quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantq; angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri FK, KH. d Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademq; est ratio de cæteris angulis.



b 4. vndecimi.
c 8. vndecimi.
d 48. primi.

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines deniq;, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

COROLLARIVM. III.

(SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. a Quotâ igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ.

a 13. tertijdec.

b 14. tertijdec.

b Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri sphæræ. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.)

COROLLARIVM. IV.

(DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato EI, GK, recta EK, rectæ GL: c Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse)

c 15. undecimi.

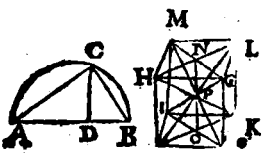
SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturq; vt hac figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totã soliditatẽ, vt ait Albertus Durerus.

XIV. PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM constituere: & sphæra complecti, qua & priores figuras; & demonstrate, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratũ constituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoq; ipsi BC, quarũ extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniã ergo rectæ EI, FK, ad planum EF, GH, rectæ sunt; & erũt rectæ EI, EK, parallelæ. Sunt autẽ & æquales



d 6. undecimi.

& æquales, quod vtraq; æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF.
a Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelo- *a* 33. pr.
grammum est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales
sint ipsi EF, omnes quatuor lineæ æquales existunt: *b* Sunt autem *b* 34. pr.
& omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppo-
sitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Ea-
dem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque id-
circo & IKLM, quadratum erit, *c* cum simile sit & æquale quadra- *c* 24.
to opposito EFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, *vndec.*
d quod eius plana opposita sint parallela, nimirum per lineas pa- *d* 15.
rallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem *vndec.*
dico comprehendi sphæra diametri AB. Sint enim planorum op-
positorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HI; per quas
ducantur plana EKLH, FIMG, *e* Quia igitur tam planum E- *e* 28.
KLH, quam FIMG, cubum bifariam secat; vtrumque per cen- *vndec.*
trum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum vi-
delicet P, in quo ex coroll. eiusdem propos. se mutuo quoque bifa-
riam diuidentomnes diametri cubi; Ac propterea communis pla-
norum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet.
Quia vero plana EKLH, FIMG, recta quidem sunt, (Cum enim
HE, perpendicularis sit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM,
EK; *f* perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad *f* 4. *vn-*
rectam EK, ex defin. 3. lib. 11 Rectus ergo angulus est HEK. Ea- *decimi.*
dem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec non
& anguli in plano FIMG. Rectangula ergo sunt plana EKLH,
FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus al-
terius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æqua-
les, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidia-
metri PE, PL, PH. PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare
semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus,
fixa manente diametro EL, sphæram describet per omnes cubi
angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ dia-
metri AB, ita demonstrabitur.

CVM quadratum rectæ EK, *g* æquale sit quadratis æqualibus *g* 47.
rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ *primi.*
EF, hoc est, quadrati rectæ KL; Erunt quadrata rectarum EK, KL,
tripla quadrati rectæ KL. *h* Est autem quadratis rectarum EK, *h* 47.
KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus *primi.*
in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum
erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero eius-
dem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam
tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt ex coroll. propos. 8.
lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. li. 6 vt est AB, ad BD, ita
erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo

AB, ipsius BD, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum. Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt: ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt.

QVIA vero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL, manifestum est, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

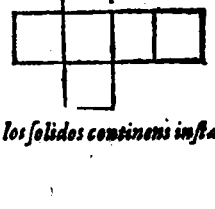
COROLLARIVM. I.

EX demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseq; mutuo bifariam in centro sphæræ secare. Atq; eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseq; mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML: EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP a 29. primi. *æquales sunt duob. angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM,* b 16. vndecimi. *quæ parallelæ sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML,* c *& angulus OPF, æqualis est opposito ad verticem NPM) Sunt autem* c 15. pri. *& latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eadem q; est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.*

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis d 13. tertij dec. *laterum tetraedri & cubi simul sumptis.* d *Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri:* e 15. tertij dec. *Qualium vero partium 9 est idem quadratum diametri, talium 3 est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæra describto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero BC,* f 47. primi. *f Perspicuum autem est, diametrum sphæræ AB, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.*

SCHOLIVM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, diffonantur q;, vt hac figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quadam solida octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiusplam, vt constat. IGO-

PROBL. 4. PROPOS. 16. XVI.

ICOSAEDRVM constituere: & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

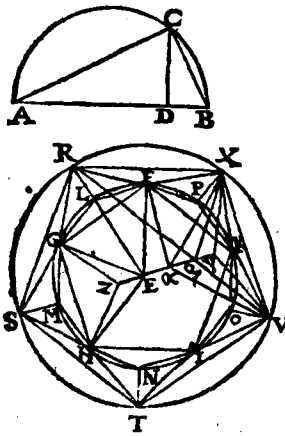
SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta: At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta CD, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E: *a* in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro, EF, seu rectæ BC. Eruntque omnes inter se æquales: *b* sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR, EM, QS: EN, QT: EO, QV: EP, QX, (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus) *c* binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC, *d* Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto, eadem que ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem EGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum: nec non planum per QV, QX, & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano: Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. *e* Quia igitur LR, PX, æquales, & parallelæ: si concipiatur duci recta LP: *f* erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ: *g* Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Auferautem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST,

a 11. *quarti.*
b 6. *vndecimi.*
c 33. *primi.*
d 15. *vndecimi.*
e 6. *vndecimi.*
f 33. *primi.*
g 28. *tertij.*

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est lateri hexagoni circuli FGHIK, & est LF, latus decagoni; a erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF:

a 10. *tertij &c.*

b 47. *primi.*



b Est autem eisdem quadratis æquale quadratū rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; eum eorū omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri.

Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY. EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli: c erit quadratū lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; d Est autem eisdem quadratis æquale quadratūrectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostenta, sitque EQ ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum rectæ ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY. rectæ XV, æqualis. Eodemq; modo eidem XV, æqualis ostendetur VY, Ac proinde triangulū VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus. si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV,

c 10. *tertij &c.*

d 47. *primi.*

TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quæ omnia priorib. quindecim æqualia erunt, eandē ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorū latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque bases αX, αF, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIK: & EZ, latus decagoni eiusdē circuli: c erit QZ, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ, d quintuplum potest eius, quod ex Eα, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius Eα: Erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex

a 4. pri.

b 4. pri.

c 9. tertiidec.

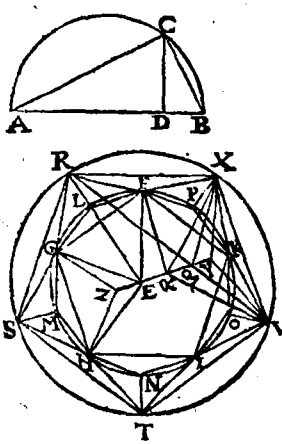
d 3. tertiidec.

e 47. primi

ZY, ex centro α per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæræ diametri AB.

a 15. quinti. b 22. sexti.

α CVM enim sit vt α Z, ad α E, ita Y Z, dupla ipsius α Z, ad QE, duplam ipsius α E; b Ac propterea vt quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ Y Z, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ α Z, octuplum quadrati rectæ α E; erit quoque quadratum rectæ Y Z, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ B C; quod recta QE, æqualis sit positæ semidiametro E F, hoc est, rectæ B C; Est autem & eiusdem quadrati rectæ B C, quintuplum quadratum rectæ A B; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt A B, ad BD, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC,) Quadrata igitur rectarum Y Z, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ Y Z, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.



QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineã Irrationalem, quæ Minor vocatur) potestq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi æqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. c erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB. EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, d Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrũ igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras; demonstrauimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. Quod erat faciendum.

c 6. decimi.

d 11. vel 13. eiusdem.

COROL.

COROLLARIVM. I.

(EX dictis infertur, sphæra diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est semidiametri EF.)

COROLLARIVM II.

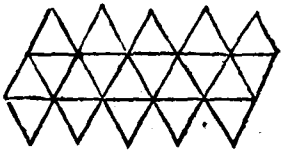
(ITEM manifestum est, sphæra diametrum esse compositã ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.)

COROLLARIVM. III.

(CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus HL, IP: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas: Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.)

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrũ, secundũ totã solidatẽ, si rite inter se aptentur.



PROBL. 5. PROPOS. 17. XVI.

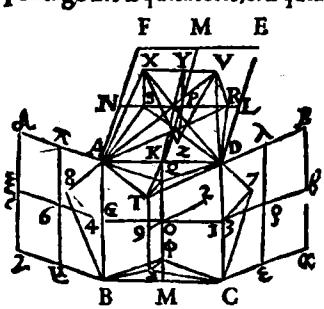
DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit cõmunis horum sectio recta AD, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedẽtibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipsi basi, EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius libri. Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) Diuisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octauæ

a 15. undec.

proble-

Problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, VR, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX: Dico ATDVX, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonū ATDVX, sit in vno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectæ a ipsę erunt parallelæ: Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ tectæ PL, PN, æquales sint. *b*) erunt q. o ‖ contingentes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ: *c* Est autem & AD, eidem RS, siue LN, parallela, eo quod AM, DL. parallelæ sunt & æquales. *d* Igitur & AD, VX. parallelæ sunt: *e* Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodē cum ipsis erunt plano, ideoque trapezium ADVX, in vno existet *plano*: Est autem triangulum ATD, in vno plano. *Dico quod & in eodem* plano cum trapezio ADVX. Ex *P*, namque ducatur PY, parallela ipsi RV, *f* quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta sit RV: Et connectantur rectæ KT, KY. Quoniam igitur est vt OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionem rectæ OK: Est autem KP, ipsi OK, æqualis; (*sunt enim dimidia latera cubi*) & PY, ipsi OQ. (cum æqualis sit ipsi RV, quæ posita fuit æqualis ipsi OQ. maiori segmento;) Erit quoque vt KP, ad PY, ita OQ, hoc est, QT, illis æqualis, ad QK. Quare cum triangula PKY, QTK, duo latera habeāt duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulū K, composita, *g* ita vt homologa latera sint parallela, nempe PK, & QT, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum ABCD; & PY, QK, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum ADEF: *h* Erunt reliqua latera KY, KT, in recta lineam collocata, *i* Ac propterea recta TY, in vno erit plano, ideoque planum ATD, & planum ADVX, vnum planum constituent per rectas TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno existit plano.



a 6. undecimi.
b 33. pr.
c 33. pr.
d 9. undecimi.
e 7. undecimi.
f 8. undecimi.
g 6. undecimi.
h 32. sexti.
i 2. und.

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia sint lateribus AK, KQ. trianguli AKQ. (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, segmenta minora rectarum æqualium sectarum) & anguli ANS, AKQ.

AK Q, recti; si ducatur recta A Q, erunt bases A S, A Q, æqua- a 4. primi.
les. Rursus cum latera A S, S X, trianguli A S X, sint æqualia late-
ribus A Q, Q T, trianguli A Q T. (Nam rectæ A S, A Q, ostentæ
sunt æquales, & S X, Q T, sunt segmenta maiora rectarum æqua-
lium sectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3. lib. 11. b b 4. primi.
Erunt quoq; bases A X, A T, æquales. Quod si ducatur recta D Q,
ostendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; si vero
ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, esse æqualem. Sunt i-
gitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V, æqualia: qui-
bus etiam æquale ostendemus reliquum V X, hac ratione. c Qua- c 4. tertii
drata rectarum P N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ P S, hoc dec.
est, quadrati rectæ S X: Est autem quadratum rectæ P N, æquale
quadratum rectæ A N. Igitur & quadrata rectarum A N, N S, si-
mul tripla sunt quadrati rectæ S X. d Cum ergo quadratis recta- d 47. primi
rum A N, N S, æquale sit quadratum rectæ A S; erit quoq; qua-
dratum rectæ A S, triplum quadrati rectæ S X, Ac proinde qua-
drata rectarum A S, S X, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ
S X. e Est autem quadratis rectarum A S S X, æquale quadratum e 47. primi.
rectæ A X. Quadratum ergo rectæ A X, quadruplum quoq; erit
quadrati rectæ S X, hoc est, quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati
rectæ X Y; f Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. Cum igitur & f 34. primi.
quadratum rectæ V X, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ
X Y, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod V X. dupla sit ipsius X Y; E-
runt quadrata rectarum A X, V X, æqualia; Ac proinde rectæ ipsę
æquales. Quare cum & X A, A T, T D, D V, ostentæ sint esse æ-
quales; æquilaterum est pentagonum A T D V X.

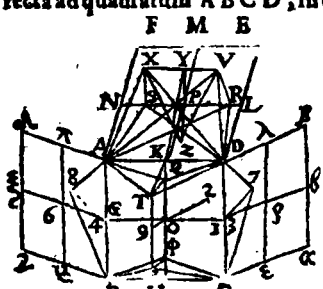
QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Du-
ctis rectis A R, A V; cum P N, secta sit in S, extrema ac media ra-
tione, eique addita P R, æqualis maiori segmento P S; g erit quo- g 5. tertii
que N R; secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmen- dec.
tum erit N P. h Quadrata igitur rectarum N R, R P, simul tripla h 4. tertii
sunt quadrati N P, hoc est, quadrati rectæ A N: Est autem qua- dec.
dratum rectæ R V, æquale quadrato rectę R P. Ergo & quadrata
rectarum N R, R V, tripla sunt quadrati rectæ A N; Ac proinde
quadrata rectarum N R, R V, A N, quadrupla sunt eiusdem qua-
drati rectæ A N. i Sunt autem quadrata rectarum N R, A N, æ- i 47. primi.
qualia quadrato rectæ A R. Igitur & quadrata rectarū R V, A R,
quadrupla sunt quadrati rectæ A N. k Cum ergo quadratis re- k 47. primi.
ctarum A R, R V, æquale sit quadratum rectæ A V; Erit quoque
quadratum rectę A V, eiusdem quadrati rectæ A N, quadruplum.
At vero eiusdem quadrati rectę A N, quadruplum est quadratum
rectæ A D. ex scholio propos. 4. lib. 2. quod A D, dupla sit ipsius
A N. Æqualia igitur sunt quadrata rectarum A V, A D, ideoque
& rectæ A V, A D, æquales. Simili argumento, ductis rectis D S,

DX, ostendemus DX, D A, æquales esse: ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera T A, TD, trianguli T A D, æqualia sunt lateribus D V, VX, trianguli DXV: & bases AD, DX, æquales quoq; a erunt & anguli A T D, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus D V X, æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero A T D V X, tres habeantur anguli æquales A T D, D V X, A X V, b ipsum erit æquiangulum.

a 8. pri.

b 7. tertii decimi.

Quod si sumantur alia duo cubi quadrata C α β D, B γ δ A, recta ad quadratum A B C D, in communibus sectionibus C D, A B, quorum singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, l, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis inter se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde O H, O K, ρ L, σ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ i, Q T, 37, 48, æquales segmentis maioribus φ O, Q O, 3 ρ, 46, coniungunturque rectæ T 2, 2 C, C 7, 7 D, D T, T A, A 8, 8 β, B 2, demonstrabimus eadem ratione pentagona T 2 C 7 D, T 2 B 8 A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori A T D V X, ob communia latera T D, T A. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, A B, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus T D, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera: constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.



INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum A D E F, & eius oppositum, planis ductis per rectas K M, L N. Item planum A B C D, & eius oppositum, planis per rectas G I, H K. ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana A D E F, A B C D; c erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum Y P, recta sit ad planum A D E F, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas K M, L N, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum A β γ D, erigatur perpendicularis φ O Z; erit ipsa,

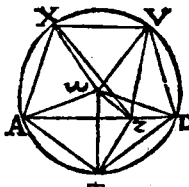
c 19. undec.

commu-

communis sectio planorum, quæ per rectas G I, H K, ducuntur. a Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant: secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ: Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta Z X. b Quoniam parallelæ sunt K P, O Z, quod vtraq; recta sit ad planum A B C D: Item parallelæ sunt O K, Z P, quod vtraque recta sit ad planum A D E F: erit P K O Z, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea P Z, æqualis erit ipsi K O, hoc est, ipsi N P, dimidio lateri cubi: Est autem & P Y, ipsi P R, æqualis. Tota ergo Z Y, toti N R, æqualis erit. c Quare cum quadrata rectarum N R, P R, simul tripla sint quadrati rectæ N P, quod N R, in P, secta sit extrema & media ratione: erunt quoque quadrata rectarum Z Y, P Y, hoc est, quadrata rectarum Z Y, Y X, simul tripla quadrati rectæ P Z: (Est enim X Y, æqualis ipsi P S, hoc est, ipsi P Z.) d Est autem quadratis rectarum Z Y, Y X, æquale quadratum rectæ Z X. Igitur & quadratum rectæ Z X, triplum erit quadrati rectæ Z P, hoc est quadrati dimidii lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidii lateris cubi triplum est quoq; quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris: f Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidii lateris. g Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidii lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ Z X, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi: Ac propterea Z X, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta Z V, semidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera Z Y, Y X, trianguli Z Y X, æqualia sint lateribus Z Y, Y V, trianguli Z Y V, & anguli contenti recti. (Cum enim P Y, sit perpendicularis ad L N, erit quoque eadem ad sibi parallelam V X, perpendicularis.) h Erunt bases Z X, Z V, æquales: Sunt autem & Z A, Z D, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus A T D V X, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ

a 39. undec.
b 6. undecim.
c 4. tertiidec.
d 47. primi.
e 15. quinti.
f 22. sexti.
g 25. sertii decimi.
h 4. pri.

perpendicularis demittatur Z ω, connectanturq; rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. a Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quod rectæ Z A, Z X, ostensę sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoq; rectæ ipsæ ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, æquales, quod & rectæ Z V, Z D, æquales sint ostensæ rectis Z A, Z X. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectę lineæ æquales, quam duæ, b punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt quadratis rectarum Z ω, ω T. c Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; propterea q; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



a 47. primi.

b 9. ter.

c 47. primi.

d 15. quinti. POSTREMO cum sit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: d erit quoque vt N L, dupla ipsius N P, ad R S, duplam ipsius P S, ita R S, duplam ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L, nimirum ad duplam ipsius S N. Si igitur cubi latus N L, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R; Sed N L, sæca ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius) e Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstravimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

e 6. tertiidec.

COROLLARIVM I.

Cum ergo demonstratum sit, recta L N, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S. Sit autem L N, æqualis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secerit extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROL-

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis A V, D X, subtendentibus angulos X. & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, a facit maius segmentum latus pentagoni: b propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ. a 8. tertii dec. b 5. tertii dec.

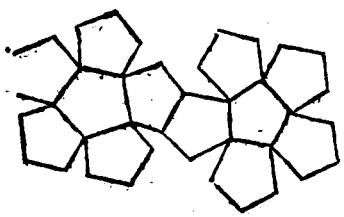
COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nã duo ex dictis lateribus sunt V X, T Z, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi E F, A B: aliaque quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturq; ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ Y Z, 9 Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo intersecant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ P Z, O Z, æquales sint dimidio lateri cubi, & Y P, 9 O, æquales maioribus segmentis æqualibus P S, O Q; Erunt totæ Y Z, 9 Z, æquales. Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus est, cum opponatur recto O K P. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IV.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum Z Y, Y P, tripla ostensa sint quadrati rectæ P Z: erit Z Y, secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit P Z, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt Z Y, ad Z P, ita Z P, ad P Y: c ideoque vt dupla ipsius Z Y, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius Z P, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplam ipsius Z P, ad duplam ipsius P Y, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. c 15. quinti.

SCHOLIVM.

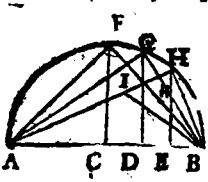


QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se complecentur.

XVIIJ. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figuratum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæra diameter A B, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita vt B D, sit ipsius pars tertia: In E, denique ita, vt B E, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa A B, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsa A B, perpendiculares C F, D G, E H: connectanturque rectæ A F, B F, A G, B G, A H, B H. Post hæc ex H A, abscindatur H I, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est B H, connectaturque recta B I. Postremo B C, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum B K.



QVO igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum. dico A G, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri: A F, latus Octaedri: B G, latus cubi: B I, latus Icosaedri: B K, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim A G, media proportionalis est inter B A: A D, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll propos. 20. eiusdem lib. vt B A, ad A D, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A G. Est autem B A, ipsius A D, sesquialtera: cum talium partium 2. sit A D, qualium 3. est B A Igitur & quadratum rectæ B A, sesquialterum est quadrati rectæ A G: a A C, proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri: erit A G, latus Tetraedri.

a 13. tertii decimi.

RVRSVS quoniam A F, est media proportionalis inter B A, A C, ex eodem coroll propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt B A, ad A C, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A F; ex adducto coroll. propos. 20. libr 6. Est autem B A, ipsius A C, dupla: Erit quadratum rectæ A B, duplum quadrati rectæ A F. b Quare cum diameter sphæræ

b 14. tertii decimi.

ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

DEINDE cum BG ſit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipſius BD, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. a Quocirca cum ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi. a 15. tertiæ dec.

PRÆTEREA quia, ex eiſdem corollariis, BH, eſt media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH; Eſt autem ex conſtructione AB, ipſius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter ſphæræ potētia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis ex coroll. 1 propoſ. 16 huius lib. Erit BH, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli; Eſt autem HI, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. b Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, ſimul; Ac proinde c cum quadratum rectæ BI, æquale ſit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiuſdem. d Quam ob rem BI, latus eſt Icoſaedri. b 10. tertiæ dec. c 47. pr. d 16. tertiæ dec.

DENIQVE cum BG, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius ſegmentum latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 4. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

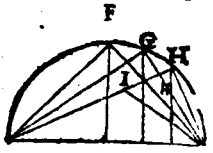
QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratū lateris Tetraedri: talium vero 3. quadratum lateris Octaedri: & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quam numerus ad numerum. e Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ ſunt commenſurabiles: atque adeo cū diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt

Diamet.	6.	
Tetraed.	4.	
Octaed.	3.	
Cub.	2.	

e 6. def.

a 9. dec. constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. a Erunt huiusmodi lineæ, nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demõstratum est nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum laterib priorum, cum latera priorum sunt diametro sphæræ cõmensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.



SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

b 104. decimi.
c 106. decimi.
d 16. tertij dec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri manus sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus deniq; Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM

EODEM modo non ostendemus, latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1.3.9 Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ AB, talium 3. est quadratum rectæ BG; quod illud huius triplum sit, Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia sint quadrato rectæ BG. Igitur si auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. reinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9 habent proportionem quintuplam, minor quam 2 Quare quadratum rectæ GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, maior quam recta BH. Rursus quia diameter sphæræ, AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, maius esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeo cum quadratum rectæ AB, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD. erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB. Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI. dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quam duæ tertiæ, hoc est, quam AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis recta-

a 20. *sexti.*

b 15. *tertii dec.*

c 10. *quinti.*

d 47. *quinti.*

rum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoq; erit quadrato rectæ BI, Ac proinde recta BG. nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: a Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK (Nam cum sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; b erit quadratum rectæ BK. æquale rectangulo, sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque ideirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH. (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnum quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus: forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta BK: Ac propterea cum BI, maior sit quam BH, multo maior erit BI, latus videlicet Icosaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

a 2. sex.

b 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter se æqualibus, has fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duobus figuris aliis, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus.

EX

EX quinque, angulus Icosaedri:

EX sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli aquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. a Nam solidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. a 20. undecimi.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod contineat vnum rectum, & insuper recti quintam partem: erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur: Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum: ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes sextas vnius recti: continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus: Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur: neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramus contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI vero quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angu-

angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrum viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagonis contentum.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle, Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quodlibet Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6 numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quodlibet Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, dividendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt ad angulum ſolidum conſtituendum, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3 numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi dividantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati,

fiunt

fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos: octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solidos Tetraedrum (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes, totidemque ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et ſolidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alii vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, *Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, tum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geometria verſatus ſcite ac prudenter indi-*

ter iudices ea, quæ dicturi sumus: Oh eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vita consuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt proœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi adscribuntur: Duo vero subsequentes à plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui solent: in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam: vt hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones vnius in alio: quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuersum disserere proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatum Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quamplurimis theorematibus problematibusque locupletauit: verum etiam integrum librum, qui ordine decimus sextus est, adiunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14 disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facile intelligi potest ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & à Francisco Flussate, ideoque & à nobis discrepant: annotauimus in margine ordinem vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicum tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur: Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidiũ eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur
a 3.tertii. rectæ AC, CG, CF, BF. *a* Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli, BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF;
b 4.primi. Cum igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; *b* erunt baſes CF, BF, æquales;
c 28.tertii. ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiuſdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſunrq; anguli contenti recti;
d 4.primi. *d* erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ ∪CF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit
e 33.ſex. arcus CF. *e* Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli
f 20.tertii. CAF: *f* Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF,
g 32.primi. duplus erit anguli CAF: *g* Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, vt oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium eiuſdem anguli CGF, ideoque æquales erunt
h 6.primi. anguli GAC, GCA; *h* ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atque idcireo è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pen-

in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta haec linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quae ex centro perpendicularis est ad BC, dimidere arcum BC, bifariam in F.

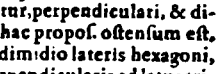
COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam aequalem esse vtrique lineae simul, & ei, quae ex centro ad latus trianguli aequilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiae lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni aequalis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul: Est autem perpendicularis ad latus trianguli aequilateri, ex coroll. propos 12. lib. 13. aequalis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse aequalem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. iv. ij.

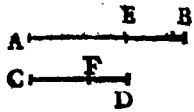
SI binae rectae lineae extrema ac media ratione secentur, ipsae similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binae rectae AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim sit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB, & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD; *a* erit rectangulum sub AB, EB, aequale quadrato rectae AE; & rectangulum sub CD, FD, aequale quadrato rectae CF. Quam ob rem erit vt rectangulum sub AB, EB, ad quadratum rectae AE, ita rectangulum sub CD, FD, ad quadratum rectae CF (est enim vtrobique aequalitatis proportio) Ac propterea, per ea, quae demonstrauimus in scholio propos. 12. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, ad quadratum rectae AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, ad quadratum rectae CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, & quadratum rectae AE, ad quadratum rectae AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, & quadratum rectae CF, ad quadratum rectae CF *b* Sed quod quater continetur sub AB, EB, vna cum quadrato rectae AE, aequale est quadrato lineae compositae ex AB, EB; Et quod quater continetur sub CD, FD, vna cum quadrato rectae CF, aequale est quadrato lineae compositae ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineae compositae ex AB, EB, ad quadratum



a 17. sexti.

b 8. sec.



tum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF, *a* Ac proinde, vt recta composita ex AB, EB, ad rectam AB, ita recta composita ex CD, FD, ad rectam CF: Et componendo vt composita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AF, ita recta composita ex CD, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius CD, ad rectam CF; Et permutando, vt dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita AE, ad CF; *b* Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius GD, ita est AB, ad CD. Erit ergo vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, Ac propterea, cum sit vt tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; *c* erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum vtraque proportio eadem sit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit vt AE, ad EB, sic CF, ad FD, & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

a 2. sec.

b 15. quinti.

c 19. quinti.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

QVONIAM enim d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam*; e *& recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni:* f *fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti recta angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.*

d 9. tertii dec.

e 8. tertii dec.

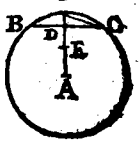
f 2. quartidecimi.

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilatei

lateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta: minus vero segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta AD, ad F, & connexa recta FG, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. arcus BC. nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F, a Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni minus vero segmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum: & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: b Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri: perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse ductæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.



a 9. tertii dec.

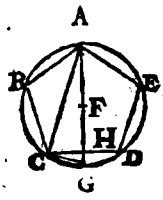
b quarti decimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

iij. iiij.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, bina latera AB. BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per Coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H. erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa CG,



latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla est rectæ FG: erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: a Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla sunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AG, CG, FG, quintupla quadrati eiusdem rectæ FG: b Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

b 10. tertii dec.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

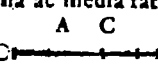
CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. c Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG. &c.

c 3. quarti decimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi AB, d eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum BA: Ponitur



d 9. tertii dec.

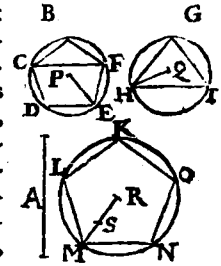
tur autem & AB, secta in C, similiter. *a* Igitur erit vt BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, maius segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; *Ac* propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est AB; erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni. a 2. *quartidecimi.*

ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori segmento AC; *b* eritque tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib 13. AD. minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; *Ac* propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum. b 5. *tertiidec.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

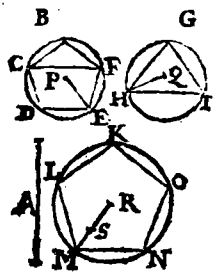
IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, *c* ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoq; quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secetur-



c 13. *tertiidec.*

que RM, extrema ac media ratione in S; *d* eritque maius segmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni Subtendat quoque recta CF, angulum B. pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris d 4. *quartidecimi.*



a 2. quarti decimi.
b 22. sexti.

cubi CF, secti extrema ac media ratione, a erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo per ea; quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM. ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: c Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, d (cum quadrata rectarum CF, &c, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; e sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter BE semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt, Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.

c 10. tertii dec.
d 3. quarti decimi.
e 12. tertii dec.

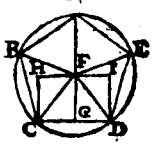
iij. vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari com-

ri comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

Ex centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis exF, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8 lib. 1. cum bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. a Quoniam vero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cuiusliber reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



a 41. primi.

Aliter Facta eadem figuræ constructione, b cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptum æquale triangulo FCD bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD, sumptum sexagies æquale erit superficiei Dodecaedri.

b 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. iij. vij.

Si ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum ſub DE, & BC, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes

trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipſi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum ſub FB, hoc eſt, ſub DE, & BC. a Quoniam vero rectangulum BG, duplum eſt trianguli BDC. atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis. hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triangulo Icoſaedri; Atque adeo idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 41. primi.

b 41. primi.

ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, b cum rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo DBC, ſumpto ſexagieſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigeſies ſumptum æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſuperficies, (repetita figura proxime antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. c Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto; d Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoq; ſumpto: Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecadri, quam hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri. e Quare erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt rectangulum illud, trigeſima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

c 6. quarti decimi.

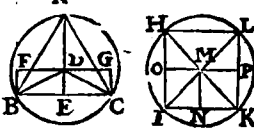
d 7. quarti decimi.

e 15. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetracaedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; in octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi aequale. Sit enim primo triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum a circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, aequale esse superficiei Tetraedri. a Quoniam enim rectangelum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, aequale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aequale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aequilatera ipsi A B C, aequalia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aequale.



a 41. primi.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c Dico rectangulum B G, duodecies sumptum, aequale esse superficiei Octaedri. b Cum enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, aequale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum aequale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptum aequale est superficiei Octaedri.

b 41. primi.

SIT tertio quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula aequalia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, aequale esse superficiei cubi. c Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, aequale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum aequale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum aequale superficiei cubi. Quod est propositum.

c 41. primi.

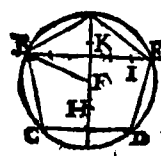
ALITER Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIxL; (sunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, sit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipsi MN) constituent duodecim talia rectangula sui quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

IV. viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint AH: Angulum vero A, subtendens recta BE. secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI, & vna IE, ita vt BI, sint quintupla ipsius IE. Dico rectangulum comprehensum sub AH, BI, æquale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, continet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum sit semidiameter; erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propos. 10 lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, quam KE, tres sextas rectæ BE; atque adeo cum BI, contineat quinque, continebit KI, duas: Ac proinde & KB, ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; *a* atque idcirco rectangulum sub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo sub mediis AF, KB. *b* Est autem rectangulum sub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AF, & eandem altitudinem BK, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta, Igitur & rectangulum sub AH, KI, duplum erit eiusdem trianguli ABF: *c* Est autem & rectangulum sub AH, KI duplum rectanguli sub AH, IE; propterea quod & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam) eademque semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum est trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero sub AH, BI, quintuplum est rectanguli sub AH, IE; quod & basis BI, quintupla sit basis IE, eademque semper altitudo AH.



a 16. sexti. b 41. primi. c 1. sex. d 1. sex.

Igitur

Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH. BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

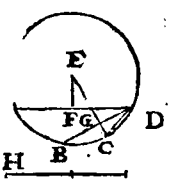
COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. libr. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (*a* comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum FG. bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG. bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti. *a* 5. *quartidecimi.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. IV. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eādem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, *b* circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & trianguli AD: & ex centro E, ducātur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse, vt H, lat⁹ cubi, ad AD, latus Icosaedri: ita superficiem Dodecaedri ad superficiē Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentum est EF, ex scholio propos. 2. huius lib. *c* Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; *d* Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF; æquale erit rectangulo sub mediis BD, EG. *e* Quia vero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum sub BD, EG. (quod est æquale rectangulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulū sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoq;, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiē Icosaedri. Superficies itaque



b 5. *quartidecimi.*

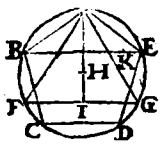
c 2. *quartidecimi.*

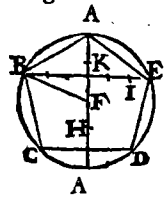
d 16. *sexti.*

e 1. *sexti.*

itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. quarti decimi. ALITER. *a* Circumſcribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icoſaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2 propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint B k. Dico rurſus eſſe, vt B E, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub A I, B k, æquale eſt pentagono A B C D E, ex coroll. propoſ 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale eſt triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B k, ad I F. cum baſes ſint B k, I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque vt pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B k, ad I F; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta B k, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æque multiplicentur per numerum 20. *c* erit quoque vt pentagonum A B C D E, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta B k, duodecies ſumpta ad rectam I I, vigeſies ſumptam: Atqui recta B k, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B k, contineat quinque ſextas partes ipſius B E, continebit eadem B k, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E) Recta vero I F, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri F G, decies ſumpto; (eo quod F G, eſt ipſius I F, dupla.) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi B E, decies ſumptum ad latus Icoſaedri F G, decies ſumptum; Ac propterea, *d* cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.





b 1. ſex.

c ſchol. 22. quinti.

d 15. quinti.

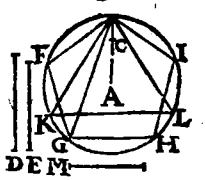
THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

IV. IX.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

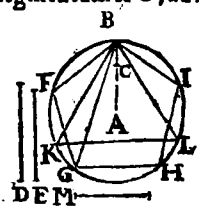
SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum A C. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum A B, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum B F G H I, & triangulum æquilaterum B k l. Sit igitur B F, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta B G, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam vero A C, maius segmentum semidiametri A B, sectæ extrema ac media ratione, *a* est latus Decagoni in circulo B F G H I, in quo nimirum A B, latus est Hexagoni; *b* poterit B F, latus pentagoni & totam A B, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam A B, & minus segmentum B C, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositū Icosaedri, vt est B F, potens totam A B, & maius segmentum A C, ad M, potentem totam A B, & minus segmentum B C *c* Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri B k, triplum est quadrati semidiametri A B: *d* Item quadrata rectarum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C; Erit vt quadratum rectæ B k, ad quadratum rectæ A B, ita quadrata rectarum A B, B C, hoc est, quadratum rectæ M ipsis æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ B k, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C: Est autem vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B F, ex coroll. 1 prop. 17. lib. 13. eo quod B G, est latus cubi, & B F, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; *e* Erit vt tota A B, ad maius segmentum A C, ita tota B G, ad maius segmentum B F; *f* Ac proinde vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G ad quadratū rectæ B F,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F, ita



a 4. quartidecimi.
b 10. tertiidecimi.
c 12. tertiidecimi.
d 4. tertiidecimi.
e 2. quartidecimi.
f 22. sexti.

BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; a Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum AC. Cum igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF potens totam AB, & maius segmentum AG, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. sexti.



SCHOLIVM.

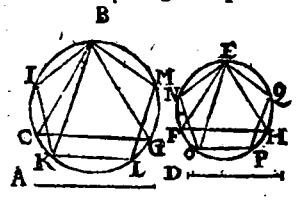
QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ connectanturque rectæ BK, CK, BO, FO.

b *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripta in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13 recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes sua circumferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferent. a comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitio-*

b 5. quartidecimi.



finitione segmentorum similium, aquales inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, aqualis erit, & totum triangulũ BCK, toti triangulo EFO, aquiangulum. a Quare erit a 4. sext.
vt BK, hoc est, recta A. illi aqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri; ita EO, hoc est, recta D, illi aqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum.

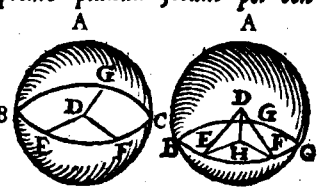
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunq; alia sphæra.

LEMMA I.

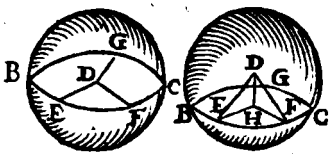
SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, linea recta, quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.



TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectan-

nectantur rectæ D E, D F. *Quoniam igitur anguli* D H E, D H F,
a 47. primi. *ex defin.* 3. *lib.* 11. *recti sunt*; a *erit tam quadratum rectæ* D E, *quadratis rectarum* D H, H E, *quam quadratum rectæ* D F, *quadratis rectarum* D H, H F, *æquale*: *Sunt autem quadrata*



rectarum D E, D F, *æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* D H, H E, *quadratis rectarum* D H, H F, *æqualia erunt*; *& proinde, dempto communi quadrato rectæ* D H, *reliquum quadratum rectæ* H E, *reliquo quadrato rectæ* H F, *æquale erit. Quare & rectæ* H E, H F, *æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex* H, *ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus* H E, H F. *Figura igitur plana* B E F C G, *vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit*; *eiusque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis* D H, *cadit. Quod est propositum.*

COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN sphæra A B C D, *cuius centrum* E, *sunt circuli æquales* A B, D C. *Dico ipsos æqualiter à centro* E, *distare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* E F, E G, *quæ per corollar. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* F B, G C, *ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ* E B, E C. *Quoniam igitur anguli*
b 47 primi. *E F B, E G C, recti sunt, ex definit.* 3 *lib.* 11. b *Erit tam quadra-*

tum

cum recta EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale: Atque adeo æquales

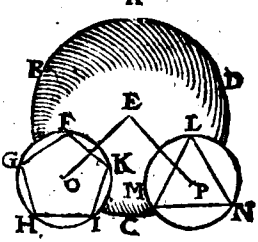
erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant à centro E.

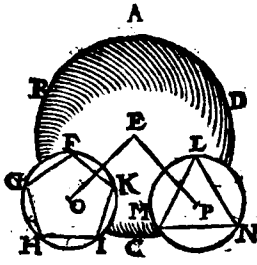
SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit: atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 1v. x.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cui latus ad latus Icosaedri: in vna eademque sphæra.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum EGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangũt: si per pentagonũ, & triangũlum plana ducãtur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in sphæra EGHIK,





a 5. quartidecimi.

LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum: æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN: Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendicularis ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt KO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri: & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ: resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum: Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemq; modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrũ in 20. pyramides inter se æquales; quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. b Quoniam autem est, vt basis FGHIK, ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, eum vtriusque eadem sit altitudo: Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, tota videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est (sicut modo diximus) vt tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20 bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri; ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: c Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ: atque adeo ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque sphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

b 6. duodecimi.

c 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

d 9. quartidecimi. e 10. quartidecimi.

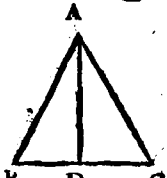
QVONIAM vero ostensum est quoque, d ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra. e Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius cuiusdemque sphæræ, vt vna linea potens totam diuisam

quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: a Itē a 11. quarti decimi.
ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri: & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; & lineæ potentis totam quamcunque secta extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdē sphæræ, esse inter se æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 6. 23.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineę perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, sesquitertium esse quadrati perpendicularis A D. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, b anguli B, & C, æquales sunt: & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC: habent autem & latus AD, commune, vel A B, AC, æqualia. c Igitur & reliqua latera B D, C D, æqualia sunt: ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex scholio propos. 4. lib. 2. d Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia sint quadrata rectarum A D, E D; erunt quoque quadrata rectarū AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD: Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD Quare quadratum rectæ A B, partium 4. sesquitertium est quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod estendēdum erat.



b 5. primi.

c 26. primi.

d 47. primi.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & C D, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera A B, AD, trianguli A B D, æqualia sint lateribus A C, A D, trianguli A C D; & basis BD, basi CD, æqualis, e Erunt & anguli B A D, C A D, æquales, id est, angulus B A C, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari A D.

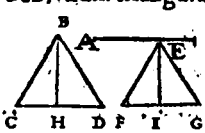
e 8. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

o. xiij.

Si ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim BCD, vnum triangulum Tetraedri, & EFG, Octaedri illius ſphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, EI. *a* Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri BC, *b* & duplum quadrati lateris Octaedri EF; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF proportionem, quam numeri 6. 4. 3. *c* ideoque commenſurabilia erunt: Quare lineæ ipſæ, A, BC, EF, commenſurabiles exiſtent ſaltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



a 13. *tertii decimi.*
b 14. *tertii decimi.*
c 6. *decimi.*

RVRSVS, *d* quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BH, quam quadrati rectæ EF, quadrati rectæ EI, ſeſquitertium eſt: habebunt tam quadrata rectarum BC, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. *e* ideoque tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam CH, ipſi BC, quam FI, ipſi EF, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. *f* Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commenſurabiles inter ſe erunt: Ac proinde cum CH, & FI, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales. *g* Quoniam vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt conſtat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quã 1. ad 3. *h* cum oſtenſum ſit talium partiũ 1. eſſe tam quadratũ CH, quam quadratũ FI, qualium 3. eſt tam quadratum BH, quam quadratum EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles: *i* Ac proinde tam rectangulum ſub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contẽtum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum CD, FG, duplæ ſint baſium rectangulorum CH FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri trian-

d 12. *quarti decimi.*
e 6. *dec.*
f 12. *decimi.*
g 9. *decimi.*
h 12. *quarti decimi.*
i 22. *decimi.*

triangulo B C D, sit commensurabilis: (est enim triangulum B C D, totius superficiei quarta pars.) Item tota superficies Octaedri triangulo E F G, commensurabilis: (Est enim triangulum E F G, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum.

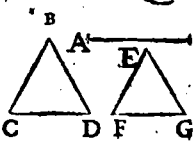
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia C H, F I, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas C H, B H, quam F I, E I, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub C H, BH, & sub F I, E I, hoc est, triangula B C D, E F G, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale; perspicuum est, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 0. XIV.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum B C D; Octaedri vero basis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, sesquitertium esse trianguli E F G; At vero superficiem Octaedri esse sesquialterã superficiei Tetraedri. *a* Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri C D; *b* duplum vero quadrati lateris Octaedri F G; fit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. fit quadratum lateris C D, & talium 3. quadratum lateris F G. Quare quadratum rectæ C D, sesquitertium est quadrati rectæ F G: Vt autem quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ F G, ita est triangulum B C D, ad triangulum E F G. (*c* quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habẽt laterum C D, F G, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum B C D, sesquitertium est trianguli E F G.



a 13. tertiæ decimi.

b 14. tertiæ decimi.

c 20. & 19. sexti.

RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum B C D, sesquitertium esse trianguli E F G: Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum B C D, talium 3. esse triangulum E F G: efficitur, vt triangulum E F G, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum B C D, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16.

Quamobrem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atq; Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

0. xv. RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphęrę ducta, cadit in centrum basis oppositę, estque perpendicularis ad dictam basin.

SIT Tetraedrum A B C D, contentum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus A B C, D A B, D B C, D C A, in sphæra, cuius centrum E: ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta D E F, incidens in basin A B C, circulo inscriptam ad punctum E. Dico F, esse centrum basis A B C, & D F, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis, rectis E A, E B, E C: F A, F B, F C: quoniam rectæ E A, E B, E C, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt: erunt duo latera E A, E D, trianguli F A D, æqualia duobus lateribus E C, E D, trianguli C E D: Sunt autem & bases A D, C D, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli A E D, C E D, æquales erunt: Ac proinde & reliqui A E F, C E F, æquales erunt, eo quod tam A E D, A E F, quam C E D, C E F, duobus rectis æquivalent. Eadem ratione æquales erunt anguli B E F, C E F, si considerentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera E A, E F, trianguli E A F, æqualia sunt lateribus E C, E F, trianguli E C F, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales: Erunt bases F A, F C, æquales. Sic quoque æquales erunt F B, F C, si considerentur triangula E B F, E C F. Quare cum tres rectæ F A, F B, F C, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales: erit F, centrum basis A B C, seu circuli eam circumscribentis.

a 8. primi.
b 13. primi.
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli A B C, demissa in centrum circuli cadit: efficitur, vt recta D E, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri A B C. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli haberet vnus idemque circulus duo centra, quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplũ quadrati diametri sphæræ. xvj.

SIT Octaedrum A B C D E F, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus E A D, E A B, E B C, E C D F B C, F B A, F A D, F D C, & in sphæra descriptum, cuius centrũ G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualiũ altitudinum quarum basis communis est quadratum subduplũ quadrati diametri sphæræ. Ductus enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quæ æquales sunt, cum sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet ē centro ad superficiem sphæræ: *a* quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati semidiametri A G, ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ A B, & talium partium 1. quadratum rectæ A G; Ac proinde quadratum rectæ A B, duplum erit quadrati rectæ A G. Cum ergo quadratum rectæ A G, æquale sit quadrato rectæ B G: erit quadratum rectæ A B, æquale duobus quadratis rectarũ A G, B G: *b* Ac propterea angulus A G B, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli A G D, B G C, C G D, recti. *c* Quam ob rem A G, C G, & B G, D G, in rectum erunt coniunctæ: *d* atque adeo rectæ A C, B D, sese secantes in G, in vno existent plano: *e* Ac propterea rectæ earum extremas connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum A C D, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarum basis communis A B C D, vertices vero E, & F: quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet constet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia, & basi communi A B C D. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin A B C D, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri A B, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum A G, B G: erit quoque quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis semidiametrorum A G, E G: *f* Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, se mutuo tecantibus in G, ad rectos angulos insistit, *g* ipsa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe

a 14. *tertij decimi.*

b 48. *primi.*

c 14. *primi.*

d 2. *vndecimi.*

e 7. *vndecimi.*

f 48. *primi.*

g 4. *vndecimi.*

ad basin pyramidũ. Quare E G, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo F G, FG, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuũ est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia

a 14. *tertii decimi.*

b 48. *primi.*

A C, est diameter sphæræ: *a* erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D: Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD, DC. *b* Quare angulus ADC, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est: quod cum

c 12. *tertij decimi.*

sit descriptum ex latere Octaedri AB: *c* constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Verumtamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o. xvij.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

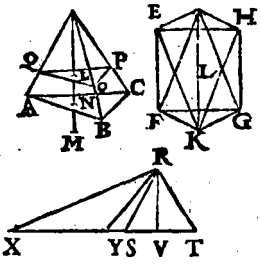
TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrũ in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintuparti-ente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratũ diametri sphæræ.

SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrum E F G H I K, in vna eademq; sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per cen-

d 15. *quarti decimi.*

trum L, diameter sphæræ D M, incidens in basin A B C, ad punctum N. *d* Erit igitur N, centrum basis A B C, & D N, perpendicularis

laris ad eandem basin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum sphæræ, & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, per coroll. 2. propos. 13 lib. 13. Erit DL semidiameter talium partium 3. qualium 1. est LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde ex scholio propos. 16. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC: a Eruntque rectæ QO, OP, PQ. Parallelæ rectis AB, BC, CA: Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, b cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquilatum ex coroll. propos 5. lib. 5. Igitur & QOP, æqu ing ium erit: Ac propterea & a quila.erum, ex coroll propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. c Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter: erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP. erit vt 4. ad 3. Ac proinde, d cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4 ad 3 vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus e quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam: erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



a 16. *undecimi.*

b 10. *undecimi.*

c 17. *undecimi.*

d 8. *duodecimi.*

e 20. *sexti.*

Sit iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP: demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. f Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptem sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. *quartidecimi.*

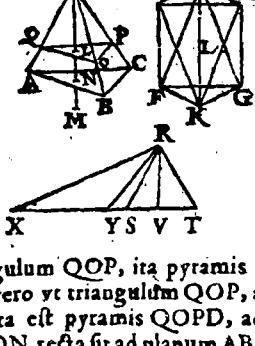
Rursus extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3 nempe sesquiter-

tia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia) ac propterea qualium TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum sub recta RV, (quæ potest viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris DC) & sub recta TY (quæ continet octo nonas partes eiusdem lateris) ad quadratum diametri sphæræ.

a 1. *sext.* Cvm enim ductis rectis RX, RY. *a* triangulum RTX, duplum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis TY;

b 41. *primi.* *b* Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo sub RV,

c 7. *quinti.* TY. *c* Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum;



d 1. *sext.* RST, ita rectangulum sub RV, TY, ad idem triangulum RST: *d* Est autem triangulum RTX, ad triangulum RST, vt basis TX, ad basin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub RV, TY, ad triangulum RST, hoc est, ad triangulum DQP, siue QOP, sibi æquale, erit vt 64 ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum sub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD: At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri sphæræ DM, ita est pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK (Nam cum DN, recta sit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planum QOP, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque sphæræ semidiameter DL.

e 16. *quartidecimi.* altitudo erit pyramidis seu tetraedri QOPD: *e* Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum basis communis quadratū EFGH, dimidium quadrati diametri sphæræ; & altitudines æquales semidiametri sphæræ LI, LK Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex scholio propos. 5. lib. 12. erit vt basis QOP, ad basin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidem hFFGHI; Ac propterea per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt basis QOP, ad duplam basis EFGH, hoc est, ad quadratum diametri sphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc est, ad Octaedrum EFGHIK) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub RV, potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & sub TY, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum ad quadratum

dratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitum ad Octaedrum; &c. Quod erat demonſtrandum.

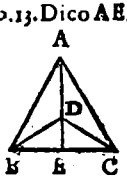
SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP: continebit DP, ſeu illis æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, a cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV: erit a 12. quar-
RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum par- tidecim.
tium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qua-
lium 27. ST, ſeu DP: (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit
TY, ſuperquintupartiens vigeſimaſeptimas partes ipſius ST, numerum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. vt rectangulum ſub RV. qua potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, qua ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.

THEOR. 18. PROPOS. 18. o. xvij.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa, tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamque bifariam diuidet, ex coroll 2. propoſ.10.lib.13. Dico AE, triplam eſſe rectæ DE, quæ ſcilicet perpendicularis eſt è centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis ED, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia ſint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (è centro enim ducuntur) ſit autem & baſis AB, baſi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propoſ.8.lib.1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum ſub AE, EB, triangulo ABC, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41.lib.1. cum baſis trianguli BDC, dupla ſit baſis BE, vtriuſq; rectanguli; Erit quoque rectangulum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: b Eſt autem vt rectangulum ſub AE, EB, b 1.ſex.
ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdem altitudinis EB, ita baſis AE, ad baſin DE: Igitur & AE, tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendū.



COROL-

COROLLARIVM.

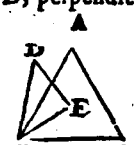
ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE. Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE. duplam esse.

o. xvij. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphæræ inscribatur: erit semidiametet sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphæra, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ DB. Dico semidiametrum DB potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur rectâ BE; a quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. b Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare c cum quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur Octaedrum sphæræ inscribatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. tertiidec.

b 12. tertiidec.

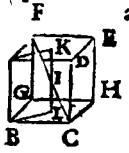
c 47. primi.

o. xviij. THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiusibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum

centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. *a* Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.



a *tertiidec.*

PRODVCTA autem KI; ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos.14 lib.11. Rursus, *b* quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, *c* quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam vero perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos.10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll.1. propos.15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cum KK, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b *16.unde-cimi.*

c *16.unde-cimi.*

COROLLARIVM I.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. *d* Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: *e* Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

d *15.tertiidec.*

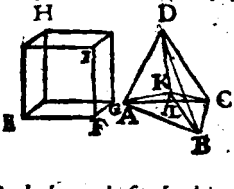
e *31.undecimi.*

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro

centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſin ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, ſolidum autem EFGH, contentum ſub EI, tertia pars ſuperficiei corporis ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad baſin ABC; Dico ſolidum EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſi æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſitionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contentum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplum eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 6. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum: Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.

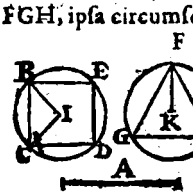


9. xj.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc eſt, circulos BGDE, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex centris IB, KF. *a* Quia igitur quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum



a 15. *tertiidec.*

b 47. *primi.*

ctarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, buadrati rectæ BI) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus a quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG: b & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, [illegible] centro ductæ: qualium partium 6. ponetur quadratum diame[illegible], talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum [illegible]ectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI: æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK: Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. tertii. dec.
b 12. tertii dec.

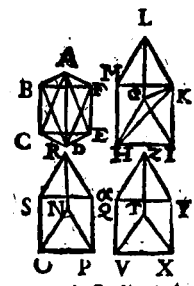
COROLLARIVM.

HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. c qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13 quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro, quod est propositum.

c 11. quadrodecimi.

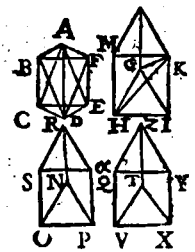
THEOR. 22. • PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.



IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarũ latus communis est ipsa diameter AD, & vertex cõmunis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD: in BDFA: cuius basis BDF: in CDEA, cuius basis CDE: & in DEFA: cuius basis DEF: quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt contingentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum

dum constat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipsorum commune est AD,
a 8. primi. diameter, & reliqua latera, ipsius octaedri latera existunt, a inter se æqualia sunt; efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Constituatur super GHI, basin tetraedri, prisma



HIkLM, eiusdem cum tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propos. 7. lib 12. Rursus, super basin octaedri NOP, & TVX, basi tetraedri æqualem, constituantur duo prismata NOPQRS, TVXYZα, eiusdem cum octaedro, seu pyramide ACDE, altitudinis.
b 14. quartidecimi. *b* Quoniam igitur GHI, hoc est, TVX, basis tetraedri sesquitertia est ipsius NOP, basis octaedri: Erit quoque prisma TVXYZα, prismatis NOPQRS, sesquitertium, cum prismata eiusdem altitudinis sint, vt bases, ex iis, quæ ad propos. 7. lib 12. demonstrauimus. Est autem & octaedrum ABCDEF, eiusmodi prismatis NOPQRS, sesquitertium; (Nam prisma æquale est tribus pyramidibus ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum. Igitur æquale est octaedrum prismati TVXYZα. Quia vero prisma TVXYZα, ad prisma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex scholio propos. 14 lib. 12. Est autem altitudo prismatis TVXYZα, quod octaedro æquale est, eadem quæ octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prisma GHIkLM, hoc est, ad triplum tetraedri GHIk, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, vt 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4 ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est vt 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. quod demonstrandum erat.

COROL-

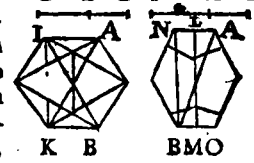
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. *a* Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram. *a* 18. *huius.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

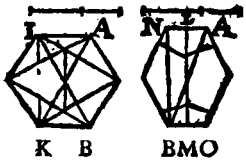
POSSIT recta AB, rectam CD, & eius segmentum maius CE; Item rectam FG, & eius segmentum minus HG Dico CE, esse latus Icosaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius sphæræ, cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter AB, descriptum Icosaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icosaedri opposita AI, BK, connectantur recta IB, quæ subtendet vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, vt constat ex propos. 16. lib 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia in superficiem sphæræ, in quo recta RH, latera opposita RX, HI, coniungens angulum RSH, subtendit (clariusque patebit ex constructione Icosaedri, quam ad finem lib. 16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16 lib. 13. *b* erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; *c* Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; *d* ide: que quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE. Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt



b 29. *primi.*
c 8. *primi.*
d 47. *primi.*

quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, ſit maiùs ſegmentum ipſius CD, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius IB, ſimiliter diuiſæ; (Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt IA, latus Icoſaedri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, a maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi IA, lateri Icoſaedri, b Cum enim ſit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; c erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA ad quadratum rectæ IA: Oſtenſa ſunt autem quadrata rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; d Igitur & quadratum rectæ CE, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 8. *tertiædec.*
b 2. *quartidecimi.*
c 22. *ſexti.*
d 14. *quinti.*



RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, BO, ſecentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipſa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL. BM, æquales parallelæ ſunt, e per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. erunt quoque LM, NB. æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, f Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA: Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale ſit poſitum quadratis rectarum FG, HG, æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius LM, ſimiliter diuiſæ, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus ſegmentum ipſi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus, CE, maius ſegmentum æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita poterit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit. Quod erat oſtendendum.

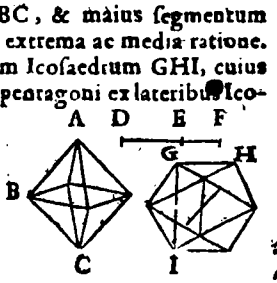
e 33. *primi.*
f 47. *primi.*

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extremæ ac mediæ ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

Possit latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac mediæ ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diametet HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI, erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac mediæ ratione: *b* Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac mediæ ratione. *c* Quia vero quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur, Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: *d* Est autem quadratum diametri HI duplum quadrati lateris octaedri AB Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cum sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. *f* Erit quoque vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



a 8. *tertiidec.*
b 5. *tertiidec.*
c 47. *primi.*
d 14. *tertiidec.*
e 2. *quartidecimi.*
f 22. *sexti.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

Si recta linea diuisa extrema ac mediæ ratione cũ minore segmento angulum rectum cõstituat; cui recta subtenda-

tendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua AD, vel AC, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum AC, vel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti BC, nempe lateris cubi: a Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ b Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. *tertii dec.*

b 14. *tertii dec.*

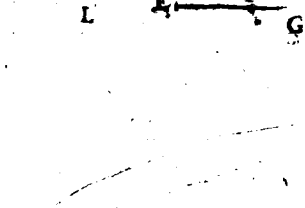
COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri. vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC) secetur extrema ac media ratione, & alia linea verbi gratia E, potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

c 18. *tertii dec.*

THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ, latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque HI, latus Icosaedri HIK, eiusdem sphæræ. Dico HI, rectam potentia esse

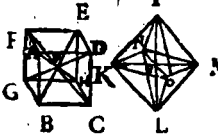
esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta IK, diameter. *a* Quia igitur HI, est maius segmentum rectæ HK, diuisæ extrema ac media ratione; *b* Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum HK, & minus HI. *c* Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCK, ita vt BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis, *d* Erit que angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur p sse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG. Est autem & angulus IHK rectus, vt propos 23 huius lib. ostendimus: *e* Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI *f* gitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt *g* A ro pterea, vt KI, ad IH, ita BC, ad CL: & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CL. *h* Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC, Ergo & HI latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FH. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

a 8. *tertii*
b 5. *tertii* *dec.*
c 22. *primi.*
d 48 *primi.*
e 2. *quarto decimi.*
f 6. *sext.*
g 4. *sext.*
h 13. *tertii* *dec.*

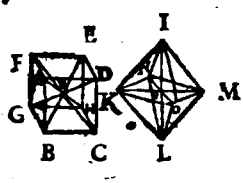
THEOR. 27. PROPOS. 27.

Cvbvs ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

Sint in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri: nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines (Cum enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. *i* Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum: æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri a cẽtro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basin; py-



i 21 *quarti decimi.*



ramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basin pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus ex eodem scholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

SINT rursus in eadem sphæra cubus ABCD, & octaedrum EFGHIK, sitque diameter sphæræ, seu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex semidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16 huius lib. [a] sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BC: Est autem & recta AB, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases IFKH, BD, & altitudines AB, BM: [b] Ac propterea parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basin BD, & sub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rursus quia recta EL, rectæ EN tripla est; erit & parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine EL, triplum parallelepipedi super eandem basin, & sub altitudine EN, vt in scholio propos. 14. lib. 12 ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo super basin IFKH, & sub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla sit altitudinis EN. [c] Item Octaedrum EFGHIK, duplum est pyramidis IFKHE. Æquale igitur erit parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum, quia parallelelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine BM, est ad parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita est AB, ad EL. (Cum enim sit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL,

a 18. *tertii dec.*

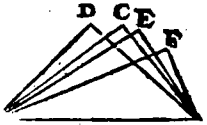
b 34. *vndecimi.*

c 16. *quartidecimi.*

ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine BM æquale eſt oſtenſum cubo ABCD: Et parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine LN æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſa ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVOD demonſtratum eſt, a diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram potentia lateris Tetraedri; ita vt ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, eatundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratum duæ tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia: quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæra ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB:



Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC: erit recta AC, latus Tetraedri.

a 13. tertiidec.

RVRSVS b cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæra potentia duplam eſſe lateris Octaedri: Fit, ſi ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium ſit quadrati diametri AC: Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis ſecundum doctrinam ſcholii propoſ. 33. lib. 6. rectam AD, latus eſſe Octaedri.

b 14. tertiidec.

DEINDE, c quoniam docuimus, diametrum ſphæra potentia eſſe triplam lateris cubi: Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars ſit quadrati diametri AB: Vel ſi quadrato diametri AB, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholii propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter AB, poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC: Quemadmo-

b 14. tertiidec.

dum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia si recta aliquâ potuerit totam quampiam rectam extrema ac mediatione sectam, & maius ipsius segmentum:

a 23. quartidecimi. a *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea: Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 13. lib. 6. demonstrata sunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.*

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius

b 23. quartidecimi. *segmentum:* b *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac mediatione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.*

HACTENVS ergo Hypsiclei, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ inscriptorum scripserunt. Sequentes autem quinque propos. ad eadem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiecimus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

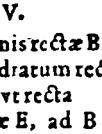
SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportionales, nec non quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem ha-

c 10. sexti. beat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A: c habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplica-

tam

tam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad B quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E: vt recta C, ad rectam F: a Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.



quadr.	*B.*	*Recta*	*C.*	
quadr.	*A.*	*Recta*	*A.*	
quadr.	*E.*	*Recta*	*F.*	a 20 *sexti.*

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; b habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubū rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: c Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

b 33. *vndec.*

Cubus	*B.*	*Recta*	*D.*	
Cubus	*A.*	*Recta*	*A.*	
Cubus	*E.*	*Recta*	*G.*	

c 33. *vndec.*

SCHOLIVM.

HOC idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.

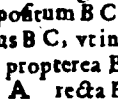
THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-

portionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in corollar. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. a Inueniatur ergo

a 13. *sex.*



recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulũ A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. b Sit aũt eidem rectangulo sub A B, B D, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. c Quoniam vero quadratum lateris A B, ad quadratũ rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoq; duplicatã lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

b 17. *sexti.*

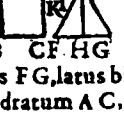
c 20. *sexti.*

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidiũ lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpẽdicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; d cum quadratum lateris Terraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B; e sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangu-

d 28. *tertiidec.*

e 1. *sexti.*

ctangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; *a* Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F. F H, hoc est, tres rectæ F H A B, E F, continuè erunt proportionales. Sunt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continuè proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit F H, *b* erit proportio rectæ E F, ad rectam E H, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ A B, ad rectam I K, secundæ ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc est, ad triangulum E F G (est enim ex coroll. propos. 19. huius lib. quadratū rectæ I K, æquale triangulo E F G) *c* proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, vt latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. *sexti.*

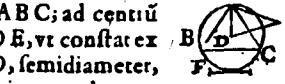
b 28. *quartidecimi.*

c 20. *sexti.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

Latvs Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

Sit Tetraedri triangulum A B C. & altitudo, seu axis Tetraedri D E, latusq; cubi eiusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri A B, esse potentia sesquialterum axis D E: Axem vero D E, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* descripto circulo A B C; ad centrū D, in quod videlicet cadit axis D E, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur A D, semidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc est, lateris A B, *e* æquale est quadratis rectarum A D, D E, *f* & triplum quadrati semidiametri A D; Fit, vt posito quadrato lateris A B, seu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4 Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.



d 5. *quarti.*

e 47. *primi.*

f 12. *tertiidec.*

Quoniam vero latus Tetraedri A B, *g* potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratū lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem eacundem 4. esse quadratū axis D E. Igitur quadratum axis D E, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaq; Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

g 18. *tertiidec.*

COROL-

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. *a* quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Eorundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, *b* cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

a 13. *tertii decimi.*

b 20. *sexti.*

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoq; ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet *c* tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propositi ipse axis Tetraedri lateris cubi.

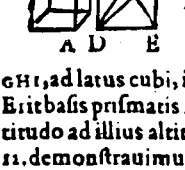
c 12. *quartidecimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. *d* Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est per coroll. 2 propos. 31. huius libr. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. libr. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFFHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1 propos. 7. libr. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.

d 30. *quartidecimi.*



COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM, VT nonnulli putant. Vt vero alii, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus,

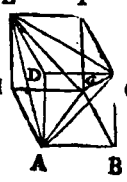
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato A B C D E F G H, oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri E A, E G, E C, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur A G, G C, C A, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quod potentia duplæ sint laterum æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47 lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula A C E, G A C, G A E, G C E, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.



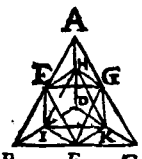
PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

iij.

In data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in B, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: a æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt & æqualia inter se; ideoq; octaedrum componunt EIKGHF, quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 8. *duodecimi.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: b Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

b 8. *duodecimi.*

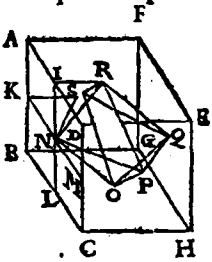
PROBL. 3. PROPOS. 3.

iij.

In dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NL, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum,

torum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planum conſtituunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium; vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales, propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; a angulus NIR, æqualis eſt recto angulo kAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NkS, angulo recto IAF, in quadrato AE; b Erunt baſes NR, NS. æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe: ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ, Nk, Sk, ductæ ſunt ad k, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP: Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 10. vndecimi.
b primi.

ALITER. c In cubo dato inſcribatur pyramis: d In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis: Latera vero pyramidis ex demonſtratione propoſ 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri: perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 13. quintidec.
d 2. quintidec.

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO (ſi ducantur) ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex corolli. 1. propoſ. 14. lib. 13. quæ

quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarũ: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. libr. 13. sed etiã ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

IV. PROBL. 4. PROPOS. 4

In dato Octaedro cubum inscribere.

DATVM Octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum

pyramis ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC; CED, DEA, ex coroll. propos. 4. libr 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habent communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. a Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP. b Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumq; constituent LMNO Rursus quia LO, LM parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; æqualis erit angulus MLO, angulo BAD qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14 lib. 13 & in propos. 16. libr. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero ram planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, d parallelum est plano ABCD, e ipsa, cum conueniant in punctis M. & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trigoli ELK, æqualia sint lateribus

a 18. *quarti decimi.*
b 2. *sexti.*
c 10. *vndec.*
d 15. *vndec.*
e 15. *vndec.*

teribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K. trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12 lib. 13. a Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt: Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, b æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos: (c cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus GKI: Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinq; pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit; cum octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubũ describimus. Quod faciendum erat.

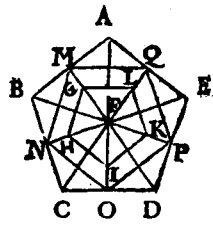
a 4. primi.

b 4. primi.

c 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5. vj.

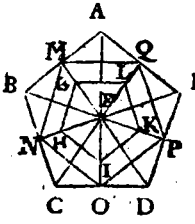
In dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.



Sit ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum videlicet bases sunt pentagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero, duodecim anguli Icosaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triãgulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, EP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. libr. 13. bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q. ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, d æquales quoque erunt rectæ MN,

d 4. primi.

ctæ MN, NO, OP PQ, QM, puncta, M, N, O, P, Q, connectentes: *a* Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia sint, contineantq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; *b* erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratũ est; *c* Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. *d* Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis *e* Sunt autem anguli AMQ NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonũ erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Denique cum rectæ FM, FN FO, FP FQ æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG FH, FI, FK FL, duplæ sunt ipsarum GM, HN, IO, KP, LQ ex coro l. propos. 18. lib. 14. *f* parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ, QM; *g* Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoq; & inter se æquales erunt. *h* Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta parallela sunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP ducto conueniuntq; in recta HI, ipsa vnum planum efficient, ex scholio propos. 16 l. b. 11. Eodemq; modo ostendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, nec non per LG, GH, ducta idem planum constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadẽ arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula; quę cum latera habeant cõmunia, æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent; quod quidẽ ex defin. 31. lib. 11. in Icosaedro erit descriptum; eum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri, con-



a 8. *primi.*
b 4. *primi.*
c 4. *primi.*
d 13. *primi.*
e 4. *primi.*
f 2. *sexti.*
g 10. *vndecimi.*
h 15. *vndecimi.*

dri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

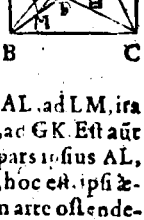
COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basium, hoc est ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1 propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualiū baseis Icosaedri circumscribentiū, atq, adeo eorundem distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lem. 2. eiusdem propos. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atq, sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

In dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro A B C D E F. In pyramide octaedri superiori A B C D E, sumantur G, & H, centra triangulorū ex aduerso sibi respondentiū A E D, B E C; Item in pyramide interiori ABCDE, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoq; sibi correspondentium C F D, A F B; quæ quidem centra coniungantur sex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per scholiū propos. 12. lib. 3. coniungatur; recta LM, æquæ ipsi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirū dimidia laterum DE, BF, oppositorū in quadrato E F. Quoniam vero rectæ AL, AM, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplæ sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propos. 18 lib. 14 *b* Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll propos. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia *c* Quare erit vt AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK. Est autē AL, ipsius AG, sesquialtera; *d* quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoq; AG, eiusdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentiū sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componētes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrum constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin 31. lib 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.



a 33. *primi.*

b 2. *sext.*

4. *sext.*

d 18. *quinti decimi.*

e 4. *quarti decimi.*

f 1. *quinti decimi.*

ALITER. *e* In octaedro dato inscribatur cubus, *f* & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium Octaedri, & in angulis cubi

collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

COROLLARIVM I.

QVIA vero oſtenſum eſt, vtramque G K, D F, parallelam eſſe ipſi L M, a ac propterea & G K, ipſi D F, atque adeo ipſi B E, parallelam eſſe; b Atque eadem ratione kH, ipſius F C; E A, parallelum eſſe: Atque idcirco planum Gk H, per G k, K H, ductum, patallelum eſſe plano D F C, per D F, F C, necnon & plano BEA, per B E, E A. Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula: Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

a 9. *vndecimi.*
b 15. *vndecimi.*

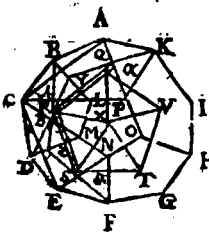
COROLLARIVM II.

PRÆTEREA cum octaedrum circumſcribat & cubum & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur: Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt conſtat ex 4. propoſ. huius libr. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. libr. 14. vel per coroll. 2. propoſ 13 Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

o. vij.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis A B L P K, P K I H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectæ ducantur K Y, D Y, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem Y K, Y D, rectas A P, C M, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis. quod & arcus A K P, C D M, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant (c conſtat enim rectas A K, P K; Item C D, M D. arcus ſubtendere æquales.) d Igitur A α, C β, parallelæ ſunt rectæ B Y, e atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales,

c 28 *tertij*
d 28. *primi.*
e 9. *vndecimi.*

les, nempe dimidia rectarum A P, C M, α quæ æquales sunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. b Rectæ ergo ipsas connectentes A C, α β, æquales erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γ δ, æquales esse ipsas CE, γ δ: c Sunt autem A C, C E, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet) Igitur & α β, γ δ, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales sint (Nam YQ, YR, ZR, YS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, d atque adeo æquales, item Q α, R β, R γ, S δ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, e ideoque æquales: Ac proinde & totæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales erunt.) f Erunt quoque anguli α Y β, γ Z δ, æquales: Ac propterea cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint g æquales quoque erunt rectæ QR RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri, L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.
b 33. primi.
c 4. primi.
d 14. tertij.
e 14. tertij.
f 8. primi.
g 4. primi.

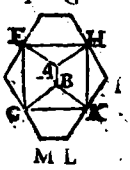
PROBL. 8. PROPOS. 8. o. viij.

In dato Dodecaedro cubum describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB: duo quidem ABCDE, ABKIH, secundum latus idem commune AB: alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK. In his vero pentagonis subtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK,

PP 3 qua-

quadrilaterum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omni latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, an-
a 4. *primi.* gulo q; contineant æquales, ex hypothesi; *a* æquales erunt ba-
b 28. *tertij.* ses EH, HK, KC, CE. *b* Quoniam igitur rectæ AE, BC æquales, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE circumscribente arcus æquales; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3 rectæ AB, CE,
c 9. *undecimi.* parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB HK. *c* Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; *d* Ac propterea rectæ EH, CK,
d 33. *primi.* quæ ipsas connectunt; parallelæ erunt, *e* in eodemq; cum ipsis plano; idcoq; parallelogrammum erit EHKC; quod ostendimus esse æquilaterũ. Quia vero planum KCKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1 propositionis 10. lib. 14. circa
e 7. *undecimi.* quadrilaterum EK, descriptum; *f* Erunt tam anguli oppositi E, K, quam C, H, duobus rectis
f 22 *tertij.* æquales; *g* Ac propterea cum oppositi E, & K, sint æquales, necnõ
g 34. *primi.* & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit; collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Similiter in reliquis octo pentagonis similiter octo anguli, octo aliæ rectæ subtendantur *eodem ordine; constituũ*
h 4. *primi.* *erit* solidum ex quadratis contentũ; quæ cum sint æqualia, *h* eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt, cubum constituent ipsum Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reside-
rit. In dato ergo Dodecaedro cubum describimus. Quod erat faciendum.



COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CB. ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

o. 17.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit Octaedrum, sex illa latera, quæ *opposita* esse diximus *in corollario* 3. propos. 15. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH IK, LM, quæ bifariam secentur o N, O. P, Q. S. Rectæ igitur NO, PQ. RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & angulos rectos di-

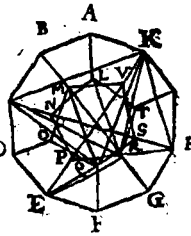
diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. a Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, OSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentq; octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

In dato dodecaedro pyramidem describere.

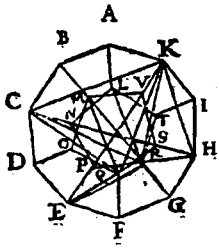
SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQSV, BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue terraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LV, communi pentagonis KLT, LTP; Deniq; R, Lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; b quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet cõmunis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. c Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Nõ secus ostendemus, rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. d Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH,



b 17. tertiidecimi.

c 31. tertii.

d 47. primi.



& quadratis rectarum K R, R E, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualiū K H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H, (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonum æquales æqualibus rectis comprehensos, *a* æquales sunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum C K, C R, R K, K Q, R Q, & C Q: Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C K R, C K Q, K R Q, R C Q, æquilatera sunt, & æqualia, ideoq; tetraedrum componunt C K R Q: quod cū habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. *primi*,

b 8. *quinti-decimi*.
c 1. *quinti-decimi*.

ALITER. *b* In proposito Dodecaedro cubus describatur: *c* & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant: perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

9. xj.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

d 5. *quinti-decimi*.
e 8. *quinti-decimi*.

d DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrum: *e* & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi residēt in angulis Dodecaedri: anguli vero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur: tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri; Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

9. xij.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

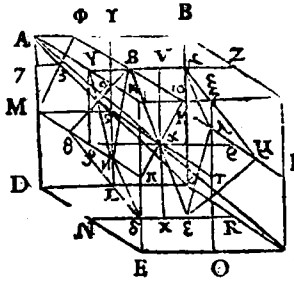
f 11. *quinti decimi*.
g 1. *quinti-decimi*.
h 11. *quinti-decimi*.
i 1 *quintid*.

IN dato Icosaedro *f* cubus describatur, *g* & in hoc cubo pyramis: factumque erit, quod proponitur. *h* Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri: & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri: Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. *i* In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

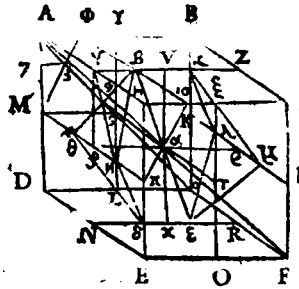


Ducatur in figura recta HaC.

SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ ξ O, M π, KP, NR, nuſquam inter ſe coeuntibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed vna duntaxat. quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρ Q, quæ ſe mutuo in centro α, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntque lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, M π, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt ſint maiora ſegmenta, Y β, Z γ, M θ, π κ, ductis rectis Y ϱ Y κ, βθ βκ. Quoniam ergo Y ρ, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & ρ κ, β V, ſegmenta minora rectarum æqualium YV. ρ π, æqualia quoque : *a*. Sunt autem quadrata rectarum YV, β V, tripla quadrati rectæ Y β; Erunt & quadrata rectarum Y ϱ, ρ κ, tripla eiuſdem quadrati rectæ Y β. Quare, *b* cum quadratis rectarum Y ρ, ρ κ, æquale ſit quadratum rectæ Y κ, *c* quod angulus Y ϱ κ, rectus ſit; Erit & quadratum rectæ Y κ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rurſus, quia VY, perpendicularis ad AY, Y ρ, *d* recta eſt ad planum AE, per rectas AY, Y ϱ, ductum, rectus erit angulus β Y κ, ex *e* Ac propterea quadratum rectæ β κ, æquale quadratis rectarum Y κ, Yβ, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ Xβ (quia nimirum quadrata rectarum Y κ, Y β, quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Y κ, triplum ſit oſtenſum quadrati rectæ Y β) Ideoque *f* cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βκ, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, vt in his numeris 1, 2. 4. apparet: Eſt autem & θκ, dupla ipſius ρ κ, quod minora ſegmenta θ ρ, κ ρ, rectarum æqualium M ρ, π ρ, æqualia ſint, *g* Erit igitur vt Y β, ad ρ κ, ita β κ, dupla ipſius Y β, ad θ κ, duplam ipſius ρ κ; Eſt autem Y C, maius ſegmentum ad ρ κ, rectam minori ſegmento β V, æqualem, vt tota ad maius ſegmentum. Ergo & β κ, ad θ κ, erit vt tota ad maius ſegmentum; Ac proinde θ κ, erit maius ſegmentum rectæ β κ, ſectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus θ κ, maius eſſe ſegmentum

a 4. *tertii*
dec.
b 47. *primi.*
c 29. *primi.*
d 4. *vnde*
cimi.
e 47. *primi.*
f 20. *ſexti.*
g 15. *quinti.*

rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta $Y\theta$. Quare æquales erunt $\beta\theta, \beta\varkappa$, constituentes triangulum Isosceles $\beta\theta\varkappa$, simile illi quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus: Ac proinde $\theta\varkappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\varkappa$, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.



a 33. primi.

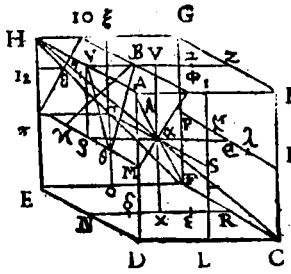
INTELLIGATVR iam planum trianguli $\beta\theta\varkappa$, extendi, (ducta per β, recta $\beta\phi$, ipsi $M\pi$, parallela) per parallelas M,ϕ 10. vt sit planum extensum $\phi\pi$, occurrens diametro AB, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in pũcto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\phi$, parallela, connectaturque MS, α quæ parallela est vtrique $A\phi$, 73. Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo AMS; b ac proinde vt AM, ad MS, ita est A 7 ad 73. Sunt autem AM. MS. æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad $A\phi$, ita M 7. ad 73. Est autem $A\phi$, maius segmentũ rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione (c quod æquales sint $A\phi$, $Y\beta$, necnon & MA. YV, dimidia cubi latera) Igitur & 73 hoc est, 7 A, maius segmentum erit rectæ M 7. extrema ac media ratione sectæ; d Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusq; segmentum erit M 7. e Atqui vt M 7 ad 7. A, ita est 5. 3. ad 3 A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3 maiusq; segmentum est S. 3 f Quia vero S$\varkappa$T, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS: si per S$\varkappa$T, planum ducatur parallelũ plano $\phi\pi$, ducto per Mπ, g secabuntur rectæ AS, Aα, in easdẽ rationes, in punctis 3 & 4. cũ planũ $\phi\pi$. rectas AS, Aα. secet in 3. & 4. at planum per S$\varkappa$T ductũ plano $\phi\pi$, parallelũ easdem secet in S, & α. Atq; idcirco, cũ AS, secta sit in 5. extrema ac media ratione, secta erit eodẽ modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmentũ erit α 4.

b 4 sex.
c 34 primi.
d 5. tertiidec.
e 2. sex.
f 33 primi.
g 17. undecimi.

ITSDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano $\phi\pi$, vt perspicuum est, si cubus inuertatur; vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum AC locum quadrati HF: & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione proba-

probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura: (Hæc deest in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum $\phi\pi$, secet in 9. prope punctum H: intelligaturque per rectam AH, planum plano $\phi\pi$, parallelum. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H, & 4, 9: (Nam planum $\phi\pi$, eas secat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano $\phi\pi$, parallelum easdem secat in A. & H) a erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo α A, secta sit in 4 extrema & media ratione, erit quoque α H, similiter secta quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur θ 4, β 4, β 9 $\varkappa$ 9, rectilineum β 4, $\theta\varkappa$ 9, in plano $\phi\pi$, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.

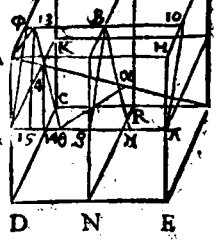
a 15. *vndecimi.*



INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum $\beta\theta\varkappa$, siue planum $\phi\pi$, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano $\phi\pi$, recta coniuncta θ 4. extendatur vsque ad rectam φ 10 in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, π P, b planum MP, parallelum est plano AG, (quod & rectæ PK kM, parallelæ sint rectis GB, BA) c secatque cubum bifariam: ideoq; per centrum α, transit, per ea quæ in scholio propos. 39. lib 11 ostensa sunt: si per rectas α 4 A, θ 4 13. planum extendatur, d fiet $\alpha\theta$, A 13. communes sectiones planorum MP, AG, parallelæ: Ac proinde triangula $\alpha\theta$ 4. 1 α 34. æquiangula erunt: e Erit-que vt α 4. ad 4 A, ita θ 4. ad 413. Quare cum α A, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostendimus: eodem modo erit secta θ 13. in 4. Rursus plano NZ, per centrum α, transeunti parallelum ducatur planum per punctum 4. ex schol propos. 15 lib. 11. secans $\phi\pi$, f recta 4. 14. f Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. g Rectæ igitur αA, ρM, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρM. in 14. secta erit extrema ac media ratione

b 15. *vndecimi.*

c 32. *vndecimi.*



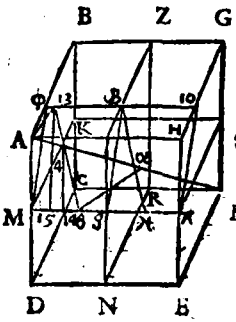
d 16. *vndecimi.*

e 4. *sex.*

f 15 *vndecimi.*

g 17. *vndecimi.*

in infinitum



minusque erit segmentum 14M, ideoque æquale minori ρθ, ipsius Mρ. Quare cum ex ϱ14. maiori segmento ipsius ρM, auferatur ϱθ. minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ϱ14. diuisa in θ, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ϱθ. Postremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, a secabuntur rectæ θ13. θ15. proportionaliter; Ac proinde & θ15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit θ14. b Quapropter erit vt ϱθ, maius segmentum ad θ14. minus ita θ14. maius ad 14.15. minus: Vt autem θ14. ad 14.15. ita est tota θ15. ad θ14. maius segmentum. Igitur erit vt ρθ, ad θ14. ita θ15. ad eandem θ14. Ac propterea rectæ ρθ, vel ϱκ, & θ15. æquales erunt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelum per 14. ductum, secantur plano φπ, c erunt communes sectiones βϱ, 14. parallelæ, ideoque & 13.15. βρ, parallelæ erunt, d angulusque externus βρκ, interno 13.15 θ. æqualis. Cum igitur & latera βρ, ρκ, lateribus 13. 15. 15 θ, sint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ βκ, 13θ. Ac proinde & earum segmenta maiora θκ, θ4. (Ostensum enim est θκ. esse maius segmentum ipsius βκ) æqualia erunt. Eadem arte & β4, ipsi βγ, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basin βγ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem θκ, βγ, æquales erunt κ9. β9. Æquilaterum ergo est pentagonum β4.θκ9. quandoquidem βγ, θκ, rectæ æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt YV, ZV, πϱ, Mϱ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipsi βθκ, similia, & æqualia construantur; (ita enim ad Mπ, duo huiusmodi triangula vides βθκ, δθκ) & ipsorum beneficio duodecim pentagona ipsi β4. θκ9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirum in singulis, octo vero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & 9 in semidiametris Aκ, & Hκ, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cum non omnes eius anguli vel in angulis, vel

a 2. *sext.*

b 2. *quartidecimi.*

c 16. *undecimi.*

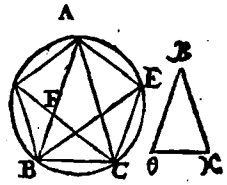
d 29. *primi.*

e 4. *primi.*

vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

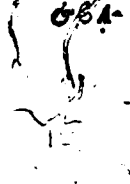
QVOD autem triangulum βθx, cuius basis θx, maius segmentum existat vtriusque lateris βθ, βx, extrema ac media ratione diuisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles ABC, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuisique anguli ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum aequilaterum & aequiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentque se mutuo rectæ AB, CD, in F. a *Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentum est AF, aequale lateri BC:* b *Erit vt AB, tota ad maius suum segmentum BC, ita βθ, tota ad maius suum segmentum θx; Eodemque modo, vt tota AC, ad maius segmentum CB, ita βx, tota ad maius segmentum xθ: Est autem quoque vt AB, ad AC, ita βθ, ad βx, vtrobique enim est proportio aequalitatis. Triangula igitur βθx, ABC, proportionalia habentia latera, aequiangula sunt aequalesque erunt anguli θ, B; Item x, C, & β, A; propterea que vterque angulorum θx, duplus erit anguli β; & triangula βθx, ABC, similia.*



a 8. tertii dec.

b 2. quartidecimi.

PENTAGONVM *vero β 4 θ x 9, aequilaterum, esse quoque aequiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum βθx, circulus β A θ x B, qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex iis, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum aequiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum aequilaterum & aequiangulum β A θ x B. Quoniam igitur tam rectæ A θ, A β, quam rectæ 4 θ, 4 β, aequales sunt rectæ θx, cum & β 4 θ x 9,*



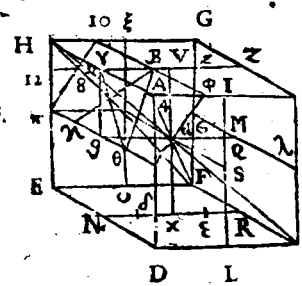
& β A θ κ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A. θ 4, quam duæ β A, 4 β, æquales quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β θ κ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ κ 9, equiangulum est.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ε; intelligaturque connecta recta γ ε, a *æqualis existens & parallela lateri cubi V X quod & V γ, X ε, æquales sint & parallelæ. Quamobrem anguli β V X, rectus est:* b *rectus quoque erit angulus β γ ε, ad γ, constituius:* c *Ac proinde quadratum diametri β ε, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ε, nempe Dodecaedri & cubi.*

a 33. primi.
b 29. primi.
c 47. primi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, d *cum sit ut Y X, ad β V, ita Y Z, dupla ipsius Y V, ad β γ, duplam ipsius β V: Sit autem β V, minus segmentum ipsius Y V, secta extrema ac media ratione. Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Y Z, secta extrema ac media ratione: composita vero ex Y β, γ Z, hoc est, recta β κ (quæ dupla fuit ostensa ipsius Y β, idemque composita ex Y β, γ Z, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione β γ, esse latus Dodecaedrie & β κ, seu β θ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 θ.*

d 15. quinti.
e 8. quintidecimi.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus; Dodecaedri

caedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi YZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Yβ, γZ, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim YZ, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. a *Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris YZ, sectι extrema ac media ratione: Erit βθ, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris YZ, & aequalis duabus Yβ, γZ, simul, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumscripti.*

a 8. tertiae dec.

IV.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

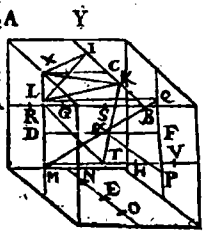
IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppositi, b *aequalis est rectae VX (quod & βV, δX, aequales sint, & parallelae) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.*

b 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectae lineae parallelae agantur nusquam inter se conuenientes, & harum mediatates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, k: L, M: N, O: P, Q: R, S: T, V: quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus conectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IkL, IkQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVk, TVO, ILR, ISQ, kTL, kQV, OPV, OTM, NSP, NMR: quorum priora duodecim subtenduntur, duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectae XC, XI, Xk, Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, aequalia sunt lateribus XC, Ck, trianguli XCk, & anguli contenti, recti, quod XC, c 29. primi.

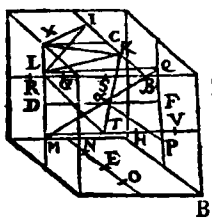


para-

a 4. *primi.* parallela sit ipsi AY: *a* Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per definit. 4. lib 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK, Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, trianguli LXK, &

b 4. *primi.* anguli contenti, recti; *b* æquales erunt bases LI, LK. Rursus *c* quo-

c 7. *primi.*



niam quadratum rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc

d 4. *tertiidecimi.* tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI, (*d* Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cum eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectæ KI, ex scholio propos 4 lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum LI, Ik, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum IkL, lateri cubi AG, substratum.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera Ik LM, NO, PQ RS, TV, æqualia sint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo kTL, latus kL, commune est triangulo IkL, & latus kT, triangulo TVk, & latus TL, triangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim trangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

DIA-

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela est, & aequalis, quod & DL, FQ, parallela sint, & aequales: b manifestum est, quadratum diametri QM, aequale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est, c cum angulus MLQ sit rectus, quod & LDF, sit rectus.

a 33. primi.
b 47. primi.
c 29. primi.

II.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum coniungant centra basium cubi oppositarum, aequales sunt lateribus cubi, sesque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, dividunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F. FQ, trianguli α FQ, aequalia sunt lateribus α F, FP, trianguli α FP, angulosque comprehendunt rectos, d aequales erunt rectæ α Q, α P. Eademque ratione aequales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

d 4. primi.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI. sit maius segmentum rectæ CY: e sit ut CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY: f sit queque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, esset maius segmentum rectæ βY, esset βY, ad illam rectam, ut CY, ad CI, hoc est, ut βY, ad KI, diuersum ab illa recta. quod est absurdum.

e 15. quinti.
f 2. quarti.

IV.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

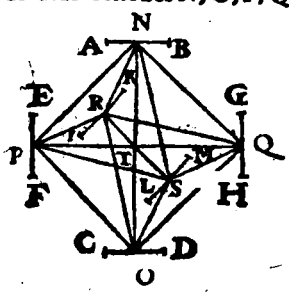
SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se aequalia, angulosque alternos habentia aequales ex 4 propos. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt: g Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

g 15. undecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt: ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ: OP, OR, OS, OQ, PR, PS: QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN: RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum sint rectarum æqualium dimidia) angulosque continent, rectos, ut dictum est a) Æquales erunt bases NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & binæ duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt & inter se æqualia: Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptum est, cum eius anguli resideant in binariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



a) 4. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T. centrum Icosaedri præcedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS sibi inscripti. Quare T. centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

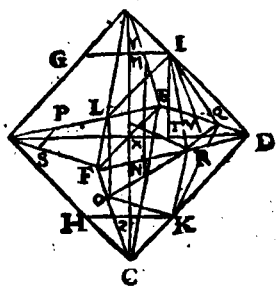
PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATVM octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC: DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD: AF, AE: CE, CF, iuxta angulos oppositos A, G quadrati AECF: Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantum duo latera: at vero latera AB, AD: CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuere) EB, ED: FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD (Nam

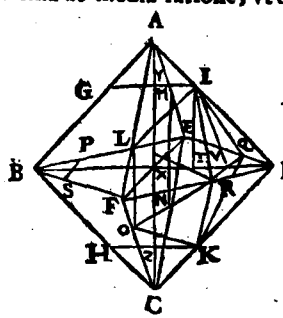
latera

latera BA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos E,F, iam accepta sunt) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K L, M, N, O, P, Q R, S, & a singulis ad quinq; proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere DF, quod cũ tribus DE, DA, DC, pyramidem constituit in vertice D, est commune triangulis octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinq; laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, sese in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 11. propos. 14 lib. 13 quarũ AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Quoniã ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, trianguli DRI; (Sunt enim DQ, DR, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri ADE, ADF; a erunt bases IQ IR, æquales. Deinde cum à sit, b vt BG, ad GA, ita DI ad IA; c erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipsi EF, parallela; d Ac proinde vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita AY, ad YI (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentũ est rectæ XA. Nõ aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualem; ideoq; GI, rectã bifariam in Y, similiterq; QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehẽdant rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; e æquales erunt bases



a 4. primi.
b 1. quarti decimi.
c 2. sexti.
d 4. sexti.
e 4 primi.

bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostendentur rectæ Hk, PS, MN, LO, quæ nimirum subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturque duo segmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. libri 13.



a 34. primi.

b 34. primi.

c 4. tertii. dec.

d 47 primi.

e 47. primi.

f 8. primi.

Est autem XY, rectæ XV, æqualis (cum ambæ sint maiora segmenta æqualium rectarum XA, XD) *a* & YI, rectæ XT: erit XT, maius segmentum ipsius XV, & idcirco TV, segmentum minus, eiusdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT (*b* cum & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV, minoris segmenti, *c* tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris segmenti: Atque adeo quadratum rectæ IV, *d* æquale existens quadratis rectarum IT, TV, triplum est eiusdem quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cum RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV: erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: *e* At quadratis rectarum IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, *f* quod anguli IVR, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, VR: IV, VQ, & subtensi basibus æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR: Ac propterea cum eiusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR: Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula similem situm cum IQR, habentia, nempe kQR. GIL, GIM: GPS, HPS: NHK, OHK: RLO, SLO: PMN, QMN, atque adeo triangulo IQR. æqualia, cum latera omnium sint æqualia inter se, quod tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus subtendat angulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis minoribus lateris octaedri: duo vero reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulis duobus segmentis laterum Octaedri, maiore & mino-

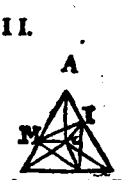
minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, subtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehensos minoribus segmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia sunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic vero segmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non secus latera I R, G L, æqualia erunt. Æqualia igitur sunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propos. 8. lib 1 Atqui I Q R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur, reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet G M P, in A E B, H N P, in B E C; K N Q, in C E D; I M Q, in A E D; G L S, in A F B; H O S, in B F C; K O R, in C F D; I L R, in A F D, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorũ quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi (vt vides in quinq; R Q I, R I L, R L O, R O K, R K Q, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGTVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo æquilatero A D E, maius segmentum lateris A D, sit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, ostensa æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti A I, a cum quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perspicuum est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmenti minoris A I. a 47. *primi.*

COROLLARIVM II.

RVRSVS fit, cum octo Icosaedri bases collatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namq; Octaedri superioris triangulũ A E D, in quo cõllocatũ est triangulũ Icosaedri I M Q, sitq; C, centrũ trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D: C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia sunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q (quod hæc latera sint ex centro, &



tto, & maiora segmenta æqualium rectarum) angulosq; comprehendant æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in schol. propos 1. lib. 13. ostendimus. Erunt bases CM, CQ, æquales. Nō secus demonstrabimus CI, æqualem esse lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficile est deniq; ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atq; sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunq; duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia sint lateribus XF, FO, trianguli XFO. (Nam XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterum æqualium Octaedri sectorum extrema ac media ratione) angulosq; complectantur æquales, semirectos videlicet (cum AC, EF, diametri sint quadratorum ABCE, EAFC: ac proinde, per demōstrata in scholio propos 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam
a 4. primi. secent.) a Æquales erunt & bases XG, XO. Eodemq; argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoq; est Icosaedri.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN Octaedro Dodecaedrum describere.

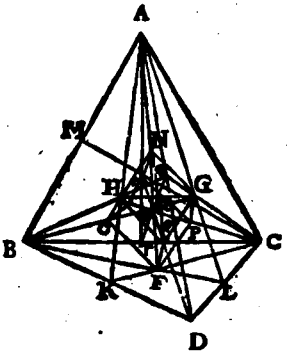
b 16. quintidecimi. c 5. quintidecimi. b INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; c & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos 16 huius lib. Manifestū est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum describimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum describere.

d 15. quintidecimi. DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi; sitq; eius centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, d quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S. Secetur quoq; recta ex solidis angulis per centrum E, demissæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris,

tris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis coniunguntur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpendiculares sint ad BD, CD. ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarũ æqualium BD, CD, à centro F) angulosq; contineant rectos, ex 3 defin. lib. 11. [a] Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, tranguli ANG (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æqualium ABD, ACD) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [b] Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostẽdentur æquales rectæ QG; QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namq; FT, FK; distantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH. semidiametri triangulorũ æquilaterorum æqualium ABC, ABD) angulosq; contineant æquales: [c] Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

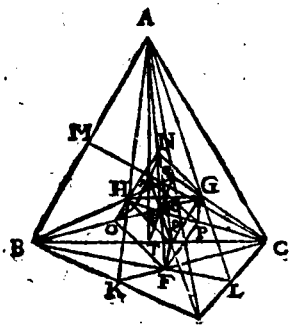


a 4. primi.

b 4. primi.

c 4. primi.

ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, nõ cocuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur, recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propositionis 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non cocuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit



ST, per E, centrum pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. *a* erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur, *b* æque idcirco HG, parallela est lateri BC, secatque latera TS, CS, trianguli TSC (quod quidem pars est trianguli BSC) proportionaliter; ideoq; & RS, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE Rursus ex DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4 recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atq; idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli ABD, proportionaliter secentur, *d* recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitq; latera ES, ED, trianguli DES (quod quidem pars est trianguli AED) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur vtraq; HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, a rectis HG, NQ; Atq; idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem sese puncto interfecabunt. *e* Quare in eodē sunt plano, propterēaq; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ; Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

a 18. *quartidecimi.*

b 2 *sexti.*

c 15. *quartidecimi.*

d 2. *sexti.*

e 2. *undecimi.*

CVM ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atq; adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC. ex coroll. propos. 4 *lib.* 6. *f* Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Est autem SH, tertia pars ipsius SB: Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC, Haud secus ostendemus NQ tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ æquales. Ac proinde cum subtendātur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; *g* Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quæ circa cum ipsi sint quatuor rectis æquales,

f 2. *sexti.*

g 8. *primi.*

vt osten-

vt ostendimus ad propos 32. lib. 11. recti erunt, ideoq; quadratum erit N Q. Eademq; ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent, qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G. H I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q. in bisariis sectionibus perpẽdicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus, factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos 2. huius lib. habentq; eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelę sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2 huius lib. *a* cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD; *b* erunt quoq; triangula EGH, BCD, per illas rectas ductæ, inter se parallela, & sic de cæteris) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoq; ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scolio propos 14. lib. 11. Quare cum prędictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaq; pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 2. *sext.* b 15. *vnde-cimi.* d 17. *vnde-cimi.*

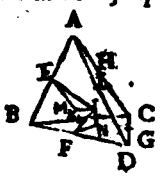
COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse, centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi N P, O G, P H, Q I, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, pe[illegible], centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

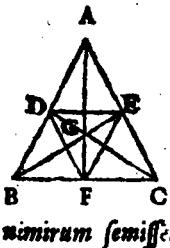
INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum basis G N H Q, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat: Recta R S, dupla ipsius E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi R S.

LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum pyramis 

ABCD, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares dimittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes, sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. libr. 11.

a 4. primi. *a Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituentur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.*



SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis Octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri;

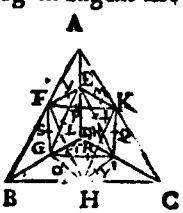
b 2. sexti. *b erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF, quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 19. PPOPOS. 19.

In data pyramide Icosaedrum describere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inscribatur Octaedrum E F G H I K, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum Octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt E G, E K, H K, H G; K F, K I; G I, G F; F H, F E; I E, I H, in punctis L, M, N. O, P, Q. R, S, T V, X Y Nam si quilibet horum punctorum cum quinq; proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptū erit Icosaedrū in dicto Octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habēs omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum Octaedri. Cum ergo hæ ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK. KF; In ABD, latera E F, F G, G E: In B D C, latera G H, H I, I G: In A D C, deniq; latera I K, K E, E I Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin 31 lib. 11 cuius quidem quatuor bases MXQ ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum



a 2. *quartidecimi.*

PROBL. 20. PROPOS. 20.

In data pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ *b* inscribatur Icosaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in cētris viginti basium Icosaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus: consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basib. pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde *d* quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus

b 19. *quindecimi.* *c* 5 *quintidecimi.* *d* 8. *quinti.* *dec.*

pyra-

a 18. quintidecimi. pyramidi inscriptus, a quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorū bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

xiij. ## In dato solido regulari sphæram describere.

Ex centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoq; æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter à centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quolibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 19. huius lib. est manifestum. Nam, vt propria solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: qua quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum b 16. quintidecimi. *Octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscepti inscripta:* c 5. quintidecimi. *b In Octaedro enim describitur Icosaedrum constituens; duodecim sunt* d 8. quintidecimi. *anguli in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde c Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro d describitur cubus, cubus octo anguli,*

guli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident: ac propterea & cubus ipse in Octaedro descriptus est.
a Denique in cubo pyramis includitur, qua ideo in Octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis. a 1. quinti-decimi.

NEQVE vero praetereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphaera comprahendi. b Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, c conuenientque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri: liquido constat sphaeram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum sphaera illius superficies per horum solidorum angulos incedat. b 1. quinti-decimi. c 8. quinti-decimi.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium Octaedri propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesque quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum: & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descriptimus. At vero posterioris vnica propositione, quae arte in quouis solido regulari sphaera describatur docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ solidorum regularium sibi mutuo inscriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Francisco Flussate Candalla adiectum, & de quinque corporibus.

LIBER TERTIVS.

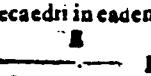
QVEMADMODVM *libro 14. tradita sunt comparationes quamplurima figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphæra descriptarum, quarum quidem descriptionem lib. 13. expasuit Euclides; ita etiam Franciscus Flussas Candalla hoc lib. 16. inter se comparat easdem figuras regulares sibi mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inscriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15 quam quartodecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri possit tractatio hac quinque corporum regularium, si liber hic decimussextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D: diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cum enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docui-

docuimus, Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra: Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, vt AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris G, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris segmenti AE ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

Linea perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

In pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, subtendente angulum A, secari in G extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ secet BE, in H: quoniam BE, recta lateri CD, ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, *a* secabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: *b* Atqui AD, in H secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentum DH. Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. sex.
b 18. sextidec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris,

lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alii triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, constituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos 19. lib. 13. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere

triangulum Icosaedri GHI, hoc est rectam BK, transire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo ABC, per idem coro l. Quare HO, recta æqualis est rectæ FH, maiori segmento rectæ FE, seu DF, ipsi æqualis: (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli comprehensos; a ideoque æqualia sint.) b Est autem & NH; æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, c propterea quod PH, DF, parallelæ sunt rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO. composita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, d secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde cum tres parallelæ BC, NO, DE, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema a[illegible]ione; Recta autem AM, ex iis, quæ demonstrauimus [illegible] propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam AM, transire per puncta GH. Haud secus ostendemus Bk, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB: Atque idcirco rectæ Bk, CL, AM, suis sectionibus producent triangulum Icosaedri GHI.

a 4. pri.
b 34. primi.
c 2. sex.
d 5. tertiidec.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis est rectæ DF, seu rectæ FE, cuius maius segmentum fuit FH, hoc est FO, illi æqualis: Erit quoque FO, maius segmentum rectæ AF: e ac proinde tota AO, secta in F, extrema ac media ratione: f Est autem vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob

c 5. tertiidec.
f 2. sex.

GH, ob triangulum AHO; & vt AH, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, sintque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia vero est *a* vt AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris AB, maiusque reliqua BP; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione; atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero singula latera trianguli PQR, cum subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, *b* æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex iis, quæ ad propos. 4 lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, *c* secans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. quarti decimi.

b 4. primi.

c 2. sex.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; *e* sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC,

d 2. sex.

e 34. primi.

a 2. sext. in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde a quia FE, FS, similiter secantur: secatur autem FE, extrema ac media ratione, secabitur & FS, in T,
b 34. primi. extrema ac media ratione; maiusque segmentum erit FT, recta b æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti maius est segmentum rectæ FS; quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, basin Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ. dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib 2. quod PQ. recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; erit PQ. potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP. dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apo-
c 13. tertii dec. tomen. c Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, d cum diametro potentia sit commensurabile. e Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit:
d 6. tertii dec. Atque adeo f cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104.
e 6. dec. lib. 10. Apotome.
f 6. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri, duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex corol. propos. 4. lib. 6. a Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti. a 2. sexti

DENIQVS quia diameter sphæræ, seu octedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra basium oppositarum vt in coroll. propos. 3 lib. 15 diximus: patet latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. b 14. undecimi

PROBL. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, describa sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. libr. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; e existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius segmentum rectæ esse, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. c 5. sexti decimi

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propos. 14. libr. 15. demon-

A
B
C

A ——— strata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum
B ——— sit lateris cubi A; & C latus Dodecaedri, per ea,
C —— quæ in scolio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus,
minus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ in propos 18. lib. 5. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC) *a* Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos 47. *lib.* 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

a 20. *sexti.*

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus, quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15. *b* Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.

b 8. *sexti dec.*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosae-

Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta (qualis fuit ibi recta GI, subtendens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehẽsum) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare a cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmẽta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. a 47. primi.

THEOR. II. PROPOS. II.

LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octedri ABCDE, cuius basis quadratũ ABCD, triangula vero ad E, verticem, ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratũ cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14 qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: b Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9 & quadratum rectæ LM, nimirum KL, MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, descriptum; c cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.

b 2. sexti.

c 33. primi.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum latus Dodecae[illegible] cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturqu[illegible]dec[illegible], & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, vt docuimus [illegible]one p[illegible]os. vltimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potent[illegible] quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema

ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem Octaedro inscripti: eius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib 15. eiusque scholio: Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diameter octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quæ ad propos. 14. libr. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoq; idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. *a* Atqui diameter sphæræ seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat

a 14 *tertii dec.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionē habet, quem minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. libr. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus (quod tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales) liquido constat, proportionem latus cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionem maioris segmenti ad minus duplicatam.

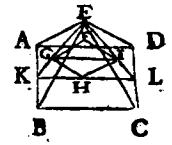
PRÆ-

PRAETEREA, cum constet ex coroll 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra, F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo describitur, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. expc suimus, Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis GI, Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 18 libr. 14. a Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propos. 4 lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit vt EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI, idcoque cum EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. b Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.



a 2. sexti

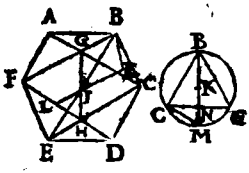
b 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrum

centrum I; triangula vero oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib 13. BCG, EFH, quorũ centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10 lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per ſcholium propoſ. 14. libr. 11. caderque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, vt conſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque IK, IL, ſemidiametri æquales. Coniuncta autem KB, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis; erit angu-



a 74. *primi.* lus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. *a* Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri BI, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarũ rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris BK, KI, deſcriptorum.

b 15. *tertiidec.* Ablato ergo quadrato diametri cubi KL (*b* quod triplum eſt quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icoſaedri BE, remanet, quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extenſaq; BK, vſque ad M, quæ ſecet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta perpẽdicularis eſt ad CG, per ea, quæ oſtendimus

c 12. *quartidecimi.* in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. *c* erit recta BC, potentia ſeſquitertia rectæ BN: Vtautem BC, ad BN, ita eſt BM, ad BC, quod BC, ſit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propoſ. 8.

d 31. *tertii.* lib. 6. *d* cum angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens, Recta igitur BM, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, ſeſquitertium eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HINC ſit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambien-

bientis. Ostensum siquidem est quadratum diametri Icosaedri BE. æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG. circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, *a* duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. libr. 13. Liquet, latus dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplũ potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaq; latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum. *a* 14. *tertii decimi.*

THEOR. 17. PROPOS. 17.

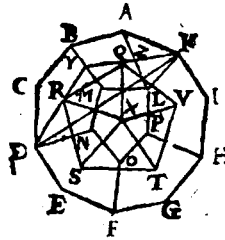
DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ libr. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circumdantis: *b* Potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basin Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & sui ipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basin Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum. *a* 13. *tertii decimi.*

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdē lineæ inter centrum pentagoni & latus eiusdem positæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti componētia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. libr. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basium BM, per cētra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2 propositionis 10. libr. 13. conuenient in puncto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K; secabitur a perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione.



a 2. *sexti-decimi.*

Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ minus segmentum perpēdicularis KY, ad rectam QY inter centrum Q & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15 latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositum describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) *b* parallela erit QR, ipsi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, simile per coroll propos. 4 libr 6 *c* Quamobrem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. *d* Vt autem DK, tota ad totam KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KY, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmētum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus &c. Quod erat demonstrandum.

b 2. *sexti.*

c 4. *sex.*

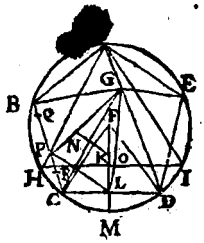
d 2. *quartidecimi.*

THEOR.

THEOR 19. PROPOS. 19.

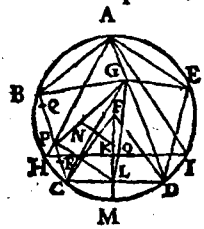
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum A B C D E, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinq; latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex iis quæ in propos 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur A H I. Quoniam igitur arcus A B C, A E D, æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus A B H, A E I, cum sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus H C, I D, æquales; propterea q; rectæ H I, C D, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur F K L, a secans rectas H I, C D, bifariam in K, & L; coniungãturq; rectæ F C, F D. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum G B C, G C D, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur G N P, G O L, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta G O, in punctum L, in quo diuisa est C D, bifariam, cadet. Iunguntur autem centra N, O, recta N O quæ, vt constat ex demõstratis in propos 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro scripti. Deniq; B P, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento b Q, ex toto latere B C, reliquæ C Q, tertia pars detrahatur C R. Dico reliquam Q R, æqualem esse lateri Dodecaedri N O. Cum enim F L, perpendicularis à latere trianguli æquilateri H I, secetur in K, extrema ac media ratione (quod F L, hac ratione secta faciat maius segmẽtum æquale perpendiculari F K, per coroll. propos. 2. lib. 14.) fit autem maiori segmento F K, æqualis recta K M, per coroll. propos 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos 5. libr. 13. maius segmentum K M, sectum quoque in L, à minori segmento K L, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F L; minore dimidiæ suiipsius segmento L M. Quoniam vero iuncta P L, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, descri-



a 3. tertii.

descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo lib 4. ideoque similis illi: erunt triangula FCD, FPL (si recta ducerentur FP) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare vt FG, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP; Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmẽto dimidij ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmẽto dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit PQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris NO (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14) & parallelæ sint PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. *b* Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autẽ GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR, per cõstructionẽ; Ac propterea earundẽ 2. QR) æqualis erit QR ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. *Si dimidium rectæ*, lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

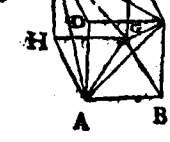


a 2. *sexti.*
b 4. *sexti.*

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, verunces vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non residunt quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED, super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis AEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. definitione libri vndecimi, cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & simili-



similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basin habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per coroll 1. propos 17. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. a Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

a 32. undecimi.

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. b Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

b 32 quartidecimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt propos. 3 lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib 11. cum contineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per corollar. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) z Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum (cum octupla proportio sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet

bet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD: Atq; idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripto octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 21. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum: octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. *a* Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, *b* & pyramis octaedri sibi inscripti dupla: Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2 sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum: atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

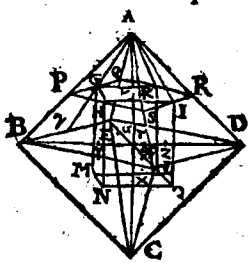
a 20. *sexti. dec.*

b 21. *sexti. dec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum cõstituentes PQRS, vt in propos. 4. lib. 15. est demonstratum: *c* quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. Propos. 4. lib 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14 lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS; *d* (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter: erunt & AF, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata recta.um æqualium



c 15. *undecimi.*

d 19. *undecimi.*

e 47. *primi.*

AP, AQ,

AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP, AV, VQ quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ propterea quæ & rectæ ipsæ VP, VQ, æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR, VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS. Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo descripti, per schol. vltimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt constat ex demonstratis in propos. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO; Necnon & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib. 14. a Cum ergo plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: necnon VT, XT. Recta igitur VX, conjungens centra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 1. propos. 15. lib. 11. rectæ centra basium cubi oppositarum connectentes sese bifariam secent in centro. Iam vero quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autem fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. cum vtriusque eadem sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX: b Est autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & basis PQRS, dupla sit basis GHIK: illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6 triangulis illius) c proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterum, quod & recta Aγ, d proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 24. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet,

a 17. vndecimi.

b 6. vndecimi.

c 8. duodecimi.

d 2. sex.

habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. *a* Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

a 11. *sextidec.*

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; *b* Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis *c* triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

b 23. *sextidec.*
c 20. *sextidec.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim GH, centra duarum basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. li. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur BS, CS, *d* parallelæ erunt BC, HG, & per coroll propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo BCS, simile. *e* Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita CS, ad

d 2 *sex.*
e 4. *sex.*

CS, ad GS: *a* Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla c 18. *quartidecimi.*
erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est: Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis GNHQ cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis: GH, vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera. (Est enim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla:) Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum vtrobiq; sit proportio dupla. *b* Igitur erit quoque b 22. *sexti.*
diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autē BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoq; latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, *c* proportionē habent c 33. *undecimi.*
laterum homologorū triplicatam. Cubus igitur circumscriptum ad cubum inscriptum pyramidi ABC, proportionē habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, *d* cum cubus ad pyramidem d 20. *sexti decimi.*
inscriptam proportionem habeat quā 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubū sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atq; adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN Octaedro ABCDEF, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases octaedri

octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cum enim, vt ex demonstratis in propos. 16. libr. 15. liquet, octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur: sint duæ bases Icosaedri G H I, K L M, in duabus basibus oppositis octaedri A D E, B C F; atque ex N, centro octaedri, necnon & Icosaedri (idem enim vtriusque est centrum, per coroll. 3. propos. 16. libr. 15.) ad basin A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propos. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque est trianguli G H I, per coroll. 2. propos. 16. lib. 15. Cum ergo plana opposita A D E, B C F, parallela sint, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per scholium propos. 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo est & octaedri & Icosaedri sibi inscripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icosaedrum in 20. pyramides æquales eiusdem altitudinis N O: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basin, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. *Erit prisma*; cuius basis A D E, & altitudo O N, æquale erit bus pyramidibus octaedri: *At vero prisma, cuius eadem basis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum est prismatis*, cuius basis eadem A D E, altitudo vero O N, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis A D E, & altitudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit & tertia pars prismatis super basin A D E, & sub altitudine O P, constituti: prisma videl. cuius basis tertia pars est trianguli A D E, altitudo vero eadem O P. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem A D E, & sub altitudine O P, cum per ea, quæ docuimus ad propos. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, vt bases. Quare duo prismata, quorum vnius basis A D E, & altitudo O P, alterius autem basis tertia pars basis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia sunt octaedro A B C D E F. Non secus demonstrabimus prisma cuius basis G H I, altitudo vero O P, æquales esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea que triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituit, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I,

GHI, & sub altitudine OP, constituti: prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius vero basis tertia pars basis GHI & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. libr. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes (cum vnius basis sit ADE, nempe tres tertiæ partes ipsius ADE, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE) ad bases prismatum Icosaedro æqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes (cum vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipsius GHI, continens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI.) Sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI; ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. libr. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cum sex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipsius GHI (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinq; bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

15. quinti.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam

habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaed i oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit AC; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, la-

FG teris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectam DE. Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppositarum; Erit DE, diameter Dodecaedri in Icosaedro ABC, descripti, cum coplet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet ABC: Dodecaedro diametri AC, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum ABC, descripto, cum vtriusque eadem sit diameter: & Dodecaedro diametri DE, intra Icosaedrum videlicet ABC, constructo; Proportio primæ magnitudinis nempe Icosaedri ABC, ad tertiam videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosaedro ABC, descriptum. Cum ergo Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi (a Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icosaedrum ABC, eiusdem diametri est, vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur erit Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, vt F, latus Icosaedri ad G latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrū diametri DE, in Icosaedro videlicet ABC, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 7. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri DE, componi quoque ex proportione F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC. ad rectam DE. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum pro-

a 11. quartidecimi.

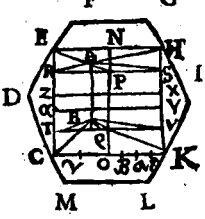
proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi : At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

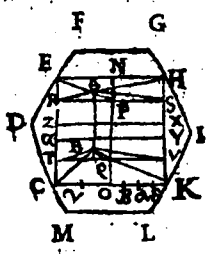
QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK: His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinq; planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH. *a* triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABK. LI. per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, *b* æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huiſcemodi ſimilia, & æqualia, per 10 defin libr. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, qualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit à CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati late-

a 4. primi.



b 4. primi.

ris cubi segmẽtum minus existit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpẽdiculares AP, BQ, demissæ in planum EK, vt constat ex demonstratis propos. 17 lib. 13. (Eximunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas



LN, VX, VR, XS, figuræ propos 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius segmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propos. 17. libr. 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT. SV, maiora segmẽta laterum EC, HK; atq; adeo ER, CT, simul, & HS, KV, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, constituantur duæ Pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propos. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales

a 33 *primi.* sint; consistentque extra solidum ABTVSR. *a* Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT. æqualis est, & parallela, cum

b 15. *undecim.* coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT. *b* parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. libr. 1. cum latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, prisma est, ex definitione.

IAM vero, cum ostensum sit rectas HS KV, minus segmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriusque HS, & KV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY. tertia vero pars sit XY, ducanturq; XZY. *c*, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides

c 6. *duo decimi.* ERSHA, CTVKB, æquales sunt ostensæ; *c* vtriusq; vero earum dupla est pyramis super basem TX, & sub eadem altitudine PA, vel QB, constituta, *d* quod & basis TX, dupla sit basis CV, vel

d 1. *sexti.* RH; Æqualis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis sit ipsi VX, vt demõstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars

rectæ

rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. a quod & basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc prisma oppositum prismati ABTV-SR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoque à base cubi deficientem rectangulo αX, cõtento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinq; prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurgens parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorũ, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in C; Itemq; Cβ, maius segmentũ, & βK, minus bifariam in γ, δ; atque ex βK, abscindatur βε, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars minoris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB; & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmẽti; quia βk, maior est, quã dimidium maioris segmenti Cβ. Cum enim sit, vt Ck, ad Cβ, ita Cβ, ad βk; sit autem CK, minor, quam dupla ipsius Cβ, quod Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ipsius βK, hoc est, erit βK, maior, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota CK, ad maius segmẽtum Cβ, ita maius segmentum Cβ, ad minus βK; b erit quoque vt CO, dimidia

a 1. sexti.

b 15. quinti

ipsius CL, ad C γ, vel β ε, dimidiam ipsius C β, ita C γ, vel β δ, ad β δ, dimidiam ipsius β K; Ac proinde si C O, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ, vel C ε, & minus β δ. Quare & β δ, minus segmentum secabit β ε, maius segmentū extrema ac media ratione, vt demōstrauimus ad propos. 5. lib. 13. erit q; maius segmentum β δ, minus autem δ ε; Ac propterea rursus δ ε, minus segmentum secabit rectam δ K, maiori segmento β δ, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ε K. Deficit igitur C ε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi. C K, minore segmento ε K, rectæ δ K, vel sibi æqualis rectæ β δ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

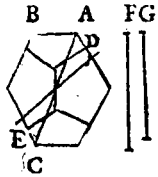
VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi *inscripti deficere duobus* parallelepipedis, quorum vnius *longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi*, altitudo denique *à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ*, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius *lineæ, quæ dimidiati lateris cubi* segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens quam cubus. altitudo vero à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelopipedū, compositum erit parallelepipedū prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidē & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, imo vero alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quā habet diameter Dodecaedri ad rectam centra

centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro A B C, diameter sit AC. & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At vero F, latus cubi. & G latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem; componetur per ea, quæ ad defin. 5 libr. 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ac diametrum DE, ex coroll. propos. 17. lib 12. a Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icosaedrum eiusdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diameterum DE, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaq; ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. quartidecimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitũdo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdẽ segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

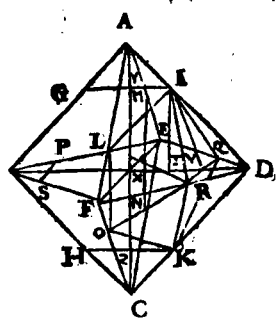
QVONIAM in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadẽ pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus aũt pyramidis, in qua de-
a 25. *sextidecimi.* scribitur, nona pars est, a cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, reperta figura propos. 16. libr 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum componẽtia esse IOR, KQR,

KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLQ, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABC DEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri QR, altitudo vero IT, maius segmentum semidiametri AX. Cum enim in quatuor basibus Octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum solidum Octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; tot manebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib 12. cum earū altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum AX, secta est à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; secta est CX, à recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducantur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, a erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrū prædictum; ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ (Cum DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ; ideoq; quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7 libr 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos 7. lib. 12. pyramidis IDQR,



a 34 primi.

IDQR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parall. lepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde Octaedrum superabit Icosaedrum dicto primate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. libr. 13. constet, si Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: [a] Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet IT, seu YX: Fit, vt Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis; cui inscribitur (*b quod Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri*) superet duplum Icosaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. libr. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramidis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

a 31. *sext.*

b 21. *sextidecimi.*

DE QVINQVE CORPORVM REGVlarium descriptione in data sphæra ex Pappo Alexandrino.

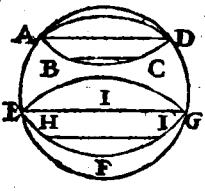
QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde vero eadem à sphæra comprehendi, nova demonstratione confirmauit; non erit alienum operæ, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cum eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam constructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, non tamen propterea

pterea ordinem Euclidis peruertertere censeri possumus: quippe cum propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant: vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. Incitandis autem Theodosij propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, datæq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli ABCD, EFG: sitque primum in ABCD; data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur vt in scholio propos. 18 libr. 11. docuimus per diametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, a *faciens in sphæra superficie circulum AEGD. Quoniam igitur circulus AEGD, circulum ABCD, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus AEGD, maximus, transibitque per polos circuli ABCD, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG,* b *cum paralleli eosdem polos habeant:* c *ideoque cum bifariam secabit, Communis ergo sectio EG, eius diameter erit:* d *qua cum sit ipsi AD, parallela patet propositum.*



a 1.1. *Theo.*

b 1.2. *Theo.*

c 15.1. *Theo.*

d 16. *vndecimi.*

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo EFG. e *Ducatur ipsi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD: cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus. Quoniam igitur vtraque BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione,* f *ipsa quoque BC, EG, inter se parallela erunt. Quod est propositum.*

e 31. *primi.*

f 9. *vndecimi.*

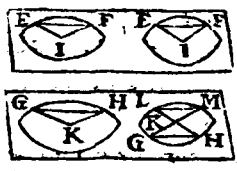
EADEM ratione recta B C, *ducetur in circulo* E F G, *parallela HI, à diametro* E G, *diuersa qua ipsi* B C, *æqualis sit, si modo* B C, *maior non sit diametro* E G. *Nam si in circulo* E F G, *ducatur ipsi* B G, *parallela HI, & æqualis, vt propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.*

LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes: erunt

erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis AB, CD, *describantur circuli, in quibus rectæ* EF, GH, *primum parallelæ sint, ad easdem partes centrorum* I, K, *auferanturque arcus similes* EF, GH, *ac tandem iungantur ad centra rectæ* EI, FI, GK, HK; *Dico tam* EI, GK, *quam* FI, HK; *parallelas esse. Quoniam enim arcus* EF, GH, *similes sunt, erunt anguli* IK, *æquales, ex scholio propos. 33. lib. 3.* a *Igitur reliqui anguli* E, F, re-



a 32. primi.
b 5. primi.

liquis angulis G, H, *æquales erunt.* b *Cum ergo tam ille, quam hi, sint inter se æquales: erit tam angulus* E, *angulo* G, *quam angulus* F, *angulo* H, *æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ* EF, GH, *parallelæ sunt, & rectæ* EI, GK, *ad easdem partes plani per* EF, GH, *ducti efficiunt cum ipsis æquales angulos* E, G: *erunt ex iis, quæ in scholio propos. 16 lib. 11. demonstrauimus,* EI, GK, *parallelæ. Eademque ratione* FI, HK, *parallelæ erunt.*

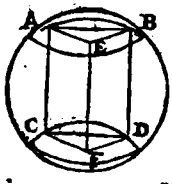
DEINDE sint EF, GH, *parallelæ, non ad easdem partes centrorum* I, K. *Dico tam* EI, HK, *quam* FI, GK, *esse parallelas. Producatur enim* GK, HK, *in gratur recta* LM. *Et quia latera* GK, HK *lateribus* LK, MK, *sunt æqualia,* c *anguloque ad verticem* K, *æquales continent:* d *erunt & bases* GH, LM, *& anguli* H, L, *æquales, &* e *anguli* G, M. e *Igitur arcus* GH, LM, *æquales sunt,* f *& rectæ* GH, LM, *inter se parallelæ. Ac proinde cum vtraque* EF, LM, *ipsi* GH, *sit parallela,* g *erunt &* EF, LM, *parallelæ inter se. Quia igitur* EF, LM, *parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes* EF, LM. *(Nam cum arcus* GH, *sit arcui* EF, *similis; erit quoque arcus* LM, *qui arcui* GH, *æqualis est, eidem arcui* EF, *similis) erunt tam* EI, LK, *hoc est,* EI, HK, *quam* FI, MK, *hoc est* FI, GK, *parallelæ. Quod est propositum.*

c 14. primi.
d 4. primi.
e 28. tertii.
f 27. primi.
g 9. vndeci.

LEMMA III.

Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parellarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD; *in quibus sint*



ſint duæ rectæ æquales & parallelæ AB, CD, ad eaſdem partes centrorum, quarum extremæ iungantur ad eaſdem partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt: a erunt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Quare cum AB, CD, ſint etiam æquales: b æquales quoque erunt ac parallelæ AC, BD, quod eſt primum. a 7. undecimi. b 33. primi.

EX centris deinde E, F, ductis rectis EA, EB, FC, FD, iunctaque recta EF: erunt tam AB, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c *Igitur & AC,* c 33. primi. *EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales.* d *Quoniam vero circuli* d 1. 2. Theo. *AB, CD, paralleli circa eoſdem polos ſunt,* e *recta per eorum polos ducta tranſibit per eorundem centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana* e 10. 1. Theod. *eorundem recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum ſphæræ incedet; ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta per eorum poles extenſa, quod eſt abſurdum. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum commune EF.* f *Igitur* f 10. 1. Theod. *EF, ad plana circulorum AB, CD, recta eſt:* g *Ac propterea & vtraque AC, BD, ipſi EF, parallela, ad eaſdem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.* g 8. undec.

HÆC demonſtratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, ſunt circulorum diametri, ſed iunctæ EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, vt patet.

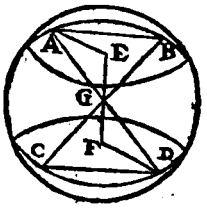
LEMMA IV.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extremæ puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extremæ puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in iis ductæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales.

Quoniam

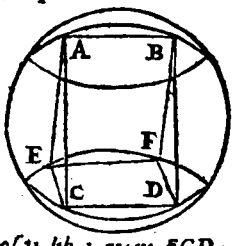
a 7. undecimi. *Quoniam enim AB, CD, parallela sunt: a erunt AD, BC, in eodem cum ipsis plano: ac proinde se mutuo intersecabunt, vt in puncto E: quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis EA, EG: FD, FG.* b *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem æquales sunt:* c *item tam alterni anguli BAD, CDA: quam alterni ABC, DCB: æquiangula erunt triangula ABG, CDG.* d *Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æquales,* e *erunt quoque tam BG, CG, quam AG, DG, inter se æquales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum æqua-*



b 15. primi.
c 29. primi.
d 4. primi.
e 14. quinti.
f 29. primi. *lium æquales: sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* f *ideoque anguli alterni EAD, FDA, æquales: erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia angulosque comprehendent æquales.* g *Igitur & bases EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales sunt.* h *Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallelæ AE, DF:* i *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF: erunt EF, FE, in rectum & continuum constituta propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus,* k *perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensa, erit F, centrum sphæræ,* l *propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro sphæræ absunt: inæqualiter vero abissent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.*

g 4. primi.
h 7. undecimi.
i 2. undecimi.
k 10. 1. Theod.
l 1. Theod.

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BCD, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, m *manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iungunturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui* n *arcus, ERD, CEF, semicirculi erunt,* n *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, recta CD, EF, æqua-*



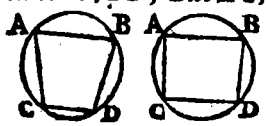
m 33. primi.
n 31. tertii.

les sunt, ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. a *9. undecimi.*
lemmatis AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin.
3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EG, EA, & ad vtramque FD, FB; vt
ostendimus, b *perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per* b *4. undecimi.*
EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: c ac c *8. undecimi.*
propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt: ideoq; ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB. ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, coniũgentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AE, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD, Dico AC, BD, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt AE, CD, d erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano, e fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ sint AB, CD: erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales: f ideoq; & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod si parallelæ AE, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & æqualia: erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC: parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.



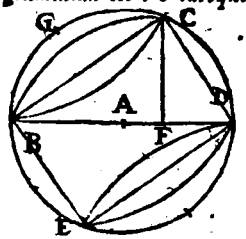
d *7. undecimi.*
e *1. 1. Theod.*
f *29. tertii.*

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. propos. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in E, vt BF, ipsius FD, dupla sit: erit BD, talium partium 3. qualium 2. est BF: ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungantur rectæ BC, DC, ductaque DE, ipsi BC, parallela, connectatur

a 29. primi. recta BE. a Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quam duo
b 31. tertij. BED, CBE, duobus rectis aquales sunt: b estque tam BCD, quam
BED, rectus: erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scho-
c 34. primi. lio propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelo-
grammum est: c idcoque recta BC, DE, aquales sunt. Diuiso iam

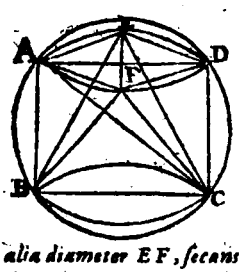


arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariam in G, quod ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque BF, CD, aquales sint. Polo igitur G, & intervallis GB, GE, circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob
d 2. Theo. aqualitatem tam arcuum GB, GC, quam
e 15. 1. Theo. GE, GD: d qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos. e Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam: erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cum aquales sint ostensa, erunt & circuli BC, ED, aquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continuo proportionales sunt: erit ex coroll. propos. 10 lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autem BD, ipsius BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeo & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusque diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.

His demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinq; corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

In data sphæra Pyramidem describere.



DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, aquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diametri sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, f qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones facient diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FG. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, esse aquilatera & aequalia.
f 17. 1. Theo.

qualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA, erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ; ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, describptum vt constat ex propos. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli: si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, 2 æquale sit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio propos. 47 lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF: b quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit: erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea quæ quadrati ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF; eidem BC, æqualis: ideoq; BCF, triangulum est æquilaterum. a 47. primi. b 47. primi.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum: est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: c quibus cum æquale sit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit: duplum quoq; erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea quæ recta CE, recta AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atque adeo & recta CF, quia ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 10. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum enim anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant. quod erat propositum. c 44. primi.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

In data sphæra octaedrum describere.

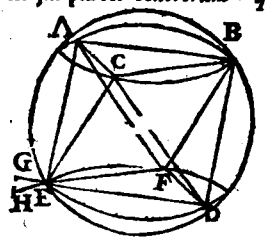
DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli

culi æquales & parallelæ *A B C*, *D E F*, ita vt sphæra diametri cuiuslibet eorum potentiæ sit sesquialtera. a Descripto autem triangulo æquilatero *A B C*, in circulo *A B C*, ducatur per primum lemma, recta *A B*, in circulo *D E F*, parallela & æqualis *D E*, ad diuersas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo *D E F*, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero *D E F*, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli *A B C*, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum *A B*, *D E*, æqualitatem; parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Cum enim parallelæ sint *A B*, *D E*, & anguli *A B C*, *D E F*, æquales; productis rectis *D E*, *F E*, ad *G*, *H*, erunt quoque anguli *A B C*, *G E H*, æquales. Cum ergo parallelæ sint *A B*, *G E*, & *B C*, *E H*, ad easdem partes plani per *A B*, *G E*, ducti: erunt quoque *B C*, *H E*, hoc est, *B C*, *E F*, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallelæ erit *D F*, ipsi *A C*. Connectantur denique *A E*, *E C*, *C D*, *D B*, *B F*, *F A*, vt in figura. Dico *A D*, octaedrum esse, hoc est, octo triangula *A B C*, *C A E*, *E C D*, *D C B*, *B F A*, *A F E*, *E F D*, *D F B*, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ *A B*, *D E*, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ *A D*, *B E* (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ *A E*, *B D*, æquales etiam erunt, ac b perpendiculares ad ipsas *A E*, *D E*. b Quadratum igitur ex *B E*, duobus quadratis ex *B D*, *D E*, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ *B E*, 6 quadratum ex *D E*, est 3. Nam cum per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli *D E F*: posito quadrato ex *B E*, 6. erit quadratum diametri circuli *D E F*, 4. At posito quadrato diametri circuli *D E F*, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri *D E*, est 3. quod ex coroll. propos. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex *B D*, [illegible] proinde quadrata ex *D E*, *B D*, æqualia sunt, & rectæ ipsæ *D E*, *B D*, æquales. Est autem *D E*, ipsi *A B*, per constructionem, & *B D*, ipsi *A E*, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ *A B*, *B D*, *D E*, *E A*, æquales erunt, constituentes quadratum *A B D E*, cum anguli ad *A*, *B*, *D*, *E*, recti sint ex eodem 4. lemmate.

a 2. quarti.

b 47. primi.

RVRSVS quia *B C*, *E F*, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum: erunt quoque iunctæ rectæ *B E*, *C F*, non ad easdem partes diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ *B F*, *C E*, æquales inter se, atque [illegible] *B C*, *E F*, perpendiculares, eruntque rursus, vt primo, quadratum [illegible] Non aliter ostendemus, *A C D F*, quadratum esse:



esse; cum iuncta recta A D, C F, *sint quoque sphæra diametri ex 4. lemmate &c. Cum ergo tria quadrata* AD, BE, CF, *constructa sint, super latera æqualia* AB, BC, CA, *nimirum super latera trianguli æquilateri, cum* AB, *latus sit quadrati* AD; & BC, *quadrati* BE; & CA, *quadrati* C F; *erunt omnia triangula octo* A B C, C A E, B C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, *æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est* A D, *ex defin 27. libr. 11. & in data sphæra descriptum, cum eius anguli solidi* A, B, D, E, C, F, *sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.*

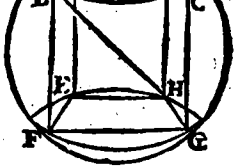
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplum esse lateris Octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex B E, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex D E, latere Octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

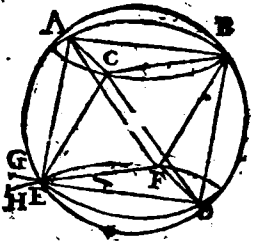
In data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR *ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli* ABCD, EFGH, *quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. a Descripto autem quadrato* A B C D, *in circulo* A B C D, *ducatur per 1. lemma recta* AD, *in circulo* E F G H, *parallela* E H, *& æquales ex eadem parte centrorum, qua latus quoque erit quadrati in circulo* E F G H, *descripti, ob circulorum æqualitatem. Cõpleto ergo quadrato* E F G H, *erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum* AD, EH, *æqualitatem: parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Nam quia parallela sunt* AD, EH, *sunt & anguli æquales* ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* D C, H G, *parallela, cum sint ad easdem partes plani per* A D, E H, *ducti, & sic de cæteris. Iungantur denique ad easdem partes centrorum rectæ* A E, B F, C G, D H, *quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico* A G, *esse cubum, hoc est, sex quadrilatera* A B C D, E F G H, A D H E, B C G F, A B F E, C D H G, *esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis* B H, B D, *erit ex lemmate 4.* B H, *diameter sphæræ; at* B D, *diameter circuli* A B C D, *quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex* B H, *sesquialterum est quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *duplum, ex scholio propos 47. libr. 1. si statuatur quadratum ex* B H, 3. *erit quadratum ex* BD, 2. *& quadratum*



a 6. quarti.

dratum ex DC, 1. *atque adeo quadratum ex* BH, *quadrati ex* BC, *triplum erit. Rursus quia quadratum ex* BH, *est* 3 *&* *quadratum*
3 47. primi. *ex* BD, 2. 2 *est quadratum ex* BH, *aquale quadratis ex* BD, DH, *quod angulus* BDH, *ex defin.* 3 *lib.* 11. *rectus sit, erit quadratum ex* DH, 1. *Quadratum igitur ex* BH, *triplum est quadrati ex* DH. *Fuit autem idem quadratum ex* BH, *triplum quadrati ex* DC. *Æqualia ergo sunt quadrata ex* DC, DH, *ac proinde recta* DC, DH, *aquales. Cum ergo oppositis lateribus* GH, CG, *aquales sint; erunt omnia quatuor latera aqualia in parallelogrammo* CH. *Cum*



igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. *libr* 11. *quadratum erit* CH. *Eadem ratione &* BE, AH, BG, *quadrata ostendentur: Sed &* AC, EC, *quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se aqualia, ob laterum aqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin.* 25. *lib.* 11. *& in data sphæra descriptus, cum eius anguli solidi, A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

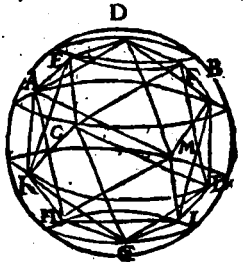
MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

In data sphæra Icosaedrum describere.

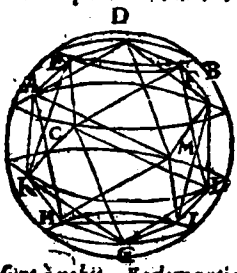
b 12. sexti. REPERIATVR b *recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiat* $\frac{1}{3}$ *ex coroll. propos. 6. lib.* 10. *vt numerus* 3. *ad* 1. *ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiusdam lineæ, ad cuius internallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Describatur*
c 1. quinti. *in maximo circulo in sphæra data,* c *accommodetur in eo recta, quæ inuenta semidiametri sit dupla, cum hæc recta minor sit diametro sphæræ, a fine illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam si per eam*
d 11. 11. Theod. *rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* d *faciet id circulum ABC, in sphæra, cuius semidiameter, ex constructione,*

ctione, potentia subtripla est recta initio inuenta. Deinde inueniatur a *rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæra diameter, vt* a 12. *sont*
pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagone de-
scripti; Fiatque vt 3. *ad* 1. *ita par coroll. propos.* 6. *lib.* 10. *quadra-*
tum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum
alter circulus in sphæra describatur priori circulo A B C, parallelus;
quo fiet si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta aqualis
duplæ semidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro,
ex iis, quæ ad propos. 1. *lib.* 4. *demonstrauimus, & per eam rectam pla-*
num extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circu-
lum maximum rectum, ex scholio propos. 18. *lib.* 11. *Nam per idem scho-*
lium planum hoc erit circulo A B C, parallelum, b *faciet q, in sphæra* b 11. *Theod.*
circulum D E F, cuius semidiameter semidiametro intentæ aqualis
est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alii duo æquales
ac parallelæ describantur G H I, K L M, quod facile fiet, si illorum
diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo
ducantur, &c. c *Descripto autem in circulo D E F, triangulo æqui-* c 2. *quarti.*
latero D E F, ducatur lateri E F, in parallelo circulo A B C, ex lem-
mate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quæ
aqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in circulo A B C, descripti:
Item huic A B, agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circulo
K L M, & aqualis: Ac demq; huic K L,
in circulo G H I, ducatur ex altera parte
centri, parallela H I, & aqualis ipsi E F,
hoc est, lateri trianguli æquilateri in cir-
culo G H I, descripti. Completis ergo tri-
angulis æquilateris A B C, K L M, G H I,
qrũ singula latera singulis lateribus tri-
anguli D E F, parallela; nimirum A C,
M L, G H, ipsi D F; at B C, M K, G I, ipsi
D E, quod probabitur ex scholio propos 16.
lib. 11. *vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse B C, E F,*
ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea
triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum con-
fusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus.
Postremo ex quolibet 12. *punctorum quatuor triangulorum æquilate-*
rorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, vi-
delicet ex puncto D, rectæ D E, D A, D M, D B, D F; ex G, rectæ G H,
G K, G C, G L, G I, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim pun-
cto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico D G, esse Icosae-
drum, hoc est, viginti triangula D E F, D E A, D A M, D M B,
D F B, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, o-
stendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse au-
tem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16.



lib 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulis in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur *in sphæra descriptum Icosaedrum* D G, 12. *angulos statuens in punctis* D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. *Et quia* 5. *rectæ* D E, DA, DM, DB, DF, *æquales sunt, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; si ex polo* D, *per* E, *in sphæra circulum describatur, transibit is per reliqua puncta* A, M, B, F: *at propterea pentagonum* E A M B F, *in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata, sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit* A K, C F D, *ob quinque rectas æquales* E A, E K, E C, E F, E D: *Et* K H M D E, *ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia* A K, A H, A M, A D, A E: *Et* H G C E A, *ob quinque latera Icosaedri æqualia* K H, K G, K C, K E, K A: *Et* G I M A K, *ob latera quinque Icosaedri æqualia* H G, H I, H M, H A, H K: *Et* I L C K H, *ob quinque rectas æquales* G I, G L, G C, G K, G H: *Et* L B M H G, *ob rectas quinque æquales* I L, I B, I M, I H, I G: *Et* B F C G I, *ob quinque rectas æquales* L B, L F, L C, L G, L I: *Et* F D M I L, *ob quinque rectas æquales* B F, B D, B M, B I, B L: *Et* D E C L B, *ob rectas quinque æquales* F D, F E, F C, F L, F B: *Et* D A H I B, *ob quinque latera Icosaedri æqualia* M D, M A, M H, M I, M B: *Ac tandem* G L F E K, *ob quinque Icosaedri latera æqualia* C G, C L, C F, C E, C K, *ita vt* 12. *pentagona æquilatera, æquiangula, inter se æqualia constituantur. Quoniam vero recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppositè lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta* A B, *ipsi* E F, *parallela in pentagono* E A M B F: *& a* A C, *iuncta ipsi* D F, *parallela in pentagono* A K C F D: *Et* B C, *iuncta parallela ipsi* D E, *in pentagono* D E C L B. *Plana ergo per rectas* D E, E F, *&* C B, B A, *ducta parallela sunt, b faciunque circulos parallelos in sphæra* D E F, A B C. *Eodem modo erit iuncta* K E, *ipsi* H I, *parallela in pentagono* I L C K H: *Et iuncta* K M, *ipsi* G I, *in pentagono* G I M A K: *Et* L M, *iuncta ipsi* G H, *in pentagono* L B M G H: *Ac propterea circuli in sphæra parallelis erunt* G H I, K L M. *Non aliter erit* A B, *iuncta ipsi* H I, *parallela in pentagono* D A H I B: *Et iuncta* K L, *ipsi* E F, *in pentagono* G L F E K. *c Igitur* E F, H I, *cum sint eidem iunctæ* A B, *vel* K L, *parallelæ, inter se parallelæ sunt, Eademque ratione* D E, G I, *cum sint eidem iunctæ* B C, *vel* K M, *parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea que plana circulo-*



a 15. *undecimi.*

b 1. 1. *Theod*

c 9. *undecimi*

culorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ductæ parallelæ erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter se sunt: & tam circuli DEF, GHI, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quam circuli ABC, KLM, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, constituuntur: quippe cum latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.

QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extrema K, B, parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad easdem partes controrum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus BAK, rectus ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad easdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; a erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit AB, iunctæ ad EF, vel AK, ipsi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæræ KB (quæ ambas AB, AK, potest, vt ostendimus) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare sphæræ diameter KB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vere ad EF, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cum tam AB, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri inuicto inuenta, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

a 47. primi.

b 10. tertii decimi.

c 12. tertii decimi.

HIS demonstratis facili negotio includemus, solidam figuram à nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est

esse diametrum sphæræ KB, ad BF. latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulũ Isosceles constituant: ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoq; vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni. a 22. primi.

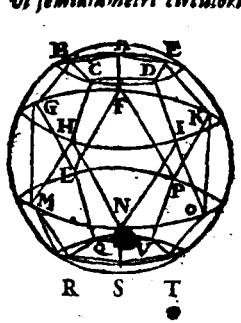
COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum AB. b Est autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ AB, quod AB. sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. b 12. tertiidecimi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

In data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR *in data sphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propositione* ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, *ita vt semidiametri circulorum* ABCDE, QRSTV, *sint potentia subtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum* FGHIK, LMNOP, *potentia sint subtripla duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pẽtagoni latus ad latus hexagoni. Descripto aũt in circulo* ABCDE, *pentagono* ABCDE, *æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri* GD, *ad easdem partes centrorum parallela* HL, *in circulo* FGHIK, *& æqualis lateri pentagoni eiusdem circul., ex* 1. *lemmate: Recta autem* HL, *ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela* LP, *in circulo* LMNOP: *Hucusque tandem* L P, *ad easdem centrorum partes ducatur parallela* QV, *in circulo* QRSTV. *Completis autem pentagoniis in hisce tribus circulis (quorum tamen latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni*



ABC-

ABGDE, *parallela, eo ordine, quo lateri* CD, *parallela ducta sunt: quod demonstrabitur, vt in problemate secundo ostendimus, parallelas esse* BC, EF, *nimirum* HG, PQ, TV, *latera iuncta, parallela erunt ipsi* BC, *&c. Postremo ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico* AS, *Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona* ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, *æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum primo est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propositione* 17. *lib.* 13) *suos viginti angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos describi simus, quinos videlicet in singulis circulis, atq; in eo situ, quo eadem viginti puncta notauimus.*

SIT ergo *in sphæra descriptum Dodecaedrum* AS, *viginti angulos statuens in punctis* A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. *Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propositi.* 8. *lib.* 13. *demonstrauimus, erit iuncta* GH, *lateri* BC, *parallela in pentagono* BCHMG; *& iuncta* HI, *lateri* CD, *in pentagono* GDINH; *&* IK, *lateri* DE, *in pentagono* DEKOI; *&* KF, *ipsi* AE, *in pentagono* AEKPF; *&* FG, *ipsi* AB, *in pentagono* ABGLF; *& sic de cæteris. Quia igitur rectæ* AB, AE, *rectis* FG, FK, *parallelæ sunt;* a *erit & planum per* FG, FK, *ductum plano pentagoni* ABCDE, *per* AB, AE, *ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per* FG, GH, *ductum, quod iis rectis rectis* AB, BC, *sint parallela. Igitur ex scholio propositionis* 16. *lib.* 11. *plana per* FG, FK, *& per* FG, GH, *ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni* ABCDE, *sint parallela; atque adeo, ex eodem scholio, cum conueniant in recta* FG, *vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per* FK, FI, *& planum per* KI, IH, *& planum per* IH, HG, *cum plano per* FK, FG, *ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta* A, B, C, D, E, *& per puncta* F, G, H, I, K, *ducta in sphæra* b *efficient duos circulos parallelos* ABCDE, FGHIK. *Eodemque modo plana per puncta* Q, R, S, T, V, *& per puncta* L, M, N, O, P, *ducta circulos parallelos efficient* QRSTV, LMNOP. *Eruntque tam duo circuli* ABCDE, QRSTV, *quam duo* FGHIK, LMNOP, *inter se æquales, ob pentagona æqualia* ABCDE, QRSTV, *& ob rectas* FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL. c *qua omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.*

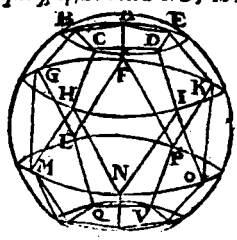
a 15. *vndecimi.*

b 1. 1. *Theod.*

c 4. *primi.*

DEIN.

DEINDE *quia ex scholio propos. 8. lib. 13. recta iuncta* ND, MB, *lateri* CH, *parallela sunt in pentagonis*, CHNID, BGMHC; a *erunt quoq; ipsa iuncta* ND, MB, *parallelæ: Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant* b *igitur & iuncta* NM, BD, *æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iuncta* NO, CE, *cum connectant duas* NC, OE, *æquales ac parallelas, quod utraq; lateri* DI, *sit parallela.* c *Circulus igitur* LMNOP, *circulo* ABCDE, *parallelus est, cum ille ducatur per rectas* NM, NO, *hic vero per rectas* BD, CE, *quibus illa parallelæ sunt ostensa. Non secus ostendentur parallelι circuli* QRSTV, FGHIK. *Omnes ergo quatuor circuli parallelι sunt.*



R S T

RVRSVS *quoniam iuncta recta* EF, OV, *cum ex scholio propos. 8. libr 13. lateri* PK, *in pentagonis* AEKPF, TVKPO, *æquidistent,* d *parallelæ sunt;* e *necnon & inter se æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant,* e *erunt & recta iuncta* EO, FV, *parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo* EFVO, *in uno plano est,* f *cum* EF, OV, *in eodem sint plano cum parallelis* EO, FV. *Est autem & in circulo,* g *propterea quod planum in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est* EFVO; *ac proinde cum omnia latera æqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter* FO, *duplum potest lateris* FE, *ex scholio propos. 47. libr. 1. hoc est, recta iuncta* FG, *quod æquales sint* FG, FE, *subtendantes angulos pentagonorum æqualium: utroque qualium partium* 1. *statuatur quadratum rectæ* FG, *talium* 2. *erit quadratum rectæ* FO, *& ambo quadrata simul earundem partium* 3. *Quibus* h *cum æquale sit quadratum iuncta rectæ* OG, *quæ diameter sphæræ est. (Nam cum æquales sint iunctæ* FG, ON, *subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quod duabus parallelis* AB, ST, *parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta* OF, *ad* FG, *perpendicularis, &* OG, *diameter sphæræ) erit quoque quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ* FG, *hoc est, quadratum diametri sphæræ quadratι rectæ* FG, *tripluin erit.* i *Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri tripluin quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ* FO, *ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni;* k *atque adeo vt diameter sphæræ ad rectam* FG, *ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem re-*

a 9. *undecimi.*
b 33. *primi.*
c 15. *undecimi.*
d 9. *undecimi.*
e 33. *primi.*
f 7. *undecimi.*
g 1.1. *Theod*
h 47. *primi.*
i 12. *tertij dec.*
k 12. *sexti.*

tem recta F G, ad latus trianguli in eodem circulo F G H I K, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod F G, sit latus pentagoni. Igitur ex aqualitate perturbata erit, vt diameter sphæra ad latus trianguli æquilateri in circulo F G H I K, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appositæ formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoque vt diameter sphæra ad latus trianguli, hoc est ad iunctam rectam A B, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus A B C, K L M, illius figuræ vtrique circulo F G H I K, L M N O P, huius figuræ æqualis.

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta F G.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta F G, subtendens angulum pentagoni A B G L F, ad A B, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt F G, latus pentagoni in circulo F G H I K, ad A B, latus pentagoni in circulo A B C D E, ita latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E. erit quoque vt latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæra ad latus trianguli in circulo F G H I K, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proxime demonstratum est. Igitur ex æquo erit, vt diameter sphæra ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæra ad E F, latus trianguli in circulo D E F, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus D E F, G H I, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo A B C D E, Q R S T V, huius figuræ æqualis. Quare circuli A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo F G H I K.	Lat. hexagoni
Lat. triang. in circulo A B C D E.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram A S, à nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum A B C D E, omnes eius anguli solidi cadant in quinta puncta aliorum trium circulorum parallelorum, à quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PER SE QVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & trian-

& triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo A B C D E, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

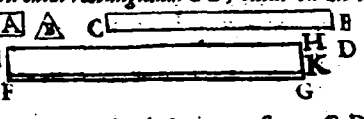
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & libr. 13. & 14. demonstrauimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in una eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora construxisse, cum post Tetraedrum statim octaedrum; non autem cubum, constituerit. Ita enim semper à minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quã octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum sit lateris quadrati A, & latus D E, lateri eiusdem quadrati æquale: Eritque rectangulum C E, octuplum quadrati A,



a 1. *sext.* *a cum sit, vt C D, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A; ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum sit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius basem demissæ; hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi G H, hoc est,*

b 1. *sext.* *altitudini trianguli, B, b vigecuplum est trianguli B: Est autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41. libr. 1. rectangulum F H; quippe cum basis F G, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est, rectangulum F H, maius esse rectangulo C E.*

c 11. *quarti-decimi* *c Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus D E, potentia sesquitertium est eius*

perpen-

perpendicularis, hoc est, lateris G H: Latus autem F G, ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod F G, sit 10. & C D, 8. hoc est, F G, 5. & C D, 4. Erit maior proportio F G, ad C D, quam D E, ad G H. Est enim maior proportio 25. ad 16. super nouempartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertia, quod maior sit fractio $\frac{9}{16}$ quam $\frac{1}{3}$ a Fiat vt F G, ad C D, ita D E, ad H K, eritque maior quæ- a 12. sexti.
proportio D E, ad H K, quam ad G H: b ac proinde maior erit G H, quam b 10. quinti.
H K Ducta ergo K I, ipsi F G, parallela, erit vt I K, ipsi F G, æqualis
ad C D, ita D E, ad H K. c Igitur erit I H, rectangulum rectangu- c 14. vel 16.
lo C E, æquale: ideoque E H, maius, quam C E. Quod erat propositum. sexti.

II.

Octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

d QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæra descripta superficies cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæra descripta, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. libr. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæra æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæra. Quod erat propositum. d 20. quartidecimi.

III.

Si octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basin Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basin octaedri, & cubi ducta.

NAM e quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra: erit vnius trianguli octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumque solidum sta intra sphæram constituatur, vt triangulum vnius trianguli alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri: cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæra attingat: Ac proinde perpendicularis è centro sphæra ad basin Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basin Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi: f quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoque æqualiter à centro distent: erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod erat propositum. e 18. tertii decimi. f 21. quartidecimi.

IV.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula aequilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæra semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis aequilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæra semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi aequalia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato: erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATUM quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

a 11. *quartidecimi.* b 18. *tertiidecimi.*

QVONIAM est, a vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum: b est autem latus cubi latere Icosaedri maius: maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basin cubi demissa, vt in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est: Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basin cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. libr. 14. demonstrauimus, illud solidum

dum Icosaedro sit aquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum quam cubus. Quod est propositum.

III.

Cubus Octaedro maior est.

Quoniam est, a vt latus cubi ad semidiametrum sphæra, ita cubus ad Octaedrum: Est autē latus cubi semidiametro sphæra maius (Nam b cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæra; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæra) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum. a 22. quarti decimi. b 18. 13. tiidec.

IV.

Octaedrum Tetraedro maius est.

Quoniam basis octaedri minor est base Tetraedri, c quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæra ad vnam basin octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæra centro ad vnam basin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficie octaedri superficie Tetraedri maior, d cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæra in vnam basin Octaedri cadente, & tertia parte superficie octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæra in vnam basin Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum ex scholio propos. 20. libr. 14. illud solidum octaedro sit aquale, hoc vero Tetraedro: erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. c 14. quarti decimi. d 14. quarti decimi.

Aliter. Quoniam est, e vt latus Octaedri ad latus tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex aqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri (Nam f quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla; g ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. e 22. quarti decimi. f 18. tertiidec. g 10. quinti.

Aliter. Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet,

vt rectangulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{9}{8}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

a 32. quartidecimi. b 27. quartidecimi. *Aliter. a Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quàm triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, qua cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplum) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum Quod est propositum.*

Eodem prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

c 9. quartidecimi. d 18. tertiidec. *Quoniam enim c est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, d vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.*

Superficiem vero Icosaedri minorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremata 4. ante comparationem solliditatum quinque corporum Regularium.

e 27. quartidecimi. *Deinde e quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri maior.*

14. quartidecimi. *Denique f quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri, perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.*

Vides igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. g 18. tertiidec. *Nam g vt supra demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, vt hic demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra descripta*

cripta sint latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo superant, aut supra ostensum est, ita contrario ordine eorundem superficies conuexa, atq; soliditates se mutuo superant, vt hoc loco demonstrauimus. a 18. *tertiidec.*

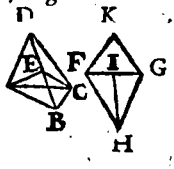
Caterum pratereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum: soliditates videlicet quinque corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphæra constructa, longe aliter se habere, quam à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS duarum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

Angulum inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

Sit pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppositis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares sint ad B D, communem sectionem planorum A B D, C B D, in quibus existunt (*b* Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis A E C, basium A B D, C B D, continebunt, ex defin. 6. li. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur F G H: triangulum æquilaterum per rectam F G, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunq; pyramidis propositæ, ipsi nimirum A B D, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, constituatur super F G, triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc est, vtrique perpendiculari A E, C E, cum perpendiculares H I, A E, C E, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem esse angulo inclinationis A E C, basium A B D, C B D. Cum enim latera K F, K G, æqualia sint lateribus E A, E C: & basis F G, basi A C: æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico insuper angulum inclinationis A C E, acutum esse. (*d* Cum enim latus A D, vel illi *quarti,*



b 8. *primi.*

c 8. *primi.*

d 12.

æquale AC, sesquitertium sit potentia vtriusque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriusque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul quadrata rectarum AE. CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus sit quadratis simul laterũ AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

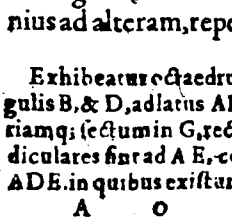
COROLLARIVM.

Facile hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sũt AE, CE, subtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erũt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & latera pyramidis eosdem subtendentia sint æqualia

II.

Angulum inclinationis duarum octaedri basium, vnius ad alteram, reperire.

Exhibeatur octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, adlatus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; sectum in G, rectæ ducantur BG, DG. quæ cum perpendiculares sint ad AE, communem sectionem planorum ABE, ADE, in quibus existunt (quod in triangulis BGA. BGE anguli ad G, æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis basium ABE. ADE. per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum super rectam HI. lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE, æquale, in quo ducta KL. perpendiculari ad HI. constituatur super recta MN. quæ æqualis sit diametro octaedri BD. hoc est, diametro quadrati ABCD. ex AB. latere octaedri descripti, triangulum QMN. habens vtrumque latus MO. NO. perpendiculari KL. æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari. BG, DG, cum perpendiculares KL, BG DG, in triangulis æqualibus æquales sint Dico angulum MON æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE. ADE.



a 6. primi.

b 8. primi.

Cum enim latera OM. ON. æqualia sint lateribus GB GD. & basis MN. basi BD: b æquales erunt anguli MON, BGD Dico propterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum.

c Cum

a Cum enim diameter octaedri B D, dupla sit potentia lateris A B: b latus vero A B, potentia sesquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4 erit quadratum lateris A B, earundemq; 3. quadratum rectæ B G; ideoq; ambo simul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris B D, in triangulo G B D, maius est quadratis simul laterum G B, G D; Ac propterea angulus G B D, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

a 14. ter tii dec.
b 12. quarti decimi.

COROLLARIVM.

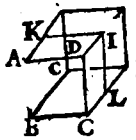
HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, D G, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est B D; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales.

c 8 primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, invenire.

SIT cubus A B C D E F G H, in quo secetur latus D E, bifariam in I, nec non & latera illi opposita in quadratis A E, E C, cõmune latus illud D E, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur I k, I L; d quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus E F, E H (quod & k F, I E, inter se, nec non & I E, L H, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoq; e angulos rectos ad latus D E, efficiant, continebunt k I L, angulum inclinationis basium A E, E C, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ I k, I L, parallelæ existentes rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, f angulum k I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



d 3. primi.
e 29. primi.
f 10. vndecimi.

COROLLARIVM.

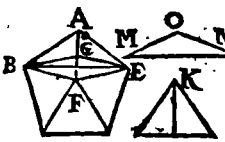
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, invenire.

ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidib. Icosaedri,

dri, cuius basis pentagonum ABCDE, ex quinq; Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diuiso itaq; latere AF, bifariam in G, & cantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, cõmune habentium angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectę BG, EG, quę cum ex demonstratis in probl. 2. huius scholij, perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE angulum inclinationis basium ABF, AEF. per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualẽ, hac arte, Accipiatur triangulũ æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum,



hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtẽdenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumq; latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualib. sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basiũ ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; *a* Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectũ faciat AGB, *b* erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemq; modũ AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaq; recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant. *c* Angulus ergo O, maior erit angulo BAE: At hic obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales; per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintã. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE.

COROLLARIVM.

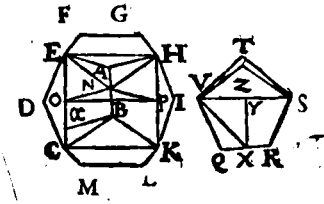
Non obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, FG, subtendanturq; à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales erunt.

ANGV-

V.

Angulum inclinationis duarum basium Dodecaedri, vnius ad alteram, inuenire.

Cum per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15 quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnũ latus coeuntiũ; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum idem latus commune AB alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundũ angulos EAH, CBK.



His porro pentagonis inscriptum sit quadratum cubi EC, KH, cuius quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorũ D, B, I, A. Diuiso autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, secantes latera EC, HK, in O & P, ad angulos quoq; rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelæ, ex scholio propos. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis basiũ ABCDE, ABKLH. Cui æqualem in quouis plano hac arte construemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc est, cuius pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta subtendatur VS, æqualis existens rectæ EC, eum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia sint, angulosq; contineant æquales. Diuisa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpendicularis ad VS, cum VS, sit parallela ipsi QR, ex schol. propos. 8. lib. 13. & postremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem esse angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia sint lateribus HA, AN: item lateribus VQ, QX, angulosq; comprehendant æquales: Æquales erunt & bases NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideoque & residui ex rectis: anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales sunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP: nec non & angulis VXY, VYX, trianguli VXY (sunt enim, EON, HPN, VYX, ostensi recti) Et latus NE lateribus NH, VX, æquale demonstratum; Æqualia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis

late-

lateribus P H: Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S æquales existentes ipsi X Y, rectis N O, N P æquales erunt. Iã vero, quia O E. P H. æquales sunt, ac parallelæ; erit quoque recta coniuncta O P. æqualis & parallela ipsi E I, ideoque æqualis ipsi E C. hoc est, rectæ V S. Quam ob rem, cum latera Z V. Z S. lateribus N O. N P. æqualia sint; basis item V S basi O P; æqualis erit angulus V Z S. angulo inclinationis O N P. Dico etiam angulum hunc O N P, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta B æ. ipsi N O. parallela: cũ sit quoq; N B. ipsi O æ. parallela, ex scholio propos. 8. li. 13. Parallelogrammum est N O æ B. ideoque recta B æ. ipsi N O. æqualis. Quia vero B C latus pentagoni oppositum angulo C æ B, qui rectus est (æqualis nimirum interno C O N) maius est latere B æ. hoc est, recta I O. vel vtraq; Z V. Z S. quę ipsi N O. ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ T V. T S. maiores duab. rectis Z V. Z S. Cadit igitur punctũ Z. intra triangulũ T V S. ita vt rectæ T V. T S. rectas Z V. Z S. includant omnino: Atque proinde angulus V Z S. ideoque illi æqualis O N P. maior est angulo pentagoni T: His vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis O N P. ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

Patet igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum, contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt N O, N P, subtendanturque hæ rectis, quę cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certe, quæ rectis subtendẽtibus angulos pentagonorum æquales sunt, eiusmodi est recta O P, lateri cubi inscripti E H, quod angulum pentagoni E A H, subtendit, æqualis: Erũt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos cõtinent, æquales sint: necnon & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.

Elementi decimisexti Finis.

1020600