Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRA-tionibus, accuratisque scholiis illustrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate IESV.

FRANCOFVRTI
Ex officina typographica Nicolai Hoffmanni, sumptibus IONAE RHODII.

M. DC VII.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS
Bayerische
Staatsbibliothek
München

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

ACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verùm antè eis necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorúmque maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idq; adeò, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suum numeris absolutis. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quàm solidorum, si Geometrica Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non raro pleraq; laterum sunt illa linea, quæ à Græcis ἄλογοι, à Latinis Irrationales appellantur: Vel; si non sunt Irrationales, longitudine certè inter se sunt incommensurabiles, atq; adeò sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeris est implicata, & connexa, vt absq; his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suum ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum ea rei Geometricæ inserviunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principijs, definit initio vnitatem, docet q; eam esse, secundum quam vnumquodq; eorum, quæ sunt,

Vnum esse dicitur. Nam secundum Vnitatem Vnum lapidem, Vnum animal, Vnum corpus, &c. dicere solemus. Caterum Vnitas in numeru nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quadam ex Vnitatibus compositus, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt Vnitates eum constituentes: Itm vt Vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo Vnitatibus, diuidetur in totidem partes, nimirum in 8. Vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonaria. Sic quoq; numerus 100. ex centum Vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cùm eos Vna eadem, q; mensura, nimirum Vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cùm plurima earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissimè lib. 10. ostenditur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hac definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cùm hac solùm propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6 dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cùm illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cùm 6. metiatur 42 per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IV.

PARTES autem, cùm non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cùm eum non metiatur, nisi per suas Vnitates, pars ipsius dici non debeat; aptè tamen congruenter q; partes poterit appellari, quod quinq; contineat Vnita-

165.

ter, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Eosdem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin supernacanea esset hac definitio quarta, qua partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quascunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorũ numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta, Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6 per 3. & 10 per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cùm vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc verò per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solùm eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verùm etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantùm eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quòd omnis numerus minor cuuislibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostenditur; pars quidem, cùm ipsum metitur, partes verò, cùm non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessariò minor aut pars, aut partes est maioris, cùm ea persæpe sint incommensurabiles, vt apertè liber decimus demonstrabit, atq; adeò minor nullo modo contineat plures partes maioris. Num solùm in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX verò maior minoris, cùm maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solùm numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeò vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si verò maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris

non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur: Nam ſi metiretur minor maiorem, eſſet per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, ſiue in duas partes æquales, cùm eorum dimidia ſint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR verò, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

ONNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certè quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. Vel etiam ab his 6 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perſpicuè colligi poteſt, vnitatem in numeris prorſus eſſe indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeò bifariam diuidi poſſet. Nam huius imparis 11. dimidia pars eſſent quinq; vnitates & ſemis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, ſit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cùm eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6 metitur eundem per numerum imparem 3 &c.

CÆTERVM ſi rectè duæ proxima definitiones expendantur, perſpicuum erit fieri poſſe, vt vnus idemq; numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cùm eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerum par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdum

ſunt, & excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderunt tria definitionis particulam tantum, ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. neq; pariter par ſit, cùm eum non tantum metiatur par 6 per parem 4. ſed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. Verum etiam par 6. per parem 4. Sed aptè vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriuſq;, vt conſtat. Ita q; tria conſtituuntur genera numeri paris inter ſe maximè diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui à quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamè hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt & ex definitionibus traditis, in quib. non reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponunt, & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeſtè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum verò, quem aliquis par metitur per imparem pariter imparem; eum demiq; quem par numerus metitur per parem numerũ, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonſtrat q; omnes numeros à binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantum, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantùm; Numeros verò, qui dimidios impares habẽt, pariter impares tantùm, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros demiq; qui nec à binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonſtrationibus illarũ propoſitionum, hos poſtremos numeros, aliosq; ſimiles, verè eſſe, ſecundũ traditas definitiones pariter pares; rurſus eoſdem dici rectè pariter impares, quanquã nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi ſint. Sed hæc planiùs ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER verò impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola Vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neq; pariter impar, neq; imparitèr impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos sola Vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

SICVT numerus ille, quem sola Vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos praeter Vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, praeter Vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola Vnitas, mensura communis illos metitur. quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem vero isti 2.4. tamen nullus istorum vtrumque metitur, sed sola Vnitas vtriusq; est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter se dicentur, quod praeter Vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensurã hunc numerum 5. Dentq; Vnitas, & quinis numerus, dici possunt, licet imp. oprie; numeri inter se primi: quia sola Vnitas Vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem praeter Vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum terq; horum numerorum 3.5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cùm eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, praeter binariũ, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIV.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos praeter Vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodũ & numerus ille, quem praeter Vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & secundus, & reliquos duos metitur; licet per se sumptus, Primus vocetur.

NVME-

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. ϑnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoq; vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot ϑnitates in multiplicante 8. continentur, procreaueritq; eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. Vel è contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantiũ habet ad ϑnitatẽ. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium totties componendus sit, vt faciat productum, quotties in altero multiplicantium est ϑnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quotties alter multiplicantium ϑnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quã alter multiplicantium ad ϑnitatem habet. Itaque Multiplicatio siue ductus ϑnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC videsex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hac alia docens quid sit numerum dividere numerum: quippe qua necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in iis, quæ sequuntur, summe demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quotues diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. dividere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit nu-

rit numerus 8. qui octo ſuis Vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque vicißim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis Vnitatibus indicat diuidentem numerum 8. in diuiſo 48. contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad Vnitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis Vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus Vnitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad Vnitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio vnius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuiſus ad diuidentem.

ITA vides ex diuiſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1. vt 48 ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX hiſ quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A. per B, procreetur numerus C Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, vt C, ad Vnitatem D; Ex definitione autem diuiſionis, ita quoque ſe habet A, ad B, vt C, ad Vnitatem D; perſpicuum eſt, numerum ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, Vnitatem.

A, 48. B. 8. C. 6. D. 1.

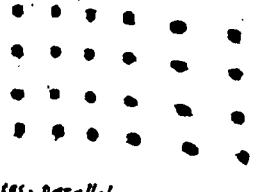
HÆC omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris cum fractis: id eſt, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſine fracti adhæreant integris, ſine non) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante Vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiſo continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad Vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad Vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$ multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit como-

tis compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. Vnitates, procreatusque fuerit numerus 10. Quia enim Vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, qui est 10. Et vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$. quoque sumptus fuerit toties, toties scilicet, quoties Vnitas est in 20. productusque fuerit idem numerus 10. Vbi videbis eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$ ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem Vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet Vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusque ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. dimidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, dimidentem numerum $\frac{1}{2}$. vices contineri in diviso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. qua numeri diuisi 10. ad dimidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. dimidere dicetur $\frac{1}{6}$ quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$ indicans, dimidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diviso $\frac{1}{6}$. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquido constat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Caeterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia haec, quae de multiplicatione, diuisioneque fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas Vnitates in longum, & latum dispositas patet, & parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati dicentur, quod ipsum contineant, non secus ac recta linea angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus.

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius ϑnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius ϑnum latus sex ϑnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ plana apud Geometras, Euclides solum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ alterapartelongiori, similes sint, & æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatemve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem ϑnis, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. necnon 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6 est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris sibi inter se multiplicentur, gignatur.

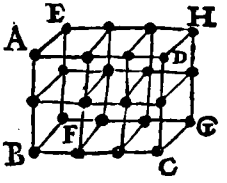
QVIA verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero ϑnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, ϑnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ ϑnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam ϑnitatem producunt.

XVII.

CVM verò tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabi-

pellabitur numerus 24. solidus, numeri verò 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia ternæ Vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, qua Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius verò Latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor Vnitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium Vnitatum.



At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. Vnitatum, quæ multiplicata in 4 facit totum solidum numerum 24 in altitudine habens 4. Vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4 procreabitur numerus 12. pro basi, qua bis sumpta facient numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas Vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura propositæ. Si enim basis sit BCGF, octo Vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor Vnitates, & BF, latitudo duas complectitur; superponentur ei duæ alsæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. Vnitates, eiusque altitudo BA, Vnitates tres. Similiter si basis sit ABFE, sex Vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet Vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursus 24. altitudinem BC, habens quatuor Vnitatum. Si denique basis sit ABCD, 12. Vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis EFGH, constabitque totus numerus solidus Vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.

DENIQVE & Vnitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non propriè, quia eius latera sunt tres Vnitates, ipsam Vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

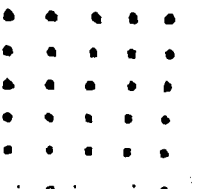
DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam; quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideoque æqualiter æqualis erit.



ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati a Geometris, radix verò quadrata ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

CVBVS verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoq; illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius vnitates in longum, latum, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam solidam reductæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET verò trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris Latus cubi, plerisque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

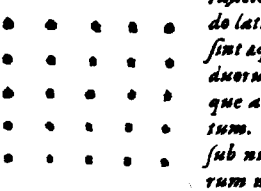
NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi,

tiudi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuius modi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicique, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt*; *in ſubmultiplici verò, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt*; *& in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes ſuerit, vt vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neque æquè multiplex eſt, neque eadem pars, neque eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemve partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad def. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartas. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio demum bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

QVO-

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æquālis eſt, hoc eſt, qui ſecundum ϑnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius ϑnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque ϑnitates, ideoque æqualiter æqualis erit.

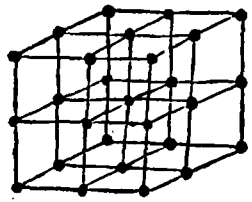


ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix verò quadrata ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

XIX.

CVBVS verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoq; illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius ϑnitates in longum, latum, atque profundum diſpoſita cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius ϑnitates in formam ſolidam reducta referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine quam in profunditate, tres ϑnitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.



QVILIBET verò trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecundi,

undi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicique, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; in ſubmultiplici verò, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neque æquè multiplex eſt, neque eadem pars, neque eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemve partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ diximus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex ſit, nimirum triplex. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartas. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus eſt itidem duæ partes quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur tertias, non tertias quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi ſunt numeri propoſiti proportionales.

QVO-

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus conferantur, quod primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex contedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et è contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaqualitatis habent. Nam si de proportione aqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, aquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad aquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, aquales esse. Cum enim aquales numeri sint eiusdem, vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem aqualiter contineant, eandemque insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus aqualium sit vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos aqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, vel partes; perspicuum est, aquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eandem habentes eandem proportionem, sunt illius vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum aqualiter continent, eandemque insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem, manifestum est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, aquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad

quem

quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si rectè hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri nihil numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, numerum duplum, & patet, si priores duo ad eandem denominationē reuocentur, & ad $\frac{4}{8}$. $\frac{1}{8}$. & posteriores quoq; ad eandem denominationem, & ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{1}{3}$. $4\frac{2}{3}$. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{2}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum sesquitertia. & constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{14}{6}$. $\frac{28}{6}$. & posteriores duo ad hos $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quælibet duo illius latera quibuslibet duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis hi eisdem non sint proportionalia alia illius latera nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo & duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperiuntur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HÆC porrò similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, sive in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tam duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunque, quia fieri potest, ut interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$. 6. *& alia duo* $1\frac{1}{3}$. 12. *quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum* 4. *posteriora verò numerum* 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. *Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat* 1. 2. 3. *quæ simul sumptæ conficiunt numerum* 6. *Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ* 1. 2. 4. 7. 14. *quarum summa constituit ipsum numerum* 28. *Tertius demum numerus has partes habet aliquotas* 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. *quas omnes in unam summam collectas componere numerum* 496. *perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib.* 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si verò minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur; partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partib. sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, sive eum metiatur, sive non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnulla alia, quibus proximè succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes uti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. *metiri dicitur numerum* 12. *per* 3. *quia multiplicatus per* 3. *producit* 12. *Eademque ratione numerus* 3. *eundem numerum* 12. *metietur per* 4. *cum ex multiplicatione* 4. *in* 3. *numerus* 12. *produ-*

producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quotes est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia verò, ex propos. 16. huius lib. ostendemus, eadem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerum 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{2}$. metiri dicetur numerum $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIV.

PROPORTIO numerorũ est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partẽ, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudo, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVÆ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartũ, triplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundũ: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiosè explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros hæc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illa in quinto libro tradita de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione & conuersione rationis; de ratione ex aqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, qua circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNCIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædē partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV. QVO-

IV.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum metitur.

NAM ♆nitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito ♆nitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per ♆nitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerũ ex suis ♆nitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus seipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per ♆nitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus E, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, ♆nitates; A .... B . . .
perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, C .....
cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, ♆t demonstrabitur propos. 16. huius lib.

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per ♆nitates, quæ in numero 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per ♆nitates, quæ in numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus ex multiplicatione 6. in 3. ♀el 3. in 6. per defin. 23. Quare per axiom. 11. præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum à B, producere ipſum C.

A .... B ...
C .....

Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipſum C. producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipſum C.

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos B C, C D; erit tam B C, quam C D, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo B C, in partes B E, E C, ipſi A, aquales & ipſo C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, aquales;

A ....
B .... E .... C .... F .... G .... D

erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, aqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D, erit C D, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo C D, in partes C E, E D, ipſi B, aquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D, quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam numero E D, aqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

A ...
B .....
C ..... E ..... D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, &

BC, & BD: erit tam BC, quam BD, ipſius A, multiplex, aut certè BD, ipſi A, æqualis erit. Diuiſo ergo tam BC, quam BD, in partes ipſi A, æquales: erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum DC. Quod erat propoſitum.

A ...
B ..... D ... C
B ..... D C
B ... D C

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt. 1.

SINT duo numeri propoſiti inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB: Et ita hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars ſit ipſius AE, vel certè ei æqualis, cum detractus ex AB, reliqueris numerum EB,) a metietur quoque H, ipſum AE: At H, metitur quoque totum AB. b Igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipſum CF. c Igitur & H, ipſum CF, metietur; Ac proptereà, cum & totum CD, metiatur, d metietur quoque reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum EG; e metietur etiam H, ipſum EG: Metiebatur autem & H, totum EB. f Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... E .. G . B
C ... F .. D
H .....

a 11. *pro num.*
b 12. *pro num.*
c 11. *pro num.*
d 12. *pro num.*
e 11. *pro num.*
f 12. *pro num.*

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas.

SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad ϑnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad ϑnitatem detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB,

A ..... E .. G -- B
C ..... F .. D

a 11. pro num. *numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG, a metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſeipſum metiatur, b metietur quoq; numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF.* b 10. pro num. *c Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſum* c 11. pro num. *FD, poſitus ſit metiri: metietur d quoque ipſum CD, ex CF, FD, compoſitum. At verò CD, metitur ipſum AE. e Igitur & eundem* d 10. pro num. *AE, numerum GB, metietur: Ac proinde, cum & ipſum EB, metiatur, vt oſtenſum eſt; f metietur & ipſum AB, ex vtroque AE, EB,* e 11. pro num. *compoſitum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD,* f 10 pro num. *ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquum præcedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.*

EODEM modo & hoc verum eſt.

SI propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſq; non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractũ metiatur.

NAM ſi detractio huiuſmodi ad ϑnitatem vſque perueniret, eſſent propoſitis numeri inter ſe primi, g *vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.* g 1. ſept.

EX his facilè dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detractio ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit ϑnitas; ipſi erunt inter ſe primi, h *vt Euclides demonſtrauit: Si verò reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperioris huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB,* h 1. ſept.

rum GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, oſtenſum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

PROBL. I. PROPOS. 2. ij.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, *a* numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra *hypotheſin*. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD.

a 1. ſept.

Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB, & EB, ipſum CF; *b* metietur quoque FD, ipſum CF, atque adeò cùm & ſeipſum metiatur, *c* metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. *d* Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cùm FD, metiatur quoque ipſum EB; *e* metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

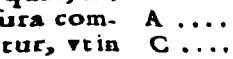
b 11. pro num.
c 10 pro num.
d 11 pro num.
e 10 pro num.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, *f* metietur quoque G, ipſum AE. *g* Igitur & reſiduum EB: At verò EB, metitur CF. *h* Metietur ergo & G, eundem CF. *i* Igitur & reſiduum FD; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quàm FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum AB, CD.

f 11. pro num.
g 12. pro num.
h 11. pro num.

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cùm & ſeipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

i 12. pro num.



COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoq; maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD: Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eadem ratio eſt de cæteris.

SCHOLIVM.

EX ijs quædicta ſunt, facilè cum Campano experiemur, an quilibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad

A . . . . . *propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter*
B . . . . . *ſe primi: Quæ ſi fuerint inter ſe primi, non e-*
C . . . . . *runt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod*

nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

SI verò A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, & ſit

22. ſept. A . . . . . *eorum maxima menſura communis inuenta D;*
B . . . . . *quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt,*
C . . . . . *tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cùm*
D . . . *habeant numerum D, communem menſuram.*

QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vèl inter ſe primi, vèl non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita

A . . . . . *& habeant numerum communem menſuram;*
B . . . . . *metietur eiuſmodi communis menſura numerum*
C . . . . . *D, maximam menſuram numerorum A, & B,*
D . . . *per coroll. huius propoſ. Quare cùm eadem illa*

menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſin. Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C,

b 2. ſept. A . . . . . *inter ſe compoſiti.* b *Inuenta enim numero-*
B . . . . . *rum C, & D, maxima menſura communi E;*
C . . . . . *cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A,*
c 11. pro. D . . . . E . . *& B;* c *metietur quoque E, eoſdem A, & B.*
mum. *Quare cùm idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.*

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quàm tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in

quæ-

quatur, &c. *Reliqua autem perficienda, & de tribus numeris datis*
dictum.

PROBL. 2. PROPOS. 3. iij.

TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. *Sit* D, maxima menſura numerorum A, & B; *Si* ergo D, metiatur quoque ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C, Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si verò D, non metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cùm enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunq; illorum menſura communis, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cùm ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. *a* *Sit* *a* 2. *ſept.* eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram cõmunem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorũ menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipſos A, & B, *b* metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur. *b* 11 *pro* *num.*

A ....
B ..... D ....
C ..... E .. F ----

QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quàm E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quàm E, numeros A, B, C, metitur; Atq; adeò E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem menſuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademq; in cæteris eſt ratio.

PARI

PARI ratione, pluribus numeris datis, quàm tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua verò omnia peragenda, vt do tribus numeris dictum est.

iiij. THEOR. 2. PROPOS. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primũ A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

a 2. sept. b 3. defi.

A . . D . . E . . F
B .....
C . .

SED iam A, non metiatur ipsum B, a inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. b Quia igitur C, pars est ipsius B, cùm ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F; ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

v. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterq; vtriusq; simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est vel A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multi-

A . . . . . | D . . . .
B . . . . . G . . . . . C | E . . . . H . . . . F

tudo

tudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quòd eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, simul vtriusque B C, & E F, simul, quæ est A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc Verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibebitur: Et in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, $A, \frac{2}{9}$ *numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars est; ac proinde vterque simul A, D, vtriusque B C, E F, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius B C: si nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G, G C; E H, H E, ipsis A, D, æquales, &c.* $B, \frac{2}{9}G, \frac{2}{9}C$ $D, \frac{2}{7}$ $E, \frac{2}{7}H, \frac{2}{7}F$

QVOD si quando contingat, numerum fractum diuidi non posse in partes æquales propositas, propterea quòd numerator in eas partes secari nequeat, tum multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fracta priori æquivalens, & cuius numerator in propositas partes diuidi poterit. Vt si fractio $\frac{5}{9}$ secanda sit in duas partes æquales, ducendus est vterque eius numerus in 2. sitq; tres, in 3. sitq; quatuor, in 4. &c. Vt prodeant fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. secunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adsunt integra, reuocanda prius erunt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $4\frac{2}{7}$ secandus sit in tres partes, reducemus eũ prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$ deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales sunt $\frac{31}{21}\frac{31}{21}\frac{31}{21}$. Atque hac in sequentibus quoque propositionibus obseruanda sunt, quando fractionibus accommodantur: Et semper nomine fractionum intelligendis quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.

EODEM modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas,

nitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicuè in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A.	*D.*		*A.*	*D...*
B. G. C	*E. H. F*		*B. G. C*	*E... H...F*

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum D E, F G, H I, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorũ D E, F G, H I, simul eandem esse partem, quæ est A, ipsius D E. Diuisis enim numeris D E, F G, H I, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quàm numeri H I. Quia igitur A, & D K, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & F L, erunt A, B, simul æquales ipsis D K, F L, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & H M; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis D K, F L, H M, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis K E, L G, M I, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in D E, F G, H I, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum D E, F G, H I, simul, quæ A, ipsius D E.

A....	*B...*	*C..*	*D E, F G,*
D.... K.... E	*F... L... G*	*H.. M..I*	*H I, simul*

IDEM sequitur, si loco Vnius numerorum A, B, C, sumatur Vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures Vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A.	*B..*	*C...*	*A.*	*B.*	*C.*
D. K. E.	*F.. L.. G*	*H... M..I*	*D. K. E*	*F. L..G*	*H. M. I*

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ Vnus Vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel Vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	B, $\frac{1}{2}$	C, $\frac{1}{4}$
D I K I E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{1}{4}$ M $\frac{1}{4}$ I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile propositum, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerum D, E, F, æquè multiplices, singuli singulorũ. Dico & omnes A, B, C, simul omniũ D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cùm enim tam sit multiplex A, ipsius D, quàm est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quàm est multiplex A, ipsius D.

A . . B . . . . C	A . . B . . C . .
D . E . . F . . .	D . E . F .

SI numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æquè multiplices; quàm multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

QVOD si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco pluriũm, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumq; numerum A B, & DE, simul vtriusq; numeri C, & F, simul easdẽ partes esse, quæ est A B, ipsius C, vel DE, ipsius F. Diuisis enim numeris A B, D E, in par-

A . . . G . . . B	D, ... H . . . . E
C	F . . . . .

tes

tes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partiũ in numero DE; propterea quòd eædem partes est numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG, numeri C, eadem est DH, numeri F; a erit vterque AG, DH, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ AG, ipsius C, vel DH, ipsius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, simul eadem pars vtriusq; C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, simul vtriusque numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. *sept.*

SCHOLIVM.

EADEM hac propositio locum habet in numeris fractis, cuius tum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.

$A, \frac{1}{9} G, \frac{1}{9} B$ $C, \frac{3}{9}$ $\quad$ $D, \frac{2}{7} H, \frac{2}{7} E$ $F, \frac{6}{7}$

SED & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim est demonstratio, si modò pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio precedenti; vt hic perspicuum est.

$A \ldots K \ldots B \mid C \ldots L \ldots D \mid E \ldots M \ldots F$
$G \ldots\ldots \mid H \ldots\ldots \mid I \ldots\ldots$

vij. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem

eadem pars, quæ est A....E..B
AE, ipsius CF, vel to- G....C.....F....D
tus AB, totius CD.

Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC: erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cùm AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD, erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendũ. a 5. sept.

SCHOLIVM.

A, 3/2 E, 2/5 B, LOCVM etiam habet hæc propositio, cuius cum eius demonstratione in numeris factis, vt hic apparet.
G, 2/5 C 2/8 E 2/5 D

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablatus sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel denique in integris & ablatus, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A. E... B | A... E. B | A. E. B.
C... C.. F..... D | G..C..... F..D | G..C..F..D

CÆTERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quàm in fractis.

SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratio itu confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æquè multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cùm enim AB, ipsius CD, sit æquè multiplex, atque AE, ipsius CF, erit è contrario totus CD, totius
AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati A...'...E....B
AE. b *Quare & reliquus FD, reliqui EB, C... F..D* b 7. sept.
eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB, & proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex.

QVOD si ex CD, ablatus fuerit vnitas CF, vel reliqua sit vnitas FD. vel denique in integris & ablatus sit vnitas CF, & alia reliqua FD, idem demonstrabitur. Vt hæc exempla commonstrant.

A...E.....B | A....E..B | A....E....B
C..F..D | C..F.D | C. F.D

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ab lati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totu totius.

SIT numerus AB, partes eælem numeri CD, quæ ablatu AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eaſdem eſſe partes reliqu FD, quæ totus AB, eſt totiu CD. Sumpto enim numer GH, æquali ipſi AE, et GH, eædem partes ipſiu CD, quæ AB, eiuſdem CL

A ..... K ..... E .... B
C ..... F ..... D
G ..... L .. I ..... M .. H

hoc eſt, quæ AE, ipſius CF. Diuiſo ergo GH, in partes GI, IH numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF, erit multitud partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eadem que pars tam GI, quàm IH, ipſius CD, quæ tam AK, quàm KE, ipſius CF. Cùm ergo CD, numerus maior ſit numero C erit & tam GI, quam IH, pars ipſius CD, maior tam numer AK, quàm KE, parte ipſius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM æqualibus ipſis AK, KE, erit GL, eadem pars ipſius CF, quæ AE eiuſdem CF, hoc eſt, quæ GI, ipſius CD; Ac proinde cùm tot GI, totius CD, ſit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, a 7 ſcp. rit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totiu CD. Eodemque argumento oſtendemus MH, eandem eſſe pa tem ipſius FD, quæ eſt totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam etgo tam GI, quàm IH, eadem eſt pars ipſius CD, quæ eſt tam LI, quam MH, ipſius FD; erit vterque GI, IH, ſimul eædem partes ipſius CD, quæ vterque LI, MH, ipſius FD. Eſt autem GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH ſimul eædem partes erit ipſius FD, quæ AB, ipſius CD. Quod verò ſi ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, ſimul æquales ſunt; Erit quo que EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem quæ vterque LI, MH, ſimul era: eiuſdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{19}$ K, $\frac{2}{19}$ E, $\frac{6}{19}$ B
C, $\frac{9}{19}$ F, $\frac{6}{19}$ D
G, $\frac{3}{19}$ L, $\frac{3}{19}$ I, $\frac{3}{19}$ M, $\frac{3}{19}$ H

IN numeris fractis eadem hac po poſito eodem prorſus modo demon ſtrabitur, vt hic manifeſtum eſt.

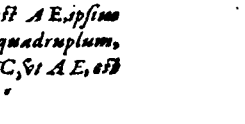
NO.

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum precedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabit hic reliquum numerum E B, alicuius numeri eadem esse partis, quæ est numerus A E, numeri C F, ibi verò perspicuum erat reliquum E B, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti G C, vt A E, est submultiplex ipsius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

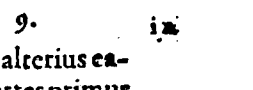
SIT numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, sintque A, B, C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut eadem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia verò B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quàm E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur; Erit B G, ipsius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F, ac propterea & vtraque B G, G C, simul, nimirum B C, secundus vtriusque E H, H F, simul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.



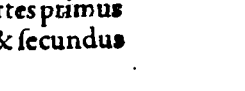
a 5. vel 6. sept.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis propositio hæc, vna cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.



QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.



x. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DF, numeri F, ſintque A, B, C, ipſis DE, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, quæ numerus C, eſt numeri F.

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quàm GB, eadem pars ipſius C, quæ tam DH, quàm HE, ipſius F. *a* Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes AG, ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. *b* Igitur & vtercunque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſque, DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertij, quæ AG ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. *Si* numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 29. ſept.

b 5. *Vel* 6. ſept.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ *G*, $\frac{3}{15}$ *B*
C, $\frac{5}{15}$
D, $\frac{2}{10}$ *H*, $\frac{3}{10}$ *E*
F, $\frac{5}{10}$

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

xij. THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totum CD. Cùm enim fit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; *c* erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius

A..F.....E.....B
C.....F...D

c 10. *def.*

ipſius CF, æquè multiplex. Quo poſito, erit è contrario CD, totius totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æquè multiplices ipſorum CD, CF. a Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æquè multiplex erit. b Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. a 27. ſept. b 20. def. fin.

SIT deinde AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo poſito, c erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; d Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. A....E..B / C.....F....D c 7. Gel 8. ſept. d 20. def fin.

CONTINEAT tertiò AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quo poſito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonſtrabimus. e Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipſum CD, & EB, ipſum FD, æqualiter continebit, eandemq; inſuper illius partem, vel partes, vt mox oſtendemus. f Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. e 8. ſept. f 8. ſept.

A.....E...B | A.....E.....B
C...F..D | C.....F.....D

QVOD ſi AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perſpicuum eſt reliquum EB, quoque eſſe æqualem reliquo FD. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandũ. A.....E...B / C.....F...D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertij caſus demonſtrationis reſpondent.

$A, \frac{6}{9}E\frac{1}{10}B$ | $A, \frac{14}{21}E\frac{28}{30}B$
$C, \frac{4}{9}F\frac{2}{10}C$ | $C, \frac{7}{21}F\frac{10}{30}D$

LEMMA.

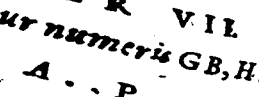
QVOD autem, ſi AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, e-

qualiter contineat, eademq; insuper partem illius vel partes; è contrario C D, *ipsius* A B, *&* C F, *ipsius* A E, *sit eadem partes: Et si* C D, *ipsius* A B, *&* C F, *ipsius* A E, *sit eadem partes; è contrario* A B, *ipsum* C D, *&* A E *ipsum* C F, *æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum* A B, *ipsum* C D *&* A E, *ipsum* C F, *æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem;* G B, *quidem ipsius* C D, *&* H E, *ipsius* C F; *ita vt numeri reliqui* A G, A H, *sint vel æquales ipsis* C D, C F, *vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris* C D, C F, *in partes* C I, I K, K D; *&* C L, L M, M F, *ipsis* G B, H E, *æquales; erit multitudo partiũ numeri* C D, *multitudini partiũ numeri* C F, *æqualis, quod* G B, *ipsius* C D, *sit eadem pars, quæ* H E, *ipsius* C F. *Similiter diuisis numeris* A G, A H, *in partes* A N, N O, O G; *&* A P, P Q, Q H, *eisdem* G B, H E, *æquales; erit quoq; multitudo partium numeri* A G, *multitudini partiũ numeri* A H, *æqualis. Cùm enim* A G, A H, *vel æquales sint ipsis* C D, C F, *vel eorũ æquè multiplices, erunt vel tot partes in* A G, A H, *quot in* C D, C F, *vel certè numerus partium numeri* C D, *toties continebitur in* A G, *quoties numerus partium numeri* C F, *in* A H; *propterea q; multitudo partium numeri* A G, *multitudini partium numeri* A H, *æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes* G B, H E, *erit & multitudo partium numeri* A B, *multitudini partium numeri* A E, *æqualis: Atq; adeò vna pars numeri* C D, *eadem pars erit numeri* A B, *quæ vna pars numeri* C F, *est numeri* A E. *Quare cùm multitudo partium numeri* C D, *æqualis sit multitudini partium numeri* C F, *erit* C D, *eadem partes numeri* A B, *quæ* C F, *ipsius* A E.

A..N..O..G..B
C..I..K..D
A...P...Q...H...E
C...L...M...F

CONTINEAT *deinde* A B, *ipsum* C D, *&* A E, *ipsum* C F, *æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterue, &c. easdemque insuper partes illius; numerus quidem* A B, *partes* G B, *numeri* C D, *& numerus* A E, *partes* H E, *numeri* C F: *ita vt reliqui numeri* A G, A H, *sint rursum vel æquales ipsis* C D, C F, *vel eorum æquè*

æquè multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numero CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æqualibus, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd qualibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æqualibus, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, quot in CD, CF, vel certè numerus partium ipsius CD, toties contenitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea quòd multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeò vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primò propositum.



IAM verò sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eadem partes. Dico e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, eorum erunt ea multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hac multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem vel partes. Quod secundò est propositum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B, C, D, E, F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico esse quoq; omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primũ A, C, E, minores quàm B, D, F. Quoniã igitur, propter eandem proportionẽ,

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

a 20. de fin. a eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F. b erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; c erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B.

b 5. Vel 6. sept.

c 5 sept.

d 20. de fin. d Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æquè multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E;

e 5 sept. A..... C.... E..... Atque adeò vt prius, e erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B,
B.... D.. F...

f 20. de fin. ipsius A; ideoq; & è contrario omnes A, C, E, simul omniũ B, D, F, simul, & A, ipsius B, æquè multiplices. f Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem sem-

semper demonstratio, vt hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A...C.....E..... | A...C...E..... | A...C...E...
B. D.. F... | D. D. F.. | B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius eædem partes. Igitur vt prius, A.....C....E..... erunt omnes B, D, F, simul B..... D...F..... b omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ ipsius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, simul omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. c Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B. a 20. *de fin.* b 6. *sept.* c 20. *de fin.*

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul: quibus si rursum addantur æquales E, & F, A.... C ... E ..... fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, B.... D ...F..... D, F, simul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propositio hac vera esse eodem modo demonstretur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiv.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & A... C..... C ipsius D, eadem pars, vel partes. d Vicissim B....D..... d 9. *Vel* ergo A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars 10. *sept.* erit, vel partes: e Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D. e 20. *de*

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior *fin.*

quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, vel partes.

a 9. vel 10. sept. A ..... C ... / A ..... D .... a Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, vel partes: Atq; adeo è contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æquè multiplex erit, vel certè, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes. b Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

b 20. de fin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æquè multiplex; vel certè A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certè, per lemma proposit. 11. huius lib. eædem partes. c Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, vel partes. d Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

c 9. vel 10. sept. d 20. de fin.

A ..... C .... / B ..... D ...

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æquè multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo, è contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. e Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. f Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

e 9. vel 10. sept. f 20. de fin.

A ... C .... / B ... D ....

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt; g Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

g 20. de fin.

A .... C ... / B .... D ...

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam G. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel æquè multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes; b erit vt A, ad C, ita B, ad D.

h 20. de fin.

SINT septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint

iores ſint quam B, & D, ſiue minores, ſiue æquales. Quoniam igitur, ob eandem proportionem A, ipſius B, & C, ipſius D, æquè multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certè A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & viciſſim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum. a 20. def. fin.

A ..... C .....
B ... D ...

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eoſque demonſtrationibus certiſſimis confirmare, vna cum lemmate propoſ. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, vt perſpicuè ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metiatur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eadem partes. Item enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xvi

SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, ſitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita D, ad E;

3. ſep. A ..... D..... a erit viciſſim, vt A, ad D,
B ..... E ..... ita B, ad E: Similiterque,
C .... F ... eandem ob cauſam, cum
G.....H..... ſit, vt B, ad C; ita E, ad F;

erit viciſſim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni B, ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, vt mox oſtende-

b 13. ſep. tur.) b Ac proinde viciſſim, vt A, ad C, ita D, ad F.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

A . D...
B .. F.....
C ... F.....
G . G...

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem ſunt inter ſe quoque ſint eadem, quales

A ..... B ..... C ....
D..... E..... F...

ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eadem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri ſiue fracti, ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F,

æquè

quæ multiplex, *vel eadem pars, vel eadem partes*; *vel certè* B, *quam* E, *& tam* A, *ipſum* D, *quam* C, *ipſum* F, *continebit* æqua-liter, *tandemque inſuper partem, vel partes*. a *Quare numeri* A, D, C, F, *proportionales ſunt, vt quidem* A, *ad* D, *ita* C, *ad* F. *Quod eſt propoſitum.* a 20. de fin.

HOC *idem demonſtratum fuit ab Euclide lib.* 5. *de proportionibus magnitudinum, propoſ.* 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xvj.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æquè. Dico viciſſim vnitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æquè metiri. Diuiſo enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatũ numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æquè vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipſum E I, atque vnitas G H, ipſum I K, & vnitas H C, ipſum K F; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, ſimul numerorum E I, I K, K F, ſimul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compoſitus numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compoſitum æquè metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A. D.
B. G. H. C E. I. K. F

SCHOLIVM.

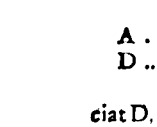
ILLVD *idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ.* 13. *oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æquè metitur, atque numerus D, numerum E F, erit vnitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propoſ.* 9. *demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, nu-*

B C, numeri E F; Ac propterea ☉nitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

HÆC propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nam ſi ☉nitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur ☉viciſſim æquè ☉nitas tertium numerum, qui fractum ponitur, &
a13.ſep. *ſecundus integer quartum fractum; a ſed ſolum eandem habebit rationem ☉nitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.*

THEOR. 14. PROPOS. 16.

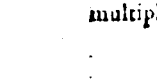
SI duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.



DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim
b15.de- ☉nitate E; cum A, ipſum B, multiplicans faciat C; *b* erit C, ex B,
fin. toties compoſitus, quot ſunt in A, ☉nitates; atque adeo ☉nitas E,
c15.ſep. numerum A, & numerus B, numerum C, æquè metietur. *c* Viciſſim ergo & ☉nitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æquè. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A,
d15.de- facit D: *d* erit D, ex A, toties compoſitus, quot ſunt in B, ☉nita-
fin. tes; atque adeo ☉nitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æquè metietur: Metiebatur autem & eadem ☉nitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æquè. Æquè igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter ſe æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo ſeſe multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propoſitio ita demonſtranda eſt. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, ☉nitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, ☉nitatem. Sed ex eadem



deſin. vt B, ad E, ☉nitatem, ita quoque erit D, ad A, quod B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propoſ. 14. ac proinde æquales inter ſe erunt C, & D. Quod erat oſtendendum.

POTEST hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo

SI duo numeri ſe mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipſum B, faciat C, oſtendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æquè metiri. At verò, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet, a etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æquè metitur, atque vnitas E, ipſum B.

E.
A . . . B . . . .
C . . . . . a 15. def. fin.

QVOD ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F, *b* erit D, ex B, compoſitus toties, quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æquè metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit, *c* Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, *d* & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod oſtendendum erat.

F.
A . . .
B . . C . . .
D . . . . . E . . . . . b 15. def. fin. c 16. def. fin. d 13 ſep.

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem oſtendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propoſ. 14. vt D, ad F, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

THEOR.

xix. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; a fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipſos A, & B, facit D, & E; b erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonſtrandum.

a16. ſep.

A .... B ....
C ...
D ..... E .....

b17. ſep.

SCHOLIVM.

LIQVIDO conſtat, eandem hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari; ſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo. HANC autem propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, ſiue numeri omnes ſint integri, ſiue non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunq; numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B, C, D, habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F, c erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

c17. vel 18. ſept.

A ...
B ... C ... D ....
E ..... F ..... G .....

xix. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & quarto fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT

SI quatuor numeri proportionales A,B,C,D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; a erit, vt C, ad D, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; b erit quoque vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet quam A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. scripsimus.

A . . .		a17. sep.
B . .		
C		b18. sep.
D		
E		
F		
G		

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; c erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim c17. sep. G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; d erit quoque, vt A, d18 sep. ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, sive omnes fracti sint, sive non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si,

qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum esse maiorem eo, qui fit ex B in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C ad D; (sive E, numerus integer sit, sive fractus; sive integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad prop. 19. lib. 9. ostendemus, si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D) erit quoque maior proportio A, ad B, quam E, ad B: ac proinde A, maior erit, quam E. Quare maior numerus fiet ex A in D, quam ex E, in

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

a 19. sep. *eundem D: a At qui fit ex E, in D, aqualis est ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.*

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, primi ad B, secundum, quam C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (sive E numerus sit integer, sive fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D quam ex E, in eundem D. ac proinde maior erit A, quàm E. Quare

b 19. sep. *maior erit proportio A, ad B, quam E, ad B: b At ita est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.*

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maiorem, mutes in vocem, minorem. Vt in hoc apposito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D: hoc est, maior est proportio C primi ad D, secundum, quàm tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quarto, sive ex B, in C, quam ex D, secundo in A, tertium, sive ex A, in C vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B in C, quod est propositum. Deinde si minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C: hoc est, maior ex B, in C, sive ex C, in B, quam ex A, in D, sive ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam est demonstratum

A ..... E .....
B ....
C ...
D ..

stratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. XX.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erũt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur.

Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita B, ad C; numerusque genitus ex B, in C, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, a erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur. a 19. sep.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . .

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, b erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. b 16. sep.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si maior fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium.

Item si minor fuerit proportio primi ad secundũ, quam secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se; minor proportio erit primi ad secun-

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . . .

A . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . . . .

dum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis proposit liquet, si secundo numero sumatur alius aequalis, & habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, aut minor, &c. & in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æquè metiri ipsos E, F, maiorem quidem A B, ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt A B, ad C D, ita E, ad F; *a* erit vicissim, vt A B, ad E, ita C D, ad F. Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E, F; *b* erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. *c* Erit ergo, vt A G, ad E, ita C H, ad F; *d* & vicissim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsius E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . .
F . . . . . .

a 13. *sep.*
b 20. *def. fin.*
c 20. *def. fin.*
d 13. *sep.*

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continuè proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo primum metiri secundum, & secundum, tertium. Et in hoc appositio exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo aequalis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem

mur; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſa-rium dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12. lib 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primoſque duos eſſe in ea proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ea lege propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit proportio A B, ad

A ... K ... B C .. L . D E .... M .... F
G ..... H ..... I ..... ?

CD, qua C D, ad E F, ſiue non; ita vt non poſſint reperiri alij numeri ipſis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, vt A B, ad C D, & ſecundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. vel ad 1 qui minores ſunt ipſis A B, C D, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8 & 10. proportio verò 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt A B, ad C D, & H, ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, metiri æquè. Cum enim ſit vt A B, ad C D, ita G, ad H, a erit vicißim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum ſit vt C D, ad E F, ita H, ad I, b erit quoque vicißim, vt C D, ad H, ita E F, ad I. c Quare A B, ipſius G, & C D, ipſius H, & E F, ipſius I, c vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. ſin. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F, atque adeo A K, ipſius G, & C L, ipſius H, eadem pars. Eſt ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H; c & vicißim vt A K, d ad C L, ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemque modo erit, vt C L, ſin. ad F M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, e

a 13. ſep.
b 13. ſep.
c 20. de
d 20. da
e 13. ſep.

E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quam A B, C D, E F. Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, æquè metietur. Quod eſt propoſitum.

Q V O D ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint

A .. B ..... C ...
D .... E ..... F .....

alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F, æquè metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, æquè metientur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, æquè metiatur, ac B, ipſum E, metientur æquè omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

C Æ T E R V M hac propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus aliis propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Alia autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt, ſemel hoc loco monuiſſe.

xix. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri: & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim

A ..... H ...
B ... D ....
C ..... E .....
G ..... F ..

enim fit vt A, ad B, ita E, ad F; a erit numerus ex A, in F, genitus aequalis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, b erit eidem numero, qui fit ex B, ita E, aequalis numerus, qui fit ex C, in D. Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quantum aequalis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. c Quare et vt A, ad C, ita D, ad F. a 19. sept. b 19. sept. c 19. sept.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex aequalitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine aequales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in propositionibus, quos in magnis tradidimus lib. 5. & explicauimus, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, numerum cum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13. & 22. huius lib. non alienum, qui ex aequalitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quadam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, d erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, e erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

A..... C...
B..... D...

d 13. sept. e 13. sept.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

SIT ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico diuidendo eſſe ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Cum enim ſit ut A B,

a13.ſep. *A ..... C ... B* *ad C B, ita D E, ad F E;* a *erit viciſſim, ut totus A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad*
D .... F .. E *ablatum F E: Ac proinde, ut totus A B, ad*
b11.ſep. *totum D E,* b *ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc eſt, A C, ad*
c13.ſep. *D F, ut C B, ad F E.* c *Viciſſim ergo erit quoque A C, ad C B, ut D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.*

EADEM ratione demonſtrabimus Diuiſionem rationis conuerſam, & contrariam, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per diuiſionem rationis conuerſam eſſe quoque, ut C B, ad A C, ita F E, ad D E. Cum enim ſit, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E; erit quoque diuidendo, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Et conuertendo, ut C B, ad A C, ita F E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico per diuiſionem rationis contrariam, eſſe quoque, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim eſt, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Ergo diuidendo, ut C B, ad A C, ita F E, ad D F; Et conuertendo, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.

III.

SI diuiſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

SIT ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico & componendo eſſe, ut A C, ad B C, ita D F, ad E F. Cum enim ſit, ut A B, ad B C, ita D E,

d13.ſep. *ad E F;* d *erit viciſſim, ut A B, ad D E, ita*
c12.ſep. *A ..... B ... C* *B C, ad E F;* e *Ac proinde A B, B C, ſimul*
f13.ſep. *D .... E .. F* *ad D E, E F, ſimul, ut B C, ad E F:* f *Et viciſſim A B, B C, ſimul, hoc eſt, totus A C, ad B C, ut D E, E F, ſimul, hoc eſt, totus D F, ad E F. Quod eſt propoſitum.*

SIMILITER Compoſitio rationis conuerſa, & contraria oſtendetur hoc loco, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis conuerſam eſſe quoque, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quia enim eſt ut A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit rurſus, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis contrariam eſſe quoque, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim ſit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit conuertendo, ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo ergo, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E: Et conuertendo, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoq; per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cùm enim sit, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E; a *erit uicissim, ut totum A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad ablatum F E;* b *Ac proinde, ut totum A B, ad totum D E, ita erit reliquus A C, ad reliquum D F.* c *Vicissim igitur ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod erat propositum.*

A.....C...B
D.... F ..E

a 13. sep.
b 11. sep.
c 13. sep.

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT ut A B, primus ad C, secundum, ita D E, tertius ad F, quartum; Item ut B C, quintus ad C, secundum, ita E H, sextus ad F, quartum. Dico ita esse A G, compositum ex primo & quinto ad C, secundum, ut est D H, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, ut B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo ut C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est, ut A B, ad C, ita D E, ad F: & ut C, ad B G, ita F, ad E H; erit ex aequalitate, ut A B, ad B G, ita D E, ad E H. Componendo igitur, ut A G, ad B G; ita D H, ad E H. Itaque cùm rursus sit, ut A G, ad E G, ita D H, ad E H, & ut B G, ad C, ita E H, ad F; erit ex aequalitate, ut A G, ad C, ita D H, ad F. Quod est propositum.

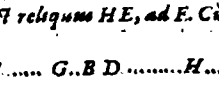
A.....B..G | D.....:...E...H
C.... | F .....

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebũt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex aequalitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex aequalitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.

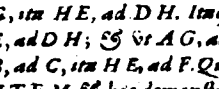


ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D: & vt A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex aequalitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH: & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex aequalitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.



DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

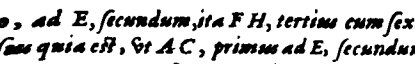
VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoq; illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunq; numeros proportiones habuerit, quas idem alius

nume-

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoq; idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT quotcunq; numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc eſt ſit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe FI, habet ad K. Cum enim ſit, vt AB, primus ad E, ſecundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, ſecundum, ita GH, ſextus ad K, quartum; erit quoque vt AC,



primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FH, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt AC, primus ad E, ſecundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, ſecundum, ita HI, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FI, tertius cum ſexto, ad K quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunq; AB, BC, CD, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI. Hoc eſt ſit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nempe ad AD, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad FI. Cum enim ſit, vt E, primus ad AB, ſecundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, ſextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad AC, ſecundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum ſexto. Atq; ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM verò his demonſtratis, oſtendentur nouem vltima propoſitiones lib. 5. à Campano adiecta, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuere; ſi pro magnitudinibus, intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; pro illis demonſtrationes adhibeantur.

THEOR.

xx. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; a metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æquè; atque adeò secundam eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cùm vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æquè metiatur; b metietur & vicissim æquè vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur: c metietur quoque vicissim æquè vnitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeò, cùm idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . B . . . .
C ------ D -- ;
E ----

a 21. sep.
b 15. sep.
c 15. sep.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerū, præter vnitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturq; C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At verò ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B: d fit, vt D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. e Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E: Atq;

A . . . . . B . . . . .
C -----
D ----- E ----

d 9. prosun.
e 18. sep.

adeò,

adeò, cùm D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quàm A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunque numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poſſint, quamuis proportio ducrũ in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erũt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionũ. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C, metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, aquè, per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus: atque adeò ſecundum vnum eundem numerum, quiſit G: ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, aquè metitur: a metietur quoque vicißim aquè vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, aquè, atque vnitas ipſos E, F: Atque adeirco A, B, C, cùm habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

A ..... B ..... C .....
D ---- E ------ F ---
G -----

a 15. ſept.

I AM verò ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communis menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D: & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E: & ipſum C, toties quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F: fit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quæ A, B, C, per ea, quæ

ad pro-

ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus: Atque adeò, cùm D, E, F, minores ſint quàm A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

xxiiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B: & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C: metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipſum A: *a* metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cùm habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

a11. *pro-* *mun.*

A..... B.....
C... D----

xxv. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi: ſit eorum cõmunis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniã igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; *b* fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D: *c* & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idem D, ex A, in B. Igitur cùm ex E, primo in F, quartum, fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; *d* erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; *e* erit E, ad A, primus; Atq; adeò E, & A, cùm ſint inter ſe primi, *f* in ſua proportione minimi erunt. *g* Aequè igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cùm E, metiatur vtrumq; B, & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

b9. *pro-* *mun.*
c16. *ſep.*
d19. *ſep.*
e25. *ſep.*
f23. *ſep.*
g21. *ſep.*

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvij.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in seipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniã igitur A, & D, ad B, primi sunt, *a* erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C.....
D....

a 26. septim.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cùm enim vterque A, & B, primus sit ad C; *b* erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cùm vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; *c* erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A ..... B...
E.....
C... D..
F.....

b 26. septim.

c 26. septim.

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviij.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque seipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoq; primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cùm enim A, B, sint inter se primi,

A... B..
C..... D....
E..... F.....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

a 27. *ſeptim.* mi, *a* erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atq; eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeò geniti duo C, D, primi inter ſe erunt.

b 27. *ſept.* RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, *b* erit & C, factus ex A, in ſe, ad B: & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; *c* Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cùm A, & C, primi ſint ad B, *d* erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eadem; ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus eſt; *e* erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, *f* erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus: nec non & H, ad A. *g* Quare & *I*, genitus ex A, in G, ad K, genitus ex B, in H, primus erit, cùm vterque A, G, ad vtrumque B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

A . . . B . .
C . . . . . D . . . .
E . . . . . F . . . . . .
G, 81. H, 16.
I, 243 K, 32.

c 28. *ſept.*
d 26. *ſept.*
e 28. *ſept.*
f 26. *ſept.*
g 28. *ſept.*

xxix. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterq; ſimul ad quemliber illorum primus erit: Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi A B, B C. Dico & vtrumque ſimul A C, primum eſſe & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; *h* metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter ſe ſunt A B, B C, cùm eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad B C, oſtendemus eundem eſſe primum.

A . . . . . B C
D . . . . .

h 12. *prænum.*

SED iam vterque A B, B C, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; *h* metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compoſitum; Ac proinde A C, A B, non ſunt inter ſe primi, cùm eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Sunt igitur A B, B C, inter ſe primi. Eo-

i 10. *prænum.*

ni. Eodemque argumento oſtendemus A B, B C, interſe primos eſſe, & A C, ad B C, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim A C, ad A B, primus eſt, erunt A B, B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & A C, ad B C, primus erit: per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos praeter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Nõ erit ergo C, idem qui A; quod A, po- natur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . . B . . . . . C . . . .

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus, is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuò multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnum ipſorum A, & B, ſi non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur verò ipſum E, toties, quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertiũ; *a* erit vt D, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad E, quartum. *b* Quia verò primus D, ad A, primus eſt, cùm eum non metiatur; *c* erunt D, & A, in ſua proportione minimi. *d* Quare æquè metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemq; modo ſi D, non

A . . . . B . . . . . C . . . . . D . . . E . . . . . .

a 19. ſep. *b* 31. ſep. *c* 23 ſep. *d* 21. ſep.

metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoque ad vnum ipſorum A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterq; A, & B, ad D, primus. a *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cùm D, ponatur vel metiri ipſum G, vel certè ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cùm non ſit primus ad vtrumque.*

A ... B ....
C .....
D .....

a 26. ſeptim.

xxx. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: *Si* verò compoſitus, metiatur eum numerus C, qui vèl primus erit, vel compoſitus: *Si* primus, cùm metiatur ipſum B; & B, ipſum A; *b* metietur quoq; C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atq; adeò ad primum, qui cùm metiatur omnes præcedentes, *c* metietur quoq; compoſitum A. Quod eſt propoſitum.

b 11. *prop.*

A .....
B ..... C ...

c 11. *prop.*

ALITER. Quia numerus A, compoſitus eſt, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. *Sit* omnium metientium eum minimus B, quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A. *d* metietur quoq; C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cùm B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus

A .....
B ... C ---

d 11. *prop.*

vus B. Omnem igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel eſſe primum, vel certè aliquem primum eum metiri. Cùm enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si verò compoſitus; a metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eũ aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum.

A.....

a 33. ſcp.

PROBL. 3. PROPOS. 35. xxxiiij.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Si verò non ſunt inter ſe primi, b inuenta ſit maxima eorũ communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per E, F G; c fit, vt D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A.....B.... C.....
D..
E... F.. G....
H--- I---- K----
L-----

b 3. ſcp.

c 9. pro. num.

QVOD verò E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſint minimi; erunt aliqui alij ipſis minores minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æquè, vt ad propoſ. 21. huius lib. oſtendimus, metiantur eos per numerum L. Quo poſito, d fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; e & viciſſim L, ipſos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; f erit, vt E, primus ad H, ſecundum,

d 9. pro. num.

e 8. pro. num.

f 19. ſcp.

dum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior, quàm H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atq; adeò cùm L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continui proportionales. Vt si proponãtur continuè proportionales A, B, C, D, E, sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

minimi, sive non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum E, F, G

A . . B . . . . . C	A . . . . B . . C . . . . .
D . . .	D . .
E. F . . G . . .	E . . F. G . . . .

per hanc propos. inuenterum esse vnitatem; quando scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, aqualis est, vt ex hoc exemplo apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

xxxvj. PROBL. 4. PROPOS. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseq; inuicem multiplicantes faciant C. Dico C, esse mini

minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; a metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quòd autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, b tam ex A, in F, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium, c erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cùm ponantur primi inter ſe, d & ob id, in ſua proportione minimi) e æquè metientur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; f erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atq; adeò C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

A.... B.....
C.....
D-----
E ------- F---

a 27. prop.

b 9. prop.

c 19. ſep.

d 23. ſep.

e 21. ſep.

f 17. ſep.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. g Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, h fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cùm tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; i metietur tam A, quàm B, ipſum E. Quòd verò E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, k fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, l erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cùm ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, m metientur ipſos H, & G, æquè, nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F, n erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cùm D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt, metietur etiam E, numerus numerum

A....B.....
C.. D...
E.....
F----------
G---- H---

g 35. ſep.

h 19. ſep.

i 17. prop.

k 9. prop.

l 19. ſep.

m 21. ſep. prim.

n 17. ſep. prim.

rum F, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur aliũ numerum ipſo E, minorem, atq; adeò E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem eſſe minimũ, quem A, & B, metiuntur.

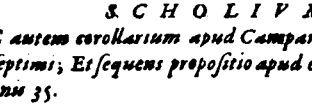
SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

xxxv. THEOR. 33. PROPOS. 37.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D. ſitq; alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum C D, metiri. Si enim E, ipſum C D, non metitur, ablato E, ex C D, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidam minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt, F D, minorem ſe, ita vt E, metiatur ablatũ C F. Quoniam igitur tam A, quàm B, ipſum E, metitur, & E, ipſum C F; a metietur quoq; tam A, quàm B, ipſum C F. Itaq; A, & B, cùm metiantur totum C D, & ablatum C F; b metientur & reliquum F D. Eſt autem F D, minor quàm E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quare E, ipſum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 11. *pro.* *num.*

b 12. *pro* *num.*

xxxvj. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri c 36. *ſep.* A, B, C, metiantur. d Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metiãn-

metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt; A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem.

A . . . B . . . . C . . . . . .
D . . . . . .
E . . . . . .

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Immo, cùm A, & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; *a* metietur quoq; D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum.

a 32. ſep.

SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. *b* Igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtenderur. Cùm A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; *c* metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quòd autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniã igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; *d* metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeò cùm C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quàm E; nõ erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Immò cùm C, & D, metiantur ipſum F; *e* metietur quoq; eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, rerum minimus, quem illi metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

b Inuento 36 ſep.

c 11. pro. num.

d 37. ſep. prim.

e 37. ſep. prim.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, ſitq; F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiantur eius partem D G, reliqu-

A . . . B . . . C . . . .
D ..... G ---- E
F .....

relinquatq; numerum GE, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum DG, a metientur quoq; A, B, C, eandem

a 11. prenum. DG; Ac proinde, cùm & totum DE, ponantur metiri; b metientur & reliquum GE, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus,

b 12 prenum. quem A, B, C, metiuntur. Quod erat absurdum, & contra hypothesin. Metitur igitur F, ipsum DE.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

xxxvij. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum

A . . . . . .
B . . . . C . . .

c 15. sep. C, & B, ipsum A, æquè metitur; c & vicissim vnitas æquè ipsum B, & C, ipsum A, metietur: atque adeò eadem pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A. Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

xxxviij. THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cùm B, pars denominetur à C, sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æquè.

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

d 15. sep. d Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 41. XXXIX.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C, Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; *a* minimusque, quem D, E, F, metiantur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, *b* habebit G, partes à D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur à D, E, F. Quod verò G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, *c* metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

D . . A, *Secunda* a 38. sep.
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H . . . . . b 39. sep.

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æquè vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G. d Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I K, L, ipsum G, æquè, atque eadem vnitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsum G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ à D, E, F.

A . . . D . . I . . . . . c 40. sep
B, *Tertia* E . . . K . . . .
C, *Quarta* F . . . . L . . .
G . . . . . d 15. sep.

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM verò, vt Campanus ait, si inuentum minimus numerus datas par-

tas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H esse secundum numerum, qui easdem partes, A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. eadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; a metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. b Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

G . . . . . A, D . .
H . . . . . B, E . . .
I . . . . . C, F . . . .
K ---------- M ------ L
N ---------- P ------ O

a 11. prem. b 39. septim.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; c metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & d G, ablatum K M, sibi æqualem. d Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.

c 40. septim. d 12. prem.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor verò quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, e metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, f ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem. f Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, da-

e 40. septim. f 12. prem.

tur; At propterea I, tertium eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendus q, ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; itaque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur.

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, ſic demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, pars ſua H, quotes Vnitas D. Eſt autem Vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, minimum numerum G, à D, denominatum. Deinde quia ex E, in F, fit G: erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, minimum numerum G, habet partem B, minimum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat Vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis, minimum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, minimum Vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ita vt K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, totius I, quotes Vnitas in D; a Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I; b erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in Vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita Vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita Vnitas ad M: Erit per lemma

a 15. de ſim.

b 17. ſeptim.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ.

H. G. F. Vnitas.
I. K. E. M.

propoſ. 14. huius lib. & H, ad I, ita Vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

SI verò plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD ſi numerorum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi *minimi* ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, a eris, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: b Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod b 23. ſep. inter ſe primi eſſe ponantur. c Igitur tam A, ipſum E, quam D, c 21. ſep. ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... E ---
B ..... F ----
C ..... G -----
D ..... H ---------

a 14. ſep.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe

A ....
B .....
C .....
D .....

E ---
F ----
G -----
H ---------

C, D, esse minimos in continuâ tione suarum proportionum, si extrems A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continuè proportionales, & vulg. Euclides, sine non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

ij. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, se ipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; *b* erit quoque, vt A, ad B; ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos: *c* sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; *d* Erunt & C, E, extremi, inter se primi. *e* Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A .. B ...
C .... D ..... E .....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O. 81.

a 17. *sept.*
b 17 *sept.*
c 24 *sept.*
d 29. *sept.*
e 1. *oct.*

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, eadem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. *g* Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I,

f 18 *sept.*
g 24. *sept.*

E, & I, ex B, in L, a erunt & F, I, extremi, inter ſe primi. b Quare a 29. ſep.
F, G, H, I, in ſua proportione, quæ eſt A, ad B, minimi ſunt. b 1. oct.

NON aliter, ſi ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producuntur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam c 18. ſep.
A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipſos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex ijs, qua ad propoſ. 18. huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipſos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi ſint, oſtendatur, vt prius.

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K;

erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaque ſiue	*A.. B...*	
	C... D..... E.....	
	F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.	
	K, 16. L, 24. M, 36. N. 54. O, 81.	

A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

COROLLARIVM I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continuè proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter: ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub aliis denominationibus,

quæ in

quæ in Algebra ſolent explicari: Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunque propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt iis, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hanc propoſ. Si verò dati maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi, quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Datis ſint tres numeri A.B.C. minimi continuè proportionales: ſumptiſque duobus minimis D.E. in proportione A. ad B, vel B. ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eademque ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademque ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quod ſi A, dicatur minor quam F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt, quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si verò A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non ſunt, quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quam F; æqualis omnino erit, ideoque vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

A --- B --- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F,

in F, G, H, vt ex demonſtratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM verò tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, eiuſdem conſtructionis, continuè proportionales ſunt, ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, & clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. ſit & extremi numeri quotcunque minimorum continuè proportionalium ſint vltimi tot continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continuè proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continuè proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At verò F, & I, extremos quatuor continuè proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continuè proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippequæ ab vnitate incipiat) continuè proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continuè proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inuenire di proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continuè proportionalium erit primus continuè proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continuè proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. & hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliqua eſt ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant. Et & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continuè ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numerus continuè proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia octo numeros minimos in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, & primus, qui minimus horum deſiderantur octo numeri ſunt octo numeri ab vnitate dupli, & primus, qui minimus horum denomi-

ntur à denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione ſeſquialtera; hoc eſt, à 2. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquinta, ſumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet 625 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porrò hac arte non poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continuè proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſſet 1296. in vltimo exemplo alius numerus inueniretur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neque in priori exemplo poſſet 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quemptam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

iij. PROBL. 2. PROPOS. 3.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometrice demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2 propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis &c. Quod erat oſtendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparet perſpicuè. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, ſed

deiri non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Imò si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conuersum, quoad numeros continuè proportionales. Etenim numeri quotcunque continuè proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque numerorum continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt iam hic demonstratum est. At verò primum theorema, prout spectat ad numeros non continuè proportionales, conuerti nequit. Num licet numeri quotcunque non continuè proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. IV.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. *a* Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æquè metiantur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, *b* A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. *c* Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æquè metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ----- K ----- L -----

a 36. *sept.*

b 9. *prop.*

c 18. *sept.*

a 21. sep. proportione: a ipsi æquè metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æquè metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ----- K ----- L -----

b 7. sep. B, & C, ipsum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi, F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps

c 36. sep. proportionales in datis rationibus. c Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, cõstat. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æquè metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione;

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L ---- M ------ N ---- O -----

d 21. sep. d ipsi metientur æquè L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æquè metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M.

e 37. sep. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

f 36. sep. SED iam E, non metiatur ipsum I. f Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æquè

æquè metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipſos H, G: & C, D, ipſos G, I, metiantur æquè.

Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque eſt K, ad N, cum E, F, æquè ipſos K, N, metiantur.

A, 9. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O---- P---- Q---- R----

Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namq; non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, *a* ipſi æquè metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æquè, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeo cum B, & C, ipſum P, metiantur, *b* metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò oſtenſum eſt, eſſe vt G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q; *c* quod E, F, in ſua proportione minimi æquè metiantur Q, R, eiuſdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipſum Q; *d* metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea quæ ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

a 21. ſept.

b 37. ſeptim.

c 21. ſeptim.

d 37. ſeptim.

QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si verò S, ipſum N, non metiatur, *e* ſumemus

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.
A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

e 36. ſept.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 9. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P, & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliqua data fuerint in numeris non minimis, absolutum nihilo minus problema propositum; sed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris verò E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F. Qua-

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

a 17. septimo.

F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. a Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur. a 27. 8. fin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G,

ex ex D, & F, multiplicatione. Cum A, 24. B, 48.
ex D, multiplicans C, & F, faciat A, G, 96.
& G, erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.
cum F, multiplicans D, & E, faciat G, b 17. 8. prim.
& B, erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E, Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus c 27. 8. fin.
A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam vllum metietur.

SINT continuè proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipsum B, non metiatur, neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. d Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. e Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium à se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neque

A, quat- d 2. 8. 21. e 3. 8. 21.

A quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si igitur ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hac propoſito ad hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continuæ proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nullius proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B multiplex; neq; B, ipſius C; neq; C, ipſius D; neq; D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur è contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C, & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; a neque alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus.

a 6. oct.

SED & ex hu ſequens theorema demonſtrabimus.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò ſecundum metiatur; & quicumque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum E; & B, ipſum C: & C, ipſum D: & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorũ quemlibet ſequentium metiatur,

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

mentiatur, semper B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, a metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, b metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis. a 11. pro num. b 11. pro num.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cùm enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C, ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè sequentium multiplex est. A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex, metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est: Ac propterea è contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundum metietur: Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex; neq; primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E, & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cùm neque primus, neque alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur. A, 48. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM verò A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neq; alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

vij. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri: a neq; alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atq; idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 6. def. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio præcedentis propos. demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Ergo si primus, vel alius quispiam cuiuslibet à secundo sit multiplex, primus quoq; secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex, neq; alius quisquam illum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theorematis scholij præcedentis. Quod est contra hypothesim.

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continuè C, D; sitq; vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumpti enim totidē numeri G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quæ sunt numeri A, C, D, B; erit ex æqu

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

b 3. def. vt A, ad B, atque adeò vt E, ad F, ita G, ad K. c Quare cùm (

&

& K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum; *a* ac propterea in sua proportione minimi; *b* æquè metientur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æquè metiantur, singuli singulos. *c* Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continuè proportionales. Igitur & E, L, M, F, continuè proportionales sunt; Atque ideirco, cùm multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B, tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1. a23. sep. b21. sep.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12 F, 4. c 9 prop. num.

SCHOLIVM.

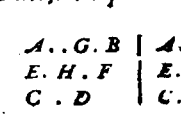
NON solùm ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; Verùm etiã eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hac propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, fuerit Vnitas, vel E, vel F, Vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit Vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem: Cùm enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & Vnitatem; superparticularis verò inter numeros sola Vnitate differentes; superbipartientes denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros dupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & Vnitatem; vel inter numeros sola Vnitate differentes, vel etiam binario, numerum inter numeros minimos, qui eisdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Namneque inter binarium & Vnitatem, neque inter duos numeros sola Vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solum numerus, qui ab vtro-

que

que ℣nitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, (ſiue C D, ℣nitas ſit, & A B, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor ℣nitate quàm A B, maior verò quàm C D, ℣nitate quoque.



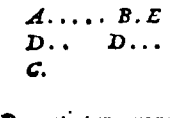
Dico E F, non eſſe medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur eſſe A B, ad E F, ℣t E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipſi E F, æquali, ℣t reliqua ſit ℣nitas G B; & ex E F, numero E H, ipſi C D, æquali, ℣t relinquatur etiam ℣nitas H F; erit quoque ℣t A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cùm A G, E H, ipſis E F, C D, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc eſt, ℣nitas ad ℣nitatem, ℣t totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo E F, medius proportionalis eſt inter A B, & C D.

ITAQVE inter numeros tripla proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt, quod fieri non poſſe, proximè demonſtrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ, quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium A B, & ℣nitatem C, medius proportionalis binarius, ſiue ternarius D: ita ℣t ſit A B, ad D, ℣t D, ad C: Et conuertendo C, ad D, ℣t D, ad A B. Et quoniam ℣nitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum A B. At binarius, ſiue ternarius D, metitur quoque ſenarium A E. Igitur D, metitur totum A E, & ablatum A E: a ac proinde & D, numerus metietur reliquam ℣nitatem B E. Quod eſt abſurdum.

a 11. pro num.

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium A B, & ℣nitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergò, ℣t prius, D, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E: b ac proinde & D, numerus reliquam ℣nitatem E F, metietur. Quod eſt abſurdum.



b 11. pro num.

EX quibus fit, neque illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, ℣t Diapaſon, ſiue, ℣t ℣ulgò dicitur, octaua; neque illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt

Tonum, seu vulgò, secundam, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariã diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapentem, & Diatessaron, quorum intermallorum illud in proportione sesquialtera, hoc verò in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquiteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inæquales. Item quoque Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cùm enim per ea quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorum verò proportio sit duplicata proportionis laterũ; erit proportio quadrati ex diametro descripti, ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cùm ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, nec inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, quæ de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continuè proportionales C, D. Dico totidem cadere continuè proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, [a] sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec

[a] 2. pri.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; a erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia verò, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans verò ipsum G, fecit K, b metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: c Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Aequè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. d Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cùm manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans verò ipsum I, faciat N; e metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundē F: f Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Aequè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. g Proportionales ergo sunt continuè, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cùm tam multitudo E, G, K, quàm F, I, N, vna cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

a 1. oct.
b 7. pron.
c 5. pron.
d 20. defin.
e 7. pron.
f 5. pron.
g 20. defin.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

THEOR.

THEOR. 8. PROP. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, B, & vnitatem.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D, D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: *a* Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. *b* Quare C, seipsum multiplicans fecit D, multiplicas autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cùm C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; *c* erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; *d* erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremò, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ ab nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cùm C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, *f* erit vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proin-

a 5. prop. nunc.
b 9. prop. nunc.
c 17. sept.
d 17. sept.
e 18. sept.
f 18. sept.

proinde tot medij proportionales cadant inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cùm multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati proximi quotcunque, quales sunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum, & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continuè proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.

I.

SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continuè ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

B, quidem & vnitatem, numerus A: At inter F, & vnitatem numerus E: a tãdet quoque inter B, & F, vnus medius proportionalis: atque adeò, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ra-

ratione

tinus A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt I, ad l, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K, & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continuè proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hanc theorema ita proponemus.

II.

SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quam verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continuè proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremò ex E, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat C. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 9. huius lib. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; nec non & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. triplicatæ rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiusdem, ex defin. duplicatæ est ratio A, ad G. Quare cùm sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quod tam B, N, quàm F, Q, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, dupli-

E, 162.		I, 512.
D, 54.	Vnitas.	H, 128.
C, 18.	1.	G, 32.
B, 6.		F, 8.
A, 2.		
N, 36.	K, 4.	Q, 64.
O, 216.	L, 8.	R, 512.
P, 1296.	M, 16.	S, 4096.

E,81. I,1.
D,54. Vnitas. H 2.
C,36. 1. G,4.
B,24. F,8.
A, 16.
N,576. K,256. Q,64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdem argumentis erit ratio D, ad H triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata eſt rationis E, ad A; quod tam B, N, O, quam A, K, L, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. & eiuſdem triplicata eſt ratio D, ad A, ex defin. Igitur eſt D, ad A, vt O, ad L. Eodemq; modo eſt A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata ſit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius ſcholij; propterea quòd tam A, K, L, quàm F, Q, R, continuè proportionales ſunt ab vnitate, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eſt ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis B, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, ſunt continuè proportionales ab vnitate ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata eſt eiuſdem rationis B, ad F. Non ſecus demonſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri vnius ordinis deſinant in vnitatem, vt ex ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua 1, eſt vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propoſ. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris, quàm illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis vniuerſalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, continuè proportionales cecideri̇nt numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, verò & C, totidem numeri G, H, Dico tot quoque medios continuè proportionales cadere inter A, & quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C.

inter H, & C. Sumptis enim inter K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex definitione K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: super theor. 2. huius scholij, tam quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H. Atque adeò cùm inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L: a cadet quoq; vnus medius, nimirum N, inter E, & H; a 8. huius. quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Iisdem modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor huius numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, cadunt q; tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continuè proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter E, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, proximi.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. E, 1. F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2. E, 4096. N, 128. H, 4. D, 256. G, 8. C, 16. K, 1024. L, 32. M, 1.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 23.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus proportionem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipsum D, multiplicans fecit E, ex eon-

A 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

a17.sep. A,9.E,21.B,49. C,3. D,7. ex constructione: *a* erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione: & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum: *b* erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continuè proportionalis cadit E. Quia verò, ex eo quod A, E, B, continuè proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cùm hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum nnmerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

b17.septim.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadrates numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione laterū ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, mediū proportionalem, qua lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suū B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metetur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeò inter se sunt compositi. Similiter cùm sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cùm & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum verò E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posteriorus B.

A,9.E,21.B,49. C,3. D,7.

xj. THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medi proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum tripli catam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continuè proportionales ci

deri

dere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
faciat E: & D, seipsum multiplicans faciat F: At C, & D, se mutuò E, 9. G, 12. F, 16.
multiplicantes faciant G: Multiplicantes verò G, faciant H, & I. C, 3. D, 4.

Quoniam igitur C, seipsum & D, multiplicans fecit E, & G: a erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cùm D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F: b erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea q; E, G, F, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex definitione cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H: c erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cùm D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans verò ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; d erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B; e Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D: Atq; adeò inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam verò, ex eo quod A, H, I, B, continuè sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cùm sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

a 17. sep.
b 17. septim.
c 17. septim.
d 17. septim.
e 18. septim.

SCHOLIVM.

HIC quoq; manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipsum E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.
I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immò & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atque adeò inter se compositi sunt.

Similiter cùm ſit A, ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B: immò & ipſum I, quod I, factum ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D: Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A, poſteriorum verò trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi E.

cij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primùm poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoq; proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continuè proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F, multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicantes ipſos G, H, I, faciat K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continuè eſſe proportionales. Multiplicantes enim A, & B, ſe mutuò faciant N; & B, C, ſe mutuò multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P. 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

R, S. Simili modo A, multiplicans P, Q. H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans ſeipſum, & B, fecit D, N, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & ſeipſum fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continuè proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; *b* erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eadem-que ratione, cùm C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea q; & E, O, F, continuè proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cùm D, N, E, in eadem ratione ſint continuè proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeò D, E, F, continuè proportionales ſunt.

a 17. ſeptim.

b 17. ſeptim.

DEIN-

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; e-
quæ ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem
ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportiona-
les. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerũt Q, & H; a erit quo-
que, vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportiona-
les in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit
H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7. H, R, S, propor-
tionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem
modo cùm B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; b erit vt B, ad C,
hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; propterea que & H, R, S, I, proportio-
nales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cùm G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex
æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continuè ſunt pro-
portionales.

a 18. ſeptim.

b 18. ſeptim.

NON diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continuè proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicant quiſq; ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

IAM quoq; numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIS propoſitionem totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & ex his ex eiſdem numeris G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeros K, L, M.

A, 2,	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

Dico D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, eſſe queque continuè proportionales. Nam ex ſebolio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quàm B, E, H, L, & C, F, I, M, continuè ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10 huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, ſeu B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continuè ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I, eſſe proportionales continuè in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: ac vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorũ ſecundo vero

procreatos, in triplicatum, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantùm tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiam ſi plures fuerint, quàm tres. Sint namq; numeri plures, quàm tres A, B, C, D, continuè proportionales, qui ſeipſos multiplicantes faciant E, F, G, H: poſtea verò multiplicantes ipſos E, F, G, H, fa-

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. F. 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

ciant I, K, L, M. & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, a 13. oct. *ex demonſtratu, proportionales ſunt. Item F, G, H, cùm illis producti ſint ex A. B, C, proportionalibus in ſeipſos: hi verò ex B, C, D. proportionalibus quoque in ſeipſos. Erunt E, F, G, H, continuè proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M, & alij deinceps eodem modo producti.*

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuò C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 11. huius lib. A, E, B, continuè proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B, b metietur quoque A, primus ſecundum E. Quare cùm ſit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.
b 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quòd A, E, B, continuè proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt demonſtratum eſt propoſ. 11. huius lib. Quare cùm C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, ſecundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. ſcholij propoſ. 6 huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus

tus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, ſe ipſum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem ſe mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonſtratione propoſ. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continuè ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, a metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

a 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continuè proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt oſtenſum eſt propoſ. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipſum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaque ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. xv.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; b metietur & quadratus A, quadratum B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

b 14. oct.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; c metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

c 14. oct.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xv.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neq; latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D;
A, 8. B, 27.
a15.oct. C, 2. D, 3. a metietur quoq; A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus
b15.oct. A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A.
c14 & 15.oct. c *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

QVOD ſi latus C, lateris D, multiplex ſit: metietur latus D, latus C.
d14.& 15.oct. d *Igitur & B, ipſum A, quadratum quadratum, & cubus cubum metietur, Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.*

A, 36. B, 9.
C, 6. D, 3.

A, 64. B, 8.
C, 4. D, 2.

A TVerò ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex, non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum.
e16.& 17.oct. e *Igitur neque latus D, latus C, metietur.*

A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3.

Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

A, 125. B, 8.
f16.& 17.oct. C, 5. D, 2.

SIMILITER ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex, non metietur D, latus latus C. f *Igitur, nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, ſe mutuo multiplicantes faciant A, & E, F, mutuo ſe multiplicantes faciant B, ſitque C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E; fecit A, & G, *a* erit A, ad G, vt C, ad E, hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; *b* erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9, F, 3.

a 17. ſeq. *prim.*

b 17. ſeq. *prim.*

QVIA verò, cum A, G, B, ſint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad B, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVIA oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum G, E, vel D, F, aſſumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſum ſit A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent (cum G, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit

A, ad G,

A, ad G, & C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius verò illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, ſicut C, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam verò D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; *a* erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; *b* erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, *c* erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; *d* erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H *e* Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continuè ſunt proportionales in

a 17. *ſept.*
b 17. *ſeptim.*
c 17. *ſeptim.*
d 17. *ſeptim.*
e 18. *ſept.*

in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continuè proportionales cadunt.

QVONIAM verò, cum A, M, N, B, sint proportionales continuè, proportio A, B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

Ex iis, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera ipsum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoq; C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem: quod sit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L, metietur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K, metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M: Metiuntur autem & C, D, latera planum suum L a lgitur & C, D, metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, & quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M, consequentis consequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipsum N; (Cum enim factus sit ex H, in L, per constructionem; metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F, G, ipsum N; atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Necnon & ipsum B, nimirum la-

211. pro nam.

A, 30. *M*, 60. *N*, 120. *B*, 240.
I, 6. *L*, 12. *K*, 24.
C, 2. *D*, 3. *E*, 5. *F*, 4. *G*, 6. *H*, 10.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

rum latera ſunum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, & quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducatur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium; ſive primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſive denique ſecundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam, propoſitis quotuis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodolibunque ordinem inter ſe permutent. Qua quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur.

a 15. def. fin. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, a erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem, b ita quoque eſt F, ad A; quod
b 15. def. fin. A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, c ita eſt A, ad unitatem; propterea quod A, multiplicans
c 15. def. fin. B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, ut E, ad B, ita
E, F, F, ad unitatem: d atque idcirco numerus ex E, in
d 19. ſeptim. D, A, unitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, aqua-
B, unitas. lis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; e erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem, f ita etiam eſt G,
e 15. def. fin.
f 15. def.
E, G, ad B, eo quod G factus eſt ex B, in C. Igitur erit
g 15. def. fin.
D, B, ut E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, g ita
A, unitas. eſt B, ad unitatem, propterea quod D, factus eſt ex A, in B. Igitur ex æquo erit, ut E, ad A, ita G, ad
h 19. ſeptim. unitatem: h ac proinde numerus factus ex E, in unitatem, id eſt, ipſe-

met nu-

ber numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in C, productum in B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod eſt ſecundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto C: Item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita ut præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe, fiant 23. multiplicationes diverſæ producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim ut in tribus oſtenſum eſt, idem numerus ſit, ſive genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, ſive prius in D, deinde hic productus in C, conſtat id quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

DEINDE quia ut in tribus eſt oſtenſum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perſpicuum eſt eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & in producto in D, quod eſt ſecundum.

TERTIO quoniam, ut in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur, ſive genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; ſive prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille ſit æqualis proximè oſtenſo primo producto, erit & hic æqualis eidem, quod eſt tertium.

QUARTO quia, ut in tribus oſtenſum eſt, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

QUINTO quoniam, ut demonſtratum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, &

in D, & ex producto in B, qui ex A, in D; & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille ſit oſtenſus tertio loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem aqualis. Quod eſt quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus fi ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextum.

SEPTIMO quia, vt in tribus oſtendimus, idem numerus gigni tur, ſiue productus ex B, in C, ducatur primo in A, deinde hic produ ctus in D, ſiue primo in D, deinde hic productus in A; conſtat eunden numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qu fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proxi mè oſtenſus eſt aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & ille, quod eſt ſeptimum.

OCTAVO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus pro creatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex produ cto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt aqualis ei, qui fit ex A, in B & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fi ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C, pro creabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

DECIMO quoniam, vt in tribus eſt demonſtratum, idem gigni tur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A producetur quoque idem numerus ex A in C, & ex producto in D, & ex producto in E, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille vt tertio loco eſt oſtenſum, aqualis eſt ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

POSTREMO quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod eſt vndecimum.

EODE-

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinque vel plurium numerorum, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numerorum A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem A. B. C. D. E.
ter immutauimus, idemque semper nume- A. B. E. D. C.
rum ex continua eorum multiplicatione inter B. C. A. D. E.
se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergò quomodocunque inter se eos permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tertius ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem mutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem ipsum numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C, a metientur a 21. *sept.* D, & E, ipsos A, & C, æquè: metiantur per F. Similiter æquè metientur ipsos C, & B: metiantur per G. b Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: c Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B, erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem A, 18. C, 24. B, 32. D, 3. E, 4. F, 6. G, 8. b 9. *prænum.* c 9. *prænum.* d 17. *septim.* C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus, cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres, E, F, G, A, 24. C, 72. D, 216. B, 648. E, 1. F, 3. G, 9. H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, me-
a 20. e- dius cadit proportionalis F, a erunt E, & G, plani ſimiles: ſint
lem. ipſius E, latera H, I, ipſius vero G, latera illis proportionalia K, L.
b 21. ſe- Et quia E, F, G, cum minimi ſint in ratione A, C, D, b æquè me-
ptim. tiuntur ipſos A, C, D, eiuſdem rationis cum illis, metiantur per M.
c 21 ſep. Eodemque modo, c quia E, F, G, minimi æquè metiuntur

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

d 9. pre uum. A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

€, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; d ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus eſt autem E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, ſolidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, mul-
e 18. ſe- tiplicantes F, faciunt C, & D, vt oſtendimus; e erit C, ad D, vt M
ptim. ad N: f Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quoc
f 17 ſep. N, multiplicans E, & F, fecerit ipſos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter plano ſimiles E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propoſ 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoq; H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, a I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo ſunt latera, H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A, & B. Quam ob rem ſi inter duos numeros duo med proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonſtrandum

SCHOLIVM.

DVO exempla appoſuimus, in quorum priori liquido conſtat, vnitatem E, eſſe planum numerum, & vnitates H, & I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem contiget in aliis omnibus numeris, qui habeant duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem poſito exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem non aliter proponat, eamque ſine vlla exceptione demonſtret.

THEO

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; *a* erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324. *a* 20. 8. *Euc.*

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continuè, & A, primus sit cubus Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; *b* erunt A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125. *b* 21. 8. *Euc.*

SCHOLIVM.

HÆC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus suam exhibers possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus suius proportionalia sint quadam alterius; Incœptum quo sufficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atq; omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est si duobus lateribus priorus, qualia sunt 3. & 2. exhibeantur alia duo latera posteriorus, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitemus quis possit, imò omnino negare, posteriorem habere alia duo latera sibi proportionalia, hoc est, inter se quoq; æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus priorus 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportiona-

tionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia Latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione ℣lla concedemus, his lateribus prioris aqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se aqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter ℣tramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab ℣nitate continuè proportionales, eritque convertendo A, ad D, ℣t D, ad ℣nitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & ipsum numerum C, quam ℣nitatem, cadant media proportionales multitudine aquales, nimirum ℣nus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter ℣nitatem atque C, numerum, nimirum ℣nus, quos sit E. Quoniam igitur ℣nitas & E, C, numeri sunt continuè proportionales; producetur C, ex E in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
℣ni-. tas.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, ut ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, minimorum trium numerorum, per corollar. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus a 11 *octav.* *ex hypothesi; a cadet inter A, & D, quadratos medius ℣nus proportionalis. ℣t* A, 36. B, 48. C, 64. G, 18. H, 32. D, 9. E, 12. F, 16. L, 64. K, 8. I, 4. *Quia ℣ero est ex æquo, ℣t A, ad C, ita* b 8. *octav.* *ad F; & permutando, ℣t A, ad D, ita ad F; b cadet quoque inter C, & F, ℣na proportionalis media, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur* c 7. *octav.* *C, ℣ltimum; c metietur idem & secundum H. Sumpto autem latere quadrati F, metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum metitur; ita ℣t H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem.* d 11. *octav.* *multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. d Itaque quadratus L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eadem rationis H, ad F, ex defin. duplicatæ, quod convertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ℣t C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.*

c 20 *octav.* *ALITER. c Quoniam A, & C, similes plani sunt; sunt eorum Latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; & sit L*

ſit D, ad E, ſicut F, ad G: aſſumaturque H, latus quadrati A. Quoniam quatuor idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in ſe, a erunt D, H, E, continuè proportionales. Cum ergo ſit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius proportionalis H, b cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui ſit I. Quare cum F, I, G, ſint continuè proportionales; c idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in ſe ipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in ſe ipſum: Atque adeo C, quadratum erit, ex definitione, cuius latus I.

A, 36.	B, 48.	C, 64.		
H, 6.		I, 8.		
D, 3.	E, 12.	F, 4.	G, 16.	a 20. ſeptim.
				b 8. octa.
A, 36.	B, 48.	C, 64.		c 20. ſeptim.
H, 6.		I, 8.		
D, 6.	E, 6.	F, 8.	G, 8.	

SINT rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D, quartum, cubum eſſe. Sumatur enim E, latere cubi A; fiat ex E, in ſeipſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A; erunt, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum tam inter numerum D, quam vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè ſunt proportionales: fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G, in productum H, vt ad propoſ. 10. huius lib. à nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus eſt, ex definitione, cuius latus G.

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.	
F, 16.		H, 100.		
E, 4.		G, 10.		
vnitas.				

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipſum A, & H, ipſum D, æquè, per ea, quæ ad propoſ. 21. lib. 7. demonſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A, cubus, ex hypotheſi; d cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; e cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, f metietur

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.	
K, 32.			M, 500.	
I, 16.			L, 250.	
E, 8.	F, 20.	G, 50.	H, 125.	
P, 1000.	O, 10.	N, 5.		
				d 12. octa.
				e 8. octa.
				f 8. octa.

tietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. a *Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin triplicata, quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.*

a 12. 8.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitque A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratum. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; *b* cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; *c* cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continuè proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus; erit & B, tertius, quadratus *d* Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

b 11. 8.
c 8. 8.
d 22. 8. Euan.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, *e* eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, eſſent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. exiſtente quadrato, *f* eſſet & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & quo eſt abſurdum. *g* Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. & caderet medius proportionalis, ſi eſſent quadrati: cum tamen in ſcholio propoſ. 8. huius lib. demonſtratum ſit, inter numeros duplæ proportionis quoſuis non poſſe cadere medium proportionalem.

e 24. 8. Euan.
f 24 8.
g 11. 8.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, *h* caderet inter eos medius proportionalis. *i* Igitur & inter 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non poſſe, demonſtratum à nobis eſt in ſcholio propoſ. 8. huius lib.

h 11. 8.
i 8. 8.

xxiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam c

bus n

bus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus, & ſecundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum, ſitque A, cubus. Dico & B, cubum eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D: *a* cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui ſint A, 8. G, 12. H, 18. B, 27. *a* 12. *oct.*

E, F: *b* cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui ſint G, H. C, 64. E, 96. F, 144. D, 216. *b* 8. *oct.*

Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt continuè proportionales, & A, primus eſt cubus: *c* erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat. *c* 23. *oct.*

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Sicuti reperiretur, *d* eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus. *d* 25. *ead.*

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani ſimiles A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles; *e* cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, vt eſt quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo ſimiles plani numeri rationem inter ſe habent, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9. *e* 18. *oct.*

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrabimus conuerſum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter ſe, quam quadratus C, D. Dico A, B, eſſe plani ſimiles. f *Quoniam enim inter quadratos C,*

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36. f 11. *oct.*

D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt

a 8. oct. *A.* 8. *B,* 18. *C, ad D, ita A, ad B;* a *cadet quoque medius pro-*
b 20. oct. *C,* 16. *D,* 36. *portionalis inter A, & B,* b *Quare A, & B, plani similes sunt.*

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

XXV. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,
c 19. oct. B, sunt solidi similes; c cadent inter eos duo medij proportionales, qui sunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18,	H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubus C, D Dico A, B, solidos esse similes Nam cum
d 12. oct. *A,* 16. *B,* 54. *sit A, ad B, vt C, ad D;* d *cadant autem inter*
e 8. oct. *C,* 64. *D,* 216. *C, D, cubos duo medij proportionales;* e *cadent*
f 21. oct. *quoque inter A, B, duo medij.* f *Sunt ergo A, & B, solidi similes.*

EX his omnibus perspicuè infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem esse
g 18. oct. *similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani,* g *caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales.*
h 8. oct. h *alias caderent quoq; duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel binario tantum inter se distent, vt in scholio praedicto tradit-*

inter quos certum est, non posse recipi duos numeros, medium duos medios proportionales.

SIMILITER nec duo quinum numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cùm non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cùm ex horum mutua multiplicatione producantur, qua constat non esse proportionalia. Quamvis verò numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tamen habet duas vnitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cùm ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; a cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cùm ergo extremi duo potentur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod absurdum est. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. a 18. & 19. 8.

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; b essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proximè ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes. quod absurdum est, & contra hypothesin. Verum hoc ostensiuè quoque demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitque A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cùm A, & B, b 31. sep.

	A, 3.	B, 48.		
sint plani similes, habebunt	C, 1.	D, 3.	E, 4.	F, 12.

latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, aequalis, quod nullus alius numerus, praeter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, aequalem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F. c 19 sep.

Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. c Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum, aequalis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit autem ex C, vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. d Quare D, ipsum F, metietur: e Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F. f Igitur d 4. prop. nun. e 4. prop. nun. f 11. prop. nun.

tur & D, id eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitũ.

HINC perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorũ minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proximè oſtendimus. Cùm ergo & ſeipſum metiatur, nõ eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod eſt cõtra hypotheſim.

SINT deinde duo ſolidi ſimiles A, B, ſitq; A, minor primus. Dico A, ipſum C, metiri. Nam cùm A, & B, ſint ſolidi ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, ſint B, C, vnitates, & numerus D, ipſi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur numerum primum A: ſint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia,

A, 3. B, 24.
B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2. G, 6.

ita vt ſit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur eſt C, ad F, vt D, a19.ſep. *ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. a Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipſemet numerus G. Idem ergo* b4.pronum. *numerus G, fiet ex D, in F. b Quare D, ipſum G, metietur. c Metitur autem G, ipſum B, quòd G, latus ſit ipſius B. d Igitur & D, hoc* c4.pronum. *eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.* d11 pronum.

ATQVE ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proximè oſtendimus. Cùm ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti, quod eſt contra hypotheſim.

ITAQVE facilius admodum eſt inuentio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, vel certè duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani ſeu ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter verò non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 10. e26.oct. *Si enim eſſent plani ſimiles; e haberent proportionem, quam qua-* e24.oct. *dratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, f eſſet & 10. quadratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.*

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter g27.oct. *verò non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, vt 27. & 40. Si enim eſſent ſo-* g25.oct. *lidi ſimiles, g haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, h eſſet & 40. cubus. quod eſt abſurdum: ponitur enim non cubus.*

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cùm sint plani similes, *b* vnus medius cadit proportionalis. *c* Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D, E, C. Itaq; cùm tres D. E, C, continuè sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; *d* erit quoq; C, tertius, quadratus. *Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuò, &c. Quod erat demonstrandum.*

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

a 17. sep.
b 18. oct.
c 8. oct.
d 22. oct

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum. *Dico* A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; *e* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *f* At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. *g* Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; *h* Ac propterea

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

e 17. sep.
f 11. oct.
g 8. oct.
h 20. oct.

pterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutu multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata ne inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuò multiplicante faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuò multiplicãt faciant C. Dico C, esse quadratum. Cùm enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; a *erit C, ex eis productus, quadratus.*

A, 4. *B*, 25. *C*, 100.

a 1. nostri.

II.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum; sitq; A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cùm enim A & B, se mutuò multiplicantes faciant C quadratum: b *erunt A, & B, similes plani:* c *atque adeò inter eos vnus medius cadet proportionalis; videlicet D.* d *Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

A, 9. *D*, 12. *B*, 16. *C*, 144.

b 2. nostri. c 18. oct. d 22. oct.

III.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, non quadratum; sitq; A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. *B*, 20. *C*, 80.

IV.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuò mult

multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cùm producatur ex A, in B, sit quadratus A, quadratus, esset & B, ex theor. 1. huius scholij; quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur C, quadratus erit. A, 9. B, 20. C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: *a* metietur C, ipsum D, per C: *b* Metietur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata à C; Ac proinde *c* vt vnitas ad C, ita C, ad D: Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; *d* metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; *e* ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeò inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. *f* At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, seipsum multiplicans fecerit B; *g* metitur verò & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; *h* Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cùm inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; *i* cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cùm ergo quatuor numeri A, E, F, B; sint continuè proportionales, & A, primus sit cubus, *k* erit quoque E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus seipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

	A, 8.		
	E, 16.	D, 4.	
	F, 32.	C, 2.	
	B, 64.	Vnitas.	a 7. *pr. num.*
			b 5. *pr. num.*
			c 20. *def.*
			d 7. *pr. num.*
			e 20. *def.*
			f 7. *pr. num.*
			g 5. *pr. num.*
			h 10. *def.*
			i 8. *ost.*
			k 23. *ost.*

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; *l* eritque D, cubus. Quoniam verò A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, *m* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *n* At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. *o* Igitur & inter

A, 8.	B, 27.		l 3. *noni.*
D, 64.	C, 216.		m 17. *septim.*
			n 12. *ost.*
			o 8. *ost.*

a23.oct. inter D, & C, duo medij proportionales cadent; a Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; b qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, e erit vt A ad B, ita D, ad C; d At inter D, & C cubos duo cadunt medij proportionales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent; f Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

b3. nonae. c17 sept. d12. oct. e8. oct. f22. oct.

A, 8. B, 17. D, 64. C, 216.

SCHOLIVM.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet

I.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerum.

A, 8. *B*, 20. *C*, 160.

C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; g *& multiplicatus B, cubus erit, quod nō ponitur.*

g5. nonae.

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubum.

A, 8. *B*, 17. *C*, 136.

C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, h *& factus cubus C, cubus erit. quod est contra hypothesin.*

h 4. nonae.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cùm A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeò æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C

A, 8. B, 64. C, 512.

a cri

erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum habeat, &c. Quod erat demonstrandum. a 5. nonus.

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A in B, esse cubum, inferunt: b *Ergo inter B, & C, cubos duos medij proportionales cadunt.* c *Quoniam verò est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* d *cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales.* e *Atque adeò existente B, cubo, & A, cubum erit. Verùm nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est.*

b 12. octa.
c 17. sept.
d 8. octa.
e 23. octa.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cùm enim A, sit compositus, *f* metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, *g* multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cùm ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

f 13. def.
g 9. prænunc.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autē est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinq; intermittētes omnes.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum verò F, cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

rum M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metie-
a 5. pro- tur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: *a* Metitur
mum. autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, me-
b 9. pro- tietur; *b* Atq; adeò A, multiplicans A, ipsum B, producet. Qua-
mum. re B, quadratus est. Quia verò tres deinceps proportionales sunt
c 22. oct. B, C, D, & est B, quadratus; *c* erit & D, quadratus. Eadem ratio-
ne assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cùm D, sit
d 22. oct quadratus, *d* & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum in-
termittentes.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C, æquè metietur vni-
e 5. pro- tas numerum A, & numerus B, numerum C. *e* Metitur autem v-
mum. nitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, *f* at-
f 9. pro- que adeò B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cùm A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans verò B, faciat C, vt est ostensum, erit C, cubus. Quia verò quatuor deinceps
g 23 oct. proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, *g* erit & F, cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionali-
h 23. oct. bus F, G, H, I, cùm F, sit cubus, *h* & I, cubus erit, atq; omnes semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. *Si* igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proximè numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes verò qui proximè sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctauo, vigesimoquarto, &alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM

NAM primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate: Numeri denique tertij ordinis quinq; semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui verò post vnitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus vnitati quadra-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

tus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quòd enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, *a* iam demonstratum est. Quòd verò & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ità perspicuum fiet. Cùm tres a 8. nonæ.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

continuè proportionales sint A, B, C; sitque A, quadratus; *b* erit C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continuè proportionalibus C, D, E, cùm C, sit quadratus; *c* & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continuè proportionales. b 22. octa. c 22. octa.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quòd enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermitten-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

tes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi; *d* iam est demonstratum. Quòd autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cùm sit vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: *e* Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur & A, ipsum B, per seipsum metietur; *f* Atq; adeò cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit. *g* Quare B, cubus est. Quoniam verò quatuor continuè proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, *h* & D, cubus erit. Eademque ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cùm B, cubus sit: *i* & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt: Non secus demonstrabimus, omnes cubos d 8. nonæ. e 5. præ. nun. f 9. præ. nun. g 3. octa. h 23. octa. i 23. octa.

i esse,

esse, si plures continuè proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadrates; quia perspicuè hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: quæ parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; quæ verò parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM totum propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C, sunt q̃ A, B, quadrati; erit & C, quadratus,

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, sunt q̃ A, C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atq̃ ita deinceps: cùm ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multi-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

a 3. huius. b 4. huius. c 4. huius.

plicans facit B; a erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A multiplicans B, facit C, sunt q̃ A, B, cubi; b erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio A, multiplicans C, facit D, sunt q̃ A, C, cubi; c erit quoq; D, cubus. Atq; ita de cæteris, cùm ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, prodeat F, &c.

2.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittêtes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SIN

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratū, præter tertium ab vnitate, & vnū intermittentes omnes, hoc est, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos alius est quadratus, sit quadratus E.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

a Cùm ergo & D, sit quadratus; sitq; vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo, vt E ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: b sed B, tertius ab vnitate est quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse.

a 8. nonj. b 8. nonj. c 24. octauj.

SED iam A, proximus vnitati nō sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. d Cùm ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quòd tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: e sed C, est cubus, cùm sit quartus ab vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesin. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; g cùm & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubū C, ita C, ad A; existente C, cubo, erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. h Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

d 8. nonj. e 8. nonj. f 25. octauj. g 8. nonj. h 25. octauj.

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cùm aliquando tertius ab vnitate, aliquando verò quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post vnitatem, cubum quidem, non au-

tem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul, & quadratum; cubum quidem, a quod primo existente cubo, omnes cubi sint,

a 9. nomi.

Vnitas. B, 8. B, 64.

b quadratum verò, quod tertius sit ab Vnitate.

b 8. nomi.

SIT deinde A, post Vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul, & quadratum; c Cubum quidem, quod quartus sit ab Vnitate: quadratum verò, d quòd primo existente quadrate, omnes sint quadrati.

c 8. nomi.

d 9. nomi.

SIT postremò A, post Vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, prater septimũ F, & quinque intermittentes omnes. Cùm enim primo non existente

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

quadrato, e nullus alius quadratus sit, prater tertium ab Vnitate, & Vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. huius lib. decimus, tertius, quintus, septimus, nonus, Vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, & c. Primo autem non existente cubo, f nullus alius sit cubus, prater quartum ab Vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus tertiusdecimus, decimusextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodò septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquidò constat ei, qui rectè propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

e 10. nomi.

f 10. nomi.

xj. THEOR. II. PROPOS. II.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunq; numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E F, G. Cùm enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,

g 20 defin.

g æquè metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum

qua G: *a* Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igi- a 5. prop. tur & C, numerus numerum G, per D, metietur: Eadem ratione num. metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. ſic quoque metietur A, ipſum G, per F, cùm ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus a minore metiente, tantum diſtare ab Vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quòd eadem eſſe debet proportio numeri ad maiorem, qua Vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, me-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

tietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſeipſum, &c. quæ tam inter B, & F, quàm inter Vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter G, & F, quàm inter Vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab Vnitate: Si verò minor aliquis numerum quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à numero diſtat, quantum minor ab Vnitate, propterea quòd ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, b *produ-* b 9. prop. *catur ille, quem metitur. Ergo C, ſeipſum multiplicans gignet F, cùm num. F, tantum abſit à C, quantum C, ab Vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.*

THEOR. 12. PROPOS. 12. xj.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; nõ metitur ipſum A: *c* erit E, cùm primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, c 31 ſep.

a 9. pro. A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, a atque
mam. adeò E, multiplicans F, faciat D. Quia verò & A, ipſum D, metitur
per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præce-
dentis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A,
b 19. ſep. primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. b Quare erit
vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cùm
c 23 ſep. ergo A, & E, ſint inter ſe primi; c ac proinde in ſua proportione
d 21 ſep. minimi; d metietur æquè A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E,
e 9. pro. ipſum C, per G, e atq; adeò E, multiplicans G, faciat C. Quia re-
mam. rò & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B,
f 9. pro. f atq; adeò A, multiplicans B, facit C; proc reabitur idem nume-
mam. rus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium.
g 19. ſep. g Erit igitur vt A,

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000.
E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

primus ad E, ſecũ-
dum, ita G, ter-
tius ad B, quartũ.

h 23. ſep. Quapropter cùm A, & E, ſint inter ſe primi; h ac propter ea in
i 21. ſep. ſua proportione minim⁹; i Metietur æquè A, ipſum G, & E, ipſum
k 6. pro. B. Metiatur E, ipſum B, per H: k ita vt E, multiplicans H, faciat
mam. B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, atq; idcirco A, ſeipſum mul-
tiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. appa-
ret. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium,
l 20. def. & ex A, medio in ſeipſum, l Quare erit vt E, primus ad A, ſecun-
dum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cùm ergo E, & A, inter ſe
m 23. ſe- primi ſint; m ac proinde in ſua proportione minimi; n æquè
ptim. metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſin.
n 22. ſe- ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum
ptim. A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum A,
ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum.
Metietur ergo E, ipſum A. Eodẽ argumento oſtendemus quoſcũq;
alios numeros primos ipſum D, metientes metiri quoq; ipſum
A; Eademq; erit ratio ſi C, vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico &
o 31. ſep. E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur; o erit E, ad A, primus.
Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans
facit B, vt ex ſcholio pro-

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296.
E, 5.

poſ. præcedentis conſtat,
p 27. ſe- p erit B, ad E, primus.
ptim. Quia ergo A, & B, ad E,
primi ſunt; fit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedentis
q 26. ſe- propoſ. q erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, &
ptim. C, ad E, primi ſunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præce-
r 26. ſe- dentis propoſ. r erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, me-
ptim. titur. Quod eſt contra hypotheſin. Metitur ergo E, ipſum A. Si igi-

tur

ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens metiri poterit vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitatem proximum, vt demonstratum est, quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Non in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ejusdem demonstrationis affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est album, paradoxum aliquid, & inopinatum modum videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoq; simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriatur q; se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim huius demonstrationis expendisset, vel certè, si expendit, eam in memoriam reuocasset, quandoquidem ipse longè prius Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus. a 12. no

CÆTERVM ex demonstratis perspicuum est, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. a Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes; b quod semper minor maiorem metiatur per antepositum eorum, qui in proportionalibus sunt numeris c; manifestum est, quod & ille omnes metiatur. b 11. no c 11. pro num. xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui verò post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continuè proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus aliquis E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; d metietur quoq; ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; e atque adeò eum aliquis numerus primus metie- d 12. no e 33. 7.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 624.
E---- H---- G---- F----

tur, quem dico alium esse non posse, præter primum A. *Si enim* alius primus quàm A, metiatur E; cùm E, metiatur extremum D;
a11 *pronun.* *a* metietur quoq; ille alius primus eundem D; *b* atq; adeò & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quàm A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per
c 8 *pronun.* F; metietur vtiq; E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; *c* & viciſſim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem *E, ipsum*
d 11. *noti.* D, metitur,) metietur D, per E, *d* Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem
e 8. *pronun.* est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam verò E, metitur D, per F, *e* metietur viciſſim F, ipsum D, per E. Non
f 12. *noti.* erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum; *f* metietur & A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; *g* atque adeò
g 33 *ſcp.* eum aliquis numerus primus metietur. quę rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. *Si* namque alius primus quàm A, metiatur F, cùm F,
h 11. *pronun.* metiatur D, extremum; *h* metietur quoque ille alius primus eundem D; *i* atque adeò & ipsum A, proximum vnitati, qui
i 12. *noti.* primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipsum F, metitur. Iam verò quoniam E, metitur D, per F; *k* fiet
k 9. *pronun.* D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C,
l 19. *ſcptim.* quartum, & ex E, secundo in F, tertium; *l* Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & non primum, sed compositi, quem solus A, primus metiatur: quemadmodũ id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimũ.

Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquem i-
m 8. *pronun.* psorum A, B; *m* & viciſſim aliquis ipsorum A, B, (videlicet is, per
n 11. *noti.* quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. *n* Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G,

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E---H---G---F---

...G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed ...um C, p...
...mentur F, metietur C, per G; d metietur viciſſim G, ipſum C, p...
...ſcholio erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metietur curque v...
...mum G, e metietur quoque numerum primum A, vnitati pro...
...mum, quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compo...
...tus, ea proinde eum aliquis primus dico nullu...
...alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quam A, metiatu...
...G, cum G, metiatur C, vltimum, d metietur quoque ille alius pri...
...mus eandem C, e atque adeo & ipſum A, vnitati proximum, qu...
...primus eſt, quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A...
...ipſum G, metietur. f Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, me...
...tiatur C, per G; Fit autem idem numerus C, ex A, primo in B,...
...ſcholio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, in B, vt docuimus in ſcho...
...quartum, & ex F, ſecundum, ita G, tertium ad B, quartum. Igitur & G, ipſum B, metietur,...
...mus ad F, ſecundum, vt demonſtratum eſt. Igitur ab A, metitur B, vltimum...
...A, ipſum F, vt demonſtratum eſt. g Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertium ad B, quartum. Metitur autem...
...metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus C, ex A, primo in B, vt docuimus in ſcho...
...militer H, diuerſum eſſe ab A, quemadmodum id oſtenſum eſt de...

I relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, oſtendemus ſi...

numeris F, & G.

NAM h H, idem ſit qui A, metiaturque G, ipſum B, per H...
metietur vtique G, ipſum B, per A; h Et viciſſim A, ipſum B, per A, vt conſtat...
ſcholio propoſ. 11. huius lib. erit G, idem qui A, quod eſt abſu...
G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipſum B, per A, vt conſtat...
dum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non er...
H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. i Iam vero quia B, fit ex G, in...
quod G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in...
vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem nume...
& ex H, primo in G, tertium, & ex A, medio in ſe ipſum. k Qu...
mus vt H, primus ad A, ſecundus ad G, tertiu...
At A, metietur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur, & H, ip...
A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare...
primus eſt, maximum D, nullus alius numerus metitur, pr...
ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunque numeri c...
ceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

Si minimum numerum primi numeri metia...
Nullus alius numerus primus illum metietur, p...
cos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi n...
C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, ...
ipſum A. Metiatur enim ſi fieri poteſt, primus numeru...

sus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia, igitur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipsum F, faciet A. b Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A: Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 29. prom.

b 32. sept.

SCHOLIVM.

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. c *Sit enim H, non primus, sed compositus: & sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E.*

c 2. 8.

A, 16.	B, 24.	C, 36.	D, 54.	E, 81.
M, 8.	N, 12.	O, 18.	P, 27.	
	I, 4.	K, 6.	L, 9.	
H ----	F, 2.	G, 3.		

Quoniam igitur, vt constat ex modo procreàdi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metitur autem H, ipsum A, erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum. si verò ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio eiusdem propos. 32. lib. 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si verò ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

DEINDE metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum, si verò ad N, qui quidem fit ex P, in K, erit H, eodem

quo

nulla compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum, si verò ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si verò ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum, si verò ad L, cum L, gignatur ex G, in se, compositus quoq; erit H, ad G. Quod si H. sit primus, rursus ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si verò ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad H, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si verò ad L, cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad H; Si verò H, primus sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quadam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum ratus esse nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometricè ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, secetur que ipsorum alter in quot-

quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continentur.

SINT duo numeri AB, & C, quorum AB, diuidatur in AD, DE, EB; fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem eſſe numeris GH, HI, IK, hoc eſt, totis numero GK, ex C, compoſito. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; a metietur AB, ipſum F, per C, hoc eſt, AB, pars erit ipſius F, denominata à C. Eadem ratione AD, ipſius GH; & DE, ipſius HI; & EB, ipſius IK, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, qua AB, ipſius F. Quia verò per ea, quæ ad propoſ. 5. lib. 7. demonſtrauimus, totus AB, totius GK, eadem pars eſt, qua AD, ipſius GH; erit quoque AB, totus totius GK, pars eadem, qua AB, ipſius F; b Ac proinde inter ſe æquales erunt F, & GK. Quod eſt propoſitum.

A ... D .. E . B C .. F ..... G ..... H .... I .. K

a 2. prom.

b 4. prom.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

NVMERVS enim AB, diuidatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi AB; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipſius AB, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex AB, in AC, & in CB, quod eſt propoſitum.

D .....
A .... C .. B

IDEM demonſtrabitur, ſi AB, in plures partes, quam in duas ſecetur, vt ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipſius AB, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex AB, in ſingulas partes AC, CD, DB.

E .....
A ... C .. D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui

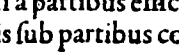
illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem esse & ei, qui sub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dicta pars AC, æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

IV.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.



V.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel BC, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius C E, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, vna cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B; numero vero comprehenso semel sub C D, D B, vna cum quadrato ipsius D B, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, vt si hic numerus factus ex C B, in D B, sumatur pro quadrato ipsius D B, vna cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius C B, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius C D, vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, semel, & numero ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeri, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numerus, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius C D, vna cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc est, numerus factus ex A D, in D B, vna cum quadrato ipsius C D, æqualis erit quadrato ipsius C B. Quod est propositum.

A ..... C ... D .. B

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim A B, secetur in partes æquales A C, C B, eique adiiciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D, in adiectum B D, vna cum quadrato dimidij numeri C B, æqualem esse quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno hoc est, quadrato ipsius C D. Cum enim quadratus ipsius C D, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C B, B D, vna cum numero bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratis partium C B, B D, vna cum numero sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis; numerus autem contentus sub C B, B D, & sub A C, B D, & sub B C, B D, hoc est, quadrato ipsius B D, æqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; fit vt si hic numerus factus ex A D, in B D, sumatur pro quadrato partis B D, vna cum numero facto ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratus ipsius C D, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius C B, vna cum numero facto ex A D, in B D; hoc est, numerus factus ex A D, in B D, vna cum quadrato ipsius C B, æqualis sit quadrato ipsius C D. Quod est propositum.

A .... C .... B .. D

SI nume-

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus A B, in partes A C, C B. Dico quadratum totius A B, vna cum quadrato partis C B, æqualem esse numero, qui fit ex toto A B, in dictam partem C B, vna cum quadrato reliquæ partis A C. Cum enim, ex 4. theorema, quadratus totius A B, æqualis sit quadratis partium A C, C B, vna cum numero, qui fit bis ex A C, in C B; si quadratus ipsius C B, addatur communis: erunt quadrati numerorum A B, C B, simul, æquales quadratis numerorum A C, C B, vna cum numero qui fit bis ex A C, in C B. Atqui ea, qui fit ex A C, in C B, vna cum quadrato ipsius C B, æqualia est, per 3. theorema, numero qui fit ex A B, in C B; Ac proinde ea, qui fit bis ex A C, in C B, vna cum quadrato ipsius C B, bis, æqualia est. qui fit bis ex A B, in C B. Igitur si pro numero, qui fit bis ex A C, in C B, vna cum quadrato ipsius C B, bis, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B; erunt quadrati numerorum A B, C B, simul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, vna cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

A ..... C .... B

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus A B, in partes A C, C B. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, vna cum quadrato reliquæ partis A C, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto A B, & prædicta parte C B, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis sit dictæ parti C B; cum quadratus totius A D, componatur ex A B, & B D, sine dicta parte C B, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vna cum numero qui fit bis ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum A B, C B, vna cum eo, qui fit bis A B, in C B; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum A B, C B, simul æquales numero bis comprehenso sub A B, C B, vna cum quadrato numeri A C; fit, vt si pro quadratis numerorum A B, C B, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B, vna cum quadrato ipsius A C, quadratus factus ex A D, æqualis sit numero, qui fit quater ex A B, in C B, vna cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

A ..... C ... B ... D

SI nume-

IX.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos esse quadratorum, qui ex AC, dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri AD, æqualis sit, ex

A . . . . . C . . . D . . B

4 theorem. quadratis numerorum AC, CD, & una cum numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, & una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, & una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC, & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, & una cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adjiciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero composito ex dimidio, & adiecto.

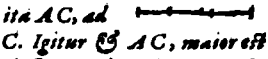
SIT numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, utrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, composito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipsius AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, & una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, & una cum

A . . . . C . . . . B . . D

ta cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theorem. quadratus ipsius B D, una cum numero bis qui fit ex C B, in C D, aequales sunt quadrati numerorum C B, C D; & quadrato ipsius C B, aequalis est quadratus ipsius A C. Igitur si pro quadrato ipsius B D, una cum numero, qui fit bis ex C B, in C D, sumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc est, numerorum A C, C D: erunt quadrati numerorum A D, B D, aequales quadratis numerorum A C, C D, bis; Ac proinde quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, quae A C, C D, efficiuntur. Quod est propositum.

IAM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, liquet, nullo modo fieri posse, ut numerus aliquis in duas partes dividatur, ut numerus planus, qui ex toto in unam partium fit, aequalis sit quadrato reliquae partis, ut ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus A B, in C, ita ut numerus factus ex toto A B, in partem C B, aequalis sit quadrato reliquae partis A C. Quia igitur numerus contentus sub extremis A B, C B, aequalis est quadrato numeri medij A C; a erit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B: Est autem A B, maior quam A C. Igitur & A C, maior est quam C B. Ablato iam C D, qui ipsi C B, sit aequalis, erit quoque ut A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, est ut A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum; b erit quoque ut totus A B, ad totum A C, vel ut detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, residuus, hoc est, C D, ipsi C B, aequalis, ad A D, ex A C, residuum. Quia igitur est ut A C, ad C D, ita C D, ad A D; & est A C, maior quam C D; erit quoq; C D, maior quam A D. Ablato ergo D E, qui ipsi A D, sit aequalis; erit etiam ut A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia est, ut totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; c erit quoq; ut totus A C, ad totum C D, vel ut detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, residuum, hoc est, D E, ipsi A D, aequalis, ad E C, ex C D, residuum. Quare cum sit ut C D, ad D E, ita D E, ad E C; sit autem C D, maior, quam D E; erit etiam D E, maior, quam E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipsi E C, aequalis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, ut planus numerus ex toto in unam partium factus, aequalis sit quadrato reliquae partis. Quod est propositum.

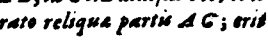


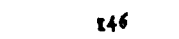
a 2C. sexti

b 11. sexti

c 11. sexti

ALITER. Quoniam numerus A B, in C ita diuisus est, ut is qui fit ex A B, in C B, aequalis sit quadrato reliquae partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipsius A C; Ac proinde





cum quadrato ipsius A C, quadruplus erit quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, ℞na cum quadrato ipsius A C, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur sub A B, C B, ℞na cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur sta in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.

VERVM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

xvj. THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem verò ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicantem facere C. *a* Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; *b* erit & vterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; *c* erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam vnus in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; *d* Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A B, simul compositi.

a 24 sept.
b 30. sept.
c 26. sept.
d 27. sept.
e 30. sept.
f 26. sept.

DEINDE quia, vt prius, *e* vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E; efficitur, (cum tam compositus ex D, E, primus ipse E, primus sit ad D,) *f* numerum factum ex D E, tanquam vno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

sint, a atque adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi a 27. sep-
sint B, & C, simul compositi. tim.

POSTREMO quia, vt prius, b vterque D, & E, simul ad b 30. se-
quemlibet ipsorum primus est: atque adeo è contrario, quilibet ptim.
ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E, c erit quoque c 26. se-
qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus; d Ac proinde ptim.
idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in d 27. se-
se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqualis ptim.
est, per 4. theorem. antecedentis scholij,

tam qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, vna cum A, 9. C, 16.
eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex B, 12.
D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, D, 3. E, 4.
E, in se ipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam
ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex
D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D,
in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex
D, in E vt ostensum est. e Erunt etiam duo illi, nimirum compo- e 20. se-
situs ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, ptim.
atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri
simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos,
atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum
qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostensum est; f erunt etiam duo f 30. sep.
illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, at-
que is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in
ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C, simul
compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps
proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continuè proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; aequè adeo eos aliquis numerus com-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E---F, 2. G, 3. H----

minis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest;
manturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum
Quoniam ergo A, B, C, D, continuè proportionales sunt, & minimi
metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque
alterum ipsorum F, G, vel certè compositus erit ad alterum ipsor
F, G, ex scholio propos. 14. huius li

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. *Atque idcirco ipsum E, & alter*
E---F, 2. G, 3. H---- *ipsorum F, G, aliquis numerus me*
tur: Metiatur eos H. Itaque cum

a 11. pro num. *metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsi*
D; a metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsi
D. Quia verò H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam
b 11. pro num. *quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib.*
b metietur quoque H, medios B, C: c *ac propterea & compositum*
c 10. pro num. *B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, &*
tractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus: d *metietur q.*
d 12. pro num. *que idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt e*
A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. e *Sed*
e 3. oct. *primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi in*
se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C,
tietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum
scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G,
compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum
& alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compo-
f 11. pro num. *tum ex A, B, D:* f *metietur etiam H, eundem compositum ex A*
D. Quia verò H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur,
g 11. pro num. *coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C,* g *metietur quoque H, ipsos B*
Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detract
h 12. pro num. *B,* h *metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia*
metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum
i 11. pro num. *metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8.* i *metietur*
iam H, alterum ipsorum A, D. k. *Igitur & reliquum. Sunt ergo,*
k 12. pro num. *D, extremi inter se compositi.* l *Sed & primi inter se sunt Quod*
l 3. oct. *non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi su*
Ergo primi. Quod est propositum.

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B,
mos: nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quo
bet numeris continuè proportionalibus.

xvij. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit primus ad secundum, ita secundus ad alium quempia

SIN

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, a atque adeo in sua proportione minimi: b ipsi æquè metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . a 23. septim.
B . . . . . b 21. septim.
C . . . . . .

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continuè proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi, c minimi in sua proportione. d Igitur æquè metietur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; e atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, metietur quoque ipsum D. Metitur verò & se ipsum. Igitur A, f metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . . c 23. septim.
B . . . . . d 21. septim.
C . . . . . e 11. prop. num.
D . . . . . f 11. prop. num.
E . . . . .

PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter

se sunt, aut non. Si sunt inter se primi, a per-
a 16. nu. A, 4. B, 7. spicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C, per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, imò ipsum D, esse tertium proportiona-
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.
b 9. pro mun. lem. Cum enim A, metiatur C, per D, b fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui ex medio B, describitur
c 20. se- ptim. c Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur
d 20. se- ptim. est, vt A, ad B, ita B, ad D; d erit
A, 6. B, 4. D .... C 16. numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio
e 7. pro mun. in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, si at ex A, in D; e metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis consideraumus, &c. Quod faciendum erat.

XX. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B,
A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216. ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72. aut nō. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, imò ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum
f 9. pro mun. enim A, metiatur D; per E, f fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio continetur;
g 19. se- ptim. g Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

SEI

SED iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalem. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo

quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt, a erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; b metietur A, ipſum D, per E: ſed ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inuenietur poſſit ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primum non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca trib⁹ numeris datis conſiderauimus, an poſſit, &c. Quod erat faciendum.

a 19. ſeptim.

b 7. præ-num.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primum, producetur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. ſi quadratum numeri ſecundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertium proportionale 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$ Quia enim diuiſis 64. per 3. fit numerus 21 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 $\frac{1}{3}$ per diuiſorem 3 vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe, erunt 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. continuè proportionales.

c 20. ſeptim.

DATIS autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertium genitus diuidatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. Cum enim diuiſis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuiſus 120. ex multiplicatione Quotientis 13 $\frac{1}{3}$. per diuiſorem 9. ex iis, quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Si autem idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium.

d 19. ſeptim.

quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$ proportionales ſunt.

EX his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus Com-

cum Commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi, Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui oblisti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicuè in his numeris non continuè proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vbique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hoc 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, a *& ob id minimi.* b *Igitur metientur æquè ipsos C, E, numerum A, ipsum C, & C, ipsum E. At verò & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

a 23. septim.

b 21. septim.

HÆC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Imò hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D,

C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quàm tribus A, B, C, non magis hoc constet in illis, quàm in his. Quapropter cùm ibi pro concesso assumant, & hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (& cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sint, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, & detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumunt; quando quidem sine probatione illa exigunt, & detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, & B, secundus ad C, tertium. Hoc verò non posse fieri, facilè demonstrabimus eodem argumento, quo id, si & tuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintq; A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, & sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, & B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, & A, ad C, ita C, ad E; Atq; adeò

& ostenderunt, metietur A, A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E----
dum A, & C, primos inter se.

Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, & D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissimè falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM verò membrum perspicuè & apertè ostendunt. Nam tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus. a 17.mo hui.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxj.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros.

b Sumpto enim numero D F, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei unitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. Sit primùm primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2.	B, 3.	C, 5.	b 38. sc. ptim.
30.		1	
D----------		E . F	

SED iam non sit primus D F. c Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G. primum nulli ipsorum A, B, C, c 33. sc. ptim.

A, 3. B, 5. C, 7. 105. D ---------- E . F 53. G ----

A,B,C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui vnus ipsorum A,B,C; metiantur autem A,B,C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractũ D E, a metietur quoque E F, reliquum, numerus vnitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorũ A,B,C. Eademq; via plures inuenientur quàm A,B,C,G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

a 11. pro num.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A,B,C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est, vel certè G, qui ipsum D F, metitur. Atq; eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinq; primis alium sextum inueniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

xxij. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D Dico & totum compositum A D, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B, & F, ipsius B C; & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad F, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper sit proportio dupla) b erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem A B, ipsius E, dupla. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . B . . . . C . . . . . D
E . . . F . . G . . . .

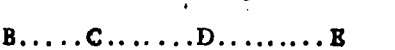
b 12. sep.

xxiij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COM

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorũ multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, D E, sint impares: differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit.

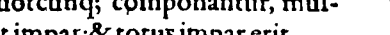


a Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. b Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum. a 21. nonj. b 21. nonj.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum, A D, compositum, imparem esse. Cùm enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. c Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. d Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cùm impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat. c 12. nonj. d 21. nonj.



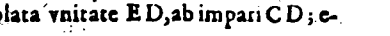
SCHOLIVM.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cùm ex defin. Impar à pari differat vnitate. Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cùm à pari sola vnitate differat. Quod est propositum. c 21. nonj.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxv.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor.



Sit primùm dimidia pars. Cùm igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia, erit & A C, numerus par.

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B; pares numeri, dimidiae

dias partes habent, ex definitione, sit D B, dimidia pars ipsius A B, & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cùm sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando vt A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, vt A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cùm bifariam diuidatur, (quòd D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A.....C..D...E.....B
A.....D...C..E..B

SCHOLIVM.

FACILIVS demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile, hoc modo. Si A C, reliquum non dicatur par, sed impar; detracta vnitate A D, erit reliquum D C, par. a *Igitur compositum D B, par quoque erit: ac proinde, addita vnitate A D, totum A B, impar fiet, quod est absurdum, cùm par ponatur.*

a23. nostri.

xxvj. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; *b* erit & reliquus A D; par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. *Si* igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....C.D....B

b24. nostri.

xxvij. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; *c* erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A....C....D.B

c24. nostri.

xxviij. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX

EX impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, impa-
rem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reli-
qua DB, par: Ex quo cùm detra-
cta CB, par; a reliquus DC, A . D . . . . C . . . . . B
quoque erit; Ac proindeadem vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat. a 24. hu-ius.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus. quot in A, sunt vnitates. Quare cùm B, sit par, componetur C, A . . . B . . . .
ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt C . . . . . .
vnitates in A; b Atque adeò par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat. b 21. huius.

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

ITAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, unitates, &c. A . . B . . . . . C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, A . . . B . . . .
assumas æquales. C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A.
Quare cùm tam A, quàm B, sit impar; A . . . B . . . . .
componetur C, ex imparibus ipsi B, æ- C . . . . . .
qualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. c Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum. c 23. huius.

COROL.

COROLLARIVM.

A . . . B . . .
C . . . . . HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; a erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.

A . . . C . . . .
B . . . . . a 29. nostri.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; b erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

A . . . C . . . . .
B . . . . . b 28. nostri.

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoq; demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstratos. Secetur enim si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraq; pars A C, C B, impar

A------ C---- B par est; aut maior A C, impar, & minor C B, par;
D --- E-- aut contrà, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraq; pars A C, C B, par.

c 22. nostri Sit primùm vtraq; pars A C, C B, impar, c ideoq; totus numerus A B, par. d Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui verò ex A C, in d 28. nostri se sit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cùm ergo numerus ex A B, in C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.

DEINDE sit A C, impar, & C B, par, ideoq; ex scholio propos. c 23. huius lib. totus A B, impar. e Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum.

TERTIO sit A C, par, & C B, impar; ideoq; ex scholio propos. f 23. huius lib. totus A B, impar. f Quia ergo numerus ex A B, impar in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis, quod absurdum est.

QVAR-

QVARTO sit vtraq; pars AC, CB, par. Inuentis igitur, ex huius propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione AC, ad CB; a erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vter q; impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt AC, ad CB, ita D, ad E; b erit conuertendo, vt CB, ad AC, ita E, ad D: Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D: c Est autem, vt AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod numerus factus ex AB, in CB, aequalis ponatur quadrato medij AC. Igitur erit quoq; vt totus DE, ad D, ita D, ad E, d ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, in E, aequalis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus DE, factus ex partibus D, E, quarum vel vtroque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE, in partem E, aequalis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero AB, quando vtraq; pars AC, CB, vel impar est, vel vtraq;, & altera par. Constat ergo propositum.

a 24. sept. *in.*
b 26 sept. *tim.*
c 20. sept. *tim.*
d 20. sept. *tim.*

THEOR. 28. PROPOS. 30. xxxiij.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoq; ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C par, Atq; adeò dimidiam partem habebit. Itaque cùm A, metiatur B, per C, *e* metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam verò est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. *f* Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . C . . . .
B . . . . . .

e 8. prop. *num.*
f 40. sept. *tim.*

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiiij.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primum esse. Si enim A, C, nō sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D, qui necessariò impar erit. Nā si sit par, cùm metiatur

A . . . . B . . . . .
C . . . . . D . . .

a 28. no ui. tur imparem A; a erit A, factus ex D, pari in eum numerum per quem metitur, par. Quo eſt abſurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impa parem C, metiens, (eſt enim

A . . . . . B . . . . . C . . . . . D ----

b 30. no ui. C, par, cùm dimidium habeat B.) b metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipſos A, B, primo inter ſe metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt. Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad ali quem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus eſt, primum quoque eſſe non ſolum ad eius duplum, vt Euclides demonſtrauit, ſed etiam ad eius quadruplum, octuplum, ſedecuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam ſi primus e c 31. no ui. ad duplum, e primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus eſt. Et ſimiliter ad octuplum, qui quadrupli duplus eſt, &c.

XXXV. THEOR. 30. PROPOS. 31.

NVMERORVM à binario duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tantum.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque ſint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, eſſe pariter pares tantùm. Quòd enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. Nam expoſita vnitate, cùm A, ſit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps d 11. no ui. proportionales, nimirum in proportione dupla. d Quare A quemlibet ipſorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem ſequentem metietur per aliquem ipſorum A, B, C, D, E; qui cùm omnes ſint pares, vtpote dupli à binario: metietur quemlibet ipſorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

QVOD autem iidem numeri ſint pariter pares tantùm, liquidò etiam conſtat. Cùm enim A, B, C, D, E, ſint ab vnitate continuè proportionales, ſitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; e nullus alius quemlibet ipſorum me e 13. no ui. tietur, præter ipſos A, B, C, D, E; qui cùm ſint omnes pares; metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par eſt tantùm. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui ſint pariter pares tantùm. Sint enim A, B, C, D, E, ſi-

A, 4. B, 2 C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I---- H---- G----

ario dupli, qui ex
monstratis omnes
pariter pares tan-

Dico nullum alium esse pariter parem tantùm, præter eos, qui ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario ium infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantùm , nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra en numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cuius dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par, (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerum par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm) ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad ternarium veniamus. Sit ergo ternarius ipsius I, dimidia pars unitas, sitque I binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli: Ac proinde G, erit alius ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33. xxxvj.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum impa-
rem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quod enim sit pariter
par, ita perspicuum fiet. Quoniam
dimidium habet imparem, metietur A. . . . . .
narius numerus par ipsum A, per il-
lum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar
est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo
monstrabimus. Sit B. dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si
detur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoq; pariter
par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem nume-
rum. Metiatur eum D, par per parem E. a Igitur fit A, ex D, in E. a 9. prop.
Idem A, fit ex C, binario in B, eius di- num.
midium. Ergo numerus factus ex C, pri- A . . . . . .
mo in B, quartum æqualis est ei, qui fit B . . . . . C . .
ex D, secundo in E, tertium, b Ac pro- D ----- E ---
inde erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur b 19. sep.
autem C, binarius parem D Igitur & E, ipsum B, metietur, par
parem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo

pariter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium hab
imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

*ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli summa
inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Q*

Impares	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	*enim quilibet illorum pariter impar tantù conflat ex hac propos*
Pariter impares tantũ	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	*ne ; quippe cùm quil dimidium habeat im rem. Quòd autem ill*

*sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theore
te, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt du
neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter im
res. Cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, pra
duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium p
ter ipsos, esse pariter imparem tantùm ; sed vel esse pariter parem t
tùm, vel certè pariter parem & pariter imparem.*

xxxvij. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neq
dimidium habeat imparem: Pariter par est, & parit
impar.

PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimi
habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse
pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam ci
dimidium habe
A . . . . . parem, metie
cum binarius, p
numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitio
pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita oste
demus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, &
deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in
narium inciderimus, esset A, à binario duplus; ponitur aut
& non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem in
damus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Al
a 29. no vi. si per imparem metietur, a cùm impar imparem multiplica
faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc impare
impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm imp
metiatur A, per parem; atque adeò vicissim par per imparem, e
ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igi
est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus nequ
binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

SCH

SCHOLIVM.

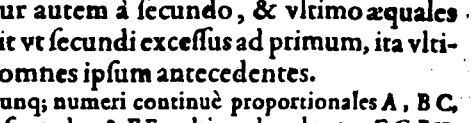
FACILE ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac reliqui omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO *ex proximis tribus theorematibus apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.*

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxviij.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunq; numeri continuè proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo, A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, detracto C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, &



H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; [a] Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, *primis* quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 12. *sim.*

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam ſumma quotcunque numerorum continuè proportionalium, ſi modò primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cùm enim ſit vt exceſſus ſecundi ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes; Si primus à ſecundo, & vltimo dematur, fiatq; vt reliquus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium. Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adiiciatur vltimus, habebitur tota ſumma. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecundi: Vt liquet ex ſcholio propoſ. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus eſt, ſunt exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus vltimi: Vt in exemplo appoſito. ſi primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 2186. ita 2186. ad ſummam omnium, excepto vltimo, ſi ſecundus numerus 2186. multiplicetur per tertium 2186 fiet numerus 2186. qui ſi diuidatur per primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187. qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1093, procreabitur ſumma omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

xxxix. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quorum A ſit E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, eſſe numerum perfectum. Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I

Vnitas. A, 1. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ----- 62. H, 124. I, 248. F ------ 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ----- P -----

Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I
a 19. ſeptim. erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; a Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſecundo in
b 7. prem. E, tertium: Factus eſt autem F; ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; b ideoque I, ipſum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipſum

ſ, ipſius I, duplus erit. Quare E,G,H,I,F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K,L, primo E, æquales, ſintq; reliqui exceſſus M,N. *a* Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E. (Cùm enim G, duplus ſit ipſius E, ablatuſq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E G,H,I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A,B,C,D, numeris, (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, ſimul. Quare cùm vnitas, & omnes

a 25. *noni.*

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G----- 62. H, 124. I, 248. F----- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O----- P-----

numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipſum F; (Cùm enim F, factus ſit ex E, in D; *b* metietur D, ipſum F; *c* atq; adeò eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, *d* qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cùm I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, *e* metientur quoque eundem F, numeri E,G,H, *f* qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C,D,E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cùm æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

b 7. *prop. nonum.*
c 11. *prop. nonum.*
d 11. *prop. nonum.*
e 11 *prop. nonum.*

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; *g* atque adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium: *h* ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D, Quoniam verò, cùm A,B,C,D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, *i* vltimum D, nullus alius, præter A,B,C, metitur: & O, ponitur nõ idem, qui aliquis ipſorum A,B,C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neq; igitur E, ipſum P, metietur. Cùm ergo F, primus ſit, *k* erunt E, & P, inter ſe primi; *l* ideoque in ſua proportione minimi: *m* Ac proinde æquè metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. *n* Nullus verò alius præter A,B,C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B,C,D, tot ab E, ſumantur dupli E,G,H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; *o* Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit

g 9. *prop. nonum.*
h 19. *ſeptim.*
i 13. *oct.*
k 31. *ſeptim.*
l 23. *ſept.*
m 21. *ſeptim.*
n 23. *oct.*
o 19. *ſeptim.*

fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in E
a 19. se- a, atque adeò erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui I
ptim. Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I, Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile in subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: adeoque 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; neque 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica agemus exposuimus, hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus consimili ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat Quotientes D, E.
A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16. *Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione si*

A,

A, fiet ex C, in E. Quia ergo eadem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: a erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertium ad D, quartum. Quod erat propositum. a 19. 7. prim.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H. Dico esse vt B, ad C, ita G, ad F. Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. primùm demonstrato. Cùm enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G, erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H. Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod erat propositum.

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 3.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod erat propositum.

A, 15.
B, 1 C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15. G, 7½. H, 3¾. I, 1⅞.

IV.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum ſumma D: Et totidem alij E, F, G, quorum ſumma H; ſitq; vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A

A, 3.	*B*, 6.	*C*, 20.
D, 29.		
E, 6.	*F*, 12.	*G*, 40.
H, 58.		

B, C, ſigillatim, ita H, ad E F, G, ſigillatim. Cùm enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B ſimul, ad C ita erit E F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſque proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quæque per ſuum, diuidatur. Eademque ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.

SI NT continuè proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe: item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D. Et quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A, B, C, D: erit per 4. theoremα, E. ad A, vel K, ad I. Quare cum ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.

	A, 1.	B, 2.	C, 4.	D, 8.
		E, 15.		
	F, 15.	G, $7\frac{1}{2}$.	H, $3\frac{3}{4}$.	I, $1\frac{7}{8}$.
		K, $28\frac{1}{8}$.		
	L, $1\frac{7}{8}$.	M, $3\frac{3}{4}$.	N, $7\frac{1}{2}$.	O, 15.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A, B, C, D, E, F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum ſumma O. Dico ſummam O, æqualem eſſe numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, ſunt continuè proportionales conuerſo ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vel I. ad H. Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I, hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fit ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H, I, K, L, M, N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſummam O, diuiſa per H, facit Quotientem N, producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

	A, 1.	B, 2.	C, 4.	D, 8.	E, 16.	F, 32.
		G, 63.				
	H, 63.	I, $31\frac{1}{2}$.	K, $15\frac{3}{4}$.	L, $7\frac{7}{8}$.	M, $3\frac{15}{16}$.	N, $1\frac{31}{32}$.
		O, $124\frac{1}{2}$.				

a 19. ſeptim.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè pro-

portionales A, B, C, D, E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim divi
ſa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum ſumma M. Dico ſumm
M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex
I, in ſeipſum. Quo
enim æqualis ſit ei
qui ſit ex G, in L
& ex H, in K, de
monſtrabimus, ſi
prius. Deinde ſer

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31.
G, 31. H, 15 1/2. I, 7 3/4. K, 3 7/8. L, 1 1/16. M, 60 1/16.

a 20. ſeptim. *quia tres numeri H, I, K, continuè proportionales ſunt, a erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M, æqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur. quod eſt propoſitum.*

HINC fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientium eſſe numerum quadratum, cuius latus, ſive radix, eſt medius terminus.

ITAQVE ſi inueniendi ſint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant: accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim diuidatur; erunt Quotientes quæſiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum ſumma ſit numerus quadratus, cuius latus, ſive radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumque ſumma per eos ſigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæſiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atque mirabile ſane eſt, poſſe reperiri quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma æqualis ſit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus qui ab extremis æqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis; & denique ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſe ipſum multiplicato.

SIC etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero producto ex vno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunque, eorumque ſummam per vtrumque diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæſitos, vt poſtea ſum oſt: quia videlicet eorum ſumma æqualis eſt numero, qui fit primo in vltimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint tres inuiendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque ſumma 11. per vtrumque diuidatur. Nam Quotientes 1 5/6 & 2 1/5 ſunt numeri quæſiti. Habent enim

prop

proportionem sesquiquintum datum, & tam eorum summa, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, est $4\frac{1}{7}$ &c.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem, & numerator C, sit Vnitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quod minutia A B, dividatur in tot minutias minutia C B, quot Vnitates sunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. Vnam eadem pars est Vnitas C, numeri A, qua minutia C B, minutia A B; ac proinde est, vt Vnitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

2 29. de fin.

QVONIAM verò minutia sunt fractiones, sine particula vel vocatu, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius Vnitatis esse accipiendas; propterea quod falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in Vnitate. Nuncupam in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo data minutia $\frac{6}{11}$ *&* $\frac{1}{11}$ *particula, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius* $\frac{1}{11}$ *est 4. &* $\frac{6}{11}$ *sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.*

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in Vniuersum de quibuscunque duabus minutiis eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat Vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia.

SIT minutia quæcunque A, B. Dico eſſe numeratorem A, ad denominatorem B, ut eſt minutia A B, ad ſuum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis ſit eidem denominatori B, ita vt ſuo integro ſit æqualis. Quando enim numerator denominatori eſt æqualis, minutia ſuo integro æquiualet: quippe qua tot particulæ integri continent, in quot ipſum integrum diuiſum eſt, ac proinde totum integrum continet.

A, 3.	*C*, 1.	*D*, 5.	
B, 5.	*B*, 5.	*B*, 5.	

a 11. huius. a *Quoniam igitur eſt, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo vt A, ad D, hoc eſt, vt numerator A, ad denominatorem B, ipſi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc eſt, ad integrum. quod eſt propoſitum.*

ALITER. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia ſit pars aliquota integri C, ſiue C, ſit vnitas, ſint numerus, pars, inquam, aliquota ipſius B, denominatæ, propterea quod tot minutiæ ipſi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas eſt in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, ſit pars numeri B, ab ipſo B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; eadem

A, 1.	*C*, 1.	
B, 5.	*C*, 30.	

b 20. de finib. b *pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod eſt propoſitum.*

DEINDE non ſit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutia A B. c *Et quia eſt vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proximè demonſtrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod eſt propoſitum.*

A, 3.	*D*, 1.	*C*, 1.	
B, 5.	*B*, 5.	*C*, 30.	

c 11. huius.

ITAQVE ſi data minutia $\frac{3}{5}$. ſit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi videre eſt eſſe 18. ad 30. vt eſt 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata.

d 2. huius. *SIT qualibet minutia A B. Dico eam eſſe partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam.* d *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numt-*

merator ad denominatorem, ita minutia AB, ad suum inte-
C, erit permutando, & A, ad minutiam AB, ita B, ad inte-
. Et conuertendo, & minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cum
integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc A, 3. C, 1.
ntegri toties accepti, quoties & unitas est in de- B, 5. C, 30.
inatore B.) ab ipso denominatore B, denomi-
x; (Cum enim aquè metiatur & unitas denomi-
orem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties & uni-
est in denominatore; sit autem & unitas pars denominatoris à deno-
natore denominata, & ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque in-
rum eadem pars integri toties accepti, quoties & unitas est in deno-
inatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc est, integri
ies accepti, quoties est & unitas in numeratore A,) eadem pars à de-
minatore B, denominatr. quod est propositum.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18.
quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, & alet 90. & de-
ominator & alet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumi-
r respectu & unitatis, numerator continet tres & unitates, & denomi-
ator quinque.) liquido constat, 18. esse quintam partem numerate-
m, hoc est, trium & unitatum, quarum qualibet numerum integrum
0. significat, quæ tres & unitates faciunt 90. partem, inquam, à deno-
minatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus
integer, quinta pars est denominatoris, hoc est: quinque & unitatum,
quarum qualibet numerum integrum 30 significat, quæ quinque & uni-
tates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IV.

DATÆ minutiæ eundem habentes denominato-
em, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem,
andem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis,
uarum altera numeratorem habet & unitatem, demonstratur hic de
ubusuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ AB, & CB, eundem de-
minatorem B. Dico esse minutiam AB, ad mi- A, 6. C, 3.
niam CB, & est A, ad C, numerator ad nume- B, 7. B, 7.
atorem, a Quia enim est, & A, ad B, ita minu-
m AB, ad suum integrum: Et & B, ad C, ita
integrum ad minutiam CB; (Nam b cum sit, & C, ad B, ita minu-
a CB, ad integrum, erit conuertendo, & B, ad C, ita integrum ad mi-
nutiam CB,) erit ex æquo, & A, numerator ad C, numeratorem,
minutia AB, ad minutiam CB, quod est propositum.

a 2. hu
ius.
b 2. l.

DATÆ minutiæ & $\frac{3}{7}$ sint huius integri 28. cuius & $\frac{3}{7}$. sunt 24.
& $\frac{3}{7}$ sunt

& $\frac{1}{7}$. sunt 12. Vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. Vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, Vt est F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, a erit Vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, b ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, Vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; c erit Vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, Vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam C D, (Nam d cum sit, Vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit conuertendo, Vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque, Vt H, ad G, ita integrum ad minutiam C D. Ex æquo igitur erit, Vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D. quod est propositum.

a 19. sept. huius.

F, 10. A, 2. B, 3. × G, 12. C, 4. D, 5. H, 15.

c 18. sept. huius.

F, A B. H. Integrum. G. C D.

d 11. huius.

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. Vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, Vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SIN

SINT *duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: ac ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum A B, C D, vt est H, ad summam numerorum F, G.* a *Quoniam enim est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; ex componendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H, (nam* b *vt minutia C D, ad integrum, ita est G, ad D.* c *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quod G, ex D, & B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt* d *summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: & permutando, vt integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G, quod est propositum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B, 3. D, 5.
H, 15.

a 5. huius.
b 2. huius.
c 18. septim.
d 17. septim.
e 5. huius.

SINT *rursus duæ minutiæ* $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *particulæ numeri 30. cuius* $\frac{2}{3}$. *sunt 20. &* $\frac{4}{5}$. *eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi iubet, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.*

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, fecit B, E; d erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, e ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, vt C, ad B. quod est propositum.

D, 105. E, 35.
A, 5. A, 5.
B, 7. C, 12.

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{9}$. *sint particulæ numeri integri 42. cuius* $\frac{5}{7}$ *sunt 30. &* $\frac{5}{9}$. *eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.*

VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D, ſitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias æ-

quales eſſe. a *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia A B, ad integrum, vt minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo ſunt minutiæ A B, C D. quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

SED ſint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico eſſe vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales ſint minutiæ, erit vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, ad idem integrum. b *Eſt autem, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod eſt propoſitum.*

DEINDE ſit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem eſſe minutiam A B, quam C D. c *Cum enim ſit, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ A C, ad integrum quam minutia C D, ad idem integrum. Maior ergo eſt minutia A B, quam minutia C D, quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

VERVM ſit iam minutia A B, maior, quam minutia C D. Dico maiorem eſſe proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ A B, maioris ad integrum, quam minutia C D, minoris ad idem integrum. d *Cum ergo ſit, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod eſt propoſitum.*

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *integer numerus ſit 24 cuius tam* $\frac{3}{4}$. *quam* $\frac{9}{12}$. *ſunt 18. ac proinde æquales ſunt minutiæ* $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *Ali* $\frac{2}{3}$. *eiuſdem numeri 24 ſunt 16. Vbi manifeſtum eſt, numerum 18. maiorem eſſe numero 16. ideoque minutiam* $\frac{3}{4}$. *maiorem eſſe minutia* $\frac{2}{3}$

IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem nu-

lem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse.

Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: *A, 6. C, 2.*
ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est *B, 9. D, 3.* a 8. huius.
propositum.

SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. b *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.* b 8. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad *A, 6. C, 3.*
B, quam C, ad D, c *ac propterea maior erit minutia A B, quam C D. quod est propositum.* *B, 9. D, 5.* c 8. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quam C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quam B, ad D. d *Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum.* d 8. huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{4}{5}$. partes integri numeri 90. Vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{4}{5}$. id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorem esse minutia $\frac{4}{5}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator eadem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; e *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* f *Quare minutia A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* g *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* h *Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.*

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. ✕ D, 5.
G, 15.

e 18. sep. f 8. huius. g 18. septim. h 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. *reducendum ad minutiam cui denominator C. Sumatur numerator B, den minatori C, aqualis. Dico minutiam B C, ſu tati A, aqualem eſſe.* a *Quia enim eſt, vt B, C, ita minutia B C, ad integrum A: Eſt a tem B, ipſi C, aqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id eſt, vnit ti, erit aqualis. quod eſt propoſitum.*

a 2. huius.

A, 1. B, 6. C, 6.

DEINDE ſit integer numerus A, renocandus ad minutia cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutia B C, integro A, aqualem eſſe. Supponatur eni integro A, vnitas D, vt fiat minutia A D, t vnitatibus aqualis, quoties vnitas eſt in A. Qui igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplic tionis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum A B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proporti nem habeant, b *ipſa inter ſe aquales erunt. Quare cum minutia A B ſit integro A, aqualis, ob denominatorem, qui eſt vnitas; erit qui que minutia B C, eidem integro A, aqualis. quod eſt propoſitum.*

b 8. huius.

A, 7. B, 42. D, 1. C, 6.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denom nator B, quando par eſt, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eode numeratore A. Dico vtramque minu tiam C B, A D, duplam eſſe minutiæ A B. Cum enim minutia A B, C B, eundem habeant denominat rem; c *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A minutia ad minutiam. Eſt autem C, ipſius A, duplus ex conſtructio Igitur & minutia C B, minutia A B, dupla erit. quod eſt propoſitu*

c 4. huius.

A, 3. C, 6. B, 8. A, 3. D, 4. B. 8.

RVRSVS quia minutia A B, A D, eundem habent numerat rem; d *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, A B, minutia ad minutiam. Eſt autem B, ipſius D, duplus, per ſtructionem. Igitur & minutia A D, minutia A B, dupla erit. q eſt propoſitum.*

d 7. huius.

DEINDE dimidianda ſit minutia A B. Dupletur denomi tor B, vt fiat denominator C, manente dem numeratore A. Vel numerator A quando par eſt, dimidietur, vt fiat nu rator D, manente eodem denomina B. Dico vtramque minutiam A C, D B, dimidium eſſe minutiæ A

A, 6. A, 6. D, 3. B, 11. C, 22. B, 11.

c 7. huius. *Cum enim minutia A B, A C, eundem habeant numeratorem;* c *vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, min*

ad

minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; & minutia A C, minutia A B, dimidium. quod est propositum.

RVRSVS cum minutia A B, D B, habeant eundem denominatorem; a erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutia A B, dimidium. quod est propositum. a 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, sive unitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, nempe videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B. b Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum, numerum ad minutiam C D, cuius integrum est E: c Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quòd A, B, ipsum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrum E: c Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsi C, D, multiplicans fecerit H, G. Erit quoque vt C D, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit minutiæ A B, minutiæ C D; cum eius valorem respectu integri E, exprimat.

	F, 6.	H, 9.	
A, 2.	C, 3.	E, 1.	
B, 3.	D, 4.	E, 24.	
	G, 12.	K, $\frac{1}{2}$.	

b 2. huius.
c 18. septim.
d 2. huius.
e 17. septim.

A B.	F.	
C D.	H.	
E.	G.	

exprimat. Igitur erit quoque, ℣t F, ad G, ita minutia ſimplex K, a 2. huius. integrum E. a Cum ergo quoque ſit, ℣t F, ad G, ita minutia F G, idem ſuum integrum E; æquales erunt minutia ſimplices K, & F ac proinde cum minutia K, æqualis ſit data minutia minutia, quoque ſimplex minutia F G, æqualis data minutia A B, reſpectu nutia C D, cuius integrum E. quod eſt propoſitum.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutia $\frac{3}{4}$. reſpectu integri 24. Huius numeri ſunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12. qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati inte numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inte multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam qua huic $\frac{1}{2}$. aquualet, qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu mers integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minuti rum ad ſimplicem minutiam reducere.

b 13. huius.

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

SIT primum A B, minutia minutia C Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F. b quoniam minutia E F, exprimit ℣alorem nutia A B, reſpectu minutia C D; reductae data minutia minutia ad ſimplicem mi tiam E F. quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita ℣t C ſit minutia minutia E F, & A B, minutia minutia C D. Fiat G, A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, num ri ℣ltimo loco producti I, K, in numc ſequentis minutiæ ducantur. Dico mi tiam I K, cuius numerator I, & deno nator K, data minutia minutiarum qualem eſſe. c Nam minutia G H, æqu

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

c 13. huius. eſt minutia A B, minutia C D, reſpectu minutia E F, tanquam d 13. huius. tegri cuiuſdam. d Item minutia I K, æqualis eſt minutia G H, (eſt, minutia A B, minutia C D.) minutiæ E F, reſpectu integri, c E F, eſt minutia, & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare mi tia I K, ex numeris ℣ltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt minutia minutiarum. quod eſt propoſitum.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. H numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius que $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido tem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, q denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt nutia $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24

DAT

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum A, in D, productum: denominatorem verò denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiat G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H, a erit vt A, ad B, ita G, ad H, b ac proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit, F, c metietur C, ipsum F, per D: d Metietur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A. Quæ igitur C, minutia est minutia F, respectu integri G, sunt quæ numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; e constituet C, minutia minutia F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutia F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K. 10 Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L numerum. Quod est propositum.

a 17. septim.
b 8. huius.
c 7. prænum.
d 5. prænum.
e 13. huius.

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutiam A B, C D, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis eſt numero F, facto ex C, ſecundo in B, tertium, a erit & A, primus ad C, ſecundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. b *Quare minutia A B, C D, æquales ſunt. VEL ſic.* c *Quoniam eſt & E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutia C D, æqualis. quod eſt propoſitum.*

E, 24. F, 24.
A, 2. C, 8.
B, 3. D, 12.

a 19. ſeptimi.
b 9. huius.
c 11. huius.

SED ſint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum d *erit & A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem.* e *Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL ſic.* f *Quoniam eſt, & minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales: erunt quoque numeri E, F, æquales, quod eſt propoſitum.*

d 9. huius.
e 19. ſeptimi.
f 11. huius.

DEINDE ſit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque A B, maiorem eſſe minutia C D. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignatur ex G, minore numero quàm A, in D, numerum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in B, tertium, g *erit G, primus ad C, ſecundum, ita B, tertius ad D, quartum: Eſt autem maior proportio A, ad C, quam G, ad C; quod A, maior ſit quam G.* h *Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia A B, maior erit, quam minutia C D. VEL ſic.* i *Quoniam eſt, & E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, maior quàm F; erit quoque minutia A B, maior quam minutia C D. Quod eſt propoſitum.*

E, 24. F, 21.
G, 1 3/4 A, 2 C, 7
B, 3. D, 12.

g 19. ſeptimi.
h 9. huius.
i 11. huius.

VERI

VERVM sit iam minutia A B, maior quam minutia C D. Dico numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia A B, quam minutia C D, a *erit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G.* b *Idem ergo numerus fiet ex G, in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quam ex G, in D;* c *propterea quod A, maior est quam G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quam F, ex C, in B, factum. VEL sic.* c *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F: Est autem A B, minutia maior quam minutia C D, ita quoque E, maior quam F. quod est propositum.*

a 19. huius.
b 19. septim.
c 5. huius.

ATQVE hac est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiã ad minimos terminos reducere.

SIT minutia A B, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, A, 11. C, ∾ / B, 12. D, ∾ *ad minores terminos C, D, ita vt minutia C D, minutiæ A B, sit æqualis.* d *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; suntque C, D, numeri minores numeris A B; erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* e *sunt autem & primi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.*

d 8. huius.
e 23. septim.

SI vero A, B, non sint inter se primi; f *sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A B, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* g *producentur A, B, ex C, in D, E.* h *Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, ac propterea minutia A B, D E, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.*

A, 36. D, 3. / B, 48. E, 4. / C, 12.

f 2. sept.
g 9. prænum.
h 17. septim.
i 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia A B, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum

A, 1. E, 9.
B, 4. C, 12.
D, 36.

C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cuius numerator E, & denominator C, datæ, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, a fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. b Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; c ideoq; minutia A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.

a 19 prop. b 19 6. c 8. huius.

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutia A B, E C, æquales sunt; d erit vt A, ad B, ita E, ad C. e Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. f Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum, Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

d 8. huius. e 19 septim. f 7 prop. nam.

A, 3. E, 1
B, 4. C, 10.
D, 30.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator verò maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. g Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.

g 8 huius.

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator verò, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbi gratia. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. h Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

h 19 huius fin.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ A B, C B, eiusdem denominationis.

minutiæ *Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, esse summam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutia eundem habent denominatorem; a erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam C B. b Vt autem C, ad D, ita quoque est minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A C, simul ad D, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam D B. Cùm ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutia A B, C B, simul æquales minutiæ D B. quod est propositum.*

a 4. huius.

b 4. huius.

DEINDE sint addenda duæ minutiæ A B, C D, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam E F, esse summam ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam. c Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F: d Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, æqualis erit minutiæ E F, ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum.

A, 2 — B, 3 — C, 3 — D, 4 — E, 17. — F, 12.

c 6. huius.

d 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, æquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summæ minutiarum A B, C D, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reductæ sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM verò datis pluribus minutijs; addenda primùm erunt duo prima: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutia seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. *minutia huius integri* 60. *cuius* $\frac{2}{3}$. *sunt* 40. & $\frac{3}{4}$. *sunt* 45. *Ex* 40. & 45. *fit summa* 85. *hoc est, totum numerus integer* 60. & *insuper* 25. *unitates, quæ faciunt* $\frac{5}{12}$. *integri* 60. *quemadmodum ex* $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. *collecta est summa* $1\frac{7}{12}$. *id est, semel* 1. & *insuper* $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{2}$. $\frac{4}{9}$. *est* $\frac{2}{2}$ $\frac{1}{7}$. *hoc est, in minimis terminis* $\frac{7}{9}$. *Si igitur illarum minutiarum integrum sit* 36. *erit* $\frac{1}{2}$. *ipsius* 12. *at* $\frac{4}{9}$. *eiusdem*, 16. *Vbi* 9 *ducies ex* 12. & 16. *conficies* 28. *hoc est* $\frac{7}{9}$. *ipsius integri* 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia A B detrahenda sit minor C B, sintq; primùm ha minutia eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, reliquam esse post detractionem minutiæ C B, ex minutia A B. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex C, & D. Minutia ergo A B, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum C B, D B, vt in prima parte antecedentis propos. ostensum est. Quare detracta minutia C B, ex minutia A B, reliqua fiet minutia D B quod est propositum.

A, 7. C, 3. D, 4.
E, 10. B, 10. B, 10.

DEINDE minutiæ A B, C D, habeant diuersos denominatores, detrahendaq; sit minor C D, ex maiore A B. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat E, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam G H, esse reliquam post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B. Quo-

F, 15. E, 8.
A, 3 C, 2. G, 7.
B, 4. D, 5. H, 20.

a 17. septim. *niam enim D, multiplicans A, B, facit F, H,* a *erit* vt *A, ad B, ita F, ad H:* b vt *autem A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque* vt *F, ad H, ita minutia A B, ad integrum. Rursus*
b 2. huius. *quia B, multiplicans C, D, facit E, H,* c *erit* vt *C, ad D, ita E, ad H:*
c 17. septim. d *Vt autem C, ad D, ita est minutia C D, ad integrum. Igitur erit*
d 2. huius. *quoque* vt *E, ad H, ita minutia C D, ad integrum. Quia igitur est* vt *E, primus ad H, secundum, ita minutia C D, tertius numerus ad integrum, quartum numerum:* e *Et* vt *G, quintus ad eundem*
e 2. huius. *secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex* 5. *theor. scholij propos.* 22. *lib.* 7. vt *E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutia C D, G H,*

tertius

tium & sextam numerum simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul, ad H, ita est F, ipsis E, G, aequalis, (Nam E, ex F, detractum reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrum. Cùm ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, G H, simul ad idem integrum: ac propterea aequales erunt minutia A B, & minutia C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod est propositum.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores ductissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duo minutia eiusdem denominationis minutijs datis aequales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factum ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua post detractionem minutiae C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

IAM verò si dentur integra vnà cum minutijs, subtrahenda ex integris seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quod si minutia detrahenda, maior sit quàm ea, à qua fieri debet subtractio, reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiae adhaerentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{3}{5}$. ex $10\frac{1}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{3}{5}$ ex $\frac{1}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. qua cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15 & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. a11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{1}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutia huius numeri integri 40. igitur $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{1}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. minutiae $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, b Erit q, vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia verò C, multiplicans A F, facit E H; c erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F;

H, 60. G, 40.

A, 2. C, 4. E, 8.
B, 3. D, 5. F, 15.

b 5. huius. c 17. sept.

erit

a 12. sexti. A. G. E. F. I. H. a erit ℣t E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, ℣t hic apparet, erit ℣t A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D: b Et ℣t A, ad B, ita

b 1. huius. eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque ℣t minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex fin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod eſt propoſitum.

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſuppoſita ſecunda erit integro numero vnitas, ℣t fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem vnitas. Eo igitur ſupoſito fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſuppoſitus ille numerus minutiæ propoſitæ denominator; propterea quod vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem data minutia ducta eundem denominatorem data minutia non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$ per 5. fient $\frac{15}{4}$ ℣t hic apparet, $\frac{3}{4}.\frac{5}{1}$. Signetur enim minutia $\frac{5}{1}$.

c 11. huius. VERÒ integris minutiis adhærent, & reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator conſtituetur. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{5}$ per $4\frac{1}{2}$ ſint ha duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{37}{5}.\frac{9}{2}$.

NAM ℣t multiplicationem minutiarum integris numeris accommodatam, non erit minutia producta cum integro numero aſſumpto conferenda, ℣t in additione, ac ſubtractione factum eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cum comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe ſignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint duæ minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione ſignetur minutia $\frac{8}{15}$ Neceſſe eſt ergo, ℣t $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{3}{5}$ eius ducti faciant numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in ſe producitur: Id quod liquido conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. ſunt 40 & $\frac{3}{5}$ eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$ numeri 3600. hoc eſt quadrati ipſius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT dividenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita ℣t

A 12. C 3. E 4.
B 16. D 8. F 2.

diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ A

AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; a *gignetur A, ex C, in E, & B, ex D, in F.* b *Igitur minutia AB, producta est ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quocirca cùm sit, vt AB, minutia diuisa ad CD, minutiam diuidentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia EF, Quotiens diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD, quod est propositum.*

A, 3.	*C*, 3.	*E*, 1.			
B, 8.	*D*, 4.	*F*, 2.			

a 9 prænum. b 22. huius.

DEINDE numeri C, D, minutia CD, non metiantur numeros A, B, minutia AB. c *Reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri CD, minutia CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, vt in 15. proposit. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H, erit minutia G, H, Quotiens diuisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.*

c 15. huius.

E, 24.	*A*, 2.			*C*, 3.	*G*, 8.		
F, 36.	*B*, 3.	*K*, 12.		*D*, 4.	*H*, 9.		
E, 90.	*A*, 6.		*K*, 15.	*C*, 3.	*G*, 30.		
F, 135.	*B*, 9.			*D*, 5.	*H*, 27.		

QVIA verò G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiuscunque minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterus H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ dividendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutiæ dividendæ secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet, atq; in hoc appositè exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeri A, B, metiuntur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex C, in D, idem numeri C, D, metiuntur per L, M: atque adeò tam

E, 48.	*A*, 8.			*C*, 2.	*G*, 4.	*L*, 24.	
F, 54.	*B*, 9.	*K*, 6.		*D*, 3.	*H*, 3.	*M*, 18.	

minu-

minutia GH, quam LM, Quotiens eſt minutia AB, per minutia CD, diuiſa.

IAM verò ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam, per numerum integrum minutia diuidenda, ſupponenda eſt ea unitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt appoſito prioris exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. dividenda ſit per integrum numerum fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in poſteriori exemplo apparet.

8	1	16
1.	2.	1.
1	8	1
2.	1.	16.

QVOD ſi minutia adhærent integris, reducenda erunt integri ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, & ea ſti ad finem antecedentis propoſ. diximus.

VERVM quia non facilè eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$ permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$ vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

3	7	21
4.	2.	8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. dividenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{1}{8}$. id eſt, minutiam $2\frac{1}{8}$ quæ proximè inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus diuidatur per eius dimidium, utrimque per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſupra fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inſerenda, ſitq; primùm ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, cuius particula minutia CD, ad minutiam CD: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$ cuius ſeptima ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutia in B, denominatorem prioris minutia fiat F, cui addatur A, numerator prioris, &

E, 24.

A, 3. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

ni. & compoſito numero G, ſuppeditat denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, promanare ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe minutiæ A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniã enim A B, minutiæ vnius particulæ minutiæ C D, a reducitur ad ſimplicem minutiã A H, cuius numerator idem eſt, qui A, productus in numerum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, producitus, & in appoſito exemplo apparet. Minutia F H, minutiæ C D, æqualis eſt, b eidem eandem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productus, numeratorem verò F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ ſit, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; b erit vt C, ad D, ita F, ad H; c ac propterea minutiæ C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, compoſitus, (numerus ex numero ex C, in B, producto, & ex A) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquã, minutiam G H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, & totiès propè eſſe oſtenſam eſt; hoc eſt, ſummam ex minutia A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D; id eſt, æqualis eſt minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, ſimul. quod eſt propoſitum.

a 14. huius.

b 17. ſeptim.

c 8. huius.

IAM verò ſi plures minutiæ A B, C D, E F, G H, ſint inferendæ, hoc eſt, ſi minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiã G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiuſdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto

A, 3.	1	A, 3	
B, 4	D, 7.	H, 28.	
P, 119.	M, 59.	K, 14.	
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

porrò ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, ducatur A, numerator eiuſdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper vltimus numerus conflatus in denominatorẽ proxi-

lentis minutia; productoq; numerator
ris minutia adiciatur, donec nulla rem
P, qui vltimo loco conflatus est, suppo
eribus inter se multiplicatis procreatus,
fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, post
minutiam P Q, ex insitione daturum
is, quem exposuimus. Nam vt in du
inutia K L, producitur ex insitione m
, hoc est, aqualis est summa ex minu
a G H, & ex minutia G H, collecta. D
cula minutia E F, cuius particula minu
mplicem, cuius numerator C, (produ
n hu positam hoc modo, 3. 1. 1.) & de
7, ex multiplicatione denominatorum
s quoque, cuius numerator est nume
minator autem idem numerus N, ex
est minutia K L; c quod numerato
nominatores eandem proportionem h
, gignat numeros alterius illius min
itium propos. 20. demonstrabimus,
M, ex numeratore C, & ex numero
qualis sit summa collecta ex minutia
nator N, atque ex minutia, cuius n
atque ex minutia, cuius numerator
nator verò N; aqualis quoque erit
llecta ex minutia G H, & ex min
ia G H, atque ex minutia C D, cu
particula minutia G H. Rursus min
ia C D, cuius particula minutia E F
facit minutiam simplicem, cuius
ex B, in N, id est, ex multiplicati
productus: Minutia quoque, cui
n M, procreatus, denominator ve
roductus, c aqualis est minutia
m minutiarum ad denominatores eam de
, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros
um minutia igitur P Q, cuius numera te
ex numero, qui fit ex B, in M, conflat
x minutia, cuius numerator A, & den
ia, cuius numerator ex B, in M, gignit
nstio propos. 20. monstratum est; aqua C
P Q, summa collecta ex minutia G H,
rticula minutia G H, & ex minutia C
E F, cuius particula minutia G H, & e

...particula minutiæ C D, cuius particulæ minutia E F, cuius particulæ minutia G H, quod est propositum. Eademque ratio est ...

...Si deinde sensum, addendam esse minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui ad... ex numeratoribus A, C, pro... E, 18. F, 24.
...flatoque numero G, suppo..., ex denominatoribus B, D, A, 3 C, 6 G, 42
...m. Disco minutiam G H, pro... B, 4. D, 7. H, 28.
...positione minutiæ A B, in mi... C D, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam G H, ...esse summæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, mi... C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, a reducitur a 14. ...minutiam simplicem E H, cuius numerator est E, ex numeratori... huius. ...A C, procreatum, denominator au... H, ex denominatoribus B, D, pro... A, 3 C, 6 E, 18
...& exemplum appositum de... B, 4. D, 7. H, 28.
...b Minutia quoq; F H, aqua... b 8. huius.
...minutiæ C D; c quod numeratores ad denominatores eandem ... habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit mi... c 17. se... G H, (quæ ex iis, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, aqua... ptimi. ...lis summæ minutiarum E H, F H,) æqualis summæ collectæ ex mi... C D, (hoc est, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutiæ ...B, (id est, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ...positione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc posteriori sensu. ...est propositum.

QVOD si plures sint minutiæ in... A B, C D, E F, G H, hoc est, P, 232. M, 104. K, 20.
...minutia A B, minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutia C D, A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
...minutia E F, minutiæ G H; & minu... B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
...minutia E F, minutiæ G H, addenda sint ad ...tiam G H, ita agendum erit. Du... Q, 120. N, 60. L, 15.
...G, in F, productoq; numero ad... ...rum ex E, in G, procreatum, & fiat K. Deinde ducatur K, ...D, numeroque producto adiiciatur numerus ex C, E, G, factus, & ...M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, ...E, G, procreatus, & fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper nu... ...ultimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, ...numero procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus ...minutiarum ad eum & sq; locum assumptarum productus, donec nul... ...superesit minutia. Numero autem P, qui ultimo loco procreatus est, ...æquatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, & ita in priori

in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam vt in duabus minutiis demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E F totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, tertiæ

a 14. huius. *minutiæ E F, totius minutiæ G H, a facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus;*

b 8. huius. *b æqualis eſt minutiæ K L.*

c 17. ſeptimi. *c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant*

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4

B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L, 15.

proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutiis, quarum numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ea minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator vero idem N; æqualis erit etiam eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutiæ C F, minutiæ G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D,

d 14. huius. *minutiæ E F, minutiæ G H, d facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem*

e 8. huius. *ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem*

f 17. ſeptimi. *eſt idem Q, ex B, in N, procreatus, e æqualis eſt minutiæ M N; quoniam harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numeris quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit in M, cum æqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutiis, cuius numerator ex numeratoribus A, E, G, producitur, denominator autem eſt Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q, æqualis quoque erit ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H, & ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, quod eſt propoſitum. Eademque de pluribus eſt ratio.*

DE PR

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad pr. pos. 5. lib. 10. hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compositarum proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, intelligere additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit dupla, aut tripla maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatave: item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit verè totum quippiam, cuius partes sint proportiones quibus componi dicitur, vt plerumque interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest; quod pars esset vel aqualis vel maior toto. Nam cum hac compositio intelligenda sit, sive maior quantitas cum minore, sive minor cum maiore conferatur, vt ad definitionem 5. ostendimus, si positis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata duceretur proportionis 1. ad 10. vt Valla defin 10. lib. 5. sed verè esset duplo maior, ita enascerata foret ex duab. proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. quibus, vt Eucl. interpretes putant, quia non videt partem esse maiorem totius, numerorum proportionem 1. ad 10. qua vna pars est, maiorem proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4 4. partem aqualem esse toti ita tum, si, positis hus tribus terminis non continuè proportionalibus, proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. nunquam ex partibus, vt iidem auctores contendunt, esset pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret aqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 2. ad 1. primi termini ad vltimum. Id quod cogunturomnino concedere, nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Primi latera sint 12. & 2. Posteriores vero 3. & 16.

Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportio 24. 48.
numeri 24. ad 48 compositam esse ex proportionibus la- 12. 2. 3. 16.
terum, hoc est, ex proportione 12. ad 3 & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (si hac compositio est vera additio) proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. vere totum est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harum ab illa detrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subduci potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutia huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. minutes, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $1\frac{7}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{2}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{2}{2}\frac{1}{7}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{2}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia *AB* detrahenda sit minor *CB*, sintq; primùm ha minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore *C*, minoris minutiæ ex *A*, numeratore maioris, reliquus sit numerus *D*, cui idem denominator *B*, supponatur. Dico minutiam *DB*, reliquam esse post detractionem minutiæ *CB*, ex minutia *AB*. Quia enim *C*, ex *A*, subtractus relinquit *D*, componetur *A*, ex *C*, & *D*. Minutia ergo *AB*, cuius numerator *A*, ex numeratoribus *C*, *D*, collectus est, summa est duarum minutiarum *CB*, *DB*, vt in prima parte antecedentis propos. ostensum est. Quare detracta minutia *CB*, ex minutia *AB*, reliqua fiet minutia *DB* quod est propositum.

A, 7.	*C*, 3.	*D*, 4.
B, 10.	*B*, 10.	*B*, 10.

DEINDE minutiæ *AB*, *CD*, habeant diuersos denominatores, detrahendaq; sit minor *CD*, ex maiore *AB*. Ex *C*, numeratore minoris in *B*, denominatorem maioris fiat *E*, & ex *A*, numeratore maioris in *D*, denominatorem minoris fiat *F*: atque *E*, ablata ex *F*, relinquat *G*, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam *GH*, esse reliquam post detractionem minutiæ *CD*, ex minutia *AB*. Quoniam enim *D*, multiplicans *A*, *B*, facit *F*, *H*, a erit vt *A*, ad *B*, ita *F*, ad *H*: b vt autem *A*, ad *B*, ita est minutia *AB*, ad integrum. Igitur erit quoque vt *F*, ad *H*, ita minutia *AB*, ad integrum. Rursus quia *B*, multiplicans *C*, *D*, facit *E*, *H*, c erit vt *C*, ad *D*, ita *E*, ad *H*: d Vt autem *C*, ad *D*, ita est minutia *CD*, ad integrum. Igitur erit quoque vt *E*, ad *H*, ita minutia *CD*, ad integrum. Quia igitur est vt *E*, primus ad *H*, secundum, ita minutia *CD*, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: e Et vt *G*, quintus ad eundem secundum *H*, ita minutia *GH*, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt *E*, & primus & quintus simul, ad *H*, secundum, ita minutia *CD*, & *H*, tertium

F, 15.	*E*, 8.		
A, 3		*C*, 2.	*G*, 7.
B, 4.		*D*, 5.	*H*, 20.

portionis, quarum primi duo termini habent. Hac autem planius perspicietur ex iis, quæ iam iam de vera compositione proportionum dicemus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac divisio fieri debent per proportionum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in suis tractatibus de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutia, vt lib. 5. docuimus; cum denominatoris cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerorum magnitudinem supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam constituit in quocunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifestè colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue in proportionum denominatores, siue per numeros earum easdem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus vsque in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligenda duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coacervabitur octupla proportio ex illa, qua summa etiam colligitur, siue denominatores, suppositis primis vnitate cuilibet horum instar minutiarum addantur, fiunt numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos data proportiones reperiuntur, perinde ac si essent tales numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadripartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $1\frac{2}{7}$ & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi primi sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{2}{7}$ reuocauimus ad $\frac{16}{7}$ & $1\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{2}$. Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.

3	5	12	40
1	5	4	8
8		256	
1		32	
18	3	54	6
7	2	21	4
57		342	
14		84	

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliqua fient proportiones quintupla, & dupla superquadripartiens septimas, vt hic perspicuum est.

a 17. 5. *A.* *G.* a *erit* ℭt *E, ad B, ita G, ad F. Ex aqualitate igitur*
E. *F.* *perturbata,* ℭt *hic apparet, erit* ℭt *A, ad B, ita G,*
B. *H.* *ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D:* b *Et* ℭt *A, ad B, ita*

b 2. hu- *eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad* 1. *Igitur erit quoque* ℭt *minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad* 1. *Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero ℭunitas, ℭt *fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem* ℭunitas. *Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quod* ℭunitas *integro numero ſuppoſita in denominatorem data minutia ducta eundem denominatorem data minutia non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia* $\frac{3}{4}$ *per* 5. *fient* $\frac{15}{4}$. ℭt *hic apparet,* $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. *Gignetur enim minutia* $\frac{15}{4}$.

c 11. hu- *SI* ℭverò *integris minutia adhæreant,* c *reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis* ℭunus numerator *conſtitus. Vt ſi multiplicanda ſint* $7\frac{2}{3}$. *per* $4\frac{1}{2}$. *fient ha duæ minutiæ multiplicandæ,* $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM ℭt *multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero aſſumpto conferenda,* ℭt *in additione, ac ſubtractione factũ eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cùm comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe ſignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint* $\frac{4}{5}$. *minutia huius numeri integri* 60. *ex quarum multiplicatione ſignatur minutia* $\frac{8}{15}$ *Neceſſe eſt ergo,* ℭt $\frac{2}{5}$. *numeri* 60. *in* $\frac{4}{5}$. *eiuſdem faciant numerum, qui conſtituat* $\frac{8}{15}$. *quadrati, qui ex* 60. *in ſe producitur: Id quod liquidò conſtat. Nam* $\frac{2}{3}$. *numeri* 60. *ſunt* 40 & $\frac{4}{5}$. *eiuſdem ſunt* 48. *At ex* 40. *in* 48. *fit numerus* 1920. *qui efficit* $\frac{8}{15}$ *numeri* 3600. *hoc eſt quadrati ipſius* 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum eius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita ℭ

A, 12.	*C*. 3.	*E*, 4.
B, 16.	*D*. 8,	*F*, 2.

diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ

A B

in C, fiunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex a 18 se-
B, in C, D, fiunt G, & F, b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur ptimi.
autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex de- b 17. se-
finit. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportio- ptimi.
nibus A, ad B, & C, ad D, cum ha eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad
F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex
Pelitio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum
ex ratione descripta respondeat multiplicationi denominatorum in-
ter se, ut demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplica-
tione denominatorum non differat, liquido constat, compositionem il-
lam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum,
quam iidem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis
explanatam, eique compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex
proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volumus. Ex

A, 9. C, 3.	A, 4. C, 6.
B, 1. D, 1.	B, 2. D, 3.
E, 9. F, 3.	E, 8. F, 12.
G, 27.	G, 24.

A in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si eiusmodi proportionis C, ad B, quarumuis loca, & regulæ multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est proportionem A, ad E, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, c 21. sep-
ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; d erit vt C, ad d 17. se-
D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportio- ptimi.
nibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A,
ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportioni-
bus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta propor-
tione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F:
quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio)
dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non
videt, hoc potius esse dividi proportionem A, ad B, per proportionem C,
ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi,
maiusne ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit?

Atque hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat,
legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio
Rodulpho Spoletino conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

minutia GH, quam LM, Quotiens est minutia AE, per minutiam CD, diuisa.

IAM verò si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appositi prioris exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

8	1	16
1.	2.	1.

1	8	1
2.	1.	16.

QVOD si minutia adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, vel uti ad finem antecedentis proposuimus.

VERVM quia non facilè est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{1}{4}$. per $\frac{2}{7}$ permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{7}{2}$ $\frac{1}{8}$ vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

3	7	21
4.	2.	8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{3}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est, minutiam $2\frac{1}{8}$ quæ proximè inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. ofties sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui numerus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inferenda, sitq; primum sensus, addendam esse minutiam AB, cuius particula minutia CD, ad minutiam CD: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$ cuius septima ad $\frac{5}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutia in B, denominatorem prioris minutia fiat F, cui addatur A, numerator prioris,

E, 24.

A, 3. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

ni, & compositi numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, procreatam ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quo diximus, hoc est, minutiam G H, æqualem esse minutiæ A B, respectu unius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia unius particulæ minutiæ C D, a reducatur ad simplicem minutiã A H, cuius numerator idem est, qui A, productus ex unitatem A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus; & in apposito exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem verò F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; b erit vt C, ad D, ita F, ad H; c ac propterea minutiæ C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (numerum ex numero ex C, in B, producto, & ex A) denominatorem verò H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquit, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt mihi propos. 29. ostensum est; hoc est, summam ex minutia A B, respectu unius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, simul. quod est propositum.

a 14. hu-ius.

b 17. se-ptim.

c 1. hu-ius.

IAM verò si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ, hoc est, si minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, unius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiã G H, sic agendum erit. Ex G, numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto

P, 119. M, 59. K, 14.

A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 8.

Q, 120. N, 60. L, 15.

ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ, addatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P. Atque hinc exordium ducatur semper vltimus numerus conflatus in deno-

proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiusdem
ximè antecedentis minutiæ adiçiatur, donec nulla minutia ſupe
Numero autem P, qui vltimo loco conſtatus eſt, ſupponatur num
Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, ducendo
mum H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, poſt hæc N, in
fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex inſitione datarum minutia
produci ineo ſenſu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus mi
oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiæ E
minutiam G H, hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia E F, v
particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde mi
a 14. huius. C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, (producti
cit minutiam ſimplicem, cuius numerator C, (
ex C, in vnitatem bis poſitam hoc modo, 3. 1. 1.) & denomi
ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F,
creatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex
productus, denominator autem idem numerus N, ex D, i
b 8. huius. ctus, b æqualis eſt minutiæ K L; c quod numeratores
nutiarum ad denominatores eandem proportionem hab
c 17. ſep. cium D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ
per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrabimus, m
cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero,
K, conſtatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutiæ
tor C, & denominator N, atque ex minutia, cuius n
denominator N, atque ex minutia, cuius numerator e
ducitur, denominator verò N, æqualis quoque erit
M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex mi
particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, v
nutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus mi
particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius
d 14. huius. minutiæ G H, d facit minutiam ſimplicem, cuius numerator
denominator Q, ex B, in N, id eſt, ex multiplica
rum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, c
numerus ex B, in M, procreatus, denominator
e 8. huius. Q, ex B, in N, productus, e æqualis eſt minutiæ M N, f
meratores harum minutiarum ad denominatores eandem
f 17. ſep. tionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alte
lius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P,
meratore A, & ex numero, qui fit ex B, in
ſumma collectæ ex minutia, conſtatur, æq
atque ex minutia, cuius numerator A, &, denomin
tor verò Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum M, gignitur, den
eadem minutia P Q, ſummæ collectæ ex m eſt; æqualis quo
tiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, & ex m
ticulæ minutiæ E F, vnius particulæ minut minutia C D, vnius
a G H, & ex minutia

ipsum particula minutiæ C D, cuius particula minutiæ E F, cuius particulæ minutiæ G H, quod est propositum. Eademque ratio est in pluribus.

SIT deinde secundo, addendam esse minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui ad-

E, 18.	F, 24.	
A, 3	C, 6	G, 42
B, 4.	D, 7.	H, 28.

datur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, productam ex insistente minutia A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam G H, æqualem esse summæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, a reducitur ad minutiam simplicem E H, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, & ut exemplum appositum demonstrat: b Minutia quoque F H, æqualis est minutiæ C D; c quod numeratores ad denominatores eandem habent proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quæ ex iis, qua ad initium propos. 20. ostendimus, æqualis est summæ minutiarum E H, F H,) æqualis summæ collectæ ex minutia C D, (hoc est, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id est, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ex insistente minutia A B, in minutiam C D, in hoc posteriori sensu. Quod est propositum.

A, 3	C, 6	E, 18
B, 4.	D, 7.	H, 28.

a 14. huius.

b 8. huius.

c 17. septimi.

QVOD si plures sint minutiæ incrementa: A B, C D, E F, G H, hoc est, minutia A B, minutia C D, minutia F, minutia G H; & minutia C D, minutia E F, minutia G H; & minutia E F, minutia G H, addendæ sint ad minutiam G H, sic agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero adiiciatur numerus ex E, in G, procreatus, & fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adiiciatur numerus ex C, E, G, factus, & fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, E, G, procreatus, & fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus ultimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus antecedentium ad eum & ejus locum assumptarum productus, donec nullæ supersit minutiæ. Numeratorem P, qui ultimo loco procreatus est, denominatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, & ut in priori

P, 232.	M, 104.	K, 20.	
A, 1	C, 3	E, 2	G, 4
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione diſtar
minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam vt in duab
minutiis demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione
nutiarum E F, G H, id eſt, aqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E
totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D,
a 14. huius. *tius minutia E F, totius minutia G H, a facit minutiam ſimpli*
cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denomi
tor autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minu
queque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator au
eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procre
b 8. huius. *tus; b aqualis eſt minutiæ K*

P, 232. M, 104. K, 20.

c 17. ſeptimi. *c quod numeratores harum mi*

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

tiarum ad denominatores habe
proportionem eandem, quippe cu
D, in K, L, faciat numeros alteri
huius minutiæ. Igitur cum mi

Q, 130. N, 60. L, 15.

tia M N, cuius numerator M
flatur ex numero, quem numer
res C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, aq
ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſumma collecta ex
tiis, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, de
nator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, aq
minutiæ, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator
idem N; aqualis erit etiam eadem minutia M N, ſummæ colle
minutiæ G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia
minutiæ C F, minutiæ G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D
d 14. huius. *nutiæ E F, minutiæ G H, d facit minutiam ſimplicem, cuius nume*
tor ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem
e 8. huius. *ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B.*
queque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator
f 17. ſeptimi. *eſt idem Q, ex B, in N, procreatus, e aqualis eſt minutiæ M N, ſi*
harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denomina
res proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius
nutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex
quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem fa
in M, cum aqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata
ſummæ collectæ ex minutiis, cuius numerator ex numeratoribus
E, G, producitur, denominator autem eſt Q, atque ex minutiis,
numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt ide
aqualis quoque erit ſumma collecta ex minutia G H, & ex
E F, minutia G H, & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H,
& ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H
quod eſt propoſitum. Eademque de plu-
ribus eſt ratio.

DE PE

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 5. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. lib. 6. in his propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut communem proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse vere additionem proportionum, sic vt duplicata, vel triplicata proportio sit dupla, aut tripla maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatave: item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit verè totum quippiam, cuius partes sint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerumque interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest; quod pars esset vel aqualis vel maior toto. Nam cum hæc compositio intelligenda sit, sive maior inæqualitas cum minore, sive minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. ostendimus, si positis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin 10. lib. 5. sed verè esset duplo maior, & vt coacervata foret ex duab. proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. quadrupla, vt Euclid. interpretes putant, quis non videt partem esse maiorem toto, numerum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorem proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4 4. partem æqualem esse totis? Atqui, si, positis his tribus terminis non continuè proportionalibus, 2. 4. 8. proportio 4. ad 8. verè coacervaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt iidem auctores contendunt, esset ea pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis: proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 2. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, qui volunt, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. quorum latera sint 12. & 2. Posteriorum vero 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportio 24. ad 48. compositam esse ex proportionibus laterum, hoc est, ex proportione 12. ad 3 & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (si hæc compositio est vera additio) proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. fiat totum est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harum ab illa detrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subduci potest, numerum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

subtracta 24. ad 4⁸. & subtracta proportione subtecuplæ 2. ad 16.
proportione octuplæ 24. ad 48. relinqua erit proportio quadruplæ
ad 8. maior quam tota facta est subtractio. Quod si positus
numeri plani 48. latera 4. 3. 2. 2. sumantur 11. & 4. erit una partium cu
antium numerum proportio 2. ad 4. æq
24. 8. tes proportionis subdelectet 24. ad 48. Et
12. 4. 12. 4. tracta proportione 2. ad 4. ex proporti
æquali 24. ad 48. supereffet adhuc prop
æqualitatis 12. ad 12. quæ maior est quam totum, hoc est, qua
portio 24. ad 48. compleretur, totum non augeri, ex confi
stitis partes addendo. Esto enim hos quatuor terminos, 12. 4.
si proportio 12. ad 4. componatur ex proportionibus 12 ad 4.
ad 2. & 2 ad 1. (quæ ex præcedentibus) & proportio 12. ad 1. sit æqualis
proportioni 12. ad 4. & 2. ad 1. simul sumptis: hoc est, si cum illis terminis contenta
rum rationum medius terminus 4. bis modo, 12. 4. 2. 1. componatur ex
proportionibus, quarum priores tres sunt
æqualitatis, quæ primæ compactabatur. Tres ergo proportiones
6. ad 3. & 2. ad 1. & 12. ad 6. istarum tribus proportionibus 12. ad 4.
2. & 2 ad 1. & 12. ad 4. totum ex illis concatenatum. Hæc ad
mirabilem usum artis & naturæ principia Mathematicorum. Ut
cæcus quia secundum centum hominum seorsum duas pupillas
habet, centuplam visionem, non autem nonuplam, sextuplam, non autem octuplam
præstat: quamquam nonupla proportio duplicatæ
proportionis numeri apparet, 9. 3. 1. Nam quia ut
duo ad 1. ita 3. ad 1. illud idem duplo potentius fa
ut 6. non autem 3. ad 1. nisi communis intelligentia comprehendat
ex proportione tripla & quadrupla confici proportionem octuplam
præter quod ad motionem ut 3. & 5. momenta simul sumpta, ut
autem ex illis conficiatur proportionem 15. ad 1. quamvis hoc ex
continuationem componi non esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. ut patet
manifestum est. Esto 3. 2. 1. multorum agentium vires non pa
miliari, & quod unum ex illis 3. numeros, qui proportionem agentis
sicut explicant. Nam eadem cadat proportionalis. Verbi
Agentis vires sint ut 3. 2. 1. ita ut 3. agens duplo maius, quod inter
maius medium proportionalis cadat numerus: quæ autem non
inter quos cadat numerus: quæ autem non
pla proportione minus esse, quæ ag
modis compositionem proportionum
sum continuationem, quæ per
ut ad defin. 5. lib. 6. demonstratum
extremorum proportio dicatur ex me
ter terminorum continuatorum,
5. explicauimus, cum positis tribus, qu
maiorè proportionalibus, extremus
triplicata, aut quadruplicata, &c.

tionis, quam primi duo termini habent. Hac autem planius per-
ur ex iis, quæ iam de vera compositione proportionum di-
mus.

AQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, ni-
additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio fieri debent per
minum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in
de proportione proportionum. Et quoniam denominato-
rum sunt fractiones, siue minutia, vt lib. 5. docuimus,
denominatori cuiuslibet proportionis multiplicato, qui numerus
libet supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate
minata) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam conſti-
ns quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio de-
minator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex conſequente
numerator: manifestè colligitur, operationes Arithmeticas in pro-
portionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue
proportionum denominatores, siue per numeros earundem propor-
tionum quoscunque, positis tamen conſequentibus terminis sub ante-
cedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus
in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligenda duæ propor-
tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex
additione fit summa 8. coacernabitur octupla proportio ex il-
la summa etiam colligitur, siue deno-
minator, ſuppoſitis primis vnitate cuilibet
3 × 5
1 5
12 × 40
4 8
insuper minutiarum addantur, siue
12. 4. & 40. 8. inter quos data pro-
portio reperiatur, perinde ac si essent
8
1
256
32
numeri, positis terminis conſequenti-
bus antecedentibus, in vnam ſummam
coactis. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori
256. ad 32. quarum vtraque octupla est. Sic etiam ex proportione
18
7 × 3
2
54 × 6
21 4
superquadripartiente ſeptimas, &
proportione, quarum denominatores ſunt
57
14
342
84
3. & qua inter numeros 54. 21. &
proportionantur, fit proportio quadrupla
superquadripartiens ſeptimas, qualem habent tam
minima quarta, quales habent 57. 14. quæ 342. 84. Sed quando per
minatores inſtituitur operatio, reuocandi prius ſunt denomina-
tores ad ſuas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$ reuocauimus ad
$\frac{18}{7}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.
INDE ſit ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla:
proportione quadrupla ſeſquidecimaquarta deducatur pro-
portione quadrupla fient proportiones quintupla, & dupla ſu-
ſquialtera; reliqua fient proportiones quintupla, & dupla ſu-
quadripartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum est.

8 × 5 | 256 × 12 | 57 × 5 | 342 × 6
1 × 1 | 32 × 4 | 14 2. | 84 4

5 | 40 | 72 | 864
1. | 128. | 28 | 336

TERTIO *si multiplicanda sit proportio tripla per 2. sesquialtera, &c. idem est per proportionem duplam: Item proportio sesquisextertia per tripartientem quintas; instituenda erit operatio, &c hoc modo: Sumatur proportio dupla ex qua sit proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.*

3—2 6 | 12—10 120 || 3—8 24 | 9—16 144
1—1 1 | 4—5. 20. || 2—5. 10. | 6—10 60

QUARTO & Ultimo si proportio sextupla dividenda sit per proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si divisoris termini &c. tenentur, &c in divisione minutiarum docuimus, ita instituetur &c.

6—1 6 | 120—4 480 || 24—2 48 | 144—
1—3. 3. | 20—12. 240 || 10—3. 30. | 60—

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab earum definitionibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis.

IAM vero multiplicationem proportionum à nonnullis pro compositione, quam auctores additionem falso nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & quae sequitur, ac praecedit compositionem illam Euclidis vere nuncupatam, nemo non videt additionem, &c diximus, hoc modo fieri. Sint duae proportiones A, ad B, & C, ad D. sive aliae quaecunque, sumatur A, antecedens in antecedentem G, & B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem

A, 6 C, 12.
B, 2. D, 4.

E, 72. F, 8.
G, 24.

A, 3 C, 6
B, 2. D, 5.

E, 18. F, 10.
G, 12.

illa multiplicationem esse compositionem duarum proportionum, &c ita B, & C. proportionem earum duplicatam esse proportionis E, ad F, quae sit ex multiplicatione definitionis 5. lib. 6. Fiat enim

c, sunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex a 18 se-
C, D, sunt G, & F, b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur ptimi.
proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex de- b 17. se-
Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componetur ex proportio- ptimi.
A, ad B, & C, ad D, cum ha eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad
Quibus iam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex
Vitellione attulimus. Cum enim compositæ proportionum
descripta respondeat multiplicationi denominatorum in-
demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplica-
minatorum non differat, liquido constat compositionem il-
lam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum,
illidem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis
tam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex
portione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex

D, fiat E, & ex B, in	A, 9.	C, 3.	A, 4. C, 6.
F. quod idem est, ac	B, 1.	D, 1.	B, 2. D, 3.
proximi proportionis C, ad			
numerum loca, & re-	E, 9.	F, 3.	E, 8. F, 12.
multiplicationis adhi-	G, 27.		G, 24.

. Dico proportionem
E, quæ ex dimissione
A, ad B, per proportionem C, ad D, produci, vt dicti-
, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex propor-
ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex pro-
bus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G,
in G. Quia igitur ex A, B, in C, sunt G, F, c erit vt A, ad B, c 1. sept.
ad F. Rursus quia ex A, in C, D, sunt G, E; d erit vt C, ad d 17. se-
G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportio- ptimi.
G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A,
quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportioni-
, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta propor-
, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F:
admodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio)
tur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non
hoc potius esse dimidiæ proportionem A, ad B, per proportionem C,
quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi,
quam ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit?
ium hac de proportionum tractatum hac dere à Volsmnio
ligat eruditissimum Rodulpho Spoletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum sum est ad res Geometricas intelligendas. In hoc decimo libro aggreditur ad disputationem rum commensurabilium, & incommensu quarum causa numerorum tractationem sceptam esse superius diximus. Nam sine ne harum linearum complures magnitudines cum solida na, neque perfectè intelligi possunt, neque cum res tuta atque & sum conferri; propterea quod plerunque latera com mensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis est, quippe cum & hac incommensurabilia sæpenumero & ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò multus obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus vit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo conten ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita plan tur, ac facilis, & sine multo labore à quouis, qui præcedentis librorum demonstrationes rectè intellexerit, possit percipi. In eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intel esse necessariam eam partem Arithmeticæ, quæ de radicibus rorum, tam rationalibus quam irrationalibus, & Geo nem instituit: Imò contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmeticæ pendere ex hoc lo. [illegible]

simum, ut rationem illam radicum reperiri, & facilius
figatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radi-
culum tenuerit, maiore cum voluptate hanc librum
, quàm quis illarum omnium sit ignarus, propere quid
strationes ad usum possit revocare, hic verò nullo modo.
de causa & mas præcera decem theoremata sexto de lib. non-
modum sunt, ut oblectationem animi maiorem ex eo stu-
dio, ac fructum, non autem ut ea, quæ in illo demonstran-
dis arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet
) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numero-
bus Algebra ponitur, & sumpsit, ut ea res & maiore voluptate
commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omit-
putauimus. Cùm enim perpauci sint hoc tempore, quibus ce-
lebrem illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri adhi-
centur, tenebras potius offusuri, quàm lucis aliquid ad rerum da-
& perspicuitatis; quippe cùm ingenia studiosorum pro additamen-
luce, quam hu nostris commentarijs afferre laborauimus, plus ca-
ent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas percepturi: id
quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum in-
rerum, ac multiplicationē, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo fe-
fit, qui ignoret. Huc accedit, quòd qui in Algebra sunt versati, facili
negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt
ipsos, quando volunt, præsertim cùm iam hoc ipsum non multò
à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de
Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, ut ad institutum redeamus, inchoamus rursus ipsam
Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quæ huic
erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur com-
mensurabiles, definiens eas esse, quas eadem men-
sura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas ea-
dem mensura, C, metitur, (metitur enim C, ipsam
quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensura-
biles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & li-
nea 13. palmorum: quia eas linea tam unius palmi, quàm unius dimidiati
palmi, quam tertia partis unius palmi, &c. metitur. Similiter com-
mensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies
metitur; Item corpora, solidaque commensurabilia, quæ eadem idem
rpus, seu solidum.

A
B
C

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum
nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadratæ cuiuslibet, & la-
eiusdem, quoniam nullam habent mensuram communem, ut pro-

proximè antecedentis minutia; productoq; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia superfit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, & fiat L, deinde L, in D, & fiat N, post hæc N, in B, & fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam & in duabus minutijs ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, & minutiam G H, hoc est, æqualis est summa ex minutia E F, & eius particula minutia G H, & ex minutia G H, collecta. Deinde minutia C D, & eius particula minutia E F, & eius particula minutia G H, a fa-

a 14. huius. cit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, pro-

creatus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, pro-

b 8. huius. ductus, b æqualis est minutiæ K L; c quod numeratores habeant-

c 17. sep. tium minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quæ cùm D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutia. Iam per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrabimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, ducitur, denominator verò N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, & eius particulæ minutiæ E F, & eius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia G H,

d 14. huius. d facit minutiam simplicem, cuius numerator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerus ex B, in M, procreatus, denominator verò idem numerus

e 8. huius. Q, ex B, in N, productus, e æqualis est minutiæ M N, f quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alterius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex

f 17. sep. numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis est summæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignatur, denominator verò Q, & initio propos. 20. monstratum est eandem minutiam P Q, summæ collectæ ex minutia E F, & eius particula minutia G H, & ex minutia G H, & eius particula minutia E F, & eius particula minutiæ G H, & ex minutia C D, & eius particula minutiæ G H, & ex minutia

la minutia C D, quinta particula minutia E F, quinta
tia G H, quod est propositum. Eademque ratio est

de sensu, addendam esse minutiam A B, sextam minutia
nutiam C D. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B,
rem prioris fiat F, cui ad-
numeratoribus A, C, pro-
statoque numero G, suppo-
ex denominatoribus B, D,
. Dico minutiam G H, pro-
sitione minutiæ A B, in mi-
C D, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam G H,
esse summa collecta ex minutia C D, & ex minutia A B, mi-
tia C D. Quoniam enim minutia A B, minutia C D, a reducitur a 14.
minutiam simplicem E H, cuius numerator est E, ex numeratori- huius.
A C, procreatus, denominator au-
ex denominatoribus B, D, pro-
es, & exemplum appositum de-
monstrat: b Minutia quoq; F H, aqua- b 8.
est minutiæ C D; c quod numeratores ad denominatores eandem huius.
portionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit mi- c 17. se-
nutia G H, (quæ ex iis, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, aqua- ptimi.
lis est summæ minutiarum E H, F H,) æqualis summæ collectæ ex mi-
nutia C D; (hoc est, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutiæ
C D, (id est, ex minutia E H,) atque adeo minutia G H, procreatæ
ex positione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc posteriori sensu.
quod est propositum.

QVOD si plures sint minutiæ in-
quantum A B, C D, E F, G H, hoc est,
minutia A B, minutiæ C D, minutiæ
E F, minutia C D, minutiæ
minutia G H; & minutia C D,
minutia E F, minutiæ G H; & minu-
tiæ E F, minutiæ G H, addendæ sint ad
minutiam G H, ita agendum erit. Du-
catur G, in F, productoq; numero ad-
datur numerus ex E, in G, procreatus, & fiat K. Deinde ducatur K,
in D, numeroque producto adiiciatur numerus ex C, E, G, factus, & fiat
M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A,
E, G, procreatus, & fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper nu-
merus ultimo loco genitus in denominatorem antecedentes minutiæ,
numero inde procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus
minutiarum ad eum usque locum assumptarum productus, donec nul-
la minutia ad eum usque locum superstet. Numero autem P, qui ultimo loco procreatus est,
ponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, & eo

P. 232. M. 104. K. 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q. 120. N. 60. L. 15.

in priori sensu. Dico minutiam P Q, productam ex infinitis
minutiarum, si infinito intelligatur, & dictum est. Nam &
minutiis demonstratum est, minutia K L, producitur ex in
nutiarum E F, G H, id est, aequalis est summae collectae ex minu
totius minutiae G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C
a 14. huius. tius minutia E F, totius minutia G H, a facit minutiam
cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur,
tor autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus
queque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denomina
est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D,
b 8. huius. tus; b aequalis est
P, 232. M, 104. K, 10. c quod numeratores
c 17. septimi. tiarum ad denomina
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4 proportionem eandem
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5. D, in K, L, faciat
huius minutia. Igitur
Q, 130. N, 60. L, 15. tia M N, cuius
flatur ex numero, quem
res C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procre
fit per ea, quae initio propos. 20. ostensa sunt, summa colle
tia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur
nator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus,
minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denomina
idem N; aequalis erit etiam eadem minutiae M N, summa
minutia G H, & ex minutia E F, minutia G H, & ex
minutia C F, minutia G H. Rursus minutia A B, minutia
d 14. huius. nutia E F, minutia G H, d facit minutiam simplicem, cui
tor ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denomina
e 8. huius. ex B, in N, procreatus, sive ex denominatoribus H, F, D,
quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denomin
f 17. septimi. est idem Q, ex B, in N, procreatus, e aequalis est minutia
harum minutiarum numeratores eandem habeant ad
res proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius
nutia. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex
quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, qu
in M, cum aequalis sit, ex iis, quae initio propos. 20. demonst
summae collectae ex minutia, cuius numerator ex numerator
E, G, producitur, denominator autem est Q, atque ex minu
numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est
aequalis quoque erit summa collecta ex minutia G H, &
E F, minutia G H, & ex minutia C D, minutia E F, minu
& ex minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia
quod est propositum. Eademque de plu-
ribus est ratio.

DE

PROPORTIONVM compositione.

ITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonstrationem pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus, quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propositiones huc loco factu nos recepimus. In primis igitur, compositionem proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 13. in propositionibus, vbi duplicatam, triplicatamve, aut compositionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, & additionem proportionum, item vt duplicata, vel triplicata sit dupla, aut triplo maior ea proportione, cuius ipsa dicitur duplicata, triplicatave: item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit verè totum quippiam, cuius partes sint proportiones quibus componi dicitur, vt plerumque interpretes Euclid. exponunt, ex hoc perspicue confirmari potest; quod pars esset vel aqualis toti vel maior toto. Nam cum hac compositio intelligenda sit, siue maioritatis cum minore, siue minoris cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. ostendimus, si positis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata decerneretur proportionis 1. ad 10. vt Euclid. defin 10. lib. 5. sed verè esset dupla maior, ac concernata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. quibus, vt Encl. interpretes putant, quis non videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, proportione maiore 1. ad 100? Hic autem 4. 4 4. partem æqualem esse totis? Item, si, positis his tribus terminis non continuè proportionalibus, 2. 4. 8. proportio 4. ad 8. verè concernaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 8. tanquam ex partibus, vt iidem auctores contendunt, esset pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. partes foret æqualis proportio videlicet 10. ad 5 primi termini ad secundum, proportioni 5. primi termini ad vltimum. Id quod cogantur omnino concedere nolint, ex propos. 5 lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 2. quorum latera sint 12. & 2. Posteriores vero 3. & 16.

Iam igitur Euclides ibi demonstrat, proportio 24. ad 48 compositam esse ex proportionibus la- 24. 12. 2. 48. 3. 16.
tus, hoc est, ex proportione 12. ad 3 & ex proportione 16. erit pars componens, (si hæc compositio est vera additio) proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. Pars ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. pars totum est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra horum abillata ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra horum abillata detrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahatur, reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

subdu-

subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione subduplæ 2. ad
proportione subdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrup
ad 3. maior quam ea, à qua facta est subtractio. Quod si pos
numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4. erit vna partium
nentium numerum proportio 2. ad 4.

24.	48.	tota proportionis videlicet 24. ad 48.
12. 2.	12. 4.	tracta proportione 2. ad 4. ex propor

aquales 24. ad 48. supereſſet adhuc
aqualitatis 12. ad 12. qua maior est quam totum, hoc est, qu
portio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totum non augeri, etia
finita partes adderentur. Positis enim his quatuor terminis,
si proportio 12. ad 1. verè concernatur ex proportionibus 12.
ad 2. & 2 ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones
proportioni 12. ad 1. sint æquales: si cum illis terminis
adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. compone
proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres
demtis illa, ex quibus primus componebatur. Tres ergo proportion
6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additis tribus proportionibus 12. ad 4.
2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis concernatum. Ha
omnia absurda sunt, & contra principia Mathematicorum.
cedit, quod secundum communem hominum sensum dupa
tripla constituant proportionem sextuplam, non autem nonu
prædicti auctores volunt, quamquam nonupla proportio
pla duplicata, vt in hisce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam
deat, si agens aliquod sit, vt 3. illud idem duplo potentius
vt 6. non autem vt 9. Sic etiam communis intelligentia con
ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem
præterea quod duo momenta vt 3. & 5. moueant simul sum
autem ex illis constitutis proportionem 15. ad 1. quamvis
continuationem compositæ esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6.
numeris, 15. 5. 1. Huc adde, multorum agentium vires
midiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem
tiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis.
Agens vt 6. non posset habere agens duplo minus, quod
nullus medius proportionalis cadat numerus: quis au
intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quã

LIQVET ergo huiusmodi compositionem proportion
additionem, sed proportionum continuationem, qua per
tionem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonstra
etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex
portionibus composita, propter terminorum conti
modum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur p
aut pluribus terminis continuè proportionalib
portio appelletur duplicata, triplicata, aut q

...am primi duo termini habent. Hac autem planius per-
...qua iam tam de vera compositione proportionum di-

E omnes operationes Arithmetica in proportionibus, ni-
...tio, subtractio, multiplicatio, ac divisio fieri debent per
denominatores, & rectè docet Volumnius Rodulphus in
de proportione proportionum. Et quoniam denomina-
...anum sunt fractiones, sive minutia, & lib. 5. docuimus
...minatori cuiuslibet proportionis multiplicis, quæ numerum
...suppeni possit Unitas, & ex eo fiat quasi minutia ab Unita-
...atis) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam con-
...quecunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio de-
...or est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente
...nator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in pro-
...ibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, sive
...portionum denominatores, sive per numeros eorum decem propor-
...es quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub ante-
...ntibus, instar minutiarum, instituantur, & egregiè Cardanus
...cepit in sua Arithmetica, & iam apparebit.

PRIMVM enim sint in Unam summam colligenda data propor-
...es, tripla, & quintupla. Quoniam denominatorus summæ 3. & 5. ex
...rum additione fit summa 8. coacervabitur octupla proportio ex ib-
...que summa etiam colligitur, sive deno-
...atores, supposita prius Unitate cuilibet
...um, instar minutiarum addantur, sive
...neri 12. 4. & 40. 8. inter quos data pro-
...iones reperiuntur, perinde ac si essent

3 × 5 — 12 — × 40
1 5 — 4 — 8

8 — 256
1 — 32

...simi numeri, positis terminis consequenti-
...sub antecedentibus, in Unam summam
...antur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori
...um 256. ad 32. quarum & tragæ octupla est. Sic etiam ex proportione
...la superquadrupartiente septimas, &
...malteram, quarum denominatores sunt
& 1½. & quæ inter numeros 54. 21. &
...reperiuntur, fit proportio quadrupla
...decima quarta, qualem habent tam
...neri 57. 14. quã 342. 84. Sed quando per

18 × 3 — 54 — × 6
7 2 — 21 — 4

57 — 342
14 — 84

...minatores instituitur operatio, revocandi prius sunt denomina-
...ad Unicas fractiones, & hic factum est. Nam 2⅔ revocavimus ad
& 1½. ad ½. Quod in aliis etiam operationibus tute elige dum est.

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla:
...ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur pro-
...sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla su-
...quadripartiens septimas, & hic perspicuum est.

8 × 3 / 1 1	256 × 12 / 32 4
5	40
1.	128.

57 × 3 / 14 2.	342 × 6 / 84 4
72	864
28	336

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. Sol *idem est per proportionem duplam: Item proportio sesquialtera p* *per tripartientem quintas; instituenda erit operatio, & hoc Euc* *ducetur quebi proportio sextupla, hic autem dupla superbip* *quintas.*

3—2	6	12—10	120	3—8	24	9—16	24
1—1	1	4—5.	20.	2—5.	10.	6—10	6

QVARTO & ultimo si proportio sextupla dividenda prop *tur per proportionem triplam: Item proportio dupla superbip* *quintas per proportionem sesquialteram: si divisoris ter* *tentur, & in divisione minutiarum decimum, ita instituetur op*

6—1	6	120—4	480	24—2	48	144—6.	24
1—3.	3.	20—12.	240	10—3.	30.	60—9.	5

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum *tionibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in pro* *bus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem* *minatorem, quemadmodum in minutiis.*

IAM vero multiplicationem proportionum à nobis *quam auctores additionem falso nuncupant, cum propera* *positione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib.* *nire, at que adeo compositionem illam Euclidis vere esse* *nem non autem additionem, & ut dixemus, hoc modo de* *Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, sive æquales, sive* *ducatur A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex* *te vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F*

A, 6	C, 12.	A, 3	C, 6
B, 2.	D, 4.	B, 2.	D, 5.
E, 72.	F, 8.	E, 18.	F, 10.
G, 24.		G, 12.	

illa multiplic *esse compos* *ducatur A,* *sim & si pr* *B, & C, ad* *proportio* *terminum* *fuerint inæquales,* *in C. Et quia*

Vide defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, fiet ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G ex

E, & G, a erit ℔t A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex a 18 se-
unt G, & F, b erit ℔t C, ad D, ita G, ad F. Componitur primi.
tio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex de- b 17. se-
-igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportio- primi.
B, & C, ad D, cum ha eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad
am patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex
ttallione attulimus. Cum enim compositæ proportionum
descripta respondeat multiplicationi denominatorum in-
bi demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplica-
ominatorum non differat, liquido constat compositionem il-
rtionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

IDEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum,
eadem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis
plicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex
proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, & ipsæ ℔olunt. Ex
D, fiat E, & ex B, in
at F. quod idem est, ac
ex minimis proportionis C, ad
B, permutent loca, & re-
manebit multiplicationis adhi-
bendus. Dico proportionem
E, ad F, quæ ex diuisione

A,	9.	C,	3.	A,	4.
B,	1.	D,	1.	B,	2.
E,	9.	F,	3.	E,	8.
		G,	27.		

C, 6.
D, 3.
F, 12.
G, 24.

proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producetur, & docui-
esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex propor-
A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex pro-
portionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiant enim G,
A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit ℔t A, ad B, c 1. sexti.
G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; d erit ℔t C, ad d 17. se-
ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportio- primi.
nibus G, ad E, & E, ad F, ℔t vult Euclides; erit quoque proportio A,
ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportioni-
bus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta propor-
tione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F:
quemadmodum & ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio)
manet proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non
videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C,
ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi?
Humanus examinare auferre discatur, & in posteriori exemplo accidit?
Atque hæc de proportionum compositione: quæ plura desiderat,
legat eruditissimum tractatum hac de re à Volmanno
Rodulpho Spoletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis fuit ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptum esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ, tum planæ, neque perfectè intelligi possunt, neque cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant. Ut ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò hoc libro multis obstructum est difficultatibus, ob lineārum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes nervos industriæ meæ in eo contendam, ut ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planum reddatur, ac facile, ut sine multo labore à quouis, qui præcedentium tumen librorum demonstrationes rectè intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, qua de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, ut vocant, sermonem instituit: Imò contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest

dull, & existimem, tractationem illam radicum requiri, & facilius liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate horum librorum perceptorum, quàm qui illarum omnino sit ignarus, propterea quòd de demonstrationes ad usum possit revocare, hoc vero nullo modo. Hæc enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. nunc commodauimus, & oblectationem animi maiorem ex eo studioso capiet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, subiuncta, & tam res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cùm enim perpauci sint hoc tempore, quibus cognita illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adderentur, cæteris potius offensui, quàm lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis, quippe cùm ingenia studiosorum pro adiumento, atque, quam his nostris commentarijs affuere laboramus, plane caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrum, ac multiplicationem, qua sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Hinc accidit, quòd qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possint per seipsos, quando volent, præsertim cùm eam hoc ipsum non multò ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accuratè.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erat declarat primodoco, quænam magnitudines dicantur commensurabiles, definitionem eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eadem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 15. palmorum: quia eas linea tam vnius palmi, quàm dimidiati palmi, quàm tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem, quoniam nullam habent mensuram communem, vt pro-

positione ultima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiã plurima alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarũ multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quanam ratione inueniri possint. Rursus, solida figura dicuntur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTÆ lineæ potentia commensurabiles sunt, cùm quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis metitur; eiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam verò longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; aliæ vero ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Linea ergo illa longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. dicemus, potentia cuiusque lineæ quadratum ab ea descriptum) commensurabilia sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine; respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum: cum huiusmodi lineæ vna communi mensura metiantur, vt dictum est: At verò quoniam lineæ potentia commensurabiles, nulla communi mensura metiri potest, sed tantummodo earũ quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt eas propria definitione explicaremus.

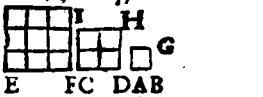
IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

*HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine quàm potentia, hanc quasi communem dumtaxat [illegible] & connexionem

& linea longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, imò & nulla linea dari possint commensurabiles longitudine, quam earum quadrata commensurabilia quoq; sint, quoniam quadratum ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam linea communem earum quadrata, & in subiecta figura apparet: sicut cum recta A B, metitur rectas C D, E F, itaque quadratum A G, quadrata C H, E I, metitur: Non autem, & omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine etiam incommensurabiles sunt, & in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, & omnes lineæ potentia incommensurabiles; sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, & omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles potentia, cùm multæ lineæ reperiantur longitudine tantùm incommensurabiles, cùm tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. huius libri.



V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias verò potentia solùm. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam verò potentia tantùm. Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantùm, quædam verò longitudine, & potentia, & hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam ita verba hæc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solùm indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantùm, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, & diximus

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητή; Latinis verò Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliæ verò cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cùm qualibet in quotcunque partes æquales possit dividi.

ET

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunq; appellari quoq; Rationales, non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparata reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel, 1000. &c. dicitur Rationalis; cùm potentia sit commensurabilis lineæ Rationali; (est enim tam numerus 20. quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. 100. &c. quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui ideirco eam Irrationalem vocant, quòd numero non possit exprimi.

VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel qua potentia tantùm sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquidò constat eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantùm. Ex quibus etiam manifestum est radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cùm non sit longitudine & potentia, sed longitudine tantùm Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilésue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem Rationalia.

OMNES plana superficies quadratæ Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illud, sed quia cum eo collata reperiuntur ei vel commensurabiles,

tes incommensurabiles: quemadmodum etiam linea, quæ Rationali longitudine quomodocunque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM verò lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia, quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellatas iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicentur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali lineâ descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si verò non fuerint quadrata, sed alia quacunq; figura rectilinea, appellentur recta, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineam potentem spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationalem, ex 7. defin. quemadmodum suprà ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cùm ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstratum est in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantùm: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles ac incommensurabiles: Vix autem, & rarissimè his: Rationales, & Irrationales: Rectè enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine

dine & potentia, vel potentia tantùm; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantùm: Minùs verò recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantùm, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantùm. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt varie, & obscurè in hoc 10. lib de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq;, nec non Rationalibus, Irrationalibusq; sint locutus.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cùm maior infinitus non sit, minor verò infinitè possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONUNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

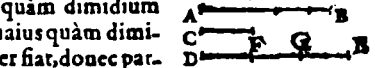
HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt quibusdam in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cùm sit eadem ratio magnitudinibus, non est, quòd frustra eorum demonstrationes hic petamus, præsertim quòd ad verbum hunc possint transferri, mutata tantùm voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CETERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, vt ad prop. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ferè Campani nouimus, vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior vtinam Theonis, inferior autem Campani ferè semper demonstrant. Quod si quis tantùm numerum reperiatur in margine, nullam aut esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligat, quod ad numerum propositionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

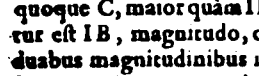
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITÆ sint duæ magnitudines inæquales A B, & C, quarum A B, sit maior. Dico si ex A B, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quàm dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quàm C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta D E, maior sit quàm A B, ita vt D E, sit multiplex ipsius C, proximè maior quàm A B. Diuisa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipsi C, æquales, detrahatur ex A B, maius quàm dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quàm dimidium H I; atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius A B, multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot sunt ipsæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior est quàm A B; At ex D E, ablatum est D F, minus quàm dimidium, vel certè dimidiũ, si D E, ipsius C, sit duplex; ex A B, verò maius quàm dimidium A H: Erit reliquum F E, reliquo H B, maius. (Cùm enim D E, maior sit quàm A B; si ex D E, dimidium auferretur, nec nõ & ex A B, dimidium, esset quoq; reliquum ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quàm dimidiũ, vel certè dimidium, & ex A B, maius quàm dimidium; erit reliquum ex D E, maius reliquo ex A B.) Rursus quoniam F E, maior est quàm H B, auferturque ex F E, dimidium F G, vel certè minus quàm dimidium, si F E, maior sit quàm duplex ipsius C; at ex H B, maius quàm dimidium H I; erit eodem modo reliquum G E, maius reliquo I B: atque ita procedendo



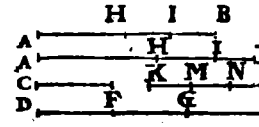
offendemus tandem postremam partem ipsius D E, qualis hic est C E, ma-

GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est I
Cùm ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C
quoque C, maior quàm IB, postrema pars ipsius AB. Relicta
tur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Q
duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori
feratur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si AB, auferatur dimidium AH, & reliquo HB, rursus dimidium H &c. Nam eadem ratione erit quum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, ma reliquo IB; cùm ex maiori DE, ablatum sit DB, minus qu dimidium, vel certè dimidiũ; & ex minori AB, dimidium AH,

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur KL, multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa e KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot par in KL, quot in DE. Quoniam verò AH, maior est quàm HB, certè illi æqualis sit, si ablatum fit dimidium ex AB; & HB, m est, quàm IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, q KM. Rursus quia HI, maior est quàm IB, vel certè illi æqu est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior q MN, vel illi æqualis; atque adeò tota AI, maior, quàm tota K



Additis ergo æqualibus IB, erit tota AB, maior quàm KL: Est autem DE, maio huc, quàm AB. Multò ergo ior erit DE, quàm KL. Q cùm sit vt DE, ad C, ita K IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quàm
a 14. quinti. tiplex est DE, ipsius C,) a erit quoque C, maior quàm IB. proinde relicta est IB, minor quàm C. Quod erat demonstran

SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis app duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor tiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16 monuimus, cùm de angulo contactus contra Iacobum Peleta ageremus.

13. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propo detrahatur semper minor de maiore, alterna quad detractione, & reliqua minimè præcedentem metia Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DV

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi A B, vel minor. Detracta aut A B, ex C D, quoties potest, relinquat F D, se minorem, ita vt A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minorem G B, ita vt F D, metiatur ipsam A G; atque hoc semper fiat. *a* Relinquetur ergo quædam ex C D, vel A B, magnitudo quædam minor quàm E. Quoniam cùm A B, ablata ex C D, relinquat F D, se minorem, quàm C F, ablata maior, quàm dimidia ipsius C D; aliàs si esset dimidia, vel minor quàm dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quàm dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cùm semper auferatur maius, quàm dimidium, *b* relinquetur tandem magnitudo quædam minor quàm E) Sit ergo iam relicta G B, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur C F; *c* metietur quoq; E, ipsam C F: Metitur autem E, & totam C D. *d* Igitur reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G; *e* quare E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: *f* ergo reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendũ.

a 1. *decimi*

b 1. *decimi*

c 2. *propositionis*

d 3. *propositionis*

e 2. *propositionis*

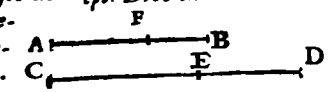
f 3. *propositionis*

SCHOLIVM.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

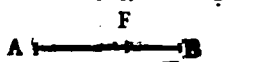
SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahatur minor A B, ex C D, & reliqua sit E D, item E D, ex A B, auferatur, relinquaturque F B, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquã reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D.



Quoniam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; g metietur quoque F B, ipsam A F; Metitur autem

g 3. *propositionis*

autem & ſeipſam. a Igitur FB, & totam AB, metietur: Metiatur autem AB, ipſam CE. b Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipſam ED. c Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autem & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, vtramque AB, ED, metitur, quod eſt abſurdum, ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.



a 1. prim. huius.
b 2. prim. huius.
c 1. prim. huius.

SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

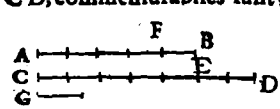
NAM ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit huius theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim commenſurabiles.

ITAQVE facilè ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramq; magnitudinem propoſitam, vt conſtat ex demonſtratione primi theorematis huius ſecundi. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, oſtenſum eſt, eandem reliquam FB, metiri vtramq; magnitudinem AB, CD. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximã earum communem menſuram inuenire.

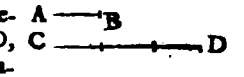
DATÆ duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam AB, CD, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor AB, ex maiore CD detracta, quoties poteſt, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties poteſt, relinquat FB, & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione, tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur. per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam FB, reliquam præcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinem AB, CD. Quod enim vtramque metiatur, oſten-



tendemus. Quoniã F B, metitur E D; & E D, metitur A F; *a* metietur quoq; F B, ipſam A F: At metitur F B, & ſeipſam. *b* Igitur B, totam A B, metietur; *c* atq; adeò & ipſam C E, quam A B, metietur. Cùm ergo & ipſam E D, metiatur; *d* metietur quoq; F B, tam C D, Metitur ergo F B, vtramque A B, C D. Quare vtriuſq; A B, C D, communis menſura eſt F B. *a* 2. prop. *num.* *b* 1 prop. *num.* *c* 2. prop. *num.* *d* 1. prop. *num.*

QVOD autem F B, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. *Si* non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quàm F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarũ communis menſura, maior quàm F B. Quia igitur G, metitur vtramq; A B, C D; metitur autem & A B, ipſam C E, *e* metietur quoque G, ipſam C E: At metitur quoq; totam C D, *f* Igitur G, reliquam quoq; E D, metietur: Metitur autem E D, ipſam A F. *g* Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cùm G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquã F B, maior minorẽ. *b* Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D, Quare F B, maxima earum communis menſura eſt. *e* 2. prop. *num.* *f* 3. prop. *num.* *g* 2 prop. *num.* *h* 3. prop. *num.*

QVOD ſi minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa A B, ambarũ maxima menſura communis: cùm & ſeipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.



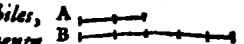
COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

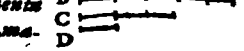
ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt F B, eſſe maximam menſuram communem ipſarum A B, C D. Demonſtratum item eſt ibi magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoq; maximam menſuram F B. Eademq; eſt ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

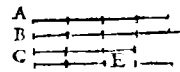
EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad prop. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuum eſt, omnes tres A, B, C, eſſe incommenſurabiles, quòd nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.



SI verò A, & B, fuerint commenſurabiles, earum maxima communis menſura inuenta ſit; quæ ſi metiatur quoq; magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cùm habeant communem menſuram D.



QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, no
metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt c
commensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensura
biles. Si enim credantur esse commensurabil
metietur earũ maxima communis mensura
ipsam D, maximam mensuram magnitudi
A, & B, per coroll. huius propos. Cùm ergo
dem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incom
mensurabiles. Quod est contra hypothesin.



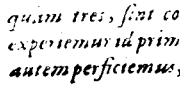
SI verò C, & D, sunt commensurab
les, erunt quoq; tres A, B, C, commensurab
a 3 dec. *les.* a *Inuenta enim E, maximam mensura*
ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; &
b 2 pro- *ipsas A, & B;* b *metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum*
nun. *dem E, metiatur quoque C, metietur E, tres magnitudines A, B,*
Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines
quam tres, sint commensurabiles, necne. Nam si data sint quatuo
experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqu
autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

iiij. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibu
datis, maximam carum mensurã communem inuenir

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C
c 3 dec. quarum maximam mensuram inuenire oporteat. c Sit D, ma
ma mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoq



C, perspicuum est, D, maximã esse me
suram omnium trium A, B, C. Nam si m
ior magnitudo quàm D, metiri dica
magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. h
ius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, m
ior magnitudo minorem, quod fieri non potest. Si verò D, n
metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm ea
A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura
rum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B,
coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura
d 3 dec. tiatur quoque ipsam C, erunt D, & C, commensurabiles. d Sit
tur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam m
suram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quòd enim sit co
munis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, &
e 2 pro- & D, metitur A, & B; e metietur quoque E, ipsas A, & B. Met
nun. autem & ipsam C. Igitur E, mensura est communis ipsar
A, B, C, quemadmodum asseruimus.

QVO

QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, maior quàm E, ſi fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam menſuram D, per coroll. præcedentis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens A, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quàm E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura, quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſurã communem. INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoq; maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt dictio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; idemq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua verò omnia abſoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

LEMMA.

SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua bini magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

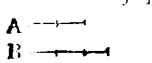
SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo eſſe, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D,

A ——— E, 3.
B ——— F, 4.
C —— G, 1.
D —— H, 2.

componitur ex proportionibus A, ad B; B, C, & C, ad D; quam proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perſpicuum eſt cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ſint proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt,

nunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, a
quales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propo
situm.

IDEM *sequitur, si magnitudinum, & numerorum propo*
tio fuerit perturbata, vt in hoc exem
apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad
& vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad
ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demo
stratio.



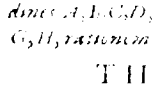
SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequ
tur, & in aliis multis, tenendum nobis erit; placuit illud hoc loco brev
ter demonstrare, cum non satis videatur ex demonstratis sequi. Na
magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: A
proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantùm est i
quantitatibus eiusdem generis, in numeris quidem lib. 7. Libr
Vero 5. in magnitudinibus: quamquam demonstratio in quin
lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cùm omnes demon
strationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certè demon
stratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitu
dines A, B, C, D, quæ proportionem habent eandem, quam numeri E, F
G, H, rationem teneant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; conuertit æqualiter magnitudo A magnitudinem C, atq; numerus vnitatem. Quare erit vt A ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Rursus autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam aut vnitatem numerum E æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita numerus D, ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines A, B, rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.



15. *decimi.*

SCH

SCHOLIVM.

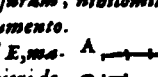
CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, linea debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, & rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Ha enim sola communem recipiunt mensuram, atque adeò in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantùm commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsisq; demonstratio huius theorematis convenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cùm sint, communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas convenire nullo modo potest.

EX demonstratione porrò eiusdem huius theorematis liquidò constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.

VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat invenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos unitas æquè, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcunque communem earum mensuram, nihilominùs hoc theorema demonstrabimus eodem argumento.

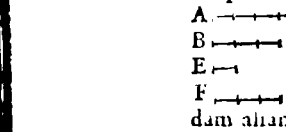


Quamvis enim numeri D, & E, maiores inveniantur in hac posteriori demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex apposita figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inventi, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortasse Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

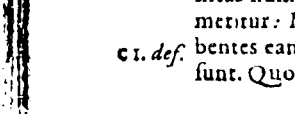
SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A,B, eam proportionem quam numeri C, D. Dico A B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, *in tot æqu*



les partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarum partium v æqualis sit magnitudo E. Deinq quoties vnitas repetita metitur n merum D, toties magnitudo E, petita metiatur magnitudine qua dam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, cont netur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: E autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas psam D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, it
a 9. A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, *a* ac propterea B,
quinti. F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsum F metiatur, metietur quoque eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur
b 1. *def.* *b* Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. *Si* igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æquè metiantur; ponaturque A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, *c* commensurabiles
c 1. *def.* sunt. Quod est propositum.

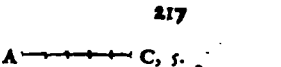


COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis ratio qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum

in se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea G, ex iis, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A vt C, ad D. a Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C, ad D, sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.



a 13. sexti.

SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habere, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum: b erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

b 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, sive longitudine & potentia, sive longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam aliàs vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse.

a Ex de-finit. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles; a erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsa necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; imò nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non: sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.

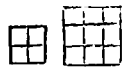
IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quam tres: sumamus in quatuor assumamus triplicatam proportionem

ata, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplica-
, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus ſiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habent longitudine commenſurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus ſiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ A B, C D, longitudine ſunt commenſurabiles; *a* erit A B, ad C D, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G & H. Quoniam igitur eſt A B, ad C D, vt E, numerus ad numerum F: *b* habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: *c* Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam eius E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.

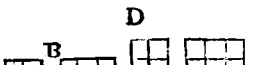


a 5. *decimi.*

b 20. *ſexti.*

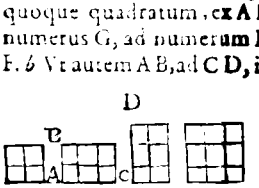
c 11. *oct.*

ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectangulum B D, ſub rectis A B, C D. Et E, F, inuicem multiplicantes faciant I, ſi medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 11. lib. 8. atque eo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdem propoſ. Quoniam igitur eſt AB, ad



a 1. *sex.* A B, ad C D, vt E, ad F: a Vt autem A B, ad C D, ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandem altitudinem A B, & C D, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum, ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad C D, vt E,

b 1. *sex.* F. b Vt autem A B, ad C D, ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem C



si A B, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum B D, ad quadratum ex C D, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex C D, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas A B, C D, esse longitudine commensurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex A B, ad quadratum ex B D,

c 20. *sexti.* vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: c Habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem

d 11. *oct.* duplicatam lateris A B, ad latus C D. d Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: erit proportio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D,

e 6. *decimi.* proportionem habeant, quam numeri E, F, e ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

f 1. *sex.* ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. f Quia igitur est vt A B, ad C D, ita quadratum ex A B, ad rectangulum B D; Item vt A B, rursum ad C D, ita rectangulum B D, ad quadratum ex C D, vt supra diximus; erunt quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex C D, continuè proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineam C D. Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt supra ostendimus; ponaturque quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, vt G, ad I, hoc est, vt E, ad F, rectæ proportionem ha-

g 6. *decimi.* bent E, F, commensurabiles sunt longitudine. Quo-

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.

A ——————
B ——————

QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod est absurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: *a* ipsa commensurabilia erunt; *b* Ac præterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. a *6. dec.* b *3. def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commensurabiles sunt, *d* cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ex lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis. c *3. def.* d *6. decimi.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse.

les esse, solum enim ex lineæ longitudine incommensurabiles, quæ
a 4. de- quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a
fin. tentia quoque incommensurabiles sunt, b cum earum quadrata inc
b 8. de- mensurabilia sint.
cimi. POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnin longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudin sent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim tentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommen rabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

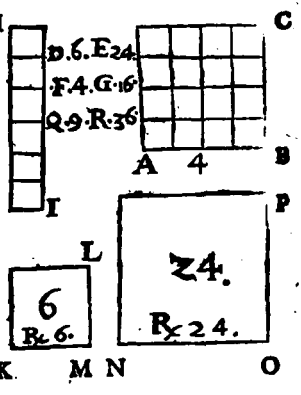
SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorema planius perfectiusque percipiatur, diligenter considerandæ sunt h quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabil quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habe quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum e eas, qua numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali propos comparentur; quales sunt illa, qua in demonstratione sunt posita; (e enim recta AB, 2, & CD, 3.) Verum etiam illas, qua nullis possu numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Dein de è contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam qua dratus numerus ad quadratum numerum, quorum linea, seu later ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, no solum ea esse intelligenda, qua continent totidem quadratas mensu ras æquales illis, in quas quadratum Rationalis linea resolvitur, quo sunt Vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas & quadratum ex CD, novem; quot nimirum Vnitates sunt in qua dratis numeris G, H.) Sed ea etiam, qua vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt Vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato linea Rationalis conferantur. Sæpe numero enim linea data commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali linea pro posita sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris Vnitates. Hac autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. Sint quo- que numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen propor-
c 26. tionem, c vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus
ottavi. numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde su-

mat

tur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati C, quot numerum Vnitates in D, numero continentur; 2 atque ipsi a 14. sc. II, quadratum æquale constituatur K L, cuius latus K M. Postre- cundo per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur linea N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, vi- delicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem; continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadra- tum K L æquale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi qua- dratis mensuris) continebit qua- dratum N P, eorundem mensu- ratorum quadratorum 24. ac proptereà K M, N O, latera qua- dratorum K L, N P, erunt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntque lineæ Rationali A B, longitudine incom- mensurabiles, inter se autem commensurabiles longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam qua- dratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem ha- beant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatum laterum K M, N O, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit pro- portio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. b Quare longitudine commensurabiles sunt b 6. de- rectæ K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad nu- cimi. merum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ lon- gitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eadem lineæ K M, N O, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant subdu- plam, si K M, dimidiatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in easdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationa- lis A B, imò illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt dicimus.



RVRSVS,

RVRSVS, quia quadratu K L, N P, proportionem habe
qu.um quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, pl
quadratas mensuras continent aquales illis, in quas A C, quadra
Rationalis linea A B, resolvitur, quam Vnitates sunt in dictis nu
quadratis F, G; (Nam K L, aquale est sex huiusmodi mensu
N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex qu
Vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem propo
sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quad
K L, N P, quam sunt Vnitates in numeris quadratis Q, R, cum
ex 9. alter verò ex 36. Vnitatibus constituatur; manifestum est
hoc theoremate intelligenda quoque esse quadratu proportionem
bentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum,
pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam
tes in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur
quadrato linea Rationalis proposita. Quod si eadem quadrata
N P, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione
drati A C, ex Rationali linea A B, descripti, resolui poterunt in
rum mensuras quadratas, quot Vnitates in quadratis numeris F, G
vel Q, R, continentur. Nam si recta K M, dividatur in duas par
& N O, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum K L, qu
tuor mensuras quadratas, & quadratum N P, sexdecim, quot scil
Vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem l
rentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mens
quadratas 9. & 36. quot nimirum Vnitates comprehenduntur in
meris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensura nullo modo
bi sunt quadratis mensuris, in quas quadratum A C, Rationa
lis A B, resolvitur.

IDEM dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumq; lat
eorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, d
proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad nu
quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint
habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad qu
tum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longi
commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lin
commensurabiles sint, vt sit sensus: Quadrata quæ describuntur
ab lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum
longitudine sint incommensurabiles linea Rationali proposita, prop
tem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum
merum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis
conferantur, sæpenumero numeris quadratis nullo modo possint
primi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam
us numerus ad quadratum numerum, sive hæc quadrata
quadratis possint exprimi, sive non, sic comparentur cum qua

Rati

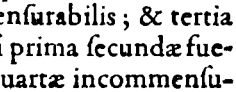
nales lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabi-
amsi lineæ Rationales sint longitudine incommensurabiles, &c.
OLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadra-
metrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratio-
quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, &t
pos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla
esse potest, qua quadrati numeri ad quadratum numerum,
inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius
proportionalis; &t in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non ha-
quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem,
numerum quadratus ad numerum quadratum. Quare ex &lti-
rte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus
eidemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensura-
Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod
clarius ostendet Euclides propos. &ltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

xj. x7

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, ma vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia tæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fue- commensurabilis; & tertia quartæ incommensu- erit.

T proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, sit- ptima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter mensurabiles sunt, *a* habebit A, ad portionem, quam numerus ad nu- nempe, quam E, ad F: Ponitur au- A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad portionem habet, quam numerus umerum F. *b* Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt. D sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, commensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensu- sunt, *c* non habebit A. ad B, proportionem, quam nume- numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. re C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor er- gnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat osten- m.



a 5. decimi.

b 6. decimi.

c 7. decimi.

d 8 decimi.

SCHOLIVM.

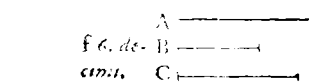
OD si quatuor proposita magnitudines fuerint lineæ, prima secunda commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia

quarta longitudine commensurabilis, & ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriorem proportionem habere numeri ad numerum. Quare, & in scholio prop. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secunda fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabilis. Demonstratur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est
a 3. def. *potentia ipsi B, & erunt earum quadrata commensurabilia, b*
b 5. de- *ptereà proportionem habebunt quam numerus ad numerum.*
cim. *autem, & quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum*
c 22. *C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ proposita A, B, C, D,*
sexti. *portionales sint) & earum quadrata figura similes similiterque descriptæ. Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt quam*
d 6. de- *numerus ad numerum. d Quare commensurabilia erunt; e Ac propterea*
cim. *lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum*
e 3. def. *sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, potentia sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles erunt: non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, ut in scholio propos. 9. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine autem incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, & ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod erat propositum.*

EADEM ratione, si prima secunda sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quarta longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, & ut nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; & ex eo longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod erat propositum.

RURSUS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint duæ vero reliquæ superficies, vel solida; sequetur ut ostendimus, si sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, quod duæ magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si vero linea longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum ex iis, quæ in scholio propos. 9. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines



f 6. de- cim.

tionem eandem, quam lineæ, erit & illarum proportio, qua numeri ad numerum; f atq; adeo commensurabilis. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, sive potentia commensurabiles existant, sive non; non erit earum proportio, qua numeri ad

tur, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum harum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, vt prior erit, qua numeri ad numerum. a Quare incommensurabiles a 8. de sunt. Quod est propositum.

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, et solida, posteriores verò duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, vel solida commensurabilia sint, b habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & linea eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si verò plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem non habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. b 6. de cim.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habent proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sume-

mus quotcunq; numeros primos, A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. ea, quæ in scholio propos. 20. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum ceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non t plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui bilices proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad

quadratum numerum, non rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, ad ducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Igitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non ſit ſicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perſpicuum igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles; quoniam latera proportionalia non ſunt, quod facere oportebat.

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

HÆC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errant autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpenumero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. vt conſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. non ſint proportionalia lateribus poſterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunq; duobus lateribus alterius. qua de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 8.

x. xj. **PROBL. 3. PROPOS. 11.**

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta propoſita A, cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lem. præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde per corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, eſſe ipſi A incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerũ quadratum.

A ——— B, 10.
E
D ——— C, 6.

Igi

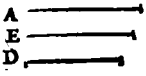
igitur a rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. a 9. dec.
Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet.
Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam nu-
merus B, ad numerum C, b ipsa commensurabilia erunt. Sunt b 6. de-
igo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. cimi.
Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incom-
mensurabilis longitudine, & potentia. c Inueniatur recta E, inter c 13.
rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media sexti.
proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitu-
dine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadra-
tum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommen-
surabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum: d erit & qua- d 10.
dratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, decimi.
E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde
per coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommen-
surabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine
& potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas re-
ctas, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

*SI igitur recta A, propositæ statuatur Rationalis, item & ab ea men-
surata cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis,
cui potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incom-
mensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali
A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.*

*CÆTERVM ex demonstratione huius theorematis liquido
constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia
tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine
tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabi-
lem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si
earum altera statuatur Rationalis. Ex eo enim quod recta A, D,
sint longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles
potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam pro-
portionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia;
idemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia
ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint con-
tinuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib.*



*6. quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita
A, ad rectam A. Est autem recta D, recta
incommensurabilis longitudine. e Igitur &* e 10.
quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare re- decimi.
*ctæ D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo
longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*

IN codicibus Vulgatis proponitur hæc Undecima propoſitio à Theone propoſitionis decimæ præcedentis: quod errore librariorum factum eſſe puto, cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitionis decimæ demonſtretur. Vt ex dictis apparet.

xij. viij. THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVÆ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cum enim A, & C, ſint commenſurabiles, *a* habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rurſus quia C, B, commenſurabiles ſunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, *b* ſumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; ſitque H, ad I, vt D, ad E, hoc eſt, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, *c* inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 5. dec.

b 4. oct.

c 6. dec.

SCHOLIVM.

QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, atque A, & B, ipſi C, longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoque A, & B, inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipſi C, potentia commenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles potentia. Cum enim A, & C, ſint potentia

d 5. dec. *commenſurabiles,* d *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nempe vt F, ad*

c 4. oct. *G.* e *Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rurſum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad*

f 6. dec. *merum K.* f *Quare quadrata ex A, & B, commenſurabilia ſunt, atque*

que adeo linea A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet & tranquilliam cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quamvis sint duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia verò tantum Rationales expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrationem hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

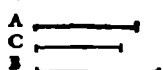
A ---------
C --------
B ----------

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si linea A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis sine longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraque B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non tamen colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, eidem longitudine, at verò B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

THEOR. 10. PROPOS. 13. xij. Q.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis



12. ctmi. rabilis ipſi A; cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine
12. ctmi. *commenſurabiles eſſent, b oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis: erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C, potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis.*

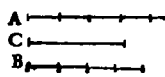
QVONIAM vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita operam ſimul & ſeriem Theonis hoc loco, quia à nouioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

iij. iij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles; altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommenſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cum & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; c erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.



2. imi.

SCHOLIVM.

HIC quoq; ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſine longitudine tantum, ſiue

ne longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, a essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantùm, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; b & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

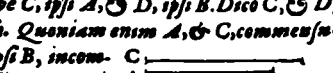
a 12. de cimi.

b 12. de cimi.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema adeo, quia in hoc lib demonstrantur, perutile.

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, item se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; c erit quoq; reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ipsa ipsi C, incommensurabilis; d erit & reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.



c 14. decimi.

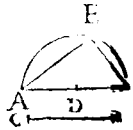
d 14. decimi.

SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si verò A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; ut perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, nõ inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo data duæ rectæ lineæ inæquales A B, & C, quarum A B, maior, oporteatq; inue-



a 1. quart. nire, quo AB, plus posſit quàm C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungatur-que recta EB. Dico rectam AB, plus posse quàm C, quadratum

b 31. tertij. rectæ EB. b Cùm enim angulus E, in semicirculo rectus sit; erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque

c 47. primi. ideirco AB, plus poterit quàm AE, hoc est, quàm C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. Similiter

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

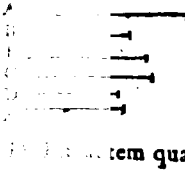
HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad an-

d 47. primi. gulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, d quippe cùm quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.

xiv THEOR. 12. PROPOS. 15.

xij. SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possit autem prima plus quàm B, secunda quadrato rectæ E; & C, tertia plus quàm D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse



longitudine ipsi C. Si verò E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E,

othesin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quo-
ue, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex
),F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad
uadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; *a* Ac a 22. *ſe-*
ropterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad re- *xti.*
tam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt
t A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex
equo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine com-
nenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commen-
urabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit &
, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ.
o. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ propor-
ionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

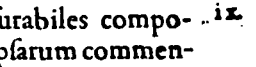
SCHOLIVM.

*EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantùm com-
enſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantùm ipſi C, eſſe com-
enſurabilem, vt conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib.
riplimus.*

THEOR. 13. PROPOS. 16. xv. ix.

SI duæ magnitudines commenſurabiles compo-
antur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commen-
urabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarũ com-
nenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines
ommenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabi-
es A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtriq; ipſa-
um A B, B C, commenſurabilem eſſe. *b* Sit b 3. *de-*
nim ipſarum A B, B C, communis menſu- *cimi.*



a D. Quoniam igitur D, ipſas A B, B C,
ietitur, *c* metietur quoq; D, totam A C, ex ipſis compoſitam. c 1. *pri-*
ùm ergo D, metiatur A C, & A; erunt A C, A B, commenſurabi- *mum.*
s: Similiter cùm D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, B C,
ommenſurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipſarum A B, B C,
ommenſurabilis erit.

SED iam tota A C, ex A B, B C, compoſita commenſurabilis
alteri ipſarum A B, B C, nempe ipſi A B. Dico & A B, B C, inter
commenſurabiles eſſe. *d* Sit enim D, communis menſura ipſa- d 3. *de-*
m A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam *cimi.*
B; *e* metietur quoque D, reliquam B C. Quare cùm D, metia- e 9. *pri-*
ur A B, B C; commenſurabiles erunt A B, B C, inter ſe. Eodem ar- *mum.*
umento oſtendemus A B, B C, eſſe commenſurabiles, ſi A C, ipſi
C, fuerit commenſurabilis. *Si duæ igitur magnitudines com-*
ienſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

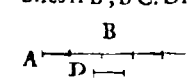
COROL-

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si A C, ipsi A B, sit commensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cum metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositum.

17 j. ix. THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri
23.dec. potest, nempe ipsi A B, *a* sitque D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B;
b3.pro. *b* metietur quoque D, reliquam B C; Ac propterea cùm D, metiatur vtramque A B, B C, erunt A B, B C, commensurabiles. Quod
mum. est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est A C, ipsi A B: Eademque ratione neq; ipsi B C, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilis est.

SED iam tota A C, composita ex A B, B C, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi A B. Dico quoq; A B, B C, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles,
e16.de- *c* erit quoque tota A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis Quod est absurdum. Ponitur enim A C, alteri ipsarum, nempe ipsi A B, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt A B, B C. Eodem argumento ostendemus A B, B C, incommensurabiles esse, si A C, ipsi B C, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoque eandem A C, incommensurabilem B C, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi B C, foret commensurabilis; A C, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ A B, commen-

nmenſurabilis. Quod eſt abſurdum. ponitur enim incommenſurabilis. n eſt ergo AC, ipſi BC, commenſurabilis, ſed incommenſurabilis. od eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, in duabus proximis antecedentibus propoſitionibus, earumque corollarijs, ſi de lineis agatur, intelligendas e lineas longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Aſſumitur enim ad vtriuſque propoſitionis demonſtrationem communis enſura D, &c. quam quidem ſolum linea longitudine inter ſe commenſurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

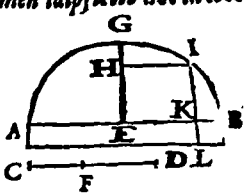
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſementis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonſtrauimus nos in ſcholio propoſ. 28. lib. 6.

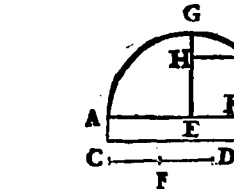
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quarum partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, abſolui poſſit ex propoſ. 28. lib. 6. quòd quarta pars quadrati ex minore linea deſcripti minor ſit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propoſ. illa 28. lib. 6. hoc eſt, quadratum ex dimidio minoris lineæ deſcriptum, quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex corollario propoſ. 4. lib. 2.) minus ſit quadrato ex dimidia parte maioris deſcripto; (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, abſolui poſſit per propoſ. 28. lib. 6. libet tamen idipſum hoc in loco a aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur data recta quales AC, CD, quarum AB, maſit, oporteatq; ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-



mum



mum æquale sit quartæ parti quadr ex rectæ C D, descripti. Sectis rectis A C D, bifariam in E, & F, describatur centro E, & interuallo E A, vel E B, micirculus A G B; & ex E, perpendi laris ad A B, ducatur E G. Et quia t A B, maior ponitur quàm tota C D, erit quoque A E, dimidia ipsius A B, hoc est, E G, ipsi A E, æqualis, maior quàm C F, dim dia ipsius C D. Posita igitur E H, æquali ipsi C F, agatur per ipsi A B, parallela H I, demittaturq; I K L, ad A B, perpendic laris, & sit K L, ipsi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur r ctangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammu A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata B æquale esse quartæ parti quadrati rectæ C D. Quoniam enim K I, media proportionalis est inter A K, K B, vt in scholio propo

a 17. *sexti.* 13. *lib. 6. tradidimus*; a *erit rectangulum sub A K, K B, hoc est rectangulum A L, æquale quadrato ex K I, hoc est, quadrato e.*

b 34 *primi.* E H; b(*est enim K I, ipsi E H, æqualis, ob parallelogrammum E I,*) *hoc est, quadrato ex C F: Est autem quadratū ex C F, quarta pars quadrati ex C D; quòd quadratum ex C D, per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum deficiensq; quadrato B L, æquale est quartæ parti quadrati ex C D, descripti. Quod est propositum.*

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.

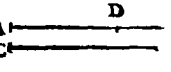
SIT enim recta data A B, & rectilineum quodcunq;, cui æquale ponatur quadratum ex C F, non maius quàm quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius sit latere A E. Eductaq; ergo ad A B, perpendicularis E G, sit E H, æqualis ipsi C F. Deinde acta H I, parallela ipsi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus A K, K B, æquale

æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atq; adeò & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quàm quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quàm recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta AD, DB, inæqualia esse.



Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB, deficiens q; figura quadrata ex DB, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, DB, sit autem quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipsius AB, descriptum; atque adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atque recta AB, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD, DB. Quod est propositum.

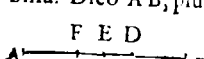
HOC *facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ductaque HI, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendiculari IK, vt partes factæ ex applicatione sint AK, KB; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cùm AB, in E, secta sit bi-*

sit bifariam. Immò hinc constat, primum segmentum maius esse & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij. xiij. THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lem. secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D B, faciatque segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse quàm C, quadrato lineæ longitudini sibi commensurabilis. Quoniam enim positum est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ A F, E B æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A D, D B æquales. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & a. *2. secundi.* riam in D, a erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadrati ex E B, æquale est rectangulum sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale quadruplo rectanguli sub A D, D B æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplum quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D, (quadratum enim ex F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B, (quod quadratum ex A B, plus A B, igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B,



3. lemma præcedentis propos. est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ A F, E B æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A D, D B æquales. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & quadrato ex E B; Ac propterea quadrati ex E B, æquale est rectangulum sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale quadruplo rectanguli sub A D, D B æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplum quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D, (quadratum enim ex F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B, (quod quadratum ex A B, plus A B, igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B,

æA B: Ac proinde recta A B, plus potest quàm recta C, quadrato
ipsæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine
commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longi-
tudine ponuntur commensurabiles: *a* e- a 16. de-
rit quoque tota A B, parti D B, commen- cimi.
surabilis longitudine. Est autem & ipsi
D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis; (quod
composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B,) Igitur cùm vtraque
A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis
ipsi D B, *b* erunt quoque A B, & composita ex D B, A F, longi- b 12. de-
tudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm A B, com- cimi.
posita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commensurabilis sit
longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex coroll.
propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ F D.
Ergo A B, plus potest quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine
sibi commensurabilis.

§ E D iam A B, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longi-
tudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale
parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadra-
ta, faciatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longi-
tudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter
demonstrabimus A B, plus posse quàm C, quadrato rectæ F D.
Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ
longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longi-
tudine commensurabilis. Igitur cùm tota A B, composita ex F D,
& ex A F, D B, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi
F D; erit eadem A B, longitudine commensurabilis reliquæ com-
positæ ex A F, D B, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem &
composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis,
cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm vtraque A B, D B, longitudine sit
commensurabilis compositæ ex A F, D B; *c* erunt quoque A B, c 12. de-
D B, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeò cùm cimi.
tota A B composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine
ipsi D B; *d* erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoque inter se d 16. de-
commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæqua- cimi.
les, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 16. PROPOS. 19. [xviij. xiv.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum

eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incomm
ſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſſit, quàm mi
quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitud
incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, q
fit à minore, æquale parallelogrammum ad maio
applicetur deficiens figura quadrata, in partes long
dine incommenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior
quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applic
ad A B, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogramm
æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, p
tes A D, D B, longitudine incommenſurabiles. Dico A B, p

poſſe quàm C, quadrato rectæ ſibi lo
tudine incommenſurabilis. Iiſdem c
quæ ſuprà conſtructis, ſimiliter oſte
demus A B, plus poſſe quàm C, quadrato rectæ F D. Hanc i
tur demonſtrare oportet ipſi A, longitudine eſſe inco.nmen
rabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine
a 17. de commenſurabiles; a erit quoque tota A B, parti D B, longi
cinni. dine incommenſurabilis. Sed D B, longitudine commenſura
lis eſt compoſitæ ex D B, A F, cùm hæc illius ſit dupla. Igitur
duarum linearum commenſurabilium D B, & quæ compo
ex D B, A F, ipſa D B, longitudine ſit incommenſurabilis
b 14. de A B: b erit quoque reliqua compoſita ex D B, A F, eidem
cinni. longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cùm A B, co
ſita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommenſurabi
longitudine compoſitæ ex A F, D B, erit eadem A B, per co
propoſ. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incomme
rabilis. Ergo A B, plus poteſt quàm C, quadrato rectæ E D,
gitudine ſibi incommenſurabilis.

IAM verò A B, plus poſſit quàm C, quadrato lineæ lo
dine ſibi incommenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C,
quale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens fi
quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rec
A D, D B, eſſe incommenſurabiles longitudine. Iiſdem co
conſtructis, oſtendemus vt priùs, rectam A B, plus poſſe q
C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus poſſe, q
C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis: erit A
ipſi F D, incommenſurabilis longitudine. Igitur cùm tota A
compoſita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna longitudine
commenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem A B, per coroll.
poſ. 17. huius lib. & reliquæ compoſitæ ex A F, D B, longitu

ommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, gitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur a duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, , componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudi- ncommensurabilis sit rectæ A B, *a* erit & reliqua D B, eidem , longitudine incommensurabilis: Ac proinde cùm tota , composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, lon- udine; *b* erunt & ipsæ A D, D B, longitudine inter se incom- nsurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæqua- , quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstran- n.

a 14. de- cimi.

b 17. de- cimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabili- & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit iquentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine com- ısurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, poten- verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed pos- r longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles, nifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensu- ilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi com- ısurabilem non solùm longitudine, sed etiam potentia: lon- dine enim commensurabiles, omnino & potentia commen- biles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit po- ia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sit ionalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. d si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabi- existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; di- & sic Rationalis, potentia tantùm ipsi commensurabilis.

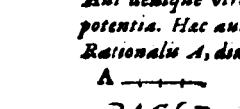
LEMMA II.

X PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ mali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, otentia solùm. Sunt autem & aliæ linea, quæ longitudine em expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia m solùm commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Ra- les, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales;

commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia vel potentia solùm: Et si quidem longitudine, dicuntur & Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si verò potentia tantùm se solùm sunt commensurabiles: dicuntur ipsa quoq; Rationales potentia solùm inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera aqualis est expositæ Rationali; ac proinde vtraque Rationalis commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expositæ aqualis est, longitudine tamen ei vtrique est commensurabilis. Aut denique vtraque expositæ Rationali commensurabilis est solùm potentia. Hæc autem tria genera inuenientur hoc modo. Sit exposita Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quamdam aliam E. Item quoties vnitas est in C, totiens eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine aqualibus, quæ quidem magnitudine aquales sunt ipsi D; ipsa aquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cùm habeant D, communem mensuram. Inuenta ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarum vna nempe E, aqualis est Rationali expositæ A.



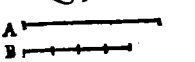
IAM verò D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inaqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cùm ergo & inter se sint longitudine commensurabiles, inuenta erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra aqualis est Rationali expositæ A.

POSTREMO expositæ Rationali A, a inueniatur rectæ *longitudine tantùm incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque*

par-

xiii. *dec.*

ter aquales, & ſumatur C. compoſita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt A & C, longitudine commenſurabiles. Dico

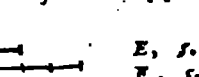


eadem expoſita Rationalis A, potentia ſolùm commenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeò & potentia; a Igitur quadrata ipſarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, cum A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; b erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolùm potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia A & C, Rationales expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales erunt; Inuenta erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia verò tantùm commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.

a 12. decimi.

b 14. decimi.

QVOD ſi quis optet inuenire quotquot lineas Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta menſura quauis A, compona-



tur quotlibet lineæ B, C, D, ex totidem partibus ipſi A æqualibus, quot ſunt unitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam linea B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.

CÆTERVM & omnes lineæ Rationales, non ſolùm expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles, facilè hoc modo demonſtrabimus. c Quoniam Rationales linea ſunt, quæ expoſitæ Rationali ſunt commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; d quæ autem eidem commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt; manifeſtum eſt, Rationales lineas quaſcunque inter ſe commenſurabiles eſſe.

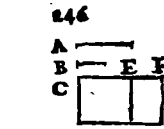
c 6. def. fin.

d 12. ſexti.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod duabus illis rectis lineis continetur: Et vt ſecunda ad tertiam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & B, comprehenſum. Ex



quantacunque enim linea recta C D, *abs*
datur C E, *ipsi A, equalis, &* E F, *ipsi B. Dei*
super C E, *describatur quadratum* C G, *p*
ciaturq; rectangulum G F, *contentum sub*
a 21. *sext.* *&* E F, *hoc est, sub A, &* B. a *Quoniam igitur est vt* C E,
E F, *hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum* C G, *hoc*
quadratum ex A, ad parallelogrammum G F, *sub A, & B, co*
prehensum; perspicuum est, si sint duo rectæ lineæ, esse prim
ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectan
lum sub ipsis comprehensum.

EODEM modo erit, vt B, *ad A, ita rectangulum* F G,
quadratum G C. *Quod est propositum.*

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, &
ipsum Rationale est.

SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. *Dic*
& A, Rationale esse. Sit namque C, *quadratum Rationale, ra*
tione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quo

nimirum ab exposita Rationali describitur. Quo
b 9. *def.* *niam igitur* B, *Rationale est,* b *erit ipsum Ratio*
nali C, *commensurabile: Est autem & A, ipsi* B, *commensurabi*
c 12. *de-* *cimi.* *le. Igitur A, &* C, *cùm commensurabilia sint ipsi* B, c *inter se*
quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Ratio-
nali quadrato C, *ex Rationali linea exposita descripta commen-*
d 6. *def.* *surabile,* d *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

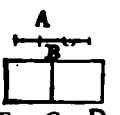
xix. xv.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorũ, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundum aliquem prædictorum modorum, (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propos. explicuimus; ita vt vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantùm. Dico B D, re-

D, rectangulum Rationale esse Describatur e-
ex altera earum, nempe ex B C, quadratum
E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali
positæ A, commensurabilis est vel longitudine
& potentia, vel potentia solùm: *a* erit quoque
quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex



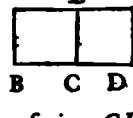
a 3. *def.*

A, commensurabile: *b* Est autem quadratum ex A, Rationale, b 8. *def.*
cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. *c* Igi- c 9. *def.*
tur & B E, illi commensurabile, Rationale est. Quia verò B C,
hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt, (po-
nuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine commen-
surabiles,) *d* & est vt E C, ad C D, ita E B, ad B D; *e* erunt quo- d 1. *sext.*
que E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antece- e 10. *de-*
dentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale *cimi.*
est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabili-
bus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 21. xx. xvj.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, sive B C, æqualis sit Rationali expositæ A, sive non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, *f* ipsa commensurabilia erunt f 9. *def.*
quadrato ex linea Rationali expositæ A, descripto; *g* Ac propter- g 12. *de-*
ea & commensurabilia inter se erunt: *h* Est autem vt B E, ad *cimi.*
B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur & B C, C D, commensu- h 1. *sext.*
rabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docui-
mus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine; *i* sed i 6. *def.*
& Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atque idcirco Ratio-
nali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. hu-
ius lib. demonstravimus. Quare latitudo C D, Rationalis est, &
longitudine commensurabilis ipsi B C. Si igitur Rationale ad
Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat de-
monstrandum.



LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum: ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolùm commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantùm inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, a inueniatur C, longitudine tantùm incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantùm commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, B, quidem, quòd ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quòd inuenta ſit potentia tantùm incommenſurabilis ipſi B, atque adeò ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolùm commenſurabiles. Inuenta ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantùm commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

a 11. decimi.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperitemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantùm incommenſurabilis b inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantùm incommenſurabilis C, maior aut minor quàm A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

b 11. decimi.

Quòd

nàd enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraque B, C, expositæ Rationali sit potentia commensurabilis; a erunt B, C, Rationales. Inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles. a 6. definitionem.

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H. Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim eadem quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At verò ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D) b erunt quadrata inter se commensurabilia; ac propterea & rectæ ipsa potentia sales commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, sic ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. c Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

A, 5. E
B, 7. F
C, 3. G
D, 2. H

b 6. decimi.

c 9. decimi.

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositæ duæ

A ——— C, 10.
B ——— D, 6.
F ——— E, 7.

Rationales potentia tantũ commẽ-surabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur: fiat & D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadratum rectarum B, F, proportionem habeant, quam numeri D, E,

a 6. decimi. *a commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, & ad finem lib. 8. oſtendemus; (quod D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, pro-*

b 9. decimi. *portionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) b erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, & vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendimus perinde, ac vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

xxj. xix. THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; *Irrationale eſt*: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. c Et quoniam eſt

c 1. ſen.

rectæ B C, ipſi C D, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipſi B D, a

BD, incommensurabile. a Quare cum BE, commensurabile sit a 9.
quadrato ex Rationali expositâ A, sit autem BE, ipsi BD, incom- fin.
mensurabile; b erit quoque quadratum ex Rationali expositâ A, b 14
eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Ra- decimi.
tionalis expositæ incommensurabile existens, c Irrationale est. c 10.
Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. defin.
lemmate propos. antecedentis.

VOCETVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, d propterea quod media proportionalis est inter duas BC, CD, d 1;
Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe sext.
cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. e *Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, fa-* e 1.
cere Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus: si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantùm inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur.

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsum, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint continuè proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilineæ similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22. lib. 6. demonstratum. Quare quadratum ex Media descriptum medium proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe

Medius

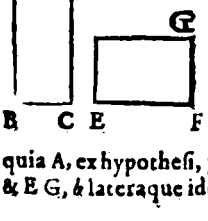
Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilib. vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocan rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquid rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commen surabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne tium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum comm surabilibus continetur. Vniuerse tamen omne spatiũ Medium aq est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tant commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, mone dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationa bus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non set proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commen surabiles.

VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensur bilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabil bus comprehenso aquale est, ita vt ipsum possit linea recta, qua Medi in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum su duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium cuius latera sunt duæ linea Rationales potentia tantum commensu rabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

xxij. xx. THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit exposita, siue expositæ commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum *a* applicetur que ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilem. Quoniam enim A, Media est, ipsa potent rectangulum sub duab. rectis Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D, æqualia erunt B D, & E G, *b* lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos,



a 45. *primi.*

b 14. *sexti.*

lor, nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; *a* Ae propterea a 22. *sexti.*
quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F, ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum) Igitur *b* & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D: propterea que & rectangulum F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa quoque expositæ Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12 huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam enim E F, F G, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub E F, F G, contentum, ex lemmate 1. propos. 19. huius lib. *c* erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeo rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex E F, commensurabile est quadrato ex C D, (quod E F, C D, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles) Igitur cum quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex E F, at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommensurabile; *d* incommensurabilia erunt quadratum ex C D, & rectangulum B D. Est autem ex lemmate 1. propos. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt recta C D, ad rectam B C. *e* Incommensurabiles ergo sunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

b 10. *decimi.*
c 10. *decimi.*
d 13. *decimi.*
e 10. *decimi.*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale si ipsis B C, & A, f sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A, & C D, proportionales sint; g erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

f 11. *sexti.*
g 17. *sexti.*

HAC arte tentandum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiusplam lineæ rectæ.

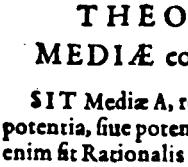
PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale,

tionale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quæra ut Rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, *a* ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; *b* erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad CD, Rationalem *c* applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. *d* Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. *e* Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. *f* Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commensurabiles, *g* Ac proinde recta B, potens rectangulum D E, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.
b 23. decimi.
c 45. primi.
d 1. sex.
e 10. decimi.
f 14. decimi.
g 22. decimi.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium, nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commen-

mmensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; que idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne im spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propz. huius lib. decimus.

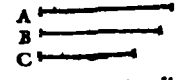
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. uius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Media longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuerse enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus alterius lineæ commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; a erit vtraque B, C, Media a 24. *decimi,*



l, commensurabilis, Media. Cum ergo A, l, sint longitudine commensurabiles; & , C, potentia tantum; erunt inuentæ A, B, Media longitudine mmensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.

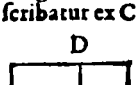
SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media ; non tamen omnis Media cuilibet Media est commensurabilis, cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine idelicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam ebimus, quanam via inueniendæ sint duæ Mediæ longitudine & tentia incommensurabiles.

xxiv. xxiij. THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Mediis longitudine commenſurab bus rectis lineis continetur rectangulum, Medium e

CONTINEATVR rectangulum A D, ſub Mediis A C, C longitudine commenſurabilibus. Dico A D, Medium eſſe. a 1. ſex. ſcribatur ex C D, Media quadratum B D, quod erit Medium.



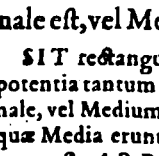
quoniam eſt vt A C, ad C B, ita A D, ad D Sunt autem A C, C B, hoc eſt, A C, C D, lon tudine commenſurabiles; erunt A D, D commenſurabilia. Quare ſpatium A D, Me D B, commenſurabile, Medium eſt, ex cor præcedentis propoſ. Quod ergo ſub Mediis longitudine co menſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

xxv. xxiij. THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD ſub Mediis potentia tantum commenſur bilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Ratio nale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehenſum ſub Mediis A B, B C potentia tantum commenſurabilibus. Dico A C, eſſe vel Ratio nale, vel Medium. Deſcribantur ex A B, B C, quadrata A D, C E quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus cum rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G

b 45. primi. b ad quam applicetur rectangulum F H, qua drato A D, ex A B, deſcripto æquale; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C, æqua le; & deniq; ad K L, rectangulum L M, æqua le quadrato C E, ex B C, deſcripto; eritque totum F M, vnum rectangulum, quemadmo dum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero A D, C E, Media ſunt, erunt & F H, L M, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad



c 34. primi. d 25. decimi. Rationales F G, K L, (c eſt enim & K L, Ra tionali F G, æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis) fa ciantque latitudines G H, K M, d erunt rectæ G H, K M, Ratio nales, ipſi F G, ſeu K L, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeo & ipſis æqualia rectangula e 1. ſex. F H, L M, commenſurabilia: e Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta f 10. de cimi. G H, ad K M. f Igitur G H, K M, longitudine inter ſe commen ſurabiles ſunt. Quare G H, K M, Rationales oſtenſæ, ſunt longi tudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero F G, ſolum com

menſu-

nſurabiles potentia, cum ei oſtenſæ ſint longitudine incom-
nſurabiles; a Ac propterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, a 20.
tionale eſt. Et quoniam eſt, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE, *decim.*
rod DB, BC, ipſis AB, BE, ſint æquales, vtraque vtrique)
vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad b 1. *ſex.*
E; erit quoque vt AD, ad AC, ita AC, ad CE, atque adeo AD,
C, CE, proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL,
M, proportionalia erunt: c Habent autem rectæ GH, HK, c 1. *ſex.*
M, eaſdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igi-
r & rectæ GH, HK, KM, proportionales ſunt; d propterea que d 17.
ſtangulum ſub GH, KM, quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt *ſexti.*
rem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur
quadratum ex HK, Rationale eſt; ideoque & recta HK; Ra-
nalis erit: e & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi e 6. *d.*
l, commenſurabilis vel longitudine, & potentia, vel ſolum po-
ntia. Et ſi quidem HK, ipſi HI, longitudine ſit commenſura-
is, f rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, longitudi- f 20.
commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, erit *decim.*
ationale. Si vero HK, ipſi HI, potentia ſolum commenſurabi-
ſit, g erit rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, poten- g 22
i tantum commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi *deci.*
quale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Mediis AB,
C, potentia tantum commenſurabilibus contentum, vel Ra-
onale, vel Medium. Quocirca quod ſub Mediis potentia tan-
um commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad HI, re-
angulum ipſi AC, æquale, h *ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta* h 1.
oportionalis ſumatur pro latere HK. i *Nam rectangulum ſub ex-* *ſex.*
emis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub mediis AB, BC. i 16.

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam re- *ſex.*
um applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM verò in hoc theoremate demonſtratur, rectangu-
m contentum ſub duabus rectis Mediis potentia tantum commen-
abilibus eſſe vel Rationale, vel Medium, decebit Euclidis propoſ.
quamam ratione inueniendæ ſint duæ Medias potentia tantum
mmenſurabiles, qua Rationale comprehendant: Propoſ. verò 29.
as Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, qua ſpatium
edium contineant.

ITAQVE habemus ex his, k *rectangulum contentum ſub duo-* k
u Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationales; &
ub duabus verò Rationalibus potentia tantum commenſurabili- l
u contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellariſque Medium,

& rectam, qua ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis

a 25. *ſtat, a rectangulum comprehenſum ſub duabus Medijs longitu*
decimi. *commenſurabilibus eſſe Medium*; b *Rectangulum autem ſub*
b 26. *bus Medijs potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum eſ*
decimi. *Rationale, vel Medium.*

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod
duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus co
netur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed
tium quoddam genus conſtituere, nempe aquale eſſe rectangulo, q
continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, qua Media appella

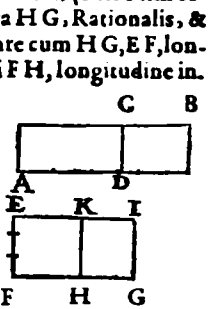
SIT enim rectangulum AC, comprehenſum ſub duabus Me
AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico A
neque Rationale eſſe, neque Medium, &c. Conſtructis enim eiſd
Vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationa
eſſe, & ipſi FG, longitudine incommenſurabiles. Et quia recta A
BC, ponuntur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt
earum quadrata AD, CE, atque adeo ipſis aqualia rectangula F
c 1. *ſex.* *L M, incommenſurabilia.* c *Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta G*
d 10. *ad rectam KM.* d *Igitur recta GH, KM, longitudine inter ſe ſu*
decimi *incommenſurabiles. Quare GH, KM, oſtenſa Rationales, ſunt p*
e 22. *tentia tantum inter ſe commenſurabiles*; e *Ac propterea rectang*
decimi. *lum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellat*
f 17. *& recta ipſum potens, Irrationalis, qua dicitur Media.* f *Poteſt autē*
ſexti. *rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK*; (*Nam Vt primus oſtend*
mus, tres GH, HK, KM, eſſe proportionales) *Igitur HK, Irration*
lis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationa
g 21. *eſſet,* g *faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudini*
decimi. *HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quo*
eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodē
h 23. *modo neque IK, medium eſt*; *ſi enim eſſet Medium,* h *faceret ipſum*
decimi. *applicatum ad Rationalem HI, latitudinem HK, Rationalem, c*
ipſi HI, longitudine incommenſurabilem. quod eſt abſurdum. oſten
eſt enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cum IK, neque Ratio
nale ſit, neque Medium; neceſſario neque AC, illi aquale, Rationa
erit, neque Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nemp
aquale erit ipſi IK. quod ſub Rationali, & Media continetur, cum
HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, re
ctam, qua poteſt ſpatium ſub duabus Medijs longitudine & potenti
incommenſurabilibus, quales ponuntur AB, BC, comprehenſum
poſſe quoque rectangulum ſub Rationali, & Irrationali, qua Medi
vocatur, contentum. Quod eſt propoſitum.

xxvj. xxij. THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

SVPE

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Di-
DB, non esse Rationale. Sit enim, ũ fieri potest, DB, Rationa-
Exposita ergo Rationali linea EF, *a* ad ipsam applicetur re- a 44
ngulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum *primi.*
d, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt
tur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale
ationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad
ationalem EF, sunt applicata, *b* erunt rectæ FG, FH, Ratio- b 22
ales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia *decimi.*
ationale HI, applicatum est ad Rationalem HK, (est enim re- c 3
ta HK, Rationali EF, æqualis) *d* erit recta HG, Rationalis, & *primi.*
ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, lon- d 2
ngitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine in- *decimi.*
ommensurabilis, vt est ostensum; *e* erit e 14
HG, eidem FH, longitudine incom- *decimi.*
mensurabilis. Est autem vt FH, ad HG,
a quadratum ex FH, ad rectangulum
b FH, HG, ex tertio lemmate propos.
. huius lib. *f* Igitur quadratum ex FH, f 10 *de-*
cõmensurabile est rectangulo sub FH, *cimi.*
G. Sed quadrato ex FH, commensura-
le est quadratum ex HG, (quod sint
mbo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) *g* atque adeo g 10
duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensu- *decimi.*
abilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id,
uod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.)
gitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, &
uo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectan-
ulo sub FH, HG, bis *h* Quare & compositum ex quadratis re- h 10
arum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incom- *decimi.*
ensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG. *i* At i 4.
uadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis sub FH, HG, *cum*
quale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incom-
ensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est
tem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos 19. huius
. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex
H. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommen-
rabile sit quadratum ex FG, *k* erit quadratum ex FG, Irratio- k 1
le, *l* ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est ab- *def.*
rdum, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, in- l 11
mmensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Me- *fin.*
um AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat
edium Rationali. Quod erat ostendendum.

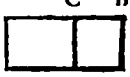


SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC, ſp
DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniam enim AB, AC,
a 9. def. 10. *decimi.*

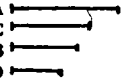


tionalia ſunt; a erunt AB, AC, commenſura
lia quadrato Rationali expoſito; b atque adee
inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum A
compoſitum ex AC, DB, commenſurabile ſit
AC, erit quoque idem AB, reliquo DB, comm
ſurabile, ex coroll propoſ. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale.
tur & DB, ex lemmate 4. propoſ 19. huius lib. Rationale eſt. Q
eſt propoſitum.

xxvij. o. PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſura biles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propoſ. 21. huius lib. du
c 13. *ſexti.* Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles, *c* inter qua
media proportionalis ſumatur C, *d* fiatque vt A, ad B, ita C, a
d 12. *ſexti.* D. Dico C, D, eſſe Medias potentia tantum commenſurabile
quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Ration
les ponuntur potentia tantum commenſurabi



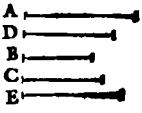
e 22. *decimi.* f 17. *exti.* les; *e* erit rectangulum ſub ipſis contentum, Ir
rationale, quod Medium vocatur; atque adee
f cum ipſum poſſit recta C, erit C, Media. E
quoniam eſt vt A, ad B, ita C, ad D, ſuntque A,
B, potentia tantum commenſurabiles; erunt quoque C, D, ſo-
lum commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib.
g 24. *decimi.* oſtendimus. *g* Eſt ergo & D, Mediæ C, commenſurabilis Media.
Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantum commenſu-
rabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam enim eſt
vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt
autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D,
h 17. *ſexti.* ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, *h* poterit rectangu-
lum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B,
linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Ratio-
nale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commen-
ſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

xxviij. o. PROBL. 5. PROPOS. 29.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſu rabiles, quæ Medium contineant.

EXPO-

EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles, *a* & inter A, B, media proportionalis inuenia- a 13. *ſexti.*
tur D. *b* Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe b 12.
potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant. Nam quoniam enim A B, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles: erit rectangulum A B, atque adeo & quadratum ex D, *c* quod æquale eſt, *d* Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, C, ita D, ad E, ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erunt quoque D, E, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Ergo D, Media ſit, *e* erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Medium. Quoniam enim eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoq; vt D, ad A, ita D, ad E. *f* Rectangulum igitur ſub D E, æquale eſt ei, quod ſub A, B, *f* 16. *ſexti.*
Eſt autē quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus *g* Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.



ſexti. c 17. *ſexti.* d 22. *decimi.* e 24. *decimi.* *decimi.* g 22. *decimi.*

SCHOLIVM I.

IN iis quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, B, C, D, & vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quando quidem latera ſint proportionalia, & ex conſtructione eſt manifeſtum.

A, 6. C, 12.
B, 4. D, 8.
E, 24. F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. h *oſtenſum eſt, ſi impar numerus vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem* h 28 & 29. *vero, ſi impar multiplicet imparem, perſpicuum eſt, quoniam modo inuenire poſſint duo plani ſimiles, quorum vterque par ſit, vel impar; vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.*

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt comp
situs ex ipsis quadratus etiam sit.

*INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo di
sunt, duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par*
a 24. & 26. nami. *vel impar.* a *Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab i
pari impar, reliquus par est; detracto BD, ex AB, qui æqua
sit ipsi C, erit reliquum A
par. Quo diuiso bifariam
E; Duco numerum factu
ex AB, in BD,* b *qui qu
dem quadratus est, compositum cum quadrato numeri ED, f
cere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam c
diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, q
ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex A
in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato nu
meri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, &
quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, cum ri
delicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.*

A ..... E ..... D ..... B
C .....

b 1. nami.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos es
eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum ex
cessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus qua
dratus sit.

QVOD si numeri sumantur AB, & C, non similes, vterque tumen
par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum
BE, ED. quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, non e
quadratus. Si enim quadratus esset, c numeri AB, BD, hoc est, AB, & C,
plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

c 2. nami.

SCHOLIVM II.

*ITAQVE si iubeamur inuenire duos quadrates numeros, quo
rum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duo
planos similes, quorum vterque par, vel impar sit, nempe AB, & C
& reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est factum. Nam
quadrati numeri ex BE, ED
describi sunt illi, quos quæri
mus. Excedet enim quadratu
ex BE, quadratum ex ED,
numero, qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus est.*

A ..... E ..... D ..... B
C .....

Vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit
dratus: sumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non similes,
rum vterque par sit, vel impar,
reliqua peragenda, vt prius. A ... E ... D ..... B
um similiter ostendemus quadra- C .....
m ex B E, aequalem esse quadrato
D E, vna cum eo, qui ex A B, in B D, fit; Quare excessus quadra-
rum ex B E, E D, est numerus factus ex A B, in B D. qui cum non
quadratus, (Si enim esset quadratus, essent A B, B D, plani simi-
les, quod non ponitur) constat propositum.

HOC posteriore facilius absoluemus, si quemcunque quadratum
merum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus,
ter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. &
n quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero
non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36 diuidatur in
adratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. qua-
atum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compo-
tus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes A B, & C, pares, vel impa-
es, vt in lem-
mate praceden- A .. H .. I . E . F . G ... D ..... B
i, fiatque eadem C .....
onstructio, ita
rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium nume-
rorum A B, D B, inter se, vna cum quadrato ex D E, aequalis sit
quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, vnitas E F. Erit
rgo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quod &
atus D F, latere D E, minus sit. Dico quadratos numeros,
quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in se fit,
compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compo-
itus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F,
vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc mo-
dum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam qua-
dratus ex B F; ac propterea latus ipsius maius latere B F. Erit

ergo latus ipſius vel æquale numero BE, *vel maius.* (*Minus enim non erit, quoniam inter numeros* BE, BF, *ſola vnitas inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur: Eſſet autem*

A..H..I.E.F.G...D..... B
C.....

dictum latus inter ipſos medius, ſi maius poneretur quam BF, *minus vero quam* BE.) *Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex* BE, *æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex* AB, *in* BD, *& ex quadrato numeri* DF; *cum eidem quadrato ex* BE, *ſit oſtenſus in precedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE; *erit, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DF, *æqualis ei, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE. *Ablato ergo communi, eo ſcilicet, qui fit ex* AB, *in* BD; *erit reliquus quadratus ex* DF; *æqualis reliquo quadrato ex* DE; *Ideoque & latus* DF, *lateri* DE, *æquale, pars toti.* *Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex* quadratis, *quorum alter ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in* ſe ſit, æquale *eſt numero* BE. *Sed neque maius. Sit enim* ſi fieri poſſit, *latus illius æquale numero* BI, *qui maior ſit, quam* BE, *ita vt quadrato ex* BI, *æqualis ſit quadratus ille compoſitus ex.* *Quoniam igitur quadratus ex* BI, *latere maiore, maior eſt* quadratus ex BE, *latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF; ſe ſit, (cum *hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex* BI, maior quadrato ex BE. *Eſt autem quadrato ex* BE, oſtenſus in lemmate *precedentis æqualis numerus, qui fit ex* AB, in BD, vna *cum quadrato ex* DE: *Ablato ergo communi, qui* fit ex AB, in BD; *erit reliquus quadratus ex* DF, *reliquo quadrato ex* DE, *maior; ac proinde latus* DF, *latere* DE, *maius, pars toti.* *Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in ſe, maius eſt latere* BE. *Sed neque æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex* BF.

SI-

SIT iam, ſi fieri poteſt, A..H..I.E.F.G...D.....B numerus qui ſit ex AB, in BD, C.....
nà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus vnitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus eſt, (diuiſus enim eſt AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablata vnitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque id circo HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus, qui ſit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui ſit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: Igitur qui ſit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui ſit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui ſit ex HB, in BD, æqualis qui ſit ex AB, in BD, æqualis. Quare cùm HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipſi AB, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. ſeptimi

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod ſit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis ſit quadrato ex BG. Sumatur autem ipſius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus eſt, & ablatus AI, ablati EG; erit rurſus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus, qui ſit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui ſit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Igitur qui ſit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis eſt ei, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor eſt, remanebit qui ex

IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars tote. Quod eſt ab
ſurdum. Non eſt ergo
A..H..I.E.F.G...D.....B *qui ex AB, in BD, vna*
C..... *cum quadrato ex DF*
minor quadrato ex BF

Sed neque maior eſt oſtenſus, neque aqualis. Non igitur qua-
dratus eſt, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Quod
eſt propoſitum.

SCHOLIVM III.

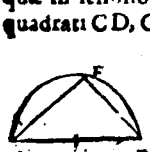
EX hoc facilè inuenientur duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

xxix. xvij. PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi cõmenſurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum exceſſus DE, nõ ſit quadratus. Deinde per coroll propoſ. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodeturq; AF, in ſemicirculo ADF, circa diametrum AB, deſcripto: ac denique connectatur recta FB. *a* Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; *b* erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc eſt, recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, *c* erunt quadrata ex AB, AF; commenſurabilia; atque adeò cùm quadratum ex AB, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali AB; deſcriptum; erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea q; & recta AF, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt AB, AF, atq; adeò commenſurabiles ſaltem potentia.



a 31. 3. *b* 47. primi. *c* 6. dec.

Quia

Quia verò quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cùm neque quadratus numerus C D, ad non quadratũ D E, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs k D E, quadratus esset, *a* vt in Arithmeticis est demonstratum, quod non ponitur) *b* erunt rectæ A B, A F, longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur A B, A F, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles.

a 74. octaui.

b 5. decimi.

IAM verò, quoniam est vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A F; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratũ numerum C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B. (sicut enim C D, superat D E, quadrato C E, ita etiam quadratũ ex A B, superat quadratum ex A F, quadrato ex F B.) *c* Quare rectæ A B, F B, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit, quàm minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

c 9. decimi.

PROBL. 7. PROPOS. 31. xxx

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectę lineę sibi longitudine incõmensurabilis. xviij.

EXPONATVR Rationalis linea A B, inueniantur q; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos numeros nõ quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus C D, ad nostrum ipsorum C E, E D, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus: iuxta posteriorem verò, quilibet ipsorum C E, E D, quadratus quoque, *d* vt in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex A F; accommoderturque A F, in semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quàm A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales potentia solum commensurabiles. Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos

C, 144. E, 16. D C, 160. D.

C..... E... D

d 24. octaui.

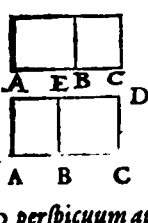
C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C.....E... D

propoſ. Quoniam verò rurſus, priùs, eſt per conuerſionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex F Non habet autem CD, ad CE, proportionem, quam quadratus quadratum; Non habebit quoq

89. dec. quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. a Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit quàm minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod erat faciendum.

LEMMA.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum conſtitutæ, quarum AB, maior ſit. Dico eſſe, vt AB, ad BC, ita rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturq; rectangulum AD; eritq; rectangulum AE, ſub AB, BC, contentum; quòd BE, ipſi BC, ſit æqualis;

b1. ſext. b *perſpicuum autem eſt, eſſe vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.*

EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua AB, minor eſt, quàm BC.

xxxj. xxiv. xxv. PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

c30 decimi. c REPERTÆ ſint duæ Rationales A, B, potentia tantùm commenſurabiles: ita vt A, maior plus poſſit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolùm commenſurabiles;

ta, a erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. b Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoq; vt C, ad B, ita B, ad D; c Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; d poterit quoque C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias, C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

a 22. decimi.

b 24. decimi.

c 17. sexti.

d 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt priùs, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, & vt facilè indicabunt, qui eum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Mediæ esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius libri.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ A B, B C, C D, in rectum constitutæ. Dico esse vt A B, ad C D, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum

lum ſub B C, C D. Deſcribatur enim ex B C, qu dratum B C D E, perficiaturq; rectangulum A Eritq; A E, contentum ſub A B, B C; & C F, B C, C D; quòd B E, C D, ipſi B C, æquales ſi

a. 1. ſexti. a *Perſpicuum autem eſt eſſe A B, ad C D, vt A E, ad C F. Q eſt propoſitum.*

xxx j. xxvj. PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia ſolùm com menſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maio plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi lon gitudine commenſurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quàm C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem fiet in hunc mo

b30. decimi. dum. *b* Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commenſurabilibus, ita vt A, plus poſſit quàm C, quadrato li

neæ ſibi commenſurabilis longitudine; inuenia tur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolùm com menſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 1 huius lib. demonſtrauimus) *c* Et ipſarum A, B, ſumatur media proportionalis D; *d* fiatque vt

c 13. ſexti. d 11. ſexti. D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B,

e 17. ſexti. C; *e* Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex D, *f* & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulum ſub D, E, quòd pro-

f 16. ſexti. portionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolùm commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolùm commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius

g 22. decimi. lib. oſtendimus. *g* Quia verò D, potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Irrationalis eſt,

h 24. decimi. & Media; *h* erit quoque E, ipſi oſtenſa commenſurabilis Media. Inuentæ ergo ſunt duæ Mediæ D, E, potentia ſolùm commen-

i 22. decimi. ſurabiles. Et quia oſtenſum eſt rectangulo ſub B, C, *i* quod Medium eſt, (quòd B, C, ſint Rationales potentia tantùm commenſurabiles,) æquale eſſe rectangulum ſub D, E; erit rectangulum ſub D, E, Medium. Denique quia oſtendimus eſſe vt A, ad C,

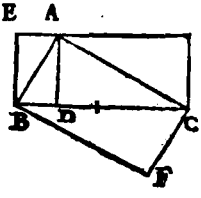
k 13. decimi. ita D, ad E; poteſt autem A, plus quàm C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ex conſtructione; *k* poterit etiam

am D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt priùs, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facilè apparere poterit ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C, & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum deniq; sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.



QVONIAM ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter C D, B D; a *erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.* a 17. 6. uel.

EADEM ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis est inter B C, C D.

RVRSVS quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

POSTREMO, b *quia triangula A B C, A B D, similia* b 8. sexti *sunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* c *Quare rectangulum* c 16. sexti. *sub B C, A D, æquale est rectangulo sub A B, A C. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum sub B C, A D: item rectangulum A F, sub A B, A C, contentū.* d *Quoniā igitur rectangulum C E, duplū est trianguli A B C, nec nō & rectan-* d 41. primi.

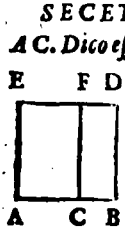
gulum

gulum A F, *eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se aqua rectangula* C E, A F. *quod est propositum.*

LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales; e vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore pa contentum.

SECETVR recta A B, *non bifariam in* C, *sitq; maior pa* A C. *Dico esse vt* A C, *ad* C B, *ita rectangulum sub* A B, A C *ad rectangulum sub* A B, C B. *Describatur enim*



a 1. *sext.*

ipsius A B, *quadratum* A B D E, *ducaturq; C ipsi* A E, *parallela; eritque* A F, *contentū sub* A B A C, *&* C D, *contentum sub* A B, C B; *quod* A E C F, *ipsi* A B, *æquales sint.* a *Quoniam igitur ut vt* A C, *ad* C B, *ita* A F, *ad* C D; *constat propo situm.*

EADEM ratione erit, vt minor pars B C, *ad maiorem* C A, *ita* B F, *contentum sub* A B, B C, *tota, & minore parte, ad* C E, *contentum sub* A B, C A, *tota, & maiore parte.*

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, *angulum rectum constituentes* A B C, *secetur q; minor* B C, *bifariam in* D. *Dico rectangulum sub* A B, B C, *duplum esse rectanguli sub* A B, B D. *Compleatur enim rectangulum* A C, *sub* A B, B C; *ducaturq; D E, ipsi* A B, *parallela, eritq; B E, contentum sub* A B, *&* B D, *dimidia minoris.* b *Quoniam igitur* A C, *ipsius* B E, *duplum est, quòd & basis* B C, *dupla sit basis* B D, *constat propositum.*

b 1. *sext.*

EODEM modo, si B C, *secta bifariam, sit maior, erit quod*

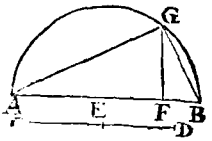
sub

b AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AP, minore, & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

PROBL. 10. PROPOS. 34. xxxiij. xxvij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.

a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; a 31. decimi.
secetur que CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub AF, FB, contentum.



Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; c quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea vt AF, FB, longitudine sint incommensurabiles; d erùt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. e Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, f æqualeque quadratis ex AG, GB; erit illud compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, quale est quadrato ex FG, (propterea quòd angulus AGB, g rectus est & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex AF, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, de-

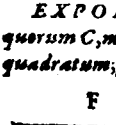
b 19. decimi.
c 31. tertij.
d 10. decimi.
e 4. def. 10.
f 47. primi.
g 17. sexti.

CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimid
a 22. de cimi. minoris CD.) a Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibu
tentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est
tur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cù
eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. A
rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedē
æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub
GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositu
earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ
GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt composi
quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum
sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

*DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiq
fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Ratione
hac ferè ratione.*

*EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C,
quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratu
quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadrati
ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educ
tur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur
vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum
AE: Non habet autem C, ad D, proportionem, qua
b 9. de cimi. quadratus ad quadratum; b erunt latera AB, A
dictorum quadratorum proportionem non habentiu
quam quadratus ad quadratum, longitudine incom
C, 6. D, 4. mensurabilia; Ac propterea cùm AB, totæ longitu
tudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqu
EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius li
c 1. sext. c Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitu
d 10. de cimi. cùm AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, d erunt quadra
tum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare qua
drato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur
erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque
argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia verò AF, BF
componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobu
Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.*



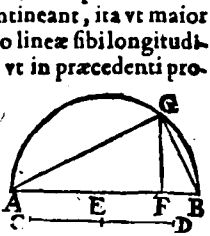
*AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum
AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim vtrumq; AF
e 16. de cimi. FB, Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia. e Igitur &
totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile e
rit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB,
f 9. def. f Rationale quoque est. Quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35. xxxiiij. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

a REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior A B, plus possit quàm minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas A G, G B, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media A B, b æquale existens quadratis rectarũ A G, G B, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub A B, C D, duplum esse rectanguli sub A B, F G; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm rectangulum sub A B, C D, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub A B, F G, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. huius lib. rectangulo sub A B, F G, æquale est rectangulum sub A G, G B. Igitur & rectangulum sub A G, G B, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum A G, G B, esse Medium. Igitur duæ rectæ A G, G B, quæ ostensæ sunt potentia incommensurabiles, faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum verò sub ipsis contentũ, Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. *decimi.*

b 47. *primi.*

PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

c REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus possit quàm minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse.

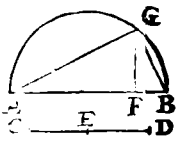
c 33. *decimi.*

les esse. Et quia quadratum ex Media AB, Medium est, & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm ex constructione, rectangulum sub AB, CD, Medium sit: erit quoque rectangulum sub AB, FG, hoc est, sub AG, GB, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam verò AB, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD: Est autem eidem CD, ipsa CE, longitudine commensurabilis; quòd illa huius sit duplum: erunt AB, CE, longitudine incommensurabiles. Sed vt AB, ad CE, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, CE, hoc est, ad rectangulum sub AB, FG; hoc est, sub AG, GB. (sunt enim rectangula sub AB, FG, & sub AG, GB, per 1. lemma propos. 33. huius lib. sibi inuicem qualia.) Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub AG, GB. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

24. primi.

b 13. decimi.

c 10. decimi.



SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facilè illud absoluemus, quod ad propositionem 24 huius lib. nos demonstraturos recepimus. nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, & commensurabiles tam longitudine, quàm potentia. Si enim potentes essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabile, quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB, inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

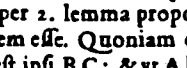
PRI

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj. xxx.

SI duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia solùm commensurabiles, inuentæ per 2. lemma propos. 21. huius lib. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim AB, longitudine incommensurabilis est ipsi BC: & vt AB, ad BC, ita est rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propos. 31. huius lib. *a* erit rectangulum sub AB, BC, quadrato ex BC, incommensurabile. Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB, BC, continetur; & quadrato ex BC, commensurabile est quadratum rectæ AB; (omnia enim sunt Rationalia) *b* atq; adeò & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub AB, BC, & ex composito quadratorum rectarum AB, BC, hoc est, quadratum ex tota AC, (*c* Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis) compositio ex quadratis rectarum AB, BC, *d* incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quòd commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rationali. Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommensurabile, *e* Irrationale est; atque adeò & recta ipsa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia solùm commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. decimi.
b 6. decimi.
c 4. secundi.
d 17. decimi.
e 10. decimi.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter f *22. decimi.*
eas est medio loco proportionalis, f *Irrationalis est, quæ Media vocatur. At verò composita ex ipsis,* g *Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.* g *37. decimi.*

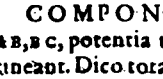
xxxvij. xxxj.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurab componantur, quæ Rationale contineant: tota Irra nalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

a 28. decimi.

COMPONANTVR duæ Mediæ a superiùs inue A B, B C, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale c tineant. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quia enim A B, es B C, vt rectangulum sub A B, B C, ad quadratum ex B C, vt *in lem* te propos. 31. huius lib. est ostensu



b 10. decimi.

sunt autem A B, B C, longitudine commensurabiles; b erunt recta gulum sub A B, B C, & quadratum ex B C, incommensurabilia: & rectangulo sub A B, B C, commensurabile est, quod sub A B, B C, b & quadrato ex B C, commensurabile est compositū ex quadratis c tarū A B, B C. (Nam cùm A B, B C, potentia sint cōmensurabiles,

c 16. decimi.

runt ipsarū quadrata commensurabilia. c atq; adeò & compositi ex ipsarum quadratis quadrato ex B C, commensurabile erit.) Ig tur & rectangulum sub A B, B C, bis, & compositum ex quadrat rectarum A B, B C, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ i scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum A B, B C, vnà cum rectangulo bis sub A

d 4. secundi. e 17. decimi.

B C, hoc est, quadratū ex A C, d quod huic composito æquale est e incommensurabile quoq; est rectangulo sub A B, B C, bis: Est au tem eidem rectangulo bis sub A B, B C, commensurabile rectangu lum semel sub A B, B C, cùm hoc sit illius dimidium. f Igitur qua

f 13. decimi.

dratum ex A C, incommensurabile est rectangulo sub A B, B C: Ponitur autem rectangulum sub A B, B C, Rationale. g Irrationale

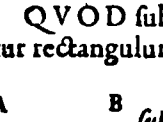
g 10. def. fin.

ergo est quadratum ex A C, b & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

h 11. def. fin.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.



i 21. decimi.

CONTINEATVR *rectangulū* ABCD, *sub Rationali* A B, *& Irrationali* B C. *Duo ipsum Irrationale esse Si enim dicatur esse Rationale*, i *faciet ipsum ad Rationalem* A B, *applicatum latitudinem* B C, *Rationalem. Quod*

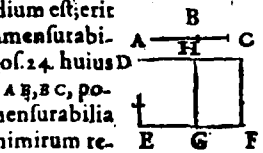
est ab-

absurdum. ponitur enim B C, *Irrationalis. Non ergo* A C, *rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ *a* superiùs inuentæ A B, B C, potentia tantùm commensurabiles, quæ Mediũ contineant. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, *b* ad quam applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C; & composito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum D F, *c* æquale est duobus quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis sub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub A B, B C, continetur. Quoniam verò ex hypothesi, rectangulum sub A B, B C, Medium est; erit & rectangulum bis sub A B, B C, ei commensurabile, hoc est, H F, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; *d* erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorum ex Mediis A B, B C, Mediũ est. Igitur E G, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (*e* est enim G H, Rationali D E, æqualis) *f* erunt eorum latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia A B, B C, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, B C, ex lemmate 3. propos. 10. huius lib. erit quadratum ex A B, incommensurabile rectangulo sub A B, B C, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est. At qui quadrato ex A B, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarũ A B, B C; & rectangulo sub A B, B C, commensurabile est, quod continetur bis sub A B, B C, cùm hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositũ ex quadratis rectarũ A B, B C, hoc est, rectangulum D G, incommensurabile rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, rectangulo H F. *g* Cùm ergo sit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; *h* erit E G, ipsi G F, longitudine incõmensurabilis: Ostensum autẽ iam fuit E G, G F, esse Rationales. Rationales igitur sunt E G, G F, potentia tantũ cõmensurabiles,



a 29. decimi. b 45. primi. c 4. secundi. d 16. decimi. e 34. primi. f 23. decimi. g 1. sexti. h 10. decimi.

a 37. decimi. a ac propterea & tota E F, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex A C ipsi D F, æquale, Irrationale est. Quare & recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Mediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

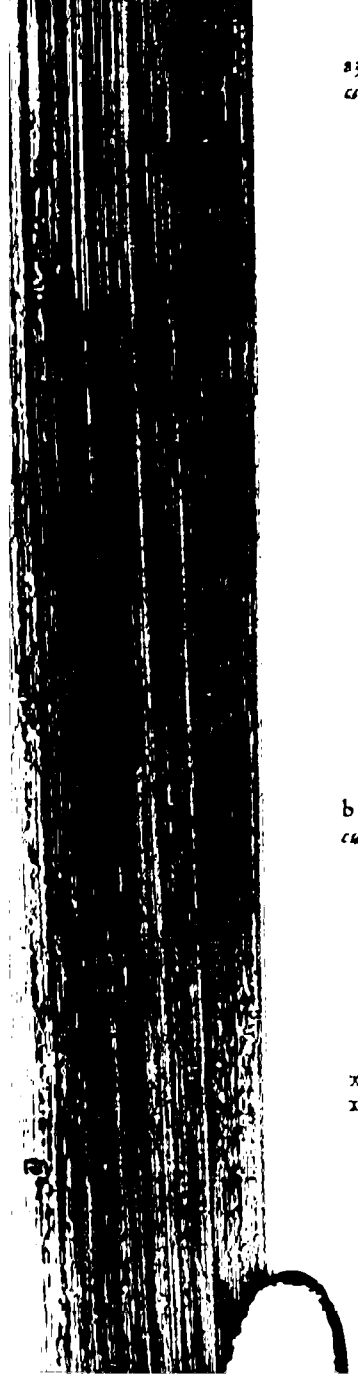
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantùm commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primæ. Hic verò lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantùm commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs secundæ, quoniam Rationale & natura, & cognitione primò est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta A D, in B, non bifariam, sitq; maior pars A B; in qua sumatur B C, minori B D, æqualis, vt sit A C, excessus, quo A B, superat B D, hoc est, B C, ipsi B D, æqualem. Dico quadrata rectarum A B, B D, simul maiora esse rectangulo bis sub A B, B D, quadrato rectæ A C.



b 7. secundi. *Quoniam enim quadrata ex A B, B C, b æqualia sunt rectangulo bis sub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C, est q; B C, ipsi B D, æqualis: erunt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectangulo bis sub A B, B D, vnà cum quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora sunt, quàm rectangulum bis sub A B, B D, quadrato rectæ A C. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

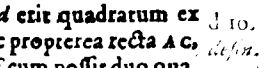
xxxix. xxxiij.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur,

ietur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vo-
tur autem Maior.

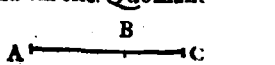
COMPONANTVR duæ rectæ *a* ſuperius inuentæ A B, B C, a 14.
tentia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex decimi.
arum quadratis Rationale, rectangulum vero ſub ipſis con-
rum, Medium. Dico totam A C, eſſe Irrationalem. Quoniam
im rectangulum ſub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectan-
ſum bis ſub A B, B C, illi commenſurabile, Medium ex coroll.
opoſ. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem com-
ſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. *b* Incommen- b 10.
abile ergo eſt rectangulum bis ſub A B, B C, compoſito ex qua- defin.
atis rectarum A B, B C. *c* Igitur & rectangulum bis ſub A B, B C, c 17.
a cum quadratis ex A B, B C, hoc eſt, qua- decimi.
tum ex A C, incommenſurabile eſt com-
ſito ex quadratis rectarum A B, B C. Cum
o hoc compoſitum ponatur Rationale; *d* erit quadratum ex d 10.
illi incommenſurabile, Irrationale; *e* Ac propterea recta A C, defin.
ationalis eſt. Vocetur autem Maior, quia *f* cum poſſit duo qua- e 11. de-
ta ex A B, B C; & rectangulum bis ſub A B, B C; compoſitum ex fin.
adratis rectarum A B, B C, per lemma antecedens, maius eſt re- f 4. ſe-
ngulo bis ſub A B, B C. Quare cum compoſitum ex quadratis cundi.
tarum A B, B C, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub A B, B C,
dium; recte vocabitur A C, Maior, ſiquidem à Rationali, quod
ius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ
tentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat
endendum.



THEOR. 29. PROPOS. 41. xl.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles XXXIV.
mponantur, quæ faciant compoſitum quidem ex
arum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis con-
etur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vo-
ur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ *g* ſuperius inuentæ A B, g 36.
potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem decimi
uadratis ipſarum, Medium, rectangulum vero ſub ipſis con-
tum, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniam
m compoſitum ex quadratis rectarum
, B C, Medium eſt; quod vero contine-
bis ſub A B, B C, Rationale, quod eius
idium, nempe quod ſub A B, B C, ſemel continetur, Rationale h 19.
atur, *b* erit compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, in- defin.



83. de-cim. ...ea propterea & tota F I, compositum Irrationale est. Quare, per lemma antecedens D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale est. Sed propterea & quadratum ex A C, ipsi D F, aequale, Irrationale est. Quare & recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Mediis secunda, seu vt alijs placet, Mediale secundum. Sed duae igitur Medias potentia tantùm commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

VOCATVR Irrationalis ex binis Mediis secunda, quae compositur ex duabus lineis potentia tantùm commensurabilibus, quae Rationale & media contineant, ex binis Mediis primo loco. Hic vero linea Irrationalis A C, quae componitur ex duabus lineis potentia tantùm commensurabilibus, quae Medium contineant, ex binis Mediis secundam, quarum Rationale & media, ex propositione prima est Medio, quod irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineae, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta A D, in B, non bifariam, sitq; maior pars A B; in qua sumatur B C, aequalis minori B D, aequalis, vt sit A C excessus, quo A B, superat B D, bisecta. Dico quadrata rectarum A B, B D, simul maiora esse rectangulo bis sub A B, B D, quadrato rectae A C.

b 7. secundi. *Quoniam enim quadratum ex A B, B C, b aequalia sunt duplo bis sub A B, B C, & quadrato ex A C, est autem B C, ipsi B D, aequale, erunt quadrata ex A B, B D, aequalia duplo bis sub A B, B D, & quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora sunt rectangulo bis sub A B, B D, quadrato rectae A C, quod est propositum.*

THEOREMA.

EX hoc [illegible] ualium simpliciter esse incommensurabilium, [illegible] libus continetur.

CXXIX. XXXIII.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duae rectae lineae potentia incommensurabiles componantur, quae factum compositum quidem ex pferum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis con-

tineatur

retur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vo-
tur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ *a* superius inuentæ A B, B C, a 54.
tentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex decimi.
arum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis con-
atum, Medium. Dico totam A C, esse Irrationalem. Quoniam
im rectangulum sub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectan-
dum bis sub A B, B C, illi commensurabile, Medium ex coroll.
opos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem com-
ctum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. *b* Incommen- b 10.
abile ergo est rectangulum bis sub A B, B C, composito ex qua- defin.
tis rectarum A B, B C. *c* Igitur & rectangulum bis sub A B, B C, c 15.
cum quadratis ex A B, B C, hoc est, quа- B decimi.
tum ex A C, incommensurabile est com- A C
osito ex quadratis rectarum A B, B C. Cum
o hoc compositum ponatur Rationale; *d* erit quadratum ex d 10.
, illi incommensurabile, Irrationale; *e* Ac propterea recta A C, defin.
rationalis est. Vocetur autem Maior, quia *f* cum possit duo qua- e 11. de-
ta ex A B, B C; & rectangulum bis sub A B, B C; compositum ex fin.
dratis rectarum A B, B C, per lemma antecedens, maius est re- f 4. de-
agulo bis sub A B, B C. Quare cum compositum ex quadratis cem.
arum A B, B C, Rationale sit, rectangulum vero bis sub A B, B C,
dium; recte vocabitur A C, Maior, siquidem à Rationali, quod
us est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ
entia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat
ndendum.

THEOR. 29. PROPOS. 41. 81.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles xxi. v.
nponantur, quæ faciant compositum quidem ex
irum quadratis Medium; quod autem sub ipsis con-
tur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vo-
ur autem Rationale aç Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ *g* superius inuentæ A B, g 36.
potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem decimi.
uadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis con-
um, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniam
n compositum ex quadratis rectarum B
, B C, Medium est; quod vero contine- A C
bis sub A B, B C, Rationale, quod eius
idium, nempe quod sub A B, B C, semel continetur, Rationale h 10.
atur, *h* erit compositum ex quadratis rectarum A B, B C, in- defin.

a 17. decim. ...mmensurabile rectangulo bis sub A... ...C. a Igitur & compositum ex quadra... ...ratum A B, B C, una cum rectangulo ... ...adratum ex A C, incommensurabile ... ...C. Cum ergo rectangulum bis sub A...

b 10. decim. ...nale; b erit quadratum ex A C, illi... ...nale; c Ac proinde & recta A C, Irra...

c 11. decim. ...Rationale ac Medium potens, quia ...

...positum ex quadratis rectarum A B, B... ...n scilicet bis contentum sub A B, B... ...le Irrationali anteponi. Si duæ ergo ... ...mensurabiles, &c. Quod demonstra... dum erat.

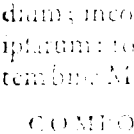
THEOR. 30. PROPOS. 42.

xlv. xxxv.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem hæc Media potens.

d 36 decimi.

COMPONANTVR duæ rectæ d superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes compositũ ex ipsarum quadratis Medium, & ...ngulum sub eisdem Mediũ, incommen... ...composito ex quadratis ipsarum. Dico ...rrationalem esse. Exponatur enim Ra...



c 45. primi. ...E, e ad quã applicetur rectangulum D...

...quadrato ex A C; Et composito ex qua... ...rũ A B, B C, alterum æquale applicetur ...a quadratũ ex A C, hoc est, rectangulum ...

f 4. secundi. ...ale est composito ex quadratis rect... ...ctangulo bis sub A B, B C, erit reliquum ...s sub A B, B C. Quoniam vero tam com... ...tarum A B, B C, hoc est, rectangulum ... ...sub A B, B C, atque adeo ...

g 10. decimi. ...A B, B C, nempe ipsum H F, ...um ponitur, g facient D H, ...titudines E G, G F, Rationales ... ...rabiles. Rursus quia com... ...B C, id est, rectangulum D... ...angulo sub A B, B C: Eide... ...mmensurabile est ipsius do...

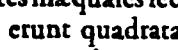
od bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F; *a* erunt & D G, incommensurabilia. Quare *b* cum sit vt D G, ad H F, ita E G, ad E G, erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles; Atqui E G, G F, ostensæ sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; *d* Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est; *e* ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis. Vocetur autem bina Media prima, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. *decimi.*
b 1. *sex.*
c 10. *decimi.*
d 37. *decimi.*
e 11. *defin.*

LEMMA.

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta A B, inaqualiter in C, & rursus inaqualiter in D, sintque priores partes A C, C B, magis inæquales, quam posteriores A D, D B. Dico quadrata ex A C, C B, simul maiora esse quadratis ex A D, D B, simul.



Diuisa enim A B, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub A C, C B, vna cum quadrato ex E C, æquale est quadrato ex E B: Item rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale est eidem quadrato ex E B; erit rectangulum sub A C, C B, vna cum quadrato ex E C, æquale rectangulo sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium E C, E D, cum quadratum ex E C, maius sit quadrato ex E D, erit reliquum rectangulum sub A C, C B, minus reliquo rectangulo sub A D, D B; ac propterea & rectangulum bis sub A C, C B, minus erit rectangulo bis sub A D, D B. Quoniam vero quadratum ex A B, g æquale est tam rectangulo bis sub A C, C B, vna cum quadratis ex A C, C B, quam rectangulo bis sub A D, D B, vna cū quadratis ex A D, D B; erit rectan-

f 5. *secundi.*

g 4. *secundi.*

gulum

gulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, aqu
rectangulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, D

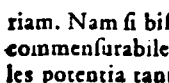
Quare cum rectangulum bis ſub A
CB, oſtenſum ſit minus rectangu
ſub AD, DB, erunt reliqua quad
ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quo
propoſitum.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes A
CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB;
AD, (quæ minor eſt poſteriorum) maior quam CB; (quæ
rum minor eſt) ac proinde cum AE, EB, æquales ſint, erit
qua EC, maior quam reliqua DE. Itaque quia rectangul
a 5. ſecundi. *ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC,* a *æquale eſt quadra*
ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato
DE, æquale eſt quadrato ex AE, hoc eſt, eidem quadrato
EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC
æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igi
tur vt prius, demonſtrabimus quadrata ex AC, CB, maiora q
quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.

xxxiij. xxxvj. **THEOR. 31. PROPOS. 43.**

QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat pu
ctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuiſa ad punctum C, in ſua n
mina, ita vt AC, CB, ſint Rationales potentia tantum comm
ſurabiles, vt vult propoſ. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud p



ctum diuidi non poſſe in alia nomina,
ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ po
tia tantum commenſurabiles. Si enim
poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina
D. Conſtat ergo AB, in C, non diuidi bi
riam. Nam ſi bifariam diuideretur, eſſent AC, CB, longitudi
commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim Ration
les potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo neque
D, bifariam ſecabitur AB, cum & AD, DB, Rationales ſint p
tentia tantum commenſurabiles. Secatur ergo AB, tam ad
quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel min
inæquales ſunt, q am partes AD, DB, vel magis inæquales
propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel m

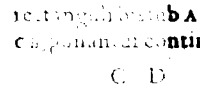
ut quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, B, vbicunque punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales unt, vtraq; vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam eratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in a secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab qualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ab-torum æqualis est, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt uem quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, B, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cum rectangulo bis sub D, DB, a quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex a 4. *secundi.*
B; sit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis recta-m AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, m sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarũ AC, B, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Ra-nale est. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id um quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum qua-atis, Rationale, ex iis, quæ in scholio propositionis 34. huius li-ostendimus: eademq; ratione erit & compositum ex quadra-rectarum AD, DB. Rationale. Quare cum Rationale superet ionale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demon-uimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis re-rum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, rium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, , & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est. b Quo-b 22.
m vero rectangulum sub AC, CB, Medium est, erit & quod bis *decimi.*
AC, CB, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib.
dium; Atque eodem modo rectangulum bis sub AD, DB,
dium erit. c Quare cum Medium non superet Medium Ratio-c 27.
, non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli *decimi.*
sub AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Ratio-esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis nomini-ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Qua-d vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat onstrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 44. xliij. xxxvij.

QVÆ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat ctum diuiditur in nomina.

IT ex binis Mediis prima AB, diuisa ad punctum C, in sua ina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensu-es, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet

scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, constituentesque Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, existat, similiter probabimus, vt in præcedenti propositione, excessum rectangulorum sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse. Est autem ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B; Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, rectanguli sub A D, D B, spatium est Rationale. (Cum enim, C B, quam continere Rationale, erit & quod bis sub A C, C B, quod continetur semel sub A C, C B, co mensurabile, Rationale. Eodemque mo Rationale erit, quod bis sub A D, D B. Qu cum Rationale superet Rationale Ratio li, vt in scholio propos. 27. huius libri os



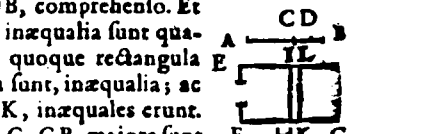
demonstratum est, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excess quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. Quia vero rectæ A C, C B, & potentia commensurabiles, erunt earum qu
a 16. decim. diatæ Mediales quoque, & commensurabilia. a Quare & compositum ex ipsarum quadratis quoque ipsorum commensurabile erit. Igitur cu vtrumque ipsorum dium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. pr ri, Medium. Eodem modo Medium ostendem
b 22. decim. quadratis rectarum A D, D B. b Cum ergo Media lium Rationali; non erit excessus compositi quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectar spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale e ium. Non igitur A B, ex binis Mediis prima nam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam tem alio quantumcunque punctum diuiditur in nomina. Quod monstrandum erat.

xlv. xxxiij. THEOR. 33. PROPOS. 45.

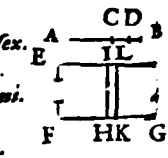
QVAE ex binis Mediis secunda ad vnum dumta punctum diuiditur in nomina.

Mediis secunda A B, diuisa ad punctum C, in , C B, Mediæ sint potentia tantum commen um contineant, vt vult propos. 39. huius li punctum diuidi non posse in alia nomina, lineæ Mediæ potentia tantum commensur e Medium. Diuiditur enim, si potest fieri, in lgitur vbicunque punctum D, existat, simil propositione 43. quadrata ex A C, C B, ma

e quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis F, *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, *b* æquale est quadratis ex AC, CB, rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipsius FH. Eadem ratione ostendemus FK, maiorem esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. *d* Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC, CB, ponatur Medium, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IG, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, *e* erit HG, Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL; longitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine, sunt incommensurabiles, & est vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, *f* erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; *g* erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 14 huius libri,



a 45. primi.
b 4. secundi.
c 16. decimi.
d 23. decimi.
e 23. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.



a 1. *sex.* b 10. *decimi.* c 37. *decimi.*

libri, rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, ipsi… Quocirca *a* cum sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad … *b* erunt FH, HG, longitudine incommen… biles. Ostensæ sunt autem & Rationales. R… nales ergo sunt F H, H G, potentia solum … mensurabiles. *c* Igitur F G, tota Irrational… quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad … ctum G. Eodem modo ostendemus & F G, ex binis nomin… diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri…

d 43. *decimi.* potest, *d* vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur A … binis Mediis secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud … ctum, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuid… in nomina. Quod erat ostendendum.

xlv. THEOR. 34. PROPOS. 46.

xxxix.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur … nomina.

SIT Maior A B, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita … A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem … compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum ve… sub ipsis Medium, vt vult propos. 40. huius lib. Dico A B, non po… diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quę scilicet lineæ incom…

mensurabiles quoq; sint potentia, facien… compositum ex ipsarum quadratis Ra… nale, & rectangulum sub ipsis Medium, … enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque … punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, vt in propos… ne 43. excessum compositi ex quadratis rectarũ A C, C B, & co… positi ex quadratis rectarum A D, D B, eum esse, qui rectangul… sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus com… siti ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis … ctarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum rectum … compositum ex hypothesi si sit Rationale, erit quoq; eorum ex… sus spatium Rationale, vt in scholio propos. 27. huius lib. ostend… mus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectan… bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam vero rectan… lum sub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis … A C, C B, Mediũ ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit co… mensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum … c 27. *decimi.* sub A D, D B. *e* Igitur cum Medium non superet Medium Ra… nali, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectan… bis sub A D, D B, spatium Rationale; Ostendimus autem & … tionale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad … punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter …

m duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat de-
aſtrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47. xlvj.

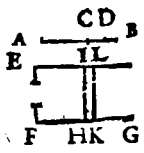
RATIONALE ac Medium potens, ad vnum xl.
ntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nō-
in puncto C, ita vt A C, C B, incommenſurabiles ſint po-
facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Me-
; rectangulum vero ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41.
lib. Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomi-
quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles poten-
facientes compoſitum quidem ex ipſa-
n quadratis Medium, & rectangulum
ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri
eſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat,
endemus non aliter, ac in propoſ. 43 huius libri, exceſſum re-
nguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem
, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compo-
ex quadratis rectarum A D, D B. Sed exceſſus rectanguli bis
A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt;
od oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex
adratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum
D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quia vero compoſita ex his qua-
is ponuntur eſſe Media: a Medium autem non ſuperat Me- a 23.
m Rationali; non erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed *decimi.*
Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B,
ionale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in
nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat pun-
m diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 36. PROPOS. 48. xlvij.

BINA Media potens, ad vnum dunta xat punctum xlj.
ditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuiſa in ſua
bina ad C, ita vt A C, C B, potentia incom-
menſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex
rum quadratis Medium, & rectangulum ſub
a Medium, incommenſurabileque compoſito
arum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri.
o A B, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ
licet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes
compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum



ſub ipſis Medium, incommenſurabileque co
poſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt ſi
diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbic
que hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio au
eadem fiat, quæ in propoſ. 45. oſtendemuſqu
ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, ina
les eſſe, ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex
dratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi co
poſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub A C, C
ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Mediu
ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. I
tur Media E H, I H, applicata ad Rationalem E F, (eſt enim I
a 23. ipſi E F, æqualis) a faciunt latitudines F H, H G, Rationales lo
a 11. ſimi. gitudine ipſi E F, incommenſurabiles. Eadem quoque ratio
probabimus, & rectas lineas F K, K G, Rationales eſſe, longitu
ne incommenſurabiles ipſi E F. Quia vero compoſitum ex qua
dratis rectarum A C, C B, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum E H, in
commenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub A C, C
b 1. ſex. nempe rectangulo I G; b eſtque vt E H, ad I G, ita F H, ad H
erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles, vt in ſchol
propoſ. 10. huius lib. oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationale
Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolum commenſurab
les. Igitur tota F G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus a
pellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demo
ſtrabimus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomi
c 43. ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, c iam ante demonſ
d 11. ſimi. tum eſt. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad al
punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum d
taxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diui
nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, q
drato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali co
menſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis n
minibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali long

ne sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus tertia.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

PRIMVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina linea, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit vtrumque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (alias enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgent linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina maiora alia sunt; (alias enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus alia tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

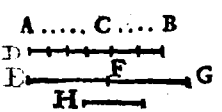
PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quarum maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quarum maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile adscripsit incommensurabile, vt manifestum est.

RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primum ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen commensurabile Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quæ maius nomen natura antecedit minus, cum minus à maiori consurgat: tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo. Primam dicit secundæ ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, eius quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico F G, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex E F, F G, cum proportionem habeant, quam numeri A B, C B, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, F G, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est E F, Rationalis longitudine. Ergo & F G, Rationalis est. Quia vero A B, ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. 6 Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, sit autem A B, maior, quam A C, erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate post



14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est vt A B, numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit ioque, per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, videlicet ad excessum, quo antecedens A B, superat consequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac propterea rectę E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E F, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primã. Quod faciendum erat. *a* 9. decimi.

PROBL. 14. PROPOS. 50. xlix. xliij.

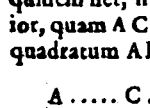
INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, *b* commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia vero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; *d* Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex E F: Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; sit autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque minus nomen F G, expositæ Rationali D, commensu- *b* 6. decimi. *c* 9. decimi. *d* 37. decimi.

rabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.
INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam A C. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum.



Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel sola vnitate ab A C, vel binario. (Vnitate quidem quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad A C, quadratum facit. Vt si A C, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si A C, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, ad A C, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, E F, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Quia vero I, ad A B, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [b] erunt D, & E F, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. [c] Erunt ergo quadrata ex E F, F G, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ E F, F G, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum E F, ostensa sit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad A C, hoc est, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] erunt E F, F G, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo E F, F G, Rationa-

L. xvij.

a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 6. decimi.

d 9. decimi.

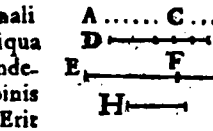
L. xlv.

ales potentia tantum commensurabiles; a Atque idcirco to- a 37. decimi.
, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & ter-
a esse. Quoniam enim est vt I, ad A B, ita quadratum ex D,
uadratum ex E F; Et vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad
dratum ex F G; erit ex æqualitate vt I, ad A C, ita quadratum
D, ad quadratum ex F G: Non habet autem I, ad A C, propor-
nem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igi-
nec quadrata ex D, & F G, proportionem habebunt, quam
dratus numerus ad numerum quadratum; b ac propterea re- b 9. de-
D, & F G, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam cimi.
um est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex
Est autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F,
s quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, per lemma pro-
14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter,
49. propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse.
oniam igitur maius nomen E, plus potest, quam minus F G,
drato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra
um E F, F G, longitudine commensurabilis est expositæ Ra-
ali D, vt demonstratum est; Erit E G, per definitionem, ex
nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus ter-
. Quod erat faciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 52. Ij. xlj.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt compositus ex ipsis A B, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, cum Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, totam E G, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49 propos. quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionē rationis est, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H: Non est autem A B, ad C B, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex E F, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratū. c Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ E F, & H. Itaq; cum maius nomen E F, plus possit, quā minus F G, qua- c 9. decimi.



drato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius nomen E F, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

liij. xlvj.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur F G, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. E G esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex E F, maius se, quam quadratum ex F G: Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis est vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

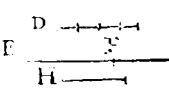
liij. xlvij.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem illos nō habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finem lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunq; I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quinarius numerus quadratus. Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius lib. & re-

a 30. sept.

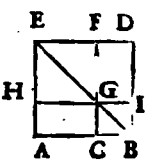


reliqua fiant, vt in propoſ. 51. oſtendemuſque vt ibi, rectas D E F, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam E G, binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & F G, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit ergo maius quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49. per conuerſionem rationis, eſſe vt A B, ad B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ſit C B, atque adeò quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. a 89. decaq; cùm maius nomen E F, plus poſſit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutrum ſorum nominum E F, F G, longitudine ſit commenſurabile poſitæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum b partibus contentum, medium proportionale inter rum quadrata: Item rectangulum contentum ſub ta, & vna parte, medium proportionale inter quadram totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta A B, vtcunque in C. Deſcribatur ex A B, adratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta au- ex C, recta C F, ipſi B D, parallela, quæ metrum ſecet in G, agatur per G, ipſi B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. poſ. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium C, C B; vtrumque autem rectangulo- D G, G A, comprehenſum eiſdem par- : At verò rectangula C D, A I, ſub tota A B, & parte C B, tenta. Dico D G, medium proportionale eſſe inter quadrata , C I: At C D, medium eſſe proportionale inter quadrata), C I. Quoniam enim b vt H G, ad G I, ita eſt tam F H, ad b per ſ. 3, quàm A G, ad C I; erit vt F H, ad D G, ita A G, ad C I: ſt autem A G, ipſi D G, æquale. Igitur erit quoque vt F H, c 4. ſ. D G, ita D G, ad C I; Atq; adeò D G, medium proportionale inter quadrata F H, C I.

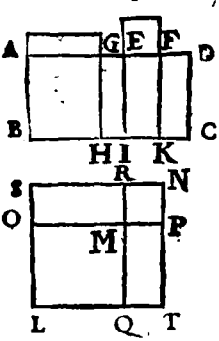


RVRSVS quia eſt, a vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quàm AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Eſt autem AI, ipſi CD, æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoq; CD ad CI. Quare CD, medium proportionale eſt inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex deſin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & denique AE, expoſitæ Rationali AB, longitudine commenſurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus poteſt quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex ED, hoc eſt, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum ſub AG, GE, contentum, per 2. lemma propoſ. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; *b* in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. Quare AG, GE, partes inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur



b 1. *decimi.*

per puncta G, E, F, ipſis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. *c* Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, coniunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnam rectam lineam conſtituant OP. Facient ergo latera MQ, MR, vnam rectam QR, vt demonſtratum eſt in his ex Procło ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quòd anguli OMQ, PMR, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti. Complebitur item rectangulo LN, cùm rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales ſint; ideoq; & tota OP, toti QR, *d* ſit autem OP, ipſi SN, LT, & QR, ipſis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN, ideoq; quadratum.

c 14. *& 45. primi.*

d 34. *primi.*

QVONIAM verò rectangulum ſub AG, GE, æquale eſt, per
ſtructionem, quadrato ex EF, a erit vt AG, ad EF, ita EF, ad a 17. ſe-
E, b Ac propterea & vt AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, xti.
edium proportionale eſt inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata bi. ſext.
M, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, me-
um proportionale eſt TM, ex antecedenti lemmate. Aequale
itur eſt TM, ipſi EK. c Cùm ergo ipſi TM, æquale ſit MS, d & c 43. pri
ſi EK, æquale ſit FC, erit & MS, ipſi FC, æquale. Quocirca to- mi.
am quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale eſt; atq; adeò d 36. pri
cta OP, poteſt ſpatium AC, contentum ſub AB, Rationali, & mi.
D, ex binis nominibus prima. Dico OP, eſſe Irrationalem, quæ
binis nominibus dicitur.

QVONIAM enim AG, GE, oſtenſæ ſunt longitudine com- e 16. de-
menſurabiles, e erit & tota AE, vtrique ipſarum longitudine cimi.
ommenſurabilis: Eſt autem AE, cùm ſit maius nomen ipſius
D, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commenſurabilis
ngitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex ſcholio propoſ. 11.
uius lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atq; adeò cùm AB, f 20. de-
Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. f Quare rectangula cimi.
H, GI, ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus con-
nta Rationalia ſunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipſis æqualia,
ationalia erunt; Ac proinde & rectę OM, MP, Rationales erunt.
ET quoniam AE, ipſi ED, longitudine incommenſurabilis
; Eſt autem ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis AG,
ipſi ED, commenſurabilis eſt longitudine EF, eius dimidia; e-
nt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & AG, EF, inter ſe longitudi- g 1. ſext.
e incommenſurabiles. Quare & AH, EK, g eandem proportio- h 10. de-
em habentia, quam AG, EF, h incommenſurabilia ſunt, ac cimi.
roinde & LM, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. i Igi- i 10. de-
ur rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, & cùm cimi.
eadem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & k 11. ſext.
OM, MP, Rationales oſtenſæ. Igitur OM, MP, Rationales ſunt l 137. ſe-
arentia ſolùm commenſurabiles. l Quapropter tota OP, po- xti.
as ſpatium AC, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dici-
ur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis no-
inibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

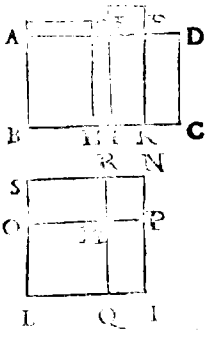
THEOR. 38. PROPOS. 56. lix. xlix

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis no-
minibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irratio-
nalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex
binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineã, quæ poteſt ſpa-
tium

tium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit eorum ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus potent quam E D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis. Secetur E D, bifariam in F; & rel. construantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam O P, posse spatium A C, contentum sub Rationali A B, & ex binis nominibus secundis A E, E D, cui am O P, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim A E, longitudine incommensurabilis est ipsi E D; & E D, minus nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali A B; erunt A E, A B, longitudine incommensurabiles. Et quia A G, G E, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles, *b* erit quoque tota A E, vtrique ipsarum commensurabilis. Quare cùm A E, maius nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & A G, G E, Rationales. Cùm ergo vtraque A G, G E, ipsi A E, sit longitudine commensurabilis; at verò A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis; *c* erit vtraque A G, G E, eidem A B, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam A B, A G, quàm A B, G E, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. Igitur *d* rectangula A H, G I, Media sunt, propterea quæ quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ O M, N P, sunt Mediæ.



QVIA vero A G, G E, longitudine sunt commensurabiles, *e* erunt & A H, G I, eandem cum illis proportionem habentes, commensurabilia; atque idcirco & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, quæ sunt commensurabilia sunt. Igitur & rectæ O M, M P, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi verò A E, ostensa est longitudine commensurabilis A G, & ipsi A D, longitudine commensurabilis, eius dimidia; erunt per scholium propositionis longitudine incommensurabiles: Ac proinde habentia proportionem cum ipsis, *f* incommensurabilia. Igitur & L M, M T, ipsis A H, & E K, æqualia, sunt; *g* Ideoque & rectæ O M, M P, longitudine

a 13 *de*
cimi.

b 16 *de*
cimi.

c 14 *de*
cimi.

d 22 *de*
cimi.

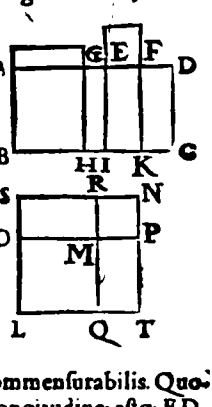
e 10 *de*
cimi.

line sunt incommensurabiles, *a* cùm eandem habeant pro- *a 1. huius.*
portionem, quam L M, M T. Cùm ergo ostensum sit O M, M P, Mediàs esse, & commensurabiles, erũt O M, M P, Mediæ potentia tantùm commensurabiles. Quoniam denique E D, minus nomen totius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi A D, quoque longitudine commensurabilis; *b* erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cùm E I, Ra- *b 12. decimi.*
tionalis sit, erit & E F, Rationalis. *c* Quare E K, rectangulum, *c 20. decimi.*
Rationale est; Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, Rationaleq; contingentes; *d* atque adeò O P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs *d 38. decimi.*
prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 39. PROPOS. 57. *Lvj.*

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex definitione, Rationales potentia tantùm cõmensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum A E, E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam O P, posse spatiũ A C: Et vt in antecedenti propos. 56. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantùm commensurabiles; propterea quòd A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipsi A B, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam verò E D, E F, sunt commensurabiles longitudine; est q; E D, ipsi A B, Rationali, hoc est ipsi E I, longitudine incommensurabilis; *e* erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommensura- *e 14. decimi.*
bilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quòd E F, dimidia sit ipsius E D, Ra-



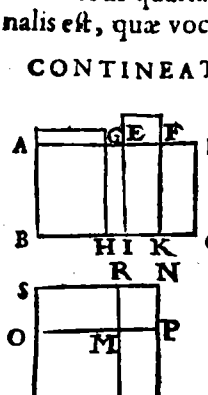
E D, Rationalis; & E I, expositæ Rationali A B, æqualis. Igitur
b 22. de elem. E I, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; e
propterea E K, Medium est: ideoque & M T, æquale ipsi E K,
dium est, quod sub Medijs O M, M P, continetur. Itaq; cùm O
M P, Mediæ sint potentia solùm commensurabiles, contin
b 22. de elem. que spatium Medium; b erit O P, Irrationalis, quæ ex bini
dijs secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub R
nali, & ex binis nominib. tertia, &c. Quod erat demonstrand

lvij. lj.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim A E, ipsius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus poterit, quàm E D, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique A E, ipsi A B, commensurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in



c 19. de elem. propos. 55. c Erunt ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim A G, G E, longitudine incommensura-
d 10. de elem. biles sunt; d erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeò & quadrata L M, M N, ipsis A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia verò A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B;
e 20. de elem. erit & A E, Rationalis; e & rectangulum A I, sub ipsis contentũ, Rationale. Est autem A I, æquale composito ex quadratis L M, M N. Compositum ergo ex quadratis L M, M N. Rationale est.

ET quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, longitudine incommen-

sura-

bilis; Et est E F, Rationalis, cùm sit Rationali E D, commensu-
lis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solùm commé-
biles. a Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; a 22 de
T, illi æquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocir- cimi.
ùm O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; com-
um quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Re-
gulum verò sub ipsis M T, Medium; b Irrationalis erit tota b 40. de
quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Ra- cimi.
ali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendũ.

THEOR. 41. PROPOS. 59. lviij lij.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis no-
minibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationa-
lis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

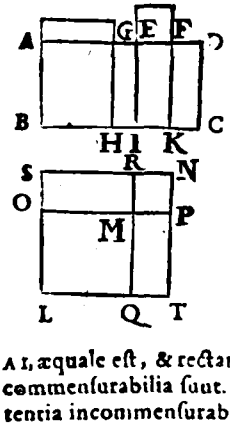
CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, ex bi-
s nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spa-
um A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Me-
ium. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Sunt ergo ex defin.
5, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus
test, quàm E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensu-
bilis: & deniq; E D, longitudine commensurabilis est expositæ
tionali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in pro- 59. de-
f. 55. c Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensu- cimi.
biles. Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectam O P,
esse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Ratio-
le & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti,
rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Et quia A E, ma-
nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Ra-
nalis & longitudine incommensurabilis Rationali A B; erunt
A E, Rationales potentia tantùm commensurabiles. d Quare d 22 de
ectangulum A I, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem cimi.
æquale composito ex quadratis L M, M N. Igitur & composi-
n hoc, Medium erit. Rursus quia E D, Rationalis ponitur lon-
itudine commensurabilis Rationali A B, cùm sit minus nomen
A D, ex binis nominibus quintæ, erit & E F, ipsius dimidia ei-
m A E, commensurabilis longitudine, & Rationalis. e Quare e 30. de
, sub Rationalibus E I, E F, longitudine commensurabilibus, cimi.
tionale est; atq; idcirco & M T, sub O M, M P, contentum Ratio-
le erit, cùm ipsi E K, sit æquale. Quamobrem cùm rectæ O M,
P, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum
idem ex ipsarum quadratis L M, M N, Medium; Rectangulum
rò M T, sub ipsis contentum, Rationale; f Irrationalis erit tota f 41. de-
P: quæ dicitur potens Rationale, & Mediũ. Si igitur spatiũ con- cimi.
tinea-

tineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

lix. liij. THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus, *a* eruntq; AC, CE, longitudine incommenſurabiles. Iam verò oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque MT, ſub OM, MP comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ED, hæc verò eidem commenſurabilis; *b* erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. *c* Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt. *d* cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis, *e* erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.



a 19. *decimi.*

b 13. *decimi*

c 10. *decimi.*

d 1. *ſext.*

e 42. *decimi.*

lx. liiij. THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus,

ns, ad Rationalem applicatum; latitudinem facit ex
inis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; *a* & ad a 45. primi.
tionalem expositam D E, applicetur rectangulum D F, æquale
adrato ex A B, latitudinem faciens D G Dico D G, ex binis no-
minibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem
D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud
K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei,
quod bis sub A C, C B, continetur, cùm quadrata ex A C, C B, vnà
cum rectangulo bis sub A C, C B, *b* æqualia sint quadrato ex AB, b 4 secundi.
quamadmodum & eidem quadrato ex
D, æquale est, per constructionem, re-
ctangulum D F. Secetur L G, bifariam
in M, puncto, per quod ipsis L K, G F, pa-
rallela agatur, M N: eritque vtrumque
rectangulum L N, M F, æquale ei, quod
bis A C, C B, continetur. *c* Et quoniam c 37. decimi.
A C, C B, Rationales sunt potentia solùm
commensurabiles, quòd tota A B, sit ex
binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob d 16 decimi.
id commensurabilia; *d* quorum vtrique cùm etiam commensu-
rabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadra-
tum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale,
per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale
erit: quod cùm applicatū sit ad Rationalem D E, faciet latitu-
dinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine cōmensurabilem.

RVRSVS quia A C, C B, Rationales sunt solùm potentia
commensurabiles, *e* erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque e 22. decimi.
adeò, & quod bis sub ipsis, cùm sit ei commensurabile, hoc est, i-
psum L F, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F,
applicatum ad L K, Rationalem, *f* facit L G, latitudinem Ratio- f 23. decimi.
nalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensura-
bilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longi-
tudine. *g* Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. g 13. decimi.
Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantùm cōmensurabi-
les; *h* Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primā esse. h 37 decimi.

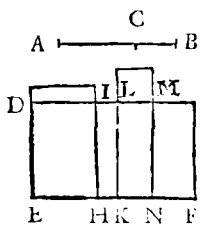
QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. huius lib. rectan-
gulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex
A C, C B; erit quoq; L N, medium proportionale inter D H, I K,
atq; adeò *i* cùm rectæ D I, L M, I L, eandem rationem habeant, i 1. sext.
quam D H, L N, I K; erit quoq; recta L M, media proportionalis
inter D I, I L. *k* Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est qua- k 17. sexti.
drato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commensura-
bilia sunt, quòd A C, C B, ponantur potentia commensurabiles;

ato. *decimi.* erunt & D H, I K, ipſis æqualia commenſurabilia. *a* Igitur & ſi
ęta D I, I L, eandem cum illis habentes rationem, longitudine
commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K, maius eſt, quam
L F, quòd & quadrata ex A C, C B, maiora ſint, per lemma
poſ. 39. huius libri, quàm rectangulum bis ſub A C, C B; erit &
b1. *ſext.* cta D L, maior quàm L G, *b* cùm D L, L G, eandem rationem
habeant, quam D K, L F. Itaque quoniam D L, maior eſt, quàm
& ad D L, applicatur rectangulum ſub D I, I L, deficiens fi
quadrata, æquale quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadra
ti ex minore L G, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum
D I, I L, æquale quadrato ex L M) diuiditurq; D L, ad I, in partes
D I, I L, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum
c18. *de-* *c* poterit D L, maior pla› quàm L G, minor, quadrato rectæ ſibi
cimi. longitudine commenſurabilis. Quare cùm D G, oſtenſa ſit ex bi
nis nominibus, & D L, maius nomen plus poſſe, quàm L G, mi
nus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
atque idem maius nomen D L, longitudine commenſurabile ra
tionali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus pri
ma. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod
oſtendendum erat.

Ixj. lv.

THEOR. 44. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.



d45. *primi.* SIT ex binis Medijs prima A B, cuius maius nomen A C, *d* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituantur enim eadem, quæ in propoſ. præcedenti, & vt rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, C B, & vtrumque ipſorum L N, M F, ei quod ſub A C, C B, continetur. Quoniam igitur
e38. *de-* *cimi.* A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentes *e* Medias ſunt potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt quadrata ex A C, C B, atque adeò rectangula ipſis
f26. *dec.* æqualia D H, I K, commenſurabilia, atque Media. *f* Cùm ergo
proportionale & totum D K, vtrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile; erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. D K, M
g23. *de-* *cimi.* dratum, quod cum applicatum ſit ad Rationalem D E, *g* erit
latitudo D I, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſu

ia. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est, & eius duplum, nempe L F, Rationale, quod cùm applicatum sit ad Rationalem L K, *a* erit eius latitudo L G, Rationalis a 21. decimi.
L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quandoquidem duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; *b* erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod b 13. decimi.
cùm D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solùm commensurabiles; *c* ac propterea tota D G, c 37. decimi.
ex binis nominibus est. Iam verò, vt in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quàm minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cùm ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quàm eius nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 45. PROPOS. 63. lxij. lvj.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

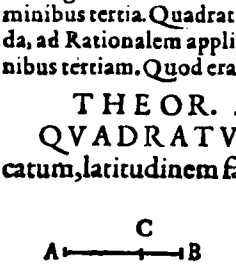
SIT ex binis Mediis secunda A B, cuius maius nomen A C, *d* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis secundam A B, componentes, *e* Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeò rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, & Media. *f* Cùm ergo propterea & totum D K, vtrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile, erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem D E, *g* erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, C B, Medium est; erit & eius duplum L F, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem L K; *h* erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, longitudine est incommensurabilis; estque vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propositionis 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, *i* erit quoque quadratum ex A C, rectangulo sub A C, C B, incommensurabile. *k* Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis

d 45. primi.
e 39. decimi.
f 16. decimi.
g 23. decimi.
h 23. decimi.
i 10. decimi.
k 16. decimi.

dratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex A C, C B, commensurabilia sint, quippe cùm rectæ ipsæ potentia ponantur cõmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub A C, C B. Igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum D E, commensurabile est rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, rectangulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F,
a 10. de cimi. bentes a longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem stenſæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm
b 37. de cimi. mensurabiles; b ac propterea tota D G, ex binis nominibus
Iam verò vt in propos. 61. ostendemus D L, esse maius nomen, posseq; plus, quàm minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cùm D L, maius nomen plus possit quàm L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum D L, L G, Rationali expositæ D E, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

lxiij. lxvij. THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



c 45. primi. SIT maior A B, cuius maius nomen A C, c & ad Rationalẽ D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartam. Constituantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, d potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum verò sub ipsis, Mediũ; erit quoq; D K, compositum ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At verò L F, duplum eius quod sub A C, C B, continetur, Mediũ. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E,
e 21. de cimi. est applicatum; e erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cùm L F, Medium sit applicatum ad Rationalem L K, f erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, D E, longitudine
f 23. de cimi. incommensurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, illa
g 13. de cimi. quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitudine: hæc verò eidem D E, longitudine incommensurabilis; g incommensurabiles e-

erunt longitudine D L, L G: Ostensæ sunt autem & Rationales: erit igitur D L, L H, Rationales potentia tantùm commensurabiles; *a* ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam verò vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quòd rectæ A C, C B, potentia incommensurabiles sunt; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommensurabilia, *b* atque adeò & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam verò vt in propos. 61. ostendimus, D L, maior est, quàm L G, & ad D L, applicatum est rectangulum sub D I, I L, quadrato ex L M, hoc est, quarta parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod dividit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles, *c* poterit D L, plus quàm L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cùm & ipsa D L, (maius nomen ipsius D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 37. de cimi.

b 10. de cimi.

c 19. de cimi.

THEOR. 47. PROPOS. 65. LXIV. LVIIJ.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomen A C, *d* & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ A C, C B, componentes A B, potentem Rationale ac medium, *e* potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit D K, æquale composito ex quadratis rectarum A C, C B, Mediũ, & L N, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur, atque adeò ipsius duplum, L F, Rationale. Igitur Medium D K, applicatum ad Rationalem D E, *f* facit latitudinem D L, Rationalem, & longitudine Rationali D E, incommensurabilem: At verò Rationale L F, ad Rationalem L K, applicatum, *g* facit latitudinem L G, Rationalem longitudine ipsi L K, hoc est, ipsi D E, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum D L, L G, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali D E, illa verò longitudine incommensurabilis, *h* erunt D L, M G, longitudine incommensurabiles. Quare D L, L G, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, *i* Ac propterea D G, est ex binis nomi-

d 45. pri mi.

e 41. de cimi.

f 23. de cimi.

g 21. de imi.

h 13. de cimi.

i 37. de cimi.

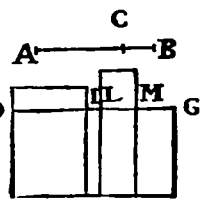
nibus. Iam verò, vt in propoſ. 61. oſtendemus rectangulum ſ
D I, I L, æquale eſſe quadrato ex L M, & vt in antecedenti prop
DL, maius nomen eſſe, atq; poſſe plus, quàm L G, quadrato re
ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cùm & m
nomen L G, oſtenſum ſit expoſitæ Rationali D E, longitu
commenſurabile; erit ex defin. D G, ex binis nomin: bus q
Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium pote
Quod demonſtrandum erat.

lxv. lix.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media pote
ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex bi
nominibus ſextam.

SIT bina Media potens recta A B, cuius maius nomen A
a 43 pri mi. & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale qu
drato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ex
nomin bus ſextam. Conſtructis enim i
dem, quæ in propoſ. 61. quoniam rec
A C, C B, componentes ipſam A B, po
b 42. de cimi. tentem bina Media, b potentia incom
menſurabiles ſunt, faciuntq; & com
poſitum ex ipſarum quadratis M
& quod ſub ipſis continetur, Me
incommenſurabile compoſito ex q
dratis ipſarum; erit tam D K, illi co
poſito æquale, quàm L F, rectangulo bis ſub A C, C B, æq
Medium. Et quia Media D K, L F, applicata ſunt ad Ration
c 23. de cimi. D E; c erunt eorum latitudines D L, L G, Rationales ipſi
longitudine incommenſurabiles. d Quoniam verò compo
d 42. de cimi. ex quadratis rectarum A C, C B, incommenſurabile eſt m
gulo ſub A C, C B; eidem verò rectangulo ſub A C, C B, com
ſurabile eſt rectangulum bis ſub A C, C B, cùm hoc illius ſ
e 11. de cimi. plum; e Erit compoſitum ex dictis quadratis, hoc eſt, D
commenſurabile rectangulo bis ſub A C, B C; hoc eſt, ip
Ac propterea rectæ D L, L G, eandem rationem habentes
f 11. de cimi. D K, L F, f longitudine incommenſurabiles ſunt. Ration
go ſunt D L, L G, potentia ſolùm commenſurabiles; g Ac po
g 73. de cimi. D G, eſt ex binis nominibus. Iam verò, vt in præcedenti
demonſtrabimus D L, eſſe maius nomen, poſſeq; plus quàm
quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cum
oſtenſum ſit neutram ipſarum D L, L G, longitudine comm
rabilem eſſe expoſitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex bi
minibus ſexta. Quadratũ igitur eius, quæ bina Media pote
Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nom
ſextam. Quod erat oſtendendum

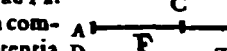


THE

THEOR. 49. PROPOS. 67. lxvj. lx.

EI, quæ eſt ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordi-eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque A B, diuiſa in ſua nomi-i, quorum maius A C, & C B, minus, ſitq; recta D E, ipſi A B, longi-dine commenſurabilis. Dico D E, quoque eſſe ex binis nomini-s, & ordine eandem ipſi A B. *a* Fiat enim vt tota A B, ad totam a 12. ſe-ita ablata A C, ad ablatam D F. *b* Erit ergo & reliqua C B, ad re-xti.
quam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipſi A B, longitu- b 19.
ne commenſurabilis ponitur D E; *c* erit & D F, ipſi A C, & F E, ipſi quinti.
a longitudine commenſurabilis: *d* Sunt autem A C, C B, cùm cio. de-
ex nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & cimi.
ipſæ F E, Rationales ſunt. Rurſus quia eſt vt A C, ad D F, ita C B, ad F E, d 37. de
permutando vt A C, ad C B, ita D E, ad F E: cimi.



unt autem A C, C B, potentia ſolùm com- cio. de-
menſurabiles; *e* erunt & D E, F E, potentia cimi.
tùm commenſurabiles. Igitur D F, F E, Ra-
tionales ſunt potentia tantùm commenſurabiles; *f* Ac propter- f 37. de
ea D E, ex binis eſt nominibus. Dico & ipſi A B, ordine eandem eſſe. cimi.
Quoniam enim A C, plus poteſt quàm C B, quadrato rectæ lineæ ſibi lon-
gitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si quidem
A C, plus poteſt quàm C B, quadrato rectæ ſibi longitudine com-
menſurabilis; *g* poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ ſibi g 15. de-
longitudine commenſurabilis. Quod ſi A C, commenſurabilis ſit cimi.
longitudine Rationali expoſitæ, ita vt A B, ſit ex binis nominibus
prima; *h* erit & D F, eidem Rationali longitudine commenſura- h 12. de-
bilis, cùm vtraque, & Rationalis, & D E, eidem A C, ſit commenſu- cimi.
rabilis ſ longitudine. Quare & D E, ex defin. eſt ex binis nominibus
prima, hoc eſt, ordine eadem. Si verò C B, expoſitæ Rationali ſit
longitudine commenſurabilis, vt A B, ſit ex binis nominibus ſe-
cunda; erit eodem modo & F E, Rationali expoſitæ longitudine
commenſurabilis. Quare & D E, ex defin. eſt ex binis nominibus
ſecunda. Si denique neutra ipſarum A C, C B, longitudine ſit com-
menſurabilis expoſitæ Rationali, ita vt A B, ſit ex binis nominibus
tertia; *i* erit & neutra ipſarum D F, F E, longitudine commenſura- i 13. de-
bilis expoſitæ Rationali. Quare & D E, ex defin. eſt ex binis nomi- cimi.
nibus tertia.

AT ſi A C, plus poſſit, quàm C B, quadrato rectæ ſibi longitu-
dine incommenſurabilis; *k* poterit & D F, plus quàm F E, quadra- k 15. de-
to rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, o- cimi.
ſtendemus D E, ex binis nominibus quartam eſſe, vel quintam, vel
ſextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

quinta, vel ſexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi recta D E, potentia tantùm commenſurabilis ſit A B, qua eſt ex binis nominibus, oſtendemus quidem eodem modo, & loco: Commenſurabilis longitudine: in demonſtratione reponantur vbique: commenſurabilis potentia tantùm:) & D E, eſſe ex binis nominibus. At eam eſſe ordine eandem ipſi A B, cui commenſurabilis eſt, nullo modo concludemus. Non enim ſequitur, ſi A C, maius nomen longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali; & D F, minus nomen eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quòd non vtraque, nempe expoſitæ Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine: At verò D F, potentia tantùm, ex hypotheſi. Immò verò ſi A B, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, ſicut nulla ratione poteſt, vt D E, illi potentia tantùm commenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim A B, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diuiſa in ſua nomina ad C. ſitq; ea commenſurabilis potentia tantùm D E, quam quidem, vt in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diuiſamq; eſſe in ſua nomina ad F, & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totum D E. Dico nullo modo fieri poſſe, vt D E, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi A B. Nã ſi poteſt fieri, ſit vtraq; ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumq; maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudine. a *Quare & inter ſe longitudine commenſurabiles erũt. Et quoniam eſt vt A C, ad D F, ita A B, ad D E,* b *erunt propterea & A B, D E, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim D E, ipſi A B, potentia ſolùm commenſurabilis. Non ergo vtraq; A B, D E, ex binis nominibus prima eſt. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; ſecunda vel quinta. Eſſet enim vtrumq; nomen minus C B, F E, ex defin. longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ, atq; adeò & inter ſe igitur & tota A B, D E, longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.*

SEMPER tamen verum eſt, ſi A B, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam D E, ipſi A B, potentia ſolùm commenſurabilem, eſſe quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit A C, plus quàm C B, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cùm ergo ſit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E, c *poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi A B, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt A C, plus*

poſſit

a 12. decimi.

b 10. decimi.

c 15. decimi.

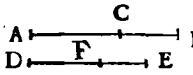
offit, quam C B, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit quoque D F, plus quam F E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur ex cimi. a 15. eſſin. erit D E, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel ſexta, licet non eadem ordine ipſi A B.

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit D E, eadem ordine ipſi A B, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.

THEOR. 50. PROPOS. 68. lxvij.

EI, quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atque ordine eadem. lxj.

SIT ex binis Mediis A B, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorum A C, maius, & C B, minus, ſitque ei recta D E, longitudine commenſurabilis. Dico D E, quoque ex binis Mediis eſſe, & eodem ipſi A B, ordine eandem. *b* Fiat enim vt tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. *c* Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipſi A B, ponitur longitudine cõmenſurabilis D E; *d* erit & D F, ipſi A C, & F E, ipſi C B, longitudine commenſurabilis. Sunt autem A C, C B, Mediæ. *e* Igitur & D E, F E, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad F E: *f* Sunt autem A C, C B, potentia ſolum commenſurabiles; *g* erunt & D F, F E, ſolum commenſurabiles potentia. Cum ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt D F, F E, Mediæ potentia tantum commenſurabiles; Atque idcirco D E, erit ex binis mediis. Dico & ipſi A B, eandem eſſe ordine. Quoniam enim eſt vt A C, ad C B, ita D F, ad F E: Eſt autem vt A C, ad C B, ita quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, & vt D F, ad F E, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E; & permutando vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum ſub A C, C B, ad rectangulum ſub D F, F E. Commenſurabile eſt autem quadratum ex A C, quadrato ex D F; quod rectæ A C, D F, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. *i* Igitur & rectangulum ſub A C, C B, rectangulo ſub D F, F E, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub A C, C B, fuerit Rationale, ita vt A B, ſit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum ſub D F, F E, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; *k* atque adeo & D E, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum ſub A C, C B, fuerit Medium, ita vt A B, ex binis Mediis ſecunda: erit & rectangulum ſub D F, F D, ei



b 12. *ſexti.* c 19. *quinti.* d 10. *decimi.* e 24. *decimi.* f 38. *decimi.* g 10. *decimi.* h 38. *vel* 39. *decimi.* i 10. *decimi.* k 18. *decimi.*

commensurabile, Medium, ex corollario propos. 24. huius lib.
a 39. decimi. a Ac propterea & D E, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quae ex binis Mediis longitudine commensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam D E, potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi A E, quae est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. Vt manifestum est.

lxviij. lxij.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quae superius; ita vt partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem habeant rationem, quam tota A B, ad totam D E.

Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel
b 10. decimi. potentia tantum; b erunt quoq; tam A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando vt A C, ad C B, ita
c 22. sexti. D F, ad F E, c erit vt quadratum ex A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compositum ex quadratis rectarum D F, F E, ad quadratum ex F E; Et conuertendo, vt quadratum ex C B, ad compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E; Et permutando vt quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E. Commensurabile est autem quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod recta C B, quae fiat ex F E, ostensae sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. d Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile est
d 10. decimi. e 40. decimi. f 9. defin. composito ex quadratis rectarum D F, F E. e Est autem compositum illud Rationale, cum recta A C, C B, componant Maiorem A B. f Igitur & hoc Rationale est.

PVRSVS quia est vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; Vt autem A C, ad C B, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B; vt D F, ad F E, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E;

ex ea

lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex C, ad rectangulum ſub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E: Et permutando vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum ſub A C, C B; ad rectangulum ſub D F, F E: Eſt autem quadratum ex A C, quadrato ex D F, commenſurabile, quod rectæ A C, D F, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum ſub A C, C B, rectangulo ſub D F, F E, commenſurabile eſt. *b* Eſt autem rectangulum ſub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum ſub D F, F E, illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quoniam vero eſt vt A C, ad C B, ita D F, ad F E, *c* ſuntque A C, C B, potentia incommenſurabiles, cum componant Maiorem A B; *d* Erunt quoque D F, F E, potentia incommenſurabiles. Itaque cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium, vt oſtenſum eſt; *e* erit tota D E, Maior. Maiori ergo commenſurabilis & ipſa Maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

a 10. decimi
b 4. decimi
c 4. decimi
d 1. decimi
e 41. decimi

THEOR. 52. PROPOS. 70.

lx. x.

RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

lx. x.

SIT (repetita figura antecedentis propoſ.) recta A B, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eiq; commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe potentem Rationale ac Medium. Conſtructis nim iiſdem quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. ompoſitum ex quadratis rectarum A C, C B. commenſurabile eſſe ompoſito ex quadratis rectarum D F, F E: *f* Eſt autem illud ompoſitum Medium, cum rectæ A C, C B, componant ipſam A B, otentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huis lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eoem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ib A C, C B, *g* quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ib D F, F E, atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale ſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt D F, E, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, F E, ſint poentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex pſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; *h* erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

f 41. decimi.
g 41. decimi.
h 41. decimi

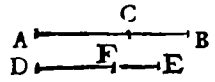
THEOR.

lxx. lxiv.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est.

SIT bina Media potens A B, diuisa in sua nomina ad C, commensurabilis D E, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & D E, esse bina Media potentem. Cõstructis iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in propos. 69. compositum quadratis rectarum A B, C B, composito ex quadratis rectarum D F, F E, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub A C, C B, esse commensurabile rectangulo sub D F, F E. a Cum ergo tam compositum quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum sub A C, C B, Medium sit, etiam ex coroll. propos. 24. huius lib. tam compositum ex quadratis rectarum D F, F E, quam rectangulum sub D F, F E, Medium erit. Sed & D F, F E, potentia incommensurabiles sunt, vt primo statim b ostendemus. Quia compositum ex quadratis rectarum A C, C B, & rectangulum sub A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hac propterea quod A B, bina Media potest; Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum est compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Est autem quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; c erit D E, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.



a 42. decimi.

b 42. decimi.

c 42. decimi.

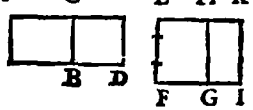
lxxj. lxv.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor rationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potentem.

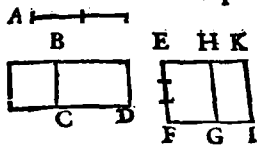
SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, vel maius quam C D, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationalis, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo maius

ius, *a* & expoſita Rationali E F, applicetur ad eam rectangu- a 45.
nE G, æquale ipſi A B, & ad H G, aliud H I, æquale ipſi C D, vt *primi.*
um E I, toti A D, ſit æquale. Et quoniam A B, Rationale eſt, &
D, Medium, erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium; quæ
m applicentur ad Rationalem E F, *b* erit E H, Rationalis, & ipſi b 21.
, longitudine commenſurabilis; *c* At vero H K, Rationalis, & *decimi.*
lem E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia E G, H I, c 23.
commenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod E G, *decimi.*
ationale ſit, at H I, Irrationale, nempe Medium; *d* erunt E H, d 10.
K, eandem cum illis habentes ra- *decimi.*



nem, incommenſurabiles longi- e 37.
dine. Rationales ergo ſunt E H, *decimi.*
K, potentia ſolum commenſura-
es; *e* Ac propterea E K, ex binis
minibus eſt. Et quoniam maius
nitur A B, quam C D, hoc eſt, E G, quam H I; erit quoque E H, f 1 *ſex.*
aior quam H K, *f* cum D H, H K, eandem rationem habeant,
iam E G, H I. Iam vero maius nomen E H, plus poterit quam
inus H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
l incommenſurabilis. Si plus poſſit E H, quam H K, quadrato
ctæ ſibi commenſurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex bi-
nominibus prima, cum E H, maius nomen oſtenſum ſit lon-
udine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpa-
um E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus pri-
i E K, atque adeo & ſpatium A D, compoſitum ex Rationali A B,
Medio C D, *g* Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus ap- g 55.
llatur. *decimi.*

SI vero E H, plus poſſit quam H K, quadrato rectæ ſibi longi-
line incommenſurabilis, erit E A, ex binis nominibus quarta,
defin. cum E H, maius nomen oſtenſum ſit longitudine com-
enſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, con-
ntum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque h 58.
eo & ſpatium A D, *h* Irrationalis eſt, quæ *vocatur Maior.* *decimi*
SIT deinde A B, minus quam C D, & eadem conſtruantur,
æ prius. Erit ergo, vt prius, E K, ex binis nominibus & E H, ipſi
F, longitudine commenſurabilis.



quia A B, minus eſt quam C D, hoc
, E G, quam H I; erit quoque recta
H, minor quam H K. Poterit igitur
rſus H K, maius nomen ipſius E K,
ię eſt ex binis nominibus, plus quam
H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſu-
bilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit H K, quam E H, qua-
ato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit E K, ex binis
nomini-

nominibus ſecunda; cum E H, minus nomen commenſurabi
longitudine Rationali E F, vt oſtenſum eſt. Quare recta po
ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nomi
ſecunda E K, atque adeo & ſpatium A D, ex Rationali A B,
a 56. decimi. dio C D, compoſitum, a Irrationalis eſt, quæ dicitur ex bini
diis prima.

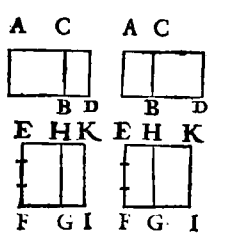
SI vero H K, plus poſſit quam E H, quadrato rectæ lin
longitudine incommenſurabilis, erit E K, ex binis nom
quinta, cum E H, minus nomen oſtenſum ſit longitudi
menſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E
tentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta
b 59. decimi. que adeo & ſpatium A D, b Irrationalis eſt, quæ Rationale
dium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium
ponantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demo
dum erat.

lxxij. lxvj.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

SI duo media inter ſe incommenſurabilia co
nantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex bin
diis ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommenſurabi
C D. Dico rectam quæ poteſt totum ſpatium A D, eſſe rel
nis Mediis ſecundam, vel bina Media potentem. Erit enim
ſus A B, vel maius, quam C D, vel minus: Æquale ſiquidem
erit; alias eſſent A B, C D, commenſurabilia. quod non p
Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propo
Et quia ſpatia A B, C D, ponuntur Media, & incommenſur



c 10. decimi. d 23. decimi. e 37. decimi.

erunt & ſpatia E G, H I, Media & i
menſurabilia; cum illis ſint æ
c Igitur rectæ E H, H K, eandem
lis habentes rationem, longitud
commenſurabiles ſunt; & vtraque
E G, H I, Media ſint, applicentur
Rationalem E F,) d Rationalis e
E F, longitudine incommenſura
Rationales ergo ſunt E H, H K, pote
ſolum commenſurabiles; e ac propo
E K, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero A B, maius po
quam C D; erit vt in antecedenti propoſ. E H, maius no
ipſius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ ſibi
gitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus p
E H, quã H K, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudi

m vtrumque nomen EH, HK, oſtenſum ſit longitudine incom-
nſurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus
tia. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali
; & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & ſpatium AD, a 57.
rrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur. *decimi.*

SI vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ longitudi-
ſibi incommenſurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK,
ngitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex bi-
s nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpa-
um EI, ſiue ſpatium AD, *b* Irrationalis eſt, quæ bina Media po- b 60.
is nominatur. *decimi.*

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD, non aliter propoſitum
ncludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media in-
ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales
nt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & re-
quas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter
eaſdem eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, *c* lati- c 23.
linem efficit Rationalem ipſi Rationali longitudine incommenſura- *decimi.*
em.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applica-
m, *d* latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61.

ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima ad Rationalem ap- *decimi.*
atum, *e* latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. e 62.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Ra- *decimi.*
nalem applicatum, *f* latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. f 63. *de-*

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, *g* latitudi- *cimi.*
n facit ex binis nominibus quartam.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, g 64.
Rationalem applicatum, *h* latitudinem facit ex binis nominibus *decimi.*
rtam.

OSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationa- h 65.
applicatum, *i* latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. *decimi.*

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & in- i 66.
ſe; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Ir- *decimi.*
ionales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nomi-
us: perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt
um, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.
IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit
tum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis no-
minibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Me-
diis ſe-

dius secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docet inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quanam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

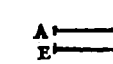
IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuslibet Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.

SIT enim quacunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus AC, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & ei



dimidia AD, vel DB, æqualis sumatur E. Dico E, mediam esse secundum Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & esse quæ ex binis nominibus. Quoniam enim AC, superat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem recta DB; per spicuum est, dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commensurabilis est longitudine toti AC, cum hæc illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, ex sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus se habere.

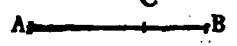
SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex aliis lineis irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quas in præcedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. lxxiii. lxviij.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. eſt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, AC; Et ſunt AB, AC, longitudine incommenſurabiles; *a* erunt



a 10. *decimi.*

commenſurabilia quadratum ex AB, & rectangulum ſub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ſolum commenſurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commenſurabilia. *b* Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero ſub AB, AC, commenſurabile rectangulum ſub AB, AC, bis. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum ſub AB, AC, bis contentum, incommenſurabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri oſtendimus. *c* Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile quadrato Rationali ex AB, linea Rationali deſcripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

b 16. *decimi.*

c *Coroll. propoſ. 17. huius.*

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

N A M cum A B, A C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; & erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius nomen A B, & minus A C. Auferatur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, & relinquatur ipsa tome B C.

a 37. *decimi.*

LXXIV. LXIX.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media A B, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B, sitque rectangulum sub A B, A C, Rationale. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim A B, A C, potentiâ sunt commensurabiles; erunt quadrata ex A B, A C, commensurabilia, *b* atque adeo, & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C. Est autem quadratum ex A C Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 14. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum A B, A C, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub A B, A C, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub A B, A C, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum A B, A C, rectangulo bis sub A B, A C. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale sit rectangulo bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C; erit quoque rectangulum bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C, incommensurabile rectangulo bis sub A B, A C. *d* Quare & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia sunt: Existente ergo rectangulo bis sub A B, A C, Rationali; erit quadratum ex B C, Irrationale; idemque & recta B C, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

b 16. *decimi.*

c 7. *decimi.*

d 17. *decimi.*

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

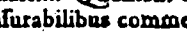
SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim A B, A C, sint Media potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; a erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, vt relinquatur B C, Media Apotome prima. a 38. decimi

THEOR. 58. PROPOS. 76. lxxv. lxx.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media A B, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B, sitque rectangulum sub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex A B, A C, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; *b* erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumq; ipsorum Medium, quod & rectæ A B, A C, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis vtriq; commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub A B, A C, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub A B, A C, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale sit rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C; superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium est, rectangulum bis sub A B, A C, quod etiam Medium est, quadrato ex B C. *d* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta B C, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.



b 16. decimi

c 7. secundæ

d 27. decimi

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

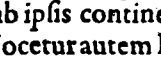
QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum
a 39. *decimi.* *commensurabiles, continentque Medium; a erit composita ex ipsis bi-*
rationalis, qua ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius no-
men AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex ma-
ioris AB, vt relinquatur BC, Media Apotome secunda.

lxxvj. lxxj.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; *b* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.



b 10. *decimi.*
c 7. *secundi.*
d 10. *defin.*

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: c *erit composita ex ipsis Irrationa-*
c 40. *decimi.* *lis, quæ vocatur Maior, cuius maius nomen AB, minus autem AC.*

Auferatur

ufertur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, & relinquatur linor B C.

THEOR. 60. PROPOS. 78. lxxvij. lxxij.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quilem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub pſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipſi A B, ıcommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadras Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam C eſſe Irrationalem. Quoniam enim compoſitum ex quadratis ctarum A B, A C, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangum ſub A B, A C, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub B, A C Rationale; *a* erit compoſitum ex quadratis rectarum a 10. B, A C, incommenſurabile rectangulo bis ſub A B, A C. *b* Eſt *defin.* ıtem compoſitum ex quadratis rectarum b 7. ſe- B, A C, æquale rectangulo bis ſub A B, *cundi.* C, vna cum quadrato ex B C. Igitur & re-

ngulum bis ſub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, incomenſurabile eſt rectangulo bis ſub A B, A C. *c* Sunt ergo rectan- c 17. dum bis ſub A B, A C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia. *decimi.* ım ergo rectangulum bis ſub A B, A C, Rationale ſit; *d* erit d 10. adratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur *defin.* tem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quaatum additum rectangulo bis ſub A B, A C, quod Rationale eſt, it totum compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, quod dium exiſtit. Sũ igitur à recta recta auferatur potentia incomnſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quin ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis contitur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendenm erat.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium oteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. ocetur autem cum Rationali Medium totũ efficiens.

CVM enim A B, A C, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faint compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod au- e 41.
m ſub ipſis continetur, Rationale; e erit compoſitæ ex ipſis Irratio- decimi.

nalis quæ nominatur Rationale ex Medium potens, cuius maius nomen est A B, minus autem A C. Auferatur igitur minus nomen A C, à maiori A B, vt B C, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

lxxviij. lxxiij. THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; compositio ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DEMONSTRATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadratis quàm rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque compositio ex ipsarum quadratis. Dico reliquam B C, esse irrationalem. *a* Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale est rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub A B, A C, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub A B, A C, continetur, sit commensurabile) quadrato ex B C. *b* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub A B, A C, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiam est. Si igitur à recta rectam &c. Quod ostendendum erat.

a 27. secundi.

A C B

b 27. decimi.

SCHOLIVM.

IN hac secundum propemodum quoque potuisset hoc theorema.

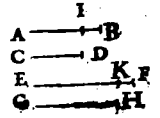
SI minori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

SIT CONIAM cum A B, A C, sint potentia incommensurabilia facientia compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eis Medium, incommensurabileque compositio ex quadratis ipsarum: erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potest. Sit autem maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur à maiori A B, vt relinquatur B C, cum Medio Medium efficiens.

LEM-

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & cundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quar-m; erit & vicissim idem excessus inter primam magni-idinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitque IB, cessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Di-eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. uoniam enim IB, excessus est inter AB, & D; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo 

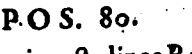
ualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & H; cum hæ magnitudines illis sint æquales, ngulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. 5. I. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponuntur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui ter CD, & GH. quod est propositum.

COROLLARIVM.

EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

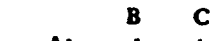
THEOR. 62. PROPOS. 80. lxxix.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Ra- lxxiv.
tionalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, po-tentia solum toti AC, commensurabilis. Dico 

AB, aliam Rationalem non congruere, quæ oti sit potentia tantum commensurabilis. Si im fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, t potentia solum commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; it AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis. Ratio-les ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Eodem

modo erunt & A D, B D, Rationales potentia ſolum commen-
rabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſi-
quadratis rectarum AC, B C, & rect-
lum bis ſub A C, B C, qui inter com-
tum ex quadratis rectarum A D,
rectangulũ bis ſub A D, B D; (ſuperat enim compoſitũ ex
tis rectarum A C, B C, rectangulum bis ſub A C, B C, qua-



a 7. ſecundi. A B; *a* quod compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C,
ſit rectangulo bis ſub A C, B C, vna cum quadrato ex A B,
dem modo compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D,
b 7. ſecundi. rectangulum bis ſub A D, B D, quadrato eodem ex A B; *b*
compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale
gulo bis ſub A D, B D, vna cum quadrato ex A B,) erit
permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus
poſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum
dratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub
& rectangulum bis ſub A D, D B. Eſt autem exceſſus inter
poſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius
vtrumque Rationale ſit. (Nam cum A C, B C, ſint Ra
tentia ſolum commenſurabiles; erunt earum quadrata
c 16. decimi. lia, & commenſurabilia. *c* Igitur & compoſitum ex ipſ
illorum commenſurabile eſt, atque adeo & Rationale;
Non aliter Rationale oſtendemus compoſitum ex
ctarum A D, B D.) Igitur & exceſſus inter rectangulum
A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatium Ra
d 22. decimi. *d* Et quia rectangulum ſub A C, B C, Rationalibus po
lum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario
tionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum
A C, B C, Medium. Eademque ratione Medium erit rec
e 27. decimi. bis ſub A D, B D. *e* Medium autem non ſuperat Medi
nali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B
ctangulum bis ſub A D, B D, Rationale ſpatium non
Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A
Rationalis non congruit, præter B C, quæ toti ſit pote
tum commenſurabilis. Apotomæ igitur vna tantum co
&c. Quod erat oſtendendum.

lxxx. lxxv.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congr
cta linea Media, potentia ſolum commenſurabil
ſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipſi congruat A C,
toti A C, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum
A C,

C, B C, ſit Rationale. Dico ipſi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantùm commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia D, Media toti A D, potentia tantùm commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media eſt potentia ſolùm ipſi A C, commenſurabilis; *a* erit A B C D *a* 24. decimi.
k A C, Media, cùm illi ſit commenſurabilis. Mediæ ergo ſunt A C, B C, potentia tantùm commenſurabiles. Quoniam verò idem exceſſus eſt inter compoſitũ ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, vt in propoſ. præcedenti oſtenſum eſt: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſitionis 27. huius lib. ſpatium Rationale; quod vtrumque ſit Rationale. (cùm enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub A C, B C, illi commenſurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis ſub A D, B D.) Igitur & exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; erunt & ipſarum quadrata Media, & commenſurabilia. *b* Igitur & compoſitum ex ipſis b 16. decimi.
trique ipſorum commenſurabile eſt, atque adeò & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D. *c* Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igi- A B C D c 27. decimi.
ur exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia Media non congruit, præter C, quæ toti ſit potentia ſolùm commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

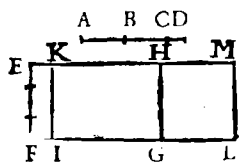
THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIÆ Apotomæ ſecundæ vna tantùm congruit rectalinea Media potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotomes ſecundæ A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantùm commenſurabilis, & rectangulum ſub A C, B C, ſit Medium. Dico ipſi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantùm commenſurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia

B D. Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Medium Exponatur Rationalis E F, a 45. primi. ad quam applicetur rectangulum E G, æquale compositeæ quadratis rectarum A C, B C, & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et deniq; aliud E L, æquale compo- b 7. sec. sito ex quadratis rectarum A D, B D. b Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, vna cum quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur sub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Media sunt, & potentia commensurabiles; (cùm enim B C, Media ponatur, c erit & A C, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt c 24. decimi. & earum quadrata Media, & commensurabilia.

Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtriquæ corum; atq; idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. d Igi- d 16. decimi. tur & E G, quod illi compositò æquale est, Medium est; quod cùm e 23. decimi. applicetur ad Rationalem E F, e erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium; quod cùm applicetur ad Rationalem f 23. decimi. K I, f erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius g 19. decimi. lib. g erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G, (cùm enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commensurabiles, h 16. decimi. erunt & earum quadrata commensurabilia. h Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplum, videlicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. i 10. decimi. i Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationem cum E G, K G, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles. Quapropter cùm ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, k 74. decimi. potentia solùm commensurabilis ipsi E H, k erit E K, Apotome, & illi congruens K H. Similiter demonstrabimus E K, Apotomen esse, & illi congruentem K M. Nom igitur Apotomæ vna tantùm congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens



iſtens toti: quod eſt abſurdum. Vnam enim tantùm congruere, demonſtratum eſt. Igitur mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. a 80. de cimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83. 81. 77.

MINORI vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium.

SIT Minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; at rectangulum ſub A C, B C, Medium. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadem præſtet. Sit enim, ſi fieri poteſt, alia congruens B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum ſub AD, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propoſ. 80. demonſtratum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autẽ exceſſus inter illa compoſita, atium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius libri; quod vumque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum s ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatium eſt Rationale, ſed & non Rationale eſt. (Cùm enim rectangulum ſub C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub A C, B C, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. Quare vnum non ſuperabit alterum Rationali. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A B C D

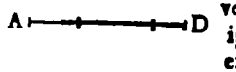
b 27. de cimi

THEOR. 66. PROPOS. 84. 83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſq;

cienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò ſub A C, B C, Rationale. Dico ipſi A B aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò ſub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt, cùm vtrumque ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi A B, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

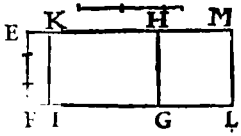


a 27. de cimi.

lxxxiv. lxxix.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipſi verò congruens B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſque & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Mediũ, & rectangulum ſub A C, B C, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, ita vt & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium ſit, & rectangulum ſub A D, B D, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium eſt; erit etiam E G, illi æquale, Me-

dium.

um. a Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine a 23. de
commensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Me- cimi.
um est; erit & eius duplum KG, Medium. b Igitur & recta b 23. de
H, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et cimi.
toniam KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cùm
ud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incom-
ensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC:
erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incom- c 14. de
ensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cimi.
im EG, KG, rationem, d longitudine incommensurabiles d 10. de
nt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt poten- cimi.
a solùm commensurabiles. Quare cùm ex Rationali EH, au-
ratur Rationalis KH, potentia solùm commensurabilis ipsi
H; e erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostē- e 74. de
mus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igi- cimi.
r Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod est absur-
um. f Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igi- f 80. de
r ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm con- cimi.
uit, &c. Quod erat ostendendum.

DEFINITIONES TERTIÆ.

XPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine mmensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudi- commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ tionali sit longitudine commensurabilis; Vocetur otome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato re- lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine mmensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

SI

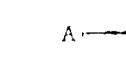
QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum
a 39. decimi. *commensurabiles, continentque Medium; a erit compositum ex ipsis* [illegible] *rationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen est AB, minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, & relinquatur BC, Media Apotome secunda.*

lxxvi. lxxj.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC,



atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Me-
b 10. decimi. dium: hoc est, Irrationale; *b* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC.
c 7. secundi. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Ra-
d 13. defin. tionale. *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est: & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à minori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

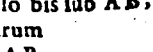
NAMQVE cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ
[illegible] *quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem*
[illegible] *tinetur, Medium: erit compositum ex ipsis Irrationale.*
[illegible] *Maior, cuius maius nomen AB, minus autem AC. Auf-*

ufertur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, & relinquatur inor B C.

THEOR. 60. PROPOS. 78. lxxvij. lxxij.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabi- exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum qui- em ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vo- tur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipſi A B, ommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadra- Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam eſſe Irrationalem. Quoniam enim compoſitum ex quadratis arum A B, A C, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangu- ſub A B, A C, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub , A C Rationale; *a* erit compoſitum ex quadratis rectarum a 10. , A C, incommenſurabile rectangulo bis ſub A B, A C. *b* Eſt *defin.* em compoſitum ex quadratis rectarum b 7. *ſe-* , A C, æquale rectangulo bis ſub A B, *cundi.* , vna cum quadrato ex B C. Igitur & re- ngulum bis ſub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, incom- nſurabile eſt rectangulo bis ſub A B, A C. *c* Sunt ergo rectan- c 17. um bis ſub A B, A C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia. *decimi.* m ergo rectangulum bis ſub A B, A C, Rationale ſit; *d* erit d 10. dratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur *defin.* em cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius qua- um additum rectangulo bis ſub A B, A C, quod Rationale eſt, t totum compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, quod dium exiſtit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incom- ſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum qui- ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis conti- ir, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtenden- erat.



SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium eſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. cetur autem cum Rationali Medium totũ efficiens.

VM enim A B, A C, ſint potentia incommenſurabiles, quæ fa- t compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod au- ſub ipſis continetur, Rationale; e erit compoſitum ex ipſis Irratio- e 41. *decimi.*

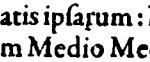
nalis, qua nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius men est A B, minus autem A C. Auferatur igitur minus nomen A maiori A B, vt B C, cum Rationali Mediũ totum efficiens relinqua

lxxviij. lxxiij. THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommensu bilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis contin tur, Medium, incommensurabileq; composito ex qu dratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autei cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A l incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadr tis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq compositio ex ipsarum quadratis. Dico reliquam B C, esse Irratio

a 27. secundi.



nalem. a Quoniam enim compositum e quadratis rectarum A B, A C, æquale est rectangulo bis sub A B, A C, vna cum qua drato ex B C, superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub A B, A C, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub A B, A C, continetur, sit commensurabile) quadrato ex

b 27. decimi.

B C. b Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub A B, A C, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

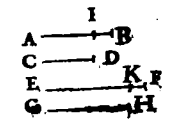
QVONIAM cum A B, A C, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur minus nomen A C, ex maiori A B, vt relinquatur B C, cum Medio Medium totum efficiens.

LEM-

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & cundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quar-m; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magni-idinem, & tertiam, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, ſitque IB, ceſſus inter AB, CD, æqualis exceſſui KF, inter EF, GH. Di-eundem eſſe exceſſum inter AB, EF, qui eſt inter CD, GH.



quoniam enim IB, exceſſus eſt inter AB, & D; erit AI, ipſi CD, æqualis. Eodem modo ualis erit EK, *ipſi GH. Idem igitur exceſ-is erit inter AI, & EK, qui inter CD, & H; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ngulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. b. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales po-entur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, & EF, qui ter CD, & GH. quod eſt propoſitum.*

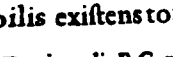
COROLLARIVM.

EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam ha-ntes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam, quoniam hu-ſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem ſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quar-m magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitu-nem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc l, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80. lxxix. lxxiv.

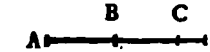
APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Ra-onalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, po-tia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ſi AB, *aliam Rationalem nõ congruere, quæ* oti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si



aim fieri poteſt, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipſi AD, potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; ic AC, illi ſolum potentia commenſurabilis, Rationalis. Ratio-ales ergo ſunt AC, BC, potentia tantũ commenſurabiles. Eodem

modo erunt & A D, B D, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum e quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis ſub A C, B C, qui inter compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulū bis ſub A D, B D; (ſuperat enim compoſitū ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis ſub A C, B C, quadrato



a 7. ſecundi. A B; *a* quod compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale ſit rectangulo bis ſub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Eodem modo compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſuperat

b 7. ſecundi. rectangulum bis ſub A D, B D, quadrato eodem ex A B; *b* cum & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale ſit rectangulo bis ſub A D, B D, vna cum quadrato ex A B,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C & rectangulum bis ſub A D, D B. Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quo vtrumque Rationale ſit. (Nam cum A C, B C, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; erunt earum quadrata Rationalia, & commenſurabilia. c Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique

c 16. decimi. illorum commenſurabile eſt, atque adeo & Rationale; ex 9. decim. Non aliter Rationale oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatium Rationale eſt.

d 22. decimi. *d* Et quia rectangulum ſub A C, B C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub A C, B C, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. e Medium autem non ſuperat Medium Ra-

e 27. decimi. tionali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, Rationale ſpatium non eſt. ſed Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, ſibi Rationalis non congruit, præter B C, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit &c. Quod erat oſtendendum.

lxxv. lxxv.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipſi congruat A C, Media toti A C, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum A C,

C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia D, Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media est potentia solùm ipsi A C, commensurabilis; a erit A C, Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt A C, B C, potentia tantùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositũ ex quadratis rectarum A C, C B, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumque sit Rationale. (cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D.) Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile est, atque adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. c Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

a 24. decimi.

b 16. decimi.

c 27. decimi.

THEOR. 64. PROPOS. 82. lxxxj. lxxvj.

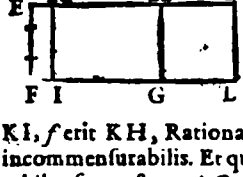
MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secunda A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantùm commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia

B D. Media toti A D, potentia tantùm commenſurabilis, ſit quæ rectangulum ſub A D, B D, Medium Exponatur Rationalis E F: a ad quam applicetur rectangulum E G, æquale compoſito ex quadratis rectarum A C, B C, & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et deniq; aliud E L, æquale compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. b Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale eſt rectangulo bis ſub A C, B C, vnà cum quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur ſub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei quod bis continetur ſub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Media ſunt, & potentia commenſurabiles; (cùm enim B C, Media ponatur, c erit & A C, ipſi potentia commenſurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia.

a 45. primi.
b 7. ſec.
c 24. decimi.

Ergo & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique eorum; atq; idcirco & Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. d Igitur & E G, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cùm applicetur ad Rationalem E F, e erit E H, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, B C, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cùm applicetur ad Rationalem K I, f erit K H, Rationalis ipſi K I, hoc eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtq; vt A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, B C, vt oſtendimus lemmate 3. ad propoſ. 19. huius lib. g erit quadratum ex A C, incommenſurabile rectangulo ſub A C, B C. Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, rectangulum E G, (cùm enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commenſurabiles; h erunt & earum quadrata commenſurabilia. b Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique ipſorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo ſub A C, B C, commenſurabile eſt eius duplum, videlicet K G. Igitur & E G, ipſi K G, incommenſurabile eſt, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus, i Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationem cum E G, K G, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles. Quapropter cùm ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, k potentia ſolùm commenſurabilis ipſi E H, k erit E K, Apotome, & illi congruens K H. Similiter demonſtrabimus E K, Apotomen eſſe, & illi congruentem K M. Non igitur Apotomæ vna tantùm congruit recta linea Rationalis potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens



d 16. decimi.
e 23. decimi.
f 23. decimi.
g 10. decimi.
h 16. decimi.
i 10. decimi.
k 74. decimi.

tiſtens toti: quod eſt abſurdum. Vnam enim tantùm congruere, demonſtratum eſt. Igitur mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. a 80. de cimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83. 81.

MINORI vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium. 77.

SIT Minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; at rectangulum ſub A C, B C, Medium. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadem præſtet. Sit enim, ſi fieri poteſt, alia congruens B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum ſub A D, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propoſ. 80. demonſtratum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D. Eſt autē exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatium eſt Rationale, ſed & non Rationale eſt. (Cùm enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub A C, B C, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. ♭Quare vnum non ſuperabit alterum Rationali. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A B C D

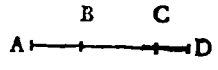
b 27. de cimi.

THEOR. 66. PROPOS. 84. 83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſq;

cienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò ſub A C, B C, Rationale. Dico ipſi A B aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò ſub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cùm vtrumque ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi AB, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

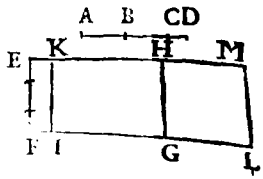


a 27. decimi.

lxxxiv. lxxix.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipſi verò congruens B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſque & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C Mediũ, & rectangulum ſub A C, B C, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, tam & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium ſit, & rectangulum ſub A D, B D, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium eſt; erit etiam E G, illi æquale, &

um. *a* Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. *b* Igitur & recta H, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniam KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cùm illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC, erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, *d* longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solùm commensurabilis ipsi BH; *e* erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod est absurdum. *f* Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. decimi.
b 23. decimi.
c 14. decimi.
d 10. decimi.
e 74. decimi.
f 80. decimi.

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

SI

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

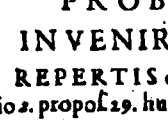
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, recta linea, quæ reliquæ quintæ post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

85. 80. PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus A C, non sit quadratus; ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E F. Eritque E F, cùm commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad numerum A C, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, esse primam Apotomen.



a 6. dec. a Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo E F, ostensa sit Rationalis; erit & G F, Rationalis. Quia verò A B, A C, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantùm commensurabiles; c atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E F, plus quàm recta G F, quadrato ex H. Et quia est, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati.

b 9. dec.

c 74. decim.

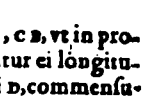
Igitur

gitur & quadrata ex B F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; a Ac propterea rectæ B F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota B F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem B F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit B G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 29. decimi.

PROBL. 20. PROPOS. 87. 86. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis G F, eritque G F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex B F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico B G, esse secundam Apotomen. Quoniam b enim quadrata ex G F, B F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ G F, B F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo G F, sit ostensa Rationalis; erit quoque B F, Rationalis. Quia verò numeri A C, A B, atque adeò & quadrata ex G F, B F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; c erunt G F, B F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt G F, B F, potentia solùm commensurabiles; d Ideoque B G, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta B F, plus quàm G F, quadrato ex H. Quoniam ergo est vt A C, ad A B, ita quadratũ ex G F, ad quadratum ex B F; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita quadratum ex B F, ad quadratum ex G F: Ostendemus tam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi B F, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cùm tota B F, plus possit, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens G F, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit B G, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundã Apotomen. Quod erat faciendum.



b 6. decimi. c 9. decimi. d 71. decimi.

PROBL. 21. PROPOS. 88. 87. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propositione 86. sumatur alius numerus I, vt in propositione 51. huius libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum

a 6. dec. tum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. *a* Eruntque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeò & rectæ D, & E F, commensurabiles, saltem potentiâ. Existente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionem non habent

b 9. dec.

quam numeri quadrati; *b* erunt rectæ D, & E F, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, ex eodem corollario propos. 6. hu-

c 6. dec ius lib. Dico E G, esse tertiam Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles saltem potentia. Cùm ergo E F, ostensa sit Rationalis, erit & G F, Rationalis, cùm illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia A B, A C, atque adeò & quadrata ex E F, G F, pro-

d 9. dec portionem nõ habent, quam numeri quadrati; *d* Erũt rectæ E F, G F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea cùm ex E F,

e 74. dec auferatur G F, potentia illi solùm commensurabilis; reliqua E G, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; & vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F: Non habent autem numeri I, & A C, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & G F, proportionem habe-

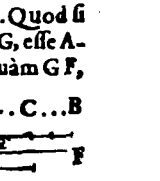
f 9. dec. bunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & G F, longitudine incommensurabiles Igitur neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Potest iam E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H; Ostendemus quidem, vt in propos. 86 rectam H, esse ipsi E F, longitudine commensurabilem. Quapropter cùm tota E F, plus possit quàm congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defin. E G, tertia Apotome. Inuenta ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 3. in

s lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F; eritque propterea & E F, Rationalis. Quod si fiqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H. Et quia est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratū ex H. Cùm ergo A B, & C B, proportionē non habeant, quā numeri quadrati; a erunt a 9. dec. rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, si, longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

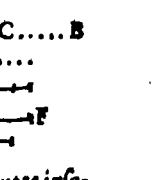


PROBL. 23. PROPOS. 90. lxxxiii. lxxxiv.
INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS (repetita figura proximè antecedentis propositionis) duobus numeris A C, C B, vt in propositione præcedenti fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt A B, ad C B, ita quadratum E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91. xc. lxxxv.
INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeò neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D,



nali D. Possit iam E F, plus quàm G F, q
drato rectæ H, quam ostendemus, v
propos. 89. longitudine incommensura
lem esse ipsi E F. Igitur cùm tota E F, p
possit, quàm congruens G F, quadrato
ctæ H, sibi longitudine incommensu
bilis, & neutra ipsarum E F, G F, longi
dine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta
potome. Inuenimus ergo sextã Apotomen. Quod erat faciendu

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratio
vt Theon docet hoc loco.

a 49. decimi. *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. a Reperiat*
prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen A C, &
nus C B. Abscissa igitur ex A C, recta C D, qua æqualis sit ipsi C
Dico A D, esse primam Apotomen. Quoniam enim A C, C B, Rati
nales sunt potentia tantùm commensurabiles; erunt etiam A C, D
b 74. decimi. *Rationales potentia tantùm commensurabiles. b Est ergo A D, A*

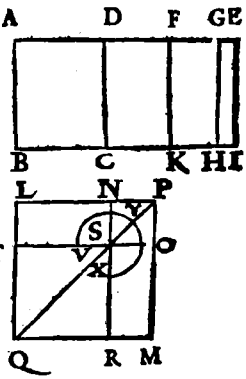
potome. Et quia A B, plus potest, quàm C B, hi
est, quàm D C, quadrato rectæ lineæ sibi longi
tudine commensurabilis: & est A C, Rationa
exposita longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex bi
nis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, A D
prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus
dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, & ex secunda secundam
ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex se
xta, sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.

xcj. THEOR. 68. PROPOS. 91.
lxxxvj. SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotomæ prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Apotomen esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solùm commensurabiles; & tota A E, longitudine commensurabilis Rationali A B; & deniq; eadem A E, tota plus poterit, quàm congruens D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc est, quartæ parti quadrati ex D E, applicetur ad A E, rectangulum æquale
c 18. decimi. sub A G, G E, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17.
d 16. decimi. huius lib. Et quia A E, plus potest, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: c erunt rectæ A G, G E, longitudine commensurabiles; d Ac propterea & vtraque totî A E,

longi-

agitudine commensurabilis erit: Est autem AE, Rationali AB, agitudine commensurabilis. a Igitur & vtraq; AG, GE, ipsi B, longitudine est commensurabilis; atque ex definitione 6. tionalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, parallelis, quæ ipsi C, productæ occurrant in HI, b erit vtrumque rectangulum H, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia itaque OF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE; & DE, agitudine incommensurabilis est tionali AB; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cùm & I, sit eidem AB, longitudine cõmensurabilis; c essent AE, DE, longitudine quoq; commensurabiles. God est absurdum. ponuntur e- m solùm potentia commensura- es;) d erit etiam vtraq; ipsarum E, FE, ipsi AB, longitudine in- nmensurabilis. Et quoniã vtraq; , FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationalis est; Erunt pterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tan- n commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, e erit umque rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus entia tantùm commensurabilibus, Medium.



a 12. decimi.

b 20. decimi.

c 12. decimi.

d 14. decimi.

e 22. decimi.

AM verò ipsi AH, f fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, f 14. sexti. ale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, an- um LPM. g Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem g 26. sexti. netrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quo- n igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem, æqua- t quadrato ex FE, h erunt tres rectæ AG, FE, GE, propor- ales; i Ac propterea cùm AH, FI, GI, eandem cum ipsis ha- at tationem; erit FI, medium proportionale inter AH, GI, eſt, inter quadrata LM, NO, ilſis æqualia. Est autem inter ea- LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoque portionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: k Sed FI, æquale est DK. & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum , toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem otum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO. tur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac pro- rea recta TS, potest ſpatium AC. Dico TS, Apotomen eſſe.

h 17. sexti.

i 1. sexti.

k 36. decimi.

QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Ratio- a; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoque quadrata LM,

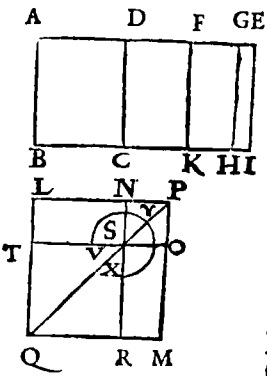
N O, Rationalia, atque adeò & rectæ T O, S O, Rationales
ſus quia F I, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, illi æquale,
Incommenſurabilia ergo ſunt L O, & N O, cùm vnum ſit
a 1. *ſext.* nale, alterum verò Rationale. Igitur rectæ T O, S O, *a*
bro. *de-* rationem habentes cum L O, N O, *b* longitudine incom-
cimi. rabiles ſunt; *c* Atque idcirco reliqua T S, Apotome eſt
c 74. *de* tium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma pri-
cimi. Quod demonſtrandum erat.

XCII. lxxxvij.

THEOR. 69. PROPOS. 9

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Ap
ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ
tome prima.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali
potoma ſecunda A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C,
diæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi A D, congruens re
runt ergo A E, D E, ex definitione Apotomæ ſecundæ,
potentia tantùm commenſurabiles; & congruens D
dine commenſurabilis Rationali A B; & denique A
terit, quàm D E, quadrato rectæ ſibi commenſu



d 18. *de-* tudine. Secetur D E, bi
cimi. & reliqua omnia conſtru
propoſitione præcedenti.
que rurſus, vt in antece
poſitione, A G, G E, lo
e 6. *de-* commenſurabiles; *e* Ac
cimi. & vtraq; toti A E, longitud
menſurabilis. Eſt autem
tionali A B, longitudin
menſurabilis: (Si enim
ſurabilis eſſet ipſi A B, lon
cùm D E, eidem A B, pon
f 12. *de* gitudine commenſurabili
cimi. A E, D E, inter ſe quoque
ſurabiles longitudine. Q
ſurdum. ponuntur enim potentia tantùm commen
g Igitur & vtraque ipſarum A G, G E, longitudine inco
g 14. *de* rabilis eſt eidem A B. Eſt autem vtraque A G, G E, Ratio
cimi. commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt
A G, quàm A B, G E, potentia ſolùm commenſurabiles,
h 22. *de* idcirco rectangulum vtrumque A H, G I, contentum ſub
cimi. nalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium e
ſus quia vtraque D F, F E, ipſi D E, longitudine commenſu

; & ponitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabi-
; erit quoque vt in scholio propositionis 12. huius lib. ostendi-
s eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis vtra-
: D F, F E; atque adeò & Rationalis. a Vtrumque ergo re- a 20. de
ngulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine cum-
mmensurabilibus, Rationale est. Iam verò, vt in præcedenti
opos. demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico
S, Mediæ Apotomen esse primam.

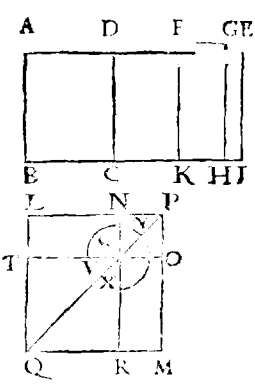
QVONIAM enim A G, G E, longitudine sunt commen-
abiles, b erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia ratio- b 19. de
m, commensurabilia; atque adeò & L M, N O, quadrata illis cum-
ualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe
æ T O, S O, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt
tem & Mediæ, quòd quadrata L M, N O, Mediis A H, G I, æ-
alia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse) Media sint. Et
oniam F I, atque adeò sibi æquale L O, Rationale est, propter-
que Medio N O, incommensurabile; c erunt rectæ T O, S O, ei c 23. de
ndem cum illis rationem habentes, longitudine incommen- cum-
abiles. Cùm ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabi-
; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantùm commensurabiles.
m ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; d erit d 21. de
S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub cum-
tionali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma
rtia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apoto-
: secunda.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & A-
toma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse
diæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens D E.
unt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales
rentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E,
ngitudine commensurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus
terit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensura-
is. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92.
untque rursus, vt ibi, A G, G E, longitudine inter se commen-
rabiles; e Ac propterea & vtraque toti A E, longitudine com- e 15. de
ensurabilis erit. Est autem A E, posita incommensurabilis lon-
tudine Rationali A B. f Igitur & vtraque A G, G E, eidem A B, f 13. de
ngitudine erit incommensurabilis. Cùm ergo vtraque A G,
E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam
B, A G, quàm A B, G E, Rationales potentia solùm commensu-

a 22. decimi. rabiles; a Ac propterea vtrumq; rectangulum A H, G I, Medium erit. Rursus quia D E, longitudine positur incommensurabilis Rationali A B; erit quoq; vtraq; D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis existens, b eidem A B, longitudine incommensurabilis. Cùm ergo vtraq; D F, F E, Rationali D E, commensurabilis sit Rationalis; erunt tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles; c atq; propterea vtrumque rectangulum D E, F L Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Mediæ Apotomen secundam.



b 14. decimi.

c 22. decimi.

QVONIAM enim A H, G I, Media sunt ostensa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commensurabiles esse, d commensurabilia sunt; Erunt & quadrata L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, commensurabiles sunt, saltem potentia. At verò quia A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estq; ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis G E, ipsi verò D E, commensurabilis est longitudine F E; erunt ex scholio propos. 14. huius libri e G E, F E, longitudine incommensurabiles; e ac propterea G I, I I, eandem rationem habentia, quam G E, hoc est, illis æqualis N O, I O, incommensurabilia. Quare T O, S O, eandem rationem habentes, quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt T O, S O, potentia solùm commensurabiles. Et quoniam continent L O, Medium; (cùm enim L O, æquale sit ipsi F I, rectangulo ex propos. 21. quod Medium esse ostendimus; erit L O, Medium.) f erit T S, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium continetur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 76. decimi.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI spatium * contineatur sub Rationali, & Apotomæ quartæ; recta linea spatium potens Minor est.

* CV. lxxxix.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E,

E, Rationales potentia solùm commensurabiles, ex definitione potomæ quartæ; & A E, longitudine commensurabilis Rationali A B, & eadem A E, plus potetit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. a Erunt ergo A G, G E, incommensurabiles longitudine, quandoquidem A E, plus potest quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad A E, applicatum est rectangulum sub A G, G E, æquale quartæ parti quadrati ex D E, deficiensque figura quadrata. Et quia A E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine commensurabilis; b erit rectangulum A I, Rationale. Rursus quia D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine incommensurabilis, c erit D I, atq; adeò & eius dimidium F I, Medium. Amplius cùm A G, G E, sint longitudine incommensurabiles; d incommensurabilia erunt A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia. Iam verò similiter demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse minorem.

a 10. de cimi.
b 20. de cimi.
c 22. de cimi.
d 10. de cimi.

QVONIAM enim ex constructione, rectangulo A I, æquale est compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum T O, S O, Rationale. Item quia F, Mediũ est ostensum; erit & L O, contentum sub T O, S O, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam A H, G I, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeò rectæ T O, S O, potentia incommensurabiles. Quapropter cùm T O, S O, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum verò sub ipsis, Medium; e erit reliqua T S, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. de cimi.

THEOR. 72. PROPOS. 96. xcv. xc.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium A C, (repetita figura proximè antecedente) sub Rationali A B, & Apotoma quinta A D. Dico rectam lineam, quæ spatium A C, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & D E, Rationali A B, cõmensurabilis longitudine; Et deniq; A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo

rursus, vt in antecedenti propos. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali A B, vt in propos. 93. diximus; *a* erit rectangulum A I, Medium. Item quia D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine commensurabilis; *b* erit D I, atque id & eius dimidium F I, Rationale. Rursus erunt, vt in præcedenti propos. A H, G I, incommensurabilia; poteritque, vt ostensum est in propos 92. recta T S, spatium A C. Dico T S, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

a 22. *de eimi.*

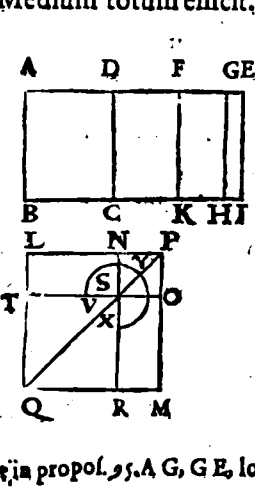
b 20. *de eimi.*

QVONIAM enim ostensum est A I, Medium esse; erit & compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus F I, Rationale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, contentum, cùm illi fiet æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demonstratum. Igitur cùm T O, S O, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum verò sub ipsis, Rationale; *c* erit reliqua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

c 78. *de eimi.*

xcvj. xcj. THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma sexta A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, Rationali A B, commensurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua construantur, vt in propos. 95. A G, G E, longitudine incõmensurabiles. Et quia tam

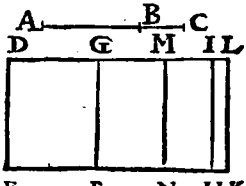
tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AE, longitudine incommensurabilis; a erit tam AI, quam DI, atque adeo a 22. huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propos. 95. AH, *decimi.* GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; b Erunt AI, DI, eandem habentia cum b 10. illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, *decimi.* commensurabilia sint, c erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam c 14. vero demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium *decimi.* AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

QVONIAM enim AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoq; LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO, propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarū quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; d erit reliqua TS, ea, quæ d 79. cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur *decimi.* sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 74. PROPOS. 98. xcvij. xciij.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; e & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, e 45. *primi.* latitudinem faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totū DK, æquale sit composito ex quadratis rectarū AC, BC. f Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; si auferantur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifa-



f 7. *secundi.*

riam in M, ductaque M N, ipſi D E, parallela, erit M K, æqualerectangulo ſub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales ſunterunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia; ideoq; commen-
a 16. decimi. ſurabilia. a Cum ergo & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, vtrique ipſorum ſit commenſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale D K, Rationale. Quod cum applicetur ad
b 22. decimi. Rationalem D E, b erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia A C, B C, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis, atque adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationa-
c 23. decimi. lem G F; c erit G L, Rationalis ipſi G F, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Me-
d 10. decimi. dium, hoc eſt, Irrationale, incommenſurabilia ſunt; d erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, G K, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum com-
e 74. decimi. menſurabiles; e Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam eſſe.

QVONIAM enim per Lemma propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub A C, B C, hoc eſt, M K, medium eſt proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc eſt, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atque adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue propor-
f 17. ſexti. tionales ſunt. f Quare rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex M L, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc eſt, illis æqualia D H, I K, commenſu-
g 10. decimi. rabilia ſunt, g erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales ſint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum ſub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficienſque figura quadrata; atque ſit oſtenſa D I, ipſi I L,
h 18. decimi. longitudine commenſurabilis; h poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cum ſit oſtenſum D G, eſſe Apotomen, & totam D L, plus poſſe, quam G L, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eandem totam commenſurabilem eſſe longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod oſtendendum erat.

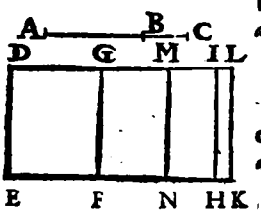
xcviij. xciij.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale: *a* Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secundam esse. Constituantur enim eadem, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK æqualia sint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commensurabilia; *b* ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propos 24. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, *c* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, *d* erit GL, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; *e* erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; *f* Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.
b 16. decimi.
c 23. decimi.
d 22. decimi.
e 10. decimi.
f 74. decimi.

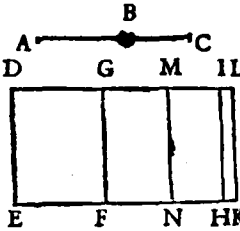
THEOR. 76. PROPOS. 100. XCII. XCIV.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantum commensurabiles, contineatq; Medium: *g* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apoto-

g 45. primi.

Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Oſtendemus iam, vt in
a 23. decimi. propoſ. præcedenti D K, Medium eſſe, a atque adeo rectam D L, Rationalem ipſi D E, longitudine incommenſurabilem. Et quia rectangulum ſub A C, B C, Medium eſt, atque ob id & eius duplum G K, b erit quoque G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quia vero A C, B C, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt A C, ad B C, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C. B C, c erit quadratum ex A C, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. d Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C; quod quadrata ex rectis A C, B C, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub A C, B C, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub A C, B C. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, B C, hoc eſt, ipſi G K. e Atque adeo rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, potentia ſolum commenſurabiles; f Ac proinde reliqua D G, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus D L, totam plus poſſe, quam G L, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum D L, G L, Rationali D E, longitudine ſit commenſurabilis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.



b 23. decimi.
c 10. decimi.
d 16. decimi.
e 10. decimi.
f 74. decimi.

c. xcv.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia incommenſurabiles ſint, facientesque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationales; rectangulum vero ſub A C, B C, Medium: g & ad Rationalem D E, applicetur ſpatium D F, quadrato ex A B, æquale latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, illi æquale D K, Rationale eſt; h erit D L, Rationalis ipſi D E, lon-

g 45. primi.
h 21. decimi.

DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium est; *a* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam Dκ, Rationale, & Gκ, Irrationale, nempe Medium incommensurabilia sunt; *b* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles; *c* Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, Iκ, incommensurabilia; *d* Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; *e* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. *decimi.*
b 10. *decimi.*
c 74. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 19. *decimi.*

THEOR. 78. PROPOS. 102. CL. XCVJ.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: *f* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale Dκ, Medium est; *g* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum Gκ, Rationale est; *h* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia Dκ, Medium seu Irrationale, & Gκ, Rationale, incommensurabilia sunt: *i* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensura-

f 45. *primi.*
g 23. *decimi.*
h 21. *decimi.*
i 10. *decimi.*

mensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; a Atque id circo reliqua D G, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti proposit. demonstrabimus D L, tam plus posse quam G L, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens G L, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

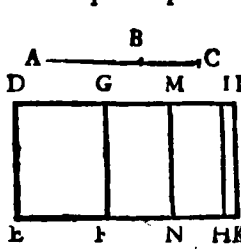
a 74. decimi.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

ciij. xcvij.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. b Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato, ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciés D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quam rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; c Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum G K, commensurabilia; d Erit & G K, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile; e propterea; rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; f Atq; idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter vt propos. 101. totam D L, plus posse, quam congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.



b 45. primi.

c 23. decimi.

d 14. decimi.

e 10. decimi.

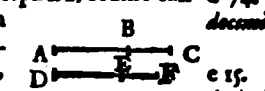
f 74. decimi.

THEOR

THEOR. 80. PROPOS. 104. eiij. xcviij.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB; *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; *c* Erunt quoque AC, DF, nec non & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoque et iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, *d* reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, *e* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; *f* erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; *g* erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



a 12. *sexti.*
b 12. *quinti.*
c 10. *decimi.*
d 74. *decimi.*
e 15. *decimi.*
f 12. *decimi.*
g 14. *decimi.*

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, *h* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

h 15. *decimi.*

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de

huius

lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta D E, commensurabilis sit ipsi A B, potentia tantum, eodem modo demonstrari poterit (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis) & D E, Apotomen esse: At non posse fieri, illam esse ordine eandem ipsi A B. Non enim sequitur, si A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & D E eadem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At vero D F, potentia tantum ex hypothesi. Imò vero, si A B sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt D E, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eiusdem ordinis.

SIT enim A B, prima Apotome, secunda, quarta vel quinta, cui congruens B C, & sit D E, ipsi A B, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse cui congruentem E F, & partes A B, B C, ad partes D E, E F, easdem proportionem habere cum totis A C, D F. Dico nullam rationalem D E, Apotomen esse ordine eandem ipsi A B. Nam si fieri potest, sit ipsa A B, Apotome prima. Quo posito, erit tam A C, tota, quam D F ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine: a atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt a 12. decimi. *A C, & D F. Quare cum sit vt A C, ad D F, ita A B, ad D E, erunt* b 10. decimi. *quoque A B, & D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque A B, D E, Apotome prima erit. Eadem ratione neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim cui congruens B C, E F, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & A B, D E, longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.*

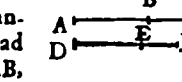
SEMPER tamen verum erit, si A B, sit Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam D E, quæ ipsi A B, potentia solum commensurabilis, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem (vt. Nam hoc posito, poterit A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt A C, ad B C, ita c 11. *E F, c poterit quoque D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi* d 14. decimi. *commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, sit Apotome quarta, vel sexta, sta vt A C, plus possit, quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit quoque D E, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quamvis ordine non eadem ipsi A B. Quare cum sit vt A C, ad B C, ita D E, ad E F, d poterit quoque A... quam E F, quadrato recta sibi longitudine incommen... Quare ex defin. erit A B, Apotome quarta, vel quinta, vel ...*

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, dem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. CIV.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem. CIX.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen esse, & ipsi AB, ordine eandem. *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, *d* erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ, *e* erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniam enim est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles; *f* erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; *g* atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. *h* Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.



a 12. sexti.
b 12. quinti.
c 10. decimi.
d 24. decimi.
e 75. & 76. dec.
f 10. decimi.
g 76. decimi.
h 76. decimi.

cv.cxvj c. THEOR. 82. PROPOS. 106.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico DE, Minorem esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus AC, ad BC, eandem habeant rationem, quam AC, ad DF, EF, eandem habeant rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; a erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratum ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quoniam & rectæ BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. b Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstratum est, rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, est commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium: Erit quoque rectangulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, sunt quoque AC, BC, potentia incommensurabiles; c erunt & DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub iisdem DF, EF, Medium; d erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. sexti.

b 10. decimi.

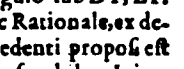
c 10. sexti.

d 77. decimi.

cvj. cxvij. cj. THEOR. 83. PROPOS. 107.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT recta A B, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; at rectangulum ſub A C, B C, Rationale: Sit autem D E, ipſi A B, commenſurabilis quocunque modo. Dico & D E, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus, vt in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub A C, B C, commenſurabile eſſe rectangulo ſub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9 Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ D F, E F, potentia incommenſurabiles. Igitur cum D F, E F, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; a erit D E, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108. cvij.

RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt. cij.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint potentia incommenſurabiles, facientesq; compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium quoq; & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autem D E, ipſi A B, quomodolibet commenſurabilis. Dico & D E, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus ſimiliter, vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. oſtendemus, rectangulum ſub A C, B C, commenſurabile eſſe rectangulo ſub D F, E F. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propoſ. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommenſurabiles. Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſt compoſitũ ex quadratis rectarum D F, E F, vt dictum eſt; & rectangulo ſub A C, B C, commenſurabile rectangulum ſub D F, E F; Sunt autem compoſitum

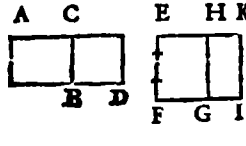
ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum sub A C, B C per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholi propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D E, E F, & rectangulum sub D F, E F, incommensurabilia. Quocirc cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsi Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; a erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

a 79. decimi.

evIIIj. THEOR. 85. PROPOS. 109.

cIIIj. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR à Rationali A D, Medium C D. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum A B, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis E F, b ad quam applicetur rectangulum E G, æquale ipsi A B, & ad G H, aliud H I, æquale ipsi C D, ita vt totum E I, toti A D, sit æquale. Quoniam igitur E I, æquale Rationali A D, Rationale est; c erit E K, Rationalis, Rationali E F, longitudine commensurabilis. Rursus quia H I, Medio C D, æquale Medium est, d erit H K, Rationalis, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itaque cum E K, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi E F, at H K, eidem E F, longitudine incommensurabilis, e erunt E K, H K, lõgitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles: f propterea que reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabis. Si plus potest E K, quam H K, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota E K, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome prima. Quare recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc est, spatium A B, sibi æquale, g Apotome est. Si vero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota E K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali E F; erit ex definitione E H, Apotome quarta. Quapropter recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma quarta E H, hoc



b 45. primi.
c 21. decimi.
d 23. decimi.
e 13. decimi.
f 74. decimi.
g 92. decimi.

H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, *a* Minor eſt. Medio ergo à a 95.
tionali detracto, &c. Quod oſtendendum erat. decimi.

THEOR. 86. PROPOS. 110. CIX.

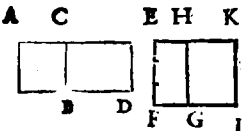
RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irra- CIV.
ionales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR à Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim conſtruantur, quæ ſupra. Et quia E I, Medio A D, æquale, Medium eſt; *b* erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine b 23.
incommenſurabilis. Item quia H I, æquale Rationali C D, Ratio- decimi.
nale eſt; *c* erit H K, Rationalis ipſi E F, longitudine commenſura- c 21.
bilis. Itaque cum H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis lon- decimi.
gitudine, at E K, eidem E F, longitudine incommenſurabilis; *d* erunt H K, E K, longitudine incommenſurabiles. Sed & Ratio- d 13.
nales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; decimi.
e Ac proinde reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut e 74.
igitur E K, plus poteſt, quã H K, quadrato rectæ ſibi longitudine decimi.
commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens H K, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſecunda E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, *f* Mediæ eſt Apo- f 93.
tome prima. Si vero E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ decimi.
ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc eſt, ſpatium illi æquale A B, *g* eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum g 96.
efficit. Quam ob rem Rationali à Medio detracto, &c. Quod decimi.
oſtendendum erat.

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX.

MEDIO à Medio detracto, quod ſit incommenſu- CV.
rabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

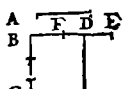
DETRAHATVR à Medio A D, Medium C D, quod incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum ſpa-



tium A B, poteſt, eſſe vel Me
potomen ſecundam, vel ex
cum Medio Medium totum
Conſtructis enim iiſdem qu
quoniam E I, H I, Medijs A
æqualia Media ſunt, a er
a 13. decimi. H K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles
b 10. decimi. A D, C D, hoc eſt, E I, H I, ponuntur incommenſurabilia
E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitu
commenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo
c 74. decimi. tentia tantum commenſurabiles; c Ac propterea reliqua
potome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt
H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
commenſurabilis. Si plus poteſt E K, quam H K, quadr
ſibi longitudine commenſurabilis, cum neutra ipſarum
Rationali E F, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa;
defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpa
contentum ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc
d 94. decimi. tium A B, illi æquale; d Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si
plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine
menſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K, Rationali
gitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit
E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpa
contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc
e 97. decimi. tium A B, illi æquale, e eſt ea, quæ cum Medio Mediũ tot
Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonſtrand

THEOR. 88. PROPOS. 88.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe ea
ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt A, aliqua ex
f 45. primi. minibus. Expoſita autem Rationali B C, f applicetur ad
g 98. decimi. 

ctangulum C D, æquale quadrato ex A. Q
igitur A, Apotome eſt; g erit latitudo B D
me prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt
ex defin. Apotomæ primæ B E, D E, Ra
potentia tantum commenſurabiles, poten
plus quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine comm
bilis, & ipſa B E, Rationali B C, commenſurabilis erit lo
h 61. decimi ne. Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus
latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo
ipſius nomen B F. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex bini

ma prima est. B F, F D. Rationales potentia solum commensurabiles, poterit quæ B E, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa B F, Rationali B C, longitudine incommensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine commensurabilis eidem B C; a erunt quoque B E, B F, inter commensurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, sit longitudine commensurabilis parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B F, longitudine incommensurabilis est ipsi D E; quod B E, D E, Rationales sint potentia solum commensurabiles) b erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solum commensurabiles Quare reliqua F D, c Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

a 12. decimi.

b 14. decimi.

c 74. decimi.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, d latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. d 23. decimi.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen primam. e 98. decimi.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, f latitudinem efficit Apotomen secundam. f 99. decimi.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, g latitudinem efficit Apotomen tertiam. g 110. decimi.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, h latitudinem efficit Apotomen quartam. h 101. decimi.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, i latitudinem efficit Apotomen quintam. i 102. decimi.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, k latitudinem efficit Apotomen sextam. k 103. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur,

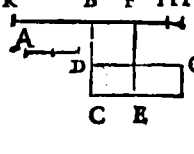
ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, eandem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam expositâ, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome primæ.
10. Mediæ Apotome secundæ.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

exij. o.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



à 45. primi.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F, Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis

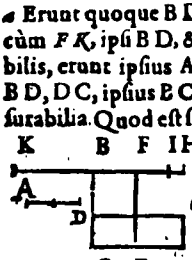
bus nominibus. *a* Applicetur enim rursus ad D C, minus nocen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A, atq; adeò rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt B E, C G; *b* erit vt B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D, ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D, maior quàm D C. Igitur & H F, maior est quàm F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; *c* & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. Ostensum est autem esse vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles, *d* Igitur & F K, B K, potentia solùm commensurabiles sunt. a 45. *primi.* b 14. *vel* 16. *sexti.* c 12. *sexti.* d 10. *decimi.*

RVRSVS quia est vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, *e* erunt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, vt F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propos 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia verò C G, cùm Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem D C, applicatum *f* facit D G, latitudinem Rationalem ipsi D C, longitudine commensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K, ad F K. *g* Igitur vt quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, commensurabile est quadrato ex D C. (quòd rectæ B D, D C, sint Rationales potentia commensurabiles, cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) *h* Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K, ad quadratum ex F K; ita recta H K, ad B K. *i* Igitur longitudine commensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeò & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis. Igitur & H K, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & B K, ipsi H K, commensurabilis, Rationalis existit. Cùm ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solùm commensurabilis, erit quoque F K, Rationalis. Quare cùm F K, B K, Rationales sint, & potentia tantùm ostensæ commensurabiles, *k* erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum. e 12. *quinti.* f 21. *decimi.* g 22. *sexti.* h 10. *decimi.* i 10. *decimi.* k 74 *decimi.*

QVONIAM verò ostensum est esse rectam H K, totam parti B K, longitudine commensurabilem, *l* erunt propterea & l 16. *decimi.*

B K, B H, longitudine inter se commensurabiles. Cùm ergo B, H, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi D C; erit quoq; B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando vt B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modo D C, B K, ostensæ longitudine commensurabiles;

a 10. decimi. a Erunt quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque cùm F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



ITEM quia demonstrauimus esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K, erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadē ratione cum B D, D C, nominib. ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO vel B D, plus potest, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest B D, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cùm sit vt B D, ad D C, ita F K, ad B K;

b 15. decimi. b poterit quoq; F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus potest quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidē B D, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si verò D C, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra

c 14. decimi. ipsarū B D, D C, sit Rationali longitudine cōmensurabilis; c erit quoq; neutra ipsarum F K, B K, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

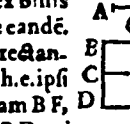
THEOR. 90. PRŌPOS. 114.

cxiij. QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinē facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinē, quem ipsa Apotome.

SIT

SIT Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, *a* & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc ipsam B E, ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomæ ordine eandē.

a 45. primi.



b Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale, eidem quadrato ex A, h.e. ipsi C E, latitudinem faciens B G. Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; *c* erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoq; E G, ad H, secundum proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in Schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoq; B H, reliqua ipsius B E, ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoq; vt B H, ad H E, ita E H, ad G H; atq; adeò H E, media proportionalis est inter B G, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia verò fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cùm sint nomina Apotomæ B C, Rationales potētia tantùm commensurabiles. *d* Erunt quoq; B H, H E, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandē habentes rationem eum quadratis ex B H, H E, vt demonstrauimus, *e* longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabili quoq; longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. 16. huius lib. At verò cùm B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; *f* erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeò Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia verò B H, H E, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantùm, & B H, Rationalis; erit quoq; H E, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solùm commensurabiles: *g* Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.

b 45. primi.

c 14. Vel 16. sext.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 21. dec.

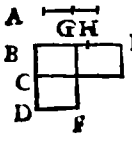
g 37. decimi.

QVONIAM verò ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D, atq; adeò permutando B H, ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; *h* erit quoque

h 10. decimi.

que HE; ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare EH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

IMMO & in eadem proportione, cùm demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertium.



POSTREMO vel BD, plus poteſt quàm CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, *a* poterit quoque BH, plus quàm HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quàm CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quàm HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si verò CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si verò neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; *b* erit quoque neutra ipſarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atque tertiis definitionibus, ipſa BE, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 115. *decimi.*

b 14. *decimi.*

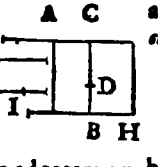
THEOR. 91. PROPOS. 115. (XIV.)

SI ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

CONTINEATVR ſpatium AB, ſub Apotoma AC, & ſub EB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Poſſit autem recta F, ſpatium AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, *c* applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex

c 45. *primi.*

ex 6. *a* Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B, & in eadem ratione, minimum H I, ad B I, vt C D, ad D B; atq; adeò vt C E, ad A E, & permutando, vt tota H I, ad totam C I, ita ablata B I, ad ablatam A E, *b* Erit ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, vt tota H I, ad totam C E; *c* Commensurabilis autem est longitudine H I, ipsi C E, quòd vtraque H I, C E, commensurabilis fuerit longitudine ipsi C D. *d* Igitur & B H, ipsi A C, longitudine est commensurabilis; *e* Atque idcirco & H C, ipsi B A, commensurabile erit, *f* cùm sit vt H B, ad A C, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis 6, æquale Rationale est. Igitur & B A, illi commensurabile, Rationale erit, propterea; & recta E, ipsum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.



a 113. *decimi.*
b 19. *quinti.*
c 12. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 10. *decimi.*
f 1. *sext.*

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub A C, C E, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

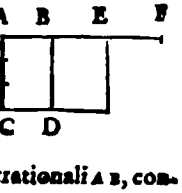
SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori verò, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina C D, D B, nominibus C E, A E, potentia tantùm commensurabilia ponantur. Id quod facilè ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. cxv. cvij.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

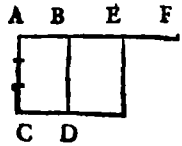
SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatiũ A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum,



tentum, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſſit ipſum recta B E, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico B E, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 111. huius lib. collegimus. Nam cùm quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipſi A C, longi-

a 23. de cæm.

dine incommenſurabilem; Et quadrata rèliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciunt latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſtat ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66 98 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At verò quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



QVOD ſi compleatur rectangulum D; erit & hoc contentum ſub Rationali D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propoſ. 38. Poſſit ergo ipſum recta B F, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus B F, non eſſe eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi B E. Hoc autem manifeſtum eſt, cùm quadratum ipſius B F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius B E, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes à B E, vt demonſtratum eſt. Eadem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

exviij. vij.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

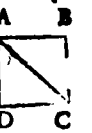
PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri A B. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longi-

b 5. def.

dine; b ac propterea A C, A B, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G; ſintque numeri E F, & G, minimi eandem proportionem habentium. Quoniam ergo vt A C, ad A B, ita numerus E F, ad numerum G, Erit quoq; vt

quadratum ex EF, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G. a (Cùm enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cùm sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in schol. propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cùm dimidium habeat, atq; adeò bifariam possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cùm seipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; & eò quòd impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia verò EF, & G, in sua proportione minimi, c inter se primi sunt; & EF, ostensus est par; erit G, impar. (Si enim par esset, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeò non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH, d & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cùm quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cùm illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt suprà de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.



a 20. 8.

11. 8.

b 29. 9.

c 4. 8.

d 11. 8.

ALITER. Sit si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeò inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cùm enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeò & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex FF, duplus

duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex EF, a ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cùm ergo & G, seipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudini lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

a 14. 0. Rami.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. b *solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui verò 2. 8. 32. non quadrati. Quare cùm 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum,* (c *aliàs & 2. quadratus esset.*) *ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* d *Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.*

b 10. 9. Rami.

c 24. 0. Rami.

d 9. decimi.

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CÆTERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, vt meritò omitti posset. Verùm quia in eâ continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometria, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hac.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus,

inuenientur & alia quàm plurima magnitudines, plana scilicet, atque solida incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ AC, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad C, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem,

milem, similiterq; positum super B, & sunt A, & C, longitudine in-
commensurabiles; a *erunt rectilinea illa figura super A, & B, incom-* a 10. de-
mensurabiles. cimi.

RVRSVS b *quoniam circuli; quorum diametri A, B, proper-* b 2. duo
tionem habent, quam quadratum ex A, & B, descriptum: Quadratum au- decimi.
tem hoc, cùm sint figura rectilinea similes, similiterq; posita, proportio-
nem habent, quam recta A, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. c *Habe-* c 11.
bunt quoque circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam quinti.
recta A, C. Sed recta A, C, incommensurabiles sunt longitudine. d *Igi-* d 10. de
tur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. cimi.

IAM verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata e 5. 6.
eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura rectilinea similes, simi- vel 7.
literq; descripta super A, B, e *habebunt pyramides, atq; prismata* duode-
eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilinea illa figura. cimi.
Quare cùm rectilinea illa figura incommensurabiles sint, & modò est f 10. de
demonstratum; f *incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, ni-* cimi.
mirum pyramides, & prismata.

QVOD si coni, vel cylindri aquè alti fabricentur, quorum ba- g 11. duo
ses circuli sint diametrorum A, B, g *habebunt huiusmodi coni, & cylindri* decimi.
eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cùm ergo h 10. de
circuli ostensi sint incommensurabiles, h *Erunt quoque* cimi.
incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non so-
lum linea, & superficies incommensurabiles, verùm etiam & corpora,
sine solida incommensurabilia. Quod est propositum.

EADEM autem ratione, si recta A, & B, longitudine commen- i 10. de-
surabiles sint, i *ostendemus earum figuras rectilineas similes, simili-* cimi.
terq; descriptas, nec non & ipsarum circulos, commensurabiles esse, k 5. 6. 7.
k *atque adeò & earundem pyramides, & prismata; ac denique* & 11.
conos, & cylindros; si modò eandem habeant altitu- duode-
dinem, vt perspicuum est. cimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abundè de ea Geometriæ parte disserut, quæ circa plana versatur, sibique nomen Geometriæ proprium, & surpauit; In subsequentibus verò quinque diligenter ea de passionibus numerorum discussit, quæ necessaria videbantur ad intelligentiam doctrinam linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissimè in libro decimo deinde explicuit, & constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissimè disseritur, perfectiùs posset cognosci. Nunc tandem aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, propriòque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem primùm, more suo, voces ad eam rem necessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe certum genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem: ut tres dimensiones possideat, quarum quidem secundum longitudinem, aliam verò secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem seu crassitudinem, altitudinémve, appellari solidum aut corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens linea; quæ verò longitudinis latitudinem adjecit, superficies vocatur. Ibi-

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hac enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quòd punctum omnis est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hac enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum verò propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quòd & linea illius sit expers: Ita quoq;, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consulunt, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter elevari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum ob superficiem, qua longa & lata existit; profundum verò seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiei. Hac ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neq; verò alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quòd triplex tantùm dimensio possit assignari, vt perspicuè in commentarijs, quos in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

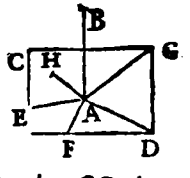
II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

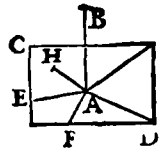
QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies verò lineas recepit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cùm enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

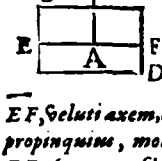


VT linea recta A B, plano C D insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum C D, cùm rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes plano ipsam tangũt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in vnam partem, quàm in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cùm angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque



deinceps B A H, rectus, ideoque illi aquales. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano C D, faciet A B, cum illa duos angulos aquales. Ac propterea aquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, vt A B, cum vna linea ex A, in plano C D, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt rectè concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, ac demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

VT autem recta quapiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis; ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuò secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc rectè colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnã: quia si duæ linea componant vnam rectã lineam, non necessariò efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim A B,

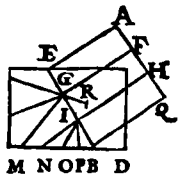


insistat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam vnam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos constituere; atque idcirco non esse rectam ad planum C D. Hoc autem perspicuum est, cùm A B, circa E F, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominùs tamen ipsa cum E F, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem A B, cum duabus angulum componentibus, quales sunt A G, A D, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucidè demonstrabitur propos. 4. huius lib.

IV.

PLANVM ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

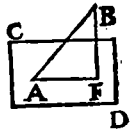
INSISTAT planum A B, plano C D, ita vt linea A Q, sit in sub-



sublimi, hoc est, extra planum subiectum C D, ut E B, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio E B, qua, ut demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano A B, ducantur G F, I H, perpendiculares ad communem sectionem E B. Si igitur lineæ F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum aliis omnibus in plano C D, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quàm in alteram, sed aquabiliter illi insistet. Si enim ⟨ G, producatur ad R, cùm angulus F G K, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobique à lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contrà, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

V.

RECTÆ lineæ ad planum inclinatio est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.



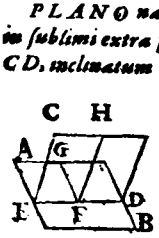
INSISTAT recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum verò A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi recta A B, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis B E, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta E A; eritq; necessariò angulus E A E, acutus, cùm in triangulo A B E, duo anguli B A E, B E A, duobus sint rectis minores, & angulus B E A, rectus. Angulus igitur acutus B A E, comprehensus lineâ insistente A B, & adiuncta A E, dicitur inclinatio rectæ a 17. primi.

A B, ad dictum planum C D; Itq; vt tanta dicatur esse inclinatio lineæ A B, ad planum C D, quantus est dictus angulus acutus B A E

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO namq; A B, insistat planum C D, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum A B, & pars ad D, in ipso plano A B, sitq; linea C D, inclinatum ad A B, & communis eorum sectio sit D E. Si agatur ad D E, communem sectionem ex eam puncto F, duæ perpendiculares ducantur; F G, quidem in plano A B, & F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani C D, ad planum A B, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometra angulum C F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, siue is acutus sit, siue rectus, obtususve: quanquam proprie solum angulum acutum inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius aquabilem elevationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus verò recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu elevationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consuevit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus G F H, sive is rectus sit, sive acutus, sive obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cùm dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hac definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atq; adeò à recto magis recesserit.

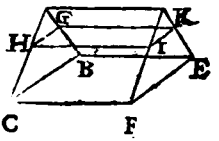
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTEL-

INTELLIGE, in quamcunq; partem, etiam infinitè, produ-cantur: hoc est, sive ad dextram, sive ad sinistram: & sive sursum, si-ve deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana nō convenient, quamuis producantur infinitè ad dextram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum pro-tracta coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cuius basis B C F E, auferatur q; fastigium A G H D K I. Quo facto, perspicuum est, re-liqua plana G B E K, H C F I, non convenire inter se, si ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cùm producta ad partes G H, K I, conveniant in fastigio A D. Vt igi-tur plana aliqua dicantur parallela, ne-cesse est, ut in nullam partem producta inter se conveniant. Sicut au-tem linea in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produ-ci possunt, nempe ad sinistram, & ad dextram: ita duo plana in qua-tuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quacunq; vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea verò recta, vel sunt pa-rallela, vel ad alteram partem protracta conveniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallela, neq; unquam conveniunt, si videlicet in diversis sint planis, & in transversum po-sita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cùm in eodem sint plano. Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conveniunt.



IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per an-gulos æquales, & proportionalitatem laterū circa æquales angulos, ut fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse indica-vit, ut brevitati consulens eas ex similibus planis multitudine aqua-libus describeret; præsertim quòd ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, ut ex defin. 11. pate-bit, cùm illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitu-dine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

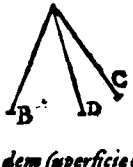
ÆQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figura solida non solùm similes, verùm etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuò huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem verò æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuò congruent: ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quàm duarum linearum, quæ se mutuò contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVÆ linea in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corpореus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes nō debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immò circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.



ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

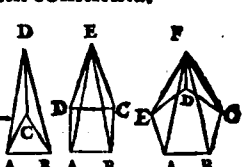
HAEC

HAEC definitio secunda anguli solidi facilè est, præcedenti rectè intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano est, in quo rectæ A B, A D, & angulus D A C, in plano, in quo rectæ A D, A C; angulus denique C A B, in plano, in quo rectæ A C, A B, atque sic ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque verò satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Habit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porrò solidi exemplum clarissimum nobis prabent duo parietes cum pauimento domus, vel lagunearis, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his verò perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse aquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine aqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera verò curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.



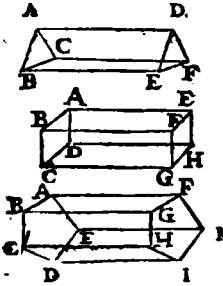
VIDELICET figura solida à planis A B C, A B C D, A B C D E, ad puncta D, E, F, constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel trian-

triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur, pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basim, triangula sunt A B D, A C D, B C D: Quadrangula vero A B E, A D E, B C E, C D E: Pentagona denique A B F, A E F, B C F, C D F, E D F.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula A B C, D E F: vel quadrangula A B C D, E F G H: vel pentagona A B C D E, F G H I K, &c. Parallelogramma vero A C F D, A B E D, C B E F: vel A B F E, A D H E, C D H G, C B F G: vel A B G F, A E K F, D E K I, D G H I, E C H G; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud est, quam columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue ha sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figura indicat.



EX hu manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, & constat; præsertim quod plurima demonstrationes in hac lib. & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum

oppositi-

ppoſitorum, eò quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conueniat. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide, ſuperua dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Imò in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eandem cum illa baſin habentis, altitudinem aqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quauis rectilinea, aqualia tamen & ſimilia, vt fuit definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, tertiam eſſe priſmatum genera ſecundum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidem, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib 12 apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & aqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

SPHÆRA eſt, quando, ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum: ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſpharam appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, à quo omnes linea recta in peripheriam cadentes ſunt aquales; propterea quod omnes aquales exiſtunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt aquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi aquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHÆRA eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in libro de Vniuerſitate de mundo loquens elegantem hanc definitionem expreſſit his verbis. Ergo globoſum eſt fabricatus, quod σφαιροειδὲς Graci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radius attingitur.

AXIS

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

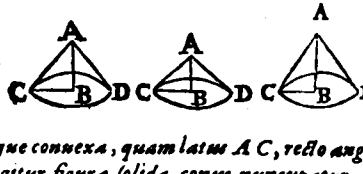
HÆ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum meminerit, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factum est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC, circa latus quiescens AB, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quadam figura, qua continetur duabus superficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curua alia, eaque connexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæ igitur figuræ solidæ, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vti in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus propè verticem A, rectus est. Cum enim latera

latera AB, BC, ponantur æqualia; a erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquimaleant vni recto, eo quod AB C, rectus est, erit angulus BAC, semirectus. Eodemq; modo angulus BAD, ex parte oppositus semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; b erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circumducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC, c erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquinaleant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

a 5. primi.

b 18. primi.

c 18. primi.

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basim; Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem, qua & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, qua Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad instituta conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto,

puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cæpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

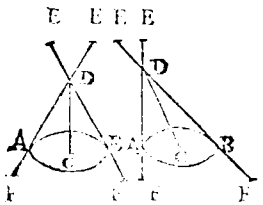
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentario, quo in Apollonium scripsit.

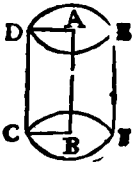
SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D: iunctaque D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur eo, quo in circulo A B, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum reuertatur, à quo capit moueri: describit superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C. Conum vero appellat figuram contentam circulo A B, & ea superficie quam D B, secum describit. Coni verticem punctum D. Axem D C. Basim A



sum AB, circulum. Quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

XXI.

CYLINDRVS est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumassumpta figura.



VELVTI si rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quiescens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, qua quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, describunt; & altera curua, eaque connexa, quam latus CD, describit, instar columna alicuius rotunda. Vnde factum est, vt Cumpanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositis descripti.

EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata ex aliis Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, qua Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectatur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad principium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos

ex ea-

ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cæpit: Superficies, quæ circumlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

CYLINDRVS eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

CYLINDRI baſes ſunt circuli ipſi.

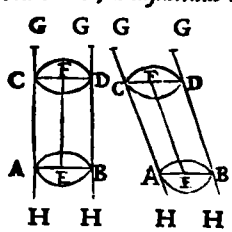
AXIS, recta linea, quæ per circulorũ centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes vtraſque contingit; quam & circumlatam, cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentẽ ipſis baſibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes A B, C D, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque A B, C D: iunctæque recta A C, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Stigitur diametri A B, C D, circa centra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtantes, vna cum recta A C, circumducantur, donec ad eum locum reſtituantur vnde moueri caperunt; deſcribetur ab linea A C, ſuperficies quædam rotunda quam Serenus cylindricam vocat; & angetur in infinitum, cum recta A C ipſam deſcribens in infinitum, producatur. Cylindrum vero appellat figuram A B D C, circulis A B, C D, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam videlicet ſola A C deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos A B, C D: Axem, rectam E F, qua circulorum centra contungit. Latus cylindri rectam A C. Quod ſi axis E F, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

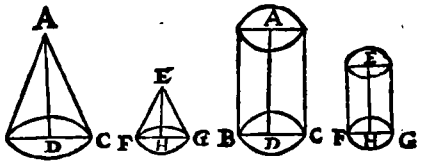


XXIV.

SIMILES coni & cylindri ſunt, quorum & axes baſium diametri proportionales ſunt.

RECTI

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant cones & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo cones A B C, E F G; item duo cylindri; in conis autem axes A D, E H, & basium diametri B C, F G; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis A D, ad axem E H, ita B C, diameter basis ad F G, diametrum basis, dicentur tam cones, quam cylindri similes inter se; quia videlicet haec ratione tum secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula A D B, E H F, ex quorum revolutione descripti sunt coni, nec non rectangula A B, E F, quorum conversiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt A D, ad E H, ita B C, ad F G; Sit autem vt B C, ad F G, a ita dimidia B D, ad dimidiam F H: erit quoque vt A D, ad E H, ita D B, ad H F: & permutando vt A D, ad D B, ita E H, ad H F. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erunt: Triangula quidem, b propterea quod triangula cuium angulum cui angulo habentia aequalem, & circum aequales angulos latera proportionalia, aequiangula sunt, c ideoque latera omnia circa angulos aequales habent proportionalia atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, d eo quod reliqua duo latera duobus lateribus A D, D B, sunt aequalia, oppositum oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



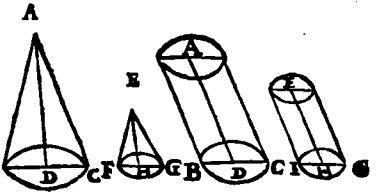
a 15. quinti.

b 6. sen.

c 5. sen.

d 34. primi.

QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, aequales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri A B C, E F G: In conis autem axes sint A D, E H, & basium diametri B C, F G; similiter & in



cylindris. Itaque si fuerit tam in conis quam in cylindris, ut AB, ad EH, ita BC, ad FG, existentisque angulis inclinationum ADB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, aequales inter se; dicemus conos inter se, & cylindros quoq; inter se se similes; quoniam tum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, videlicet diuisimus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstratum est. Eadem enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ad D & B, E H F, ponuntur aequales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis aequalibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆC sunt quinq; corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica cuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora figuras philosophus nuncupantur, nempe Cælum, Ignem, Aquam, atq; Terram, quinque hisce corporibus assimilat. Verum ista loannes à sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium structio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autem propos. decimaq; propos. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, tam solida gere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intuatur. Tamen tamen proprius in locis prauis admodum facilis, quibus

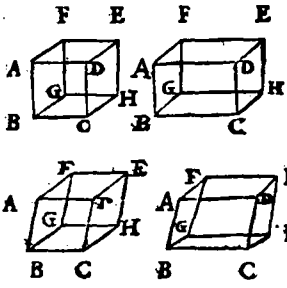
per secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt contenta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; item DF, CG; item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallelis opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur prop. 24. huius. lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitque quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi,

quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

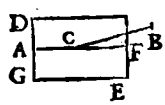
NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figura conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum paucíores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullius anguli figura interioris intactum relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

VERVM duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 13. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibuſque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTÆ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

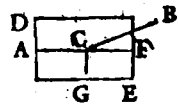
SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum poſitam. Quis enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE

ri posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipse C. Verumtamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam vtlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, qua ex



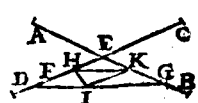
qualis suæ interiacet lineas, hoc est, qua recta, & qualiter semper extendatur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta recta AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id [illegible] *Geometricè, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam* [illegible] *quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis* [illegible] *AB esse quoque rectam, eiusque partem AC, in plano DE, par-* a 11. pri.
vero CB, in sublimi esse positam. a Ducatur tenuis in plano DE, AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipsi CG, perpendicu- [illegible] *CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum.* [illegible] *enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos re-* b 14.
ctos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione; b erunt AC, primi.
FC, in directum & continuum posita. Quamobrem etiamsi quis [illegible]
dicat AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, recta, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam lineam constituat; atque adeo duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.

HINC fit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam esse in vno existere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

I duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

ECTÆ lineæ AB, CD, se mutuo secent in E, & in EB, ED, [illegible] punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta FG, vt fiat trian- [illegible] EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item re- AB, CD, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli G, pars quædam, nimirum EHIG, in



ovno existat, & pars quædam, nempe qua FHI, in sublimi, vel contra; Exi- quoq; rectarum EF, GF, partes qui- EH, GI, in vno plano, partes vero IF, in sublimi, vel contra: quod fieri non posse, iam supra e de- c [illegible] strarum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, de [illegible] no plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel con- erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in

FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra: denique eiusdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano partes autem HE, KE, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, a vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

a 1. Undecimi.

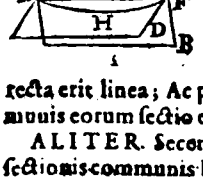
QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: in quo autem sunt rectæ EF, EG: b in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atqui triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

b 1. Undecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio, est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



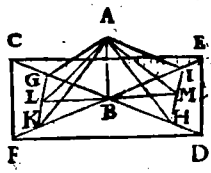
ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroq; plano existit, constat propositū: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in

s, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa
cto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit.

ECTA linea AB, inſiſtat duabus rectis CB, BF, ad rectos an-
os in communi earum ſectione B. Dico rectam AB, ad angulos
que rectos eſſe plano, quod per ipſas ducitur, ſeu in quo exi-
nt. Cum enim ſe mutuo fecent in B; a erunt ipſæ in vno plano, a 2. 11.
od ſit CBDL. Sumantur inter ſe æquales rectæ BG, BH; item *decimi.*
tæ BI, BK, ducanturque rectæ GK,
, & in eodem plano per B, ducatur re-
LM, ſecans rectas GK, IH, in punctis
: M. Demittantur quoque ex A, puncto
ublimi ad idem planum rectæ AG, AL,
, AH, AM, AI. Quoniam igitur late-
G, BK; trianguli BGK, lateribus BH,
, trianguli BHI, ex conſtructione ſunt æqualia; b & anguli b 15.
oque ipſis contenti GBK, HBI, cum ſint ad verticem B, oppoſi. *primi.*
æquales. c Erunt baſes GK, HI, inter ſe, & anguli BKG, BIH, c 4. *pri.*
er ſe quoque æquales.

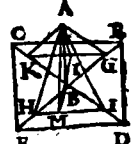


RVRSVS d cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppoſiti d 15.
t æquales; erunt duo anguli KBL BKL, trianguli BKL, duobus *primi.*
gulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & late-
BK. BI, quibus adiacent, æqualia, ex conſtructione. e Igitur & e 26.
qua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt. *primi.*
PRÆTEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia
lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex conſtructione; & an-
li ipſis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothe-
erunt & baſes AG, AH, æquales. Simili argumento æquales f 4. *pri.*
nt rectæ lineæ AI, AK.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus
, KG, trianguli AKG, æqualia ſunt; & baſis AH, baſi AG, ex
tenus demonſtratis; g erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis g 8. *pri.*
ribus comprehenſi, æquales.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia ſint
eribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipſis contenti AKL,
M, æquales etiam, vt hactenus demonſtranimus; h erunt quo- h 4. *pri.*
e baſes AL, AM, æquales.

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia ſunt
teribus AB, BM, trianguli ABM; & baſis AL, baſi
M, ex demonſtratis; i erunt quoque anguli ABL, i 8. *pri.*
BM, dictis lateribus comprehenſi, æquales; qui
im ſint deinceps, recti erũt, ex defin. 10. lib 1 Qua-
recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM,
æ in plano ſubiecto ipſam tangit in B: Eademq;



rotatione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI KH, iungantur: vel certe literæ disponantur, ut prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen L M, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse.

a 2. Vndecimi. a Cum enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod ductæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. b Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B, sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B;

b 2. Vndecimi.

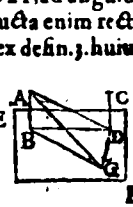
c 3. Vndecimi. d 4. Vndecimi. necessario producta se mutuo secabunt. c Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; d erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit recta BG, quæ ipsam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint anguloſ; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli ABD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoq; ipsis contenti ABD, GDB; æquales, nempe recti; *a* erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, *b* erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam verò ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. *c* Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto. *d* Est autē AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cùm anguli interni ABD, CDB, sint recti; *e* erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

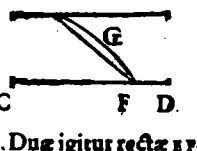


a 4. *primi.*
b 8. *primi.*
c 5. *vndecimi.*
d Est autē *decimi.*
e 28 *primi.*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraq; sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarū, sint parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra; secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, *f* quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cùm habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



f 3. *vndecimi.*

SCHOLIVM.

HÆC eadem propositio vera eſt, etiamſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, & manifeſtum eſt ex demonſtratione.

VIIJ. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; ſitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: *a* Sunt autẽ duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturq; æquales BG, CD. Coniungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex conſtructione; & anguli quoq; ipſis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti; *b* Erunt baſes CB, GD, æquales; Rurſus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia ſunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & baſis eſt communis CH; *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehenſi æquales. Eſt autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, ſe mutuò ſecantibus in B, (ſi namq; producerentur DB, CB, ſecarent ſeſe in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos exiſtet; *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Eſt autem in hoc eodem plano recta AB; *e* propterea quòd rectæ BD, BC, in eodem ſunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cùm puncta B, C, D, exiſtant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cùm AB, recta ſit ad rectas BG, BD; *f* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc eſt, ad planum EF. Si duæ igitur ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat oſtendendum.

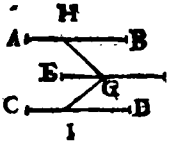
a 9. primi.
b 4. primi.
c 8. primi.
d 4. undecimi.
e 7. undecimi.
f 4 undecimi.

IX. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eo-

a eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG, recta est



ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuò in G; a erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cùm sint parallelæ AB, EF, & EF, sit recta ad planum per GH, GI, ductũ; b erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cùm sint parallelæ CD, EF, sit autem EF, recta ad planum per GH, GI, ductum; c erit etiam CD, recta ad idem planum; d Atq; proinde rectæ AB, CD, cùm rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

a 4. Undecimi.
b 8. Undecimi.
c 8. Undecimi.
d 8. Undecimi.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Supervacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

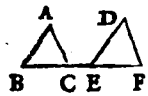
SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; e erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cùm BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD, f erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales; g Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modò demonstratum est; b Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

e 33. primi.
f 9. Undecimi.
g 33. primi.
h 8. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ rectæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano, sit q; AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturq; rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniam igitur parallela sunt

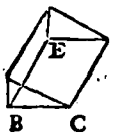


a 29. primi. *AB, DE, a æquales erunt anguli ABC, DEF, interni & externi. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallela. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC,*

b 32. primi. *æquales sunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. b Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.*

NON sint iam BC, EF, in vna recta linea constitutæ. Ducãtur

c 33. primi. *rectæ AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallela & æquales; c erunt & AD, BE, parallela & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eò quòd AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD,*

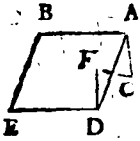


d 30. primi. *parallelæ existentes & æquales, d inter se parallelæ erunt & æquales; e Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaque cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, & basis*

e 33. primi.

f 8. primi. *BC, basi EF, f erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.*

CÆTERVM vt conclusio huius theorematis rectè ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sive omnes sint in eodem plano sive non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione se mutuò secent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam aliàs conclusio vera non erit.



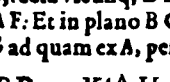
SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non sunt æquales, cùm ille sit acutus, hic verò obtusus. Hoc autem ideo euenit, quòd AD, CF, se mutuò secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quòd eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT à puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta vtcunq; D E, *a* ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F: Et in plano B C, per F, ad D E, perpendicularis ducatur G H, *b* ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum B C. *c* Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, parallela K L, cùm D F, ad *d* rectos angulos ſit duabus F A, F H, ex conſtructione, *e* ac proinde recta ad planum per F A, F H, ductum, *f* erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H, ductum recta *g* Quoniam verò A I, in eodem eſt cum rectis F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A: rectus; atque adeò A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. *h* Igitur A I, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam diximus. Quod faciendum erat.



a 12. primi.
b 11. primi.
c 12. primi.
d 31. primi.
e 4. Vndecimi.
f 8 Vndecimi.
g 12. Vndecimi.
h 4. Vndecimi.

SCHOLIVM.

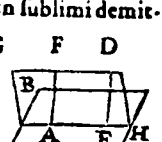
QVOD ſi quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ A F, ad D E, ducta perpendicularis, i erit ipſa A F, ab initio ad D E, ducta perpendicularis, ad ſubiectum planum B C, perpendicularis, cùm perpendicularis ſit ad vtramque D E, G H.

i 4. Vndecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

DATO plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. *k* Ex quouis puncto D, in ſublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, *l* ducatur per A, ipſi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectã eſſe ad planum datum B C. Cùm enim D E, A F, parallelæ ſint; & D E, recta ad planum B C, ex conſtructione: *m* erit quoque A F, ad idem planum B C, recta. Itaq; dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciendum erat.

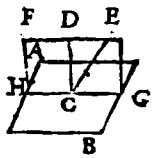


k 11. Vndecimi.
l 31. primi.
m 8. Vndecimi.

THEOR.

xiij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



a 12. Undecimi.

SIT datum planum AB. Dico à dato in puncto C, ad easdem partes non posse eleuari duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planũ AB, & per CD, CE, a quæ sint in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cùm igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, puncto, quod in illo datũ est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

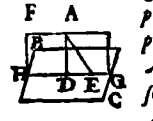
ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cùm igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad

b 6. Undecimi.

idem planum AB; 6 erunt ipsæ inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

SCHOLIVM.

EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A,



c 11. Undecimi.

puncto in sublimi ad subiectum planum EC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducantur per AD, AE, c quæ in vno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cùm igitur AD, AE, rectæ sint ad planum BC, erunt per de-

fin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, rectis interni in triangulo

d 17. primi.

ADE. Quod est absurdum: d cùm sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.

c 6. Undecimi.

ALITER. Si AD, AE, rectæ sunt ad planum BC, ipsæ erunt inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

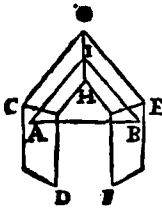
xiv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta ter se conuenient. Conueniant ad partes C, E, e & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto vtcunq; I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF, quæ

e 3 Undecimi.

igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin.3. huius lib.duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI a Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

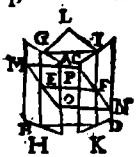


a 17. primi.

SCHOLIVM.

PACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, Videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoq; recta erit.



SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciat q; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK, erunt q; anguli GEF, HEF, recti per defin.3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L, atq; adeò & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; b cum tota recta HGL sit in vno plano, nempe in AB producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD protracto. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, facient alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta c quoq; erit EF, ad planum CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.

b 1. vndecimi.

c 4. vndecimi.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

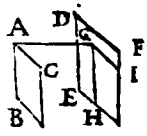
XV.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, d enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. e Deinde in plano

d 11. vndecimi.

e 3. primi.



plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſi DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AI GH, parallelæ ſunt ipſi DE; a erunt & AE GH, inter ſe parallelæ; b Ac proinde angu BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB AC, c recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. d Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 29. Undecimi. b 29. primi. c 4. Undecimi. d 14. Undecimi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non ſunt ducenda alia parallela. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; item & AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; oſtendemus, & prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunque duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, c agatur CE, ipſi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibus, in alio cum illis plano parallelæ ſint, f parallelæ erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.

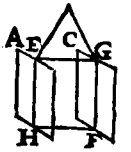
c 31. primi. f 15. Undecimi.

XVI. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur: communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas GH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GF, eſſe lineas

eas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, pro-
nctæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F
ecante. Conueniant igitur in puncto I. a Quia
rgo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum
n A B, producto; Item tota recta F G I, in vno
quoq; est plano, videlicet in C D, producto; con-
ueniens etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod
est absurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F,
parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur,
&c. Quod erat demonstrandum.



a 1. 6n. decimi.

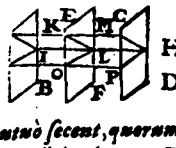
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, & hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana A B, C D, plano E F, parallela. Dico & A E, C D, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano G H, sintq; communes eorum sectiones recta G I, K L, M H. Secentur rursus alio plano N H, sintq; communes eorum sectiones recta N I, O L, P H, hac tamen lege, vt duo plana secantia G H, N H, se quoque mutuò secent, quorum sectio communis sit linea recta H I. Quia igitur parallela plana A B, E F, secantur plano G H, b erunt communes sectiones G I, K L, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt M H, K L, c atque adeò parallelæ erunt inter se G I, M H. Non aliter ostendemus, parallelas esse N I, P H. Itaque cùm I G, I N, se mutuò tangentes in I. parallelæ sint rectis H M, H P, se tangentibus in H, existentibusq; in alio plano; d erunt plana A B, C D, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.



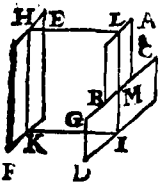
b 16. 6n. decimi.
c 9. 6n. decimi.
d 15. 6n. decimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano E F, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum E F, linea recta perpendicularis, occurrens plano A B, in puncto H, & plano C D, in puncto I. Quoniam igitur linea H G, recta est ad

planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta HI, sit recta ad plana AB, CD; a *plana AB, CD. Quod erat propositum.*

a 14. & decimi.

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, velut ad propos. 3. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI.



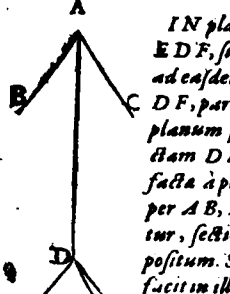
b 16. & decimi. *Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF,* b *erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallela erunt IM, HK. Quam ob rem cùm rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantq; in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient;* c *propterea quòd recta LI, in vno iaceat plano. Quod erat propositum.*

c 1. & decimi.

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certè si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRÒ conuersum quoque propos. 10. facilè demonstrabimus hoc loco, videlicet.

Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modò ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.



IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitq; AB, ipsi DE, parallela; & AC, DF, sint ad eas dem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoq; esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectam DF; item & AC, DF, sint communes sectiones facta à plano per AC, AD, ducto, in plana parallela per AB, AC, & DE, DF, ducta. d *Hinc existit efficitur, sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namq; planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat sectiones AC, DG,* e *quæ parallelæ erunt.* f *Igitur anguli EDG, angulo BAC, hoc est, angulo EDF,*

d 16. & decimi.
e 16. & decimi.
f 10. & decimi.

HD F, æqualis erit. quod est absurdum, cùm Gnum sit totum, & alia pars.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xvij.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In eadem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura; siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, a Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, b erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. c Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad RQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

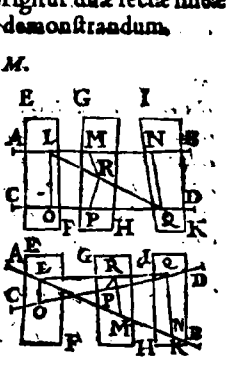
a 2. Vndecimi.

b 16. Vndecimi.

c 2. sexti.

SCHOLIVM.

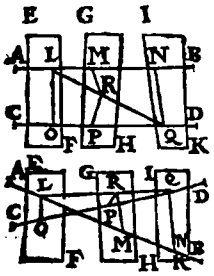
QVOD, si data recta AB, CD, sint in Gno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, Gnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, Gnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.



d 16. Vndecimi.

SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, Gnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia e cùm triangulum LOQ, sit in Gno plano, & triangulum LNQ, in Gno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa

e 2. Vndecimi.



a 11. Vndecimi.

triangula in Vno eademque plano exi
essent duæ rectæ AB, CD, in eodem
no, quod ex ipsis constituitur, quod est co
hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in di
sis illis planis triangulorum; ac proinde
rectam non constituent; a aliàs in Vno e
plano. quod est absurdum.

EADEM hac propositio locum hab
duæ rectæ AB, CD, in eodem plano exis
tes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce d
bus figuris apparet: sed tunc RMP, sem
erit Vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum
quando AB, CD, in Vno plano ponebantur. Eadem enim demonstra
hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quàm tria, rectæ AB, C
secent, erunt earum partes proportionales; & communes sectiones
dorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas co
stituent, si rectæ AB, CD, in Vno sint plano, non rectas autem, si n
sint in Vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

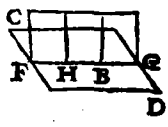
EX demonstratione porrò perspicuum est, si quotlibet linea in V
plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illar
linearũ inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ A
CD, in postrema figura quomodocunq; in Vno plano disposita, qua
centur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad inte
sectionem rectarum CD, RM, pertinuat.) QN. Dico segmenta L
MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ, Iam

b 12. sunt. nam enim recta LQ, b erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ,
triangulum LOQ, quàm LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitu
erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademq; ratio est de pluribus ba
Vt autem rectè demonstratio procedat in quibuscunq; duabus rectis, d
cenda est recta à primo puncto sectionis Vnius recta ad vltimum se
ctionis punctum alterius. Ita videt in duabus AB, CD, ductam
rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rec
CD. Idemq; seruatum est in figuris huius propos. 17.

xviij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos
Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad recto
angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana pe
rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim
c 11. primi. sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam
FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, e ducatur
in pla

plano E F, ipſi A B, parallela H I. Quoniam


tur A B, I H, parallelæ ſunt, & A B, ponitur
cta ad planum C D; a erit quoque I H, ad
:m planum C D, recta: ac proinde per de-
. 3. huius lib. ad communem ſectionẽ F G,
:rpendicularis. Eadem ratione omnes li-
:æ, quæ in plano E F, ipſi A B, ducentur parallelæ, erunt ad pla-
um C D, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem
ctionem F G, perpendiculares. Quare rectum erit planum E F,
d planum C D, per defin. 4. huius libri. Similiq; argumento oſten-
entur omnia alia plana per rectam A B, ducta, ad planum C D,
ſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angu-
s, &c. Quod erat demonſtrandum.

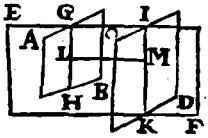
a 18. Undecimi.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana A B, C D, ad planum E F, recta, facientia ſectiones G H, I K, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano enim E F, ducatur ad G H, perpendicularis L M, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum A B, recta erit: b *eadem q; perpendicularis erit ad I K, ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoq; C D, recta erit. Quia igitur L M, ad vtrumq; planum A B, C D, recta eſt,* c *ipſa parallela erunt.*



b 29. primi.

c 14. Undecimi.

SED iam parallela ſint plana A B, C D; ſitque A B, rectum ad planum E F. Dico & C D, rectum eſſe ad idem planum E F. Sint enim communes ſectiones plani E F, & planorum A B, C D, recta G H, I K; d *quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano E F, ad rectam G H, linea perpendiculari L M; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad A B, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. eadem L M, ad planum C D, recta quoq; erit.* e *Quare planum E F, per rectam L M, ductum ad planum C D, erit rectum; ideoq; viciſſim planum C D, ad planum E F, erit quoq; rectum. Quod eſt propoſitum.*

d 16. Undecimi.

e 18. Undecimi.

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

SIT data recta F G, in plano C D, & in figura huius propoſ. operetur q;

teatq; per F G, planum **ducere**, *quod ad planum* **C D**, *rectum* **fit.**

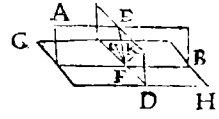
a 12. Undecimi — *quouis puncto B, rectæ F G,* **a erigatur** *ad planum* **C D**, *perpendicularis B A, & per rectas A B,* **F G**, *planum* **ducatur E F.** b *quod ad planum* **C D**, *rectum erit.* **Quod eſt propoſitum.**

b 18. Undecimi.

XIX. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana ſe **mutuò ſecantia, plano** cuidam ad**ctos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad** ctos eidem plano **angulos erit.**

SINT duo plana **A B, C D**, ſe mutuò ſecantia per lineam ctam **E F**, ad planum **G H**, **recta.** Dico **communem** illorum ctionem **E F**, rectam **quoque eſſe** ad idem planum **G H.** Aut enim **E F**, ad **B F, D F**, communes ſectiones planorum **A B, C D**, cu



c 4. Undecimi. **plano G H**, recta eſt, aut non. Si recta **E F**, ad **B F, D F**, c recta quoque erit **planum G H**, quod per ipſas ducitur. verò **E F**, concedatur recta ad alteram ctarum **B F, D F**, tantùm; ſit ea re**ctæ B F. Quoniam igitur planum A B**, ad **num G H, ponitur rectum; erit E F**, quæ in plano **A B**, ad **B F** a **munem** eius ſectionem **cum plano G H**, ducitur perpendicu ad planum **G H**, recta, **ex 4. defin. huius lib.** Idem conclud **E F**, concedatur recta ad **D F. Erit enim & tunc E F**, ad planū recta ex defin. 4. huius lib. cùm perpendicularis ponatur ad communem ſectionem **plani C D**, cum plano **G H**, ducatur plano **C D**, ad planum **G H**, recto. Si deniq; **E F**, ad neutram

d 11 primi. **D F**, eſſe credatur recta; *d* **ducatur ex F**, in plano **A B**, ad **B** munem eius ſectionem **cum plano G H**, perpendicularis **F** in plano **C D**, ad **D F**, **communē** eius ſectionem **cum plano** perpendicularis **F K. Quoniam igitur planum A B**, rectum tur ad planum **G H**, erit quoq; perpendicularis **I F**, quæ in *A B*, ad *B F*, communem eius ſectionem cum plano **G H**, d recta ad planum **G H**, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratio **E F**, ad idem planum **G H**, recta; Ac proinde à puncto **F** num **G H**, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fi

e 13 Undecimi. poſſe ſupra *e* demonſtratum eſt. Quare ***E F***, recta erit ad **G H** Si duo igitur **plana ſe mutuò ſecantia plano** cuidam ctos ſint angulos, &c. **Quod erat demonſtrandum.**

XX. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI ſolidus angulus **tribus angulis planis** contin

Ex his duo quilibet **vtut aſſumpti tertio ſunt ma**

CONTINEATVR **angulus ſolidus ad A**, tribus

uis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maio-
Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos
ores esse reliquo: Si verò duo tantùm sint æquales, & tertius
uis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores
Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue
ales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum
i maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc an-
D maximo BAC, maiores quoque esse

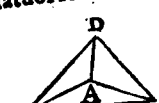
ulos duos BAD, DAC. In plano enim
AB, AC, ducto a fiat angulus BAE,
ulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis
æ AD. Deinde in eodem plano per E,
ndatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniungan-
ue rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli
, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quo-
ipsis contenti, per constructionem, æquales; b erunt bases
BE, æquales c Quia verò latera DB, DC, maiora sunt latere
. si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, ma-
quàm CE. Cùm igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia
lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior basi CE;
r angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus
alis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus
alis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus o-
im ponebatur. Ac proinde duo quilibet multò maiores e-
reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus
lis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 4. pri mi.
c 10. pri mi.
d 25. pri mi.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xxj.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Du-
catur enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti
anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub
duobus angulis planis continetur, nempe B, sub
angulis ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, & CB:
& sub CDA, ADB, BDC. e Quoniam ve-
ro anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo



e 20. 6m decimi

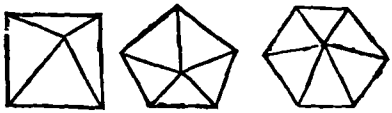
similiterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo
anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA,
BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maio-
res. Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus f 32 pri mi. rectis

rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vnà cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria B A C, C A D, D A B
a 32. primi. a (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur solis illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumve, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum



b 32. primi. *triangulorum, (b cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cùm omnes anguli horum triangulorum propè basin maiores sint angulis basis; (propterea, quòd propè basin constituantur anguli solidi,*
c 20. vndecimi. *quorum quilibet tribus planis angulis continetur, c & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem propè basin, minoribus quàm quatuor rectis. Cùm ergo omnes anguls omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.*

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, quibus subtendantur ordine rectæ B C, C D, D E, E F, F B, in vno, eodemq; plano, scilicet, quod rectæ A B, A C, A D, A E, A F, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet ba-
d 32. primi. *sim pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum solidum A. d Quia verò omnes anguli*

quinq;

quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis, quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis.

a 20. undec.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, *b* ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. *c* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus: quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; *d* erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; *e* erit & basis EK, maior basi HI: *f* Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK,

b 22. primi.

c 23. primi.

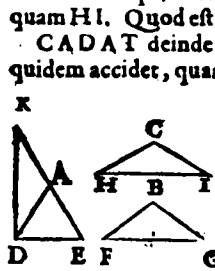
d 4. primi.

e 24. primi.

f 20. primi.

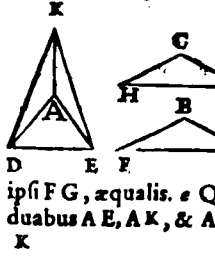
oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta KD. *a* Erit, igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. *b* Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores ſunt recta KE; & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoq; ED, DK, maiores duabus CH, CI: *c* Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.



a 4. *pri.*
b 20. *primi.*
c 20. *primi.*

CADAT poſtremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum euenict, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturque rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. *d* Erit igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. *e* Quoniam vero duæ DE, DK, maiores ſunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoq; DE, DK, maiores quam CH, CI: *f* Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoq; DE, FG, maiores quam HI. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores eſſe quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, ſi angulo C, ad FB, conſtituatur angulus æqualis, &c. *g* Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonſtrandum.



d 4. *pri.*
c 21. *primi.*
f 20. *primi.*
g 22. *primi.*

h 4. *pri.* ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; *h* erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius minor; *i* erunt quoque duæ illorum baſes æquales, *k* & baſis tertij vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus, ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales; *l* erit quoque baſis DE

i 4. *pri.*
k 24. *primi.*
l 24. *primi.*

omnium

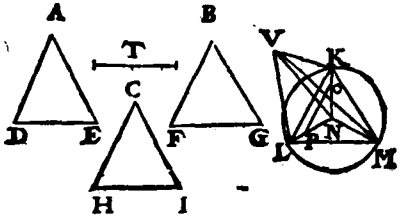
mnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. *a* Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; *b* erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; *c* erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostenta sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: *d* Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

a 23. primi.
b 4. pri
c 24. primi.
d 20. primi.

PROBL. 3. PROPOS. 23. xxiij.

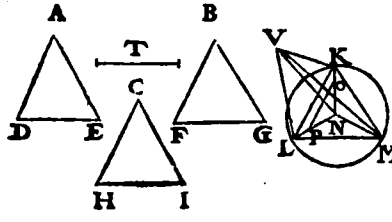
EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque bases DE, FG, HI. *e* Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulũ KLM, sitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. *f* Describatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum N,



e 22. Gudec.
f 5. quarti.

trum N, à quo ducantur rectæ N κ, L N, N M. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe A D, A E, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum Κ L M; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur A D, A E, maiores non credantur, quam N Κ, N L, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera A D, A E, trianguli A D E, æqualia sunt laterib. N κ, N L, trianguli N Κ L; & basis D E, basi κ L, æqualis: *a* erit angulus A, angulo κ N L, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N κ, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt A D, A E, ipsis N κ, N L. Dico quod neque minores. Si enim minores sint A D, A E, quam N κ, N L, abscindantur N O, N P, ipsis A D, A E, æquales, ducaturque recta O P. Quoniam igitur est vt N κ, ad N O, ita N L, ad N P, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera N κ, N L, trianguli N Κ L, secta proportionaliter; *b* ac proinde O P, ipsi Κ L, parallela erit. *c* Quare anguli N O P, N P O, angulis N Κ L, N L κ, æquales erunt, & triangulum N O P, triangulo N Κ L, æquiangulum. *d* Igitur erit vt N κ, ad Κ L, ita N O, ad O P. Est autem N κ, maior quam N O. *e* Igitur & Κ L, hoc est, D E, quæ æqualis est ipsi Κ L, maior erit, quam O P. Quocirca cum latera A D, A E, trianguli A D E, sint æqualia lateribus N O, N P, trianguli N O P, & basis D E, maior basi O P, *f* erit & angulus A, maior angulo O N P. Eadem ratione angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N κ, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt A D, A E, quam N κ, N L; sed neque æquales. Igitur maiores.



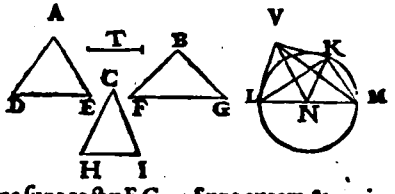
a 8. primo.

CADAT deinde centrum N, in latus L M; quod tum continget, quando triangulum Κ L M, angulum L Κ M, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur A D, A E, dicantur esse æquales ipsis N Κ, N L; erunt quoque

b 2. sex.
c 29. primi.
d 4. sex.
e 14. quinti.
f 25. primi.

B F, B G,

BF, BG, æquales eiſdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Poſita autẽ fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur

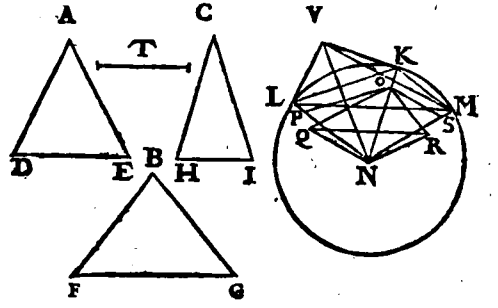


BF, BG, æquales quoque ſunt rectæ FG. a Sunt autem & maiores BF, BG, quam FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, b cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.

a 20. primi.

b 20. primi.

CADAT poſtremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtuſus, vt ex coroll. dicto propoſ. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicatur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æquales; c erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æquales; d erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quam NK, NL; ſi abſcindantur NO, NP, ipſi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. e Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æqua-

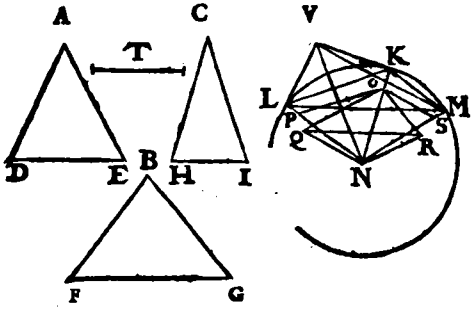


c 8. pri.

d 8. pri.

e 23. primi.

les ipſis



les ipſis A
A E, & co
nectantur
O Q, O
cadetque
O Q, in
O P, pro
pterea
per punct
O, P, Q,
tranſit cir-
cumferen-

tia circuli ex N, ad interuallum N O, deſcripta, cum æquales ſint
a 29. primi. rectæ N O, N P, N Q. a Quare cum angulus P O N, æqualis ſit
angulo L K N, externus interno; erit angulus Q O N, minor an-
gulo L K N. Eadem ratione oſtendetur angulus N O R, minor
angulo N K M, ſi ducatur O S, parallela ipſi K M. Cadet enim ſi-
militer O R, infra O S. Igitur totus angulus L K M, toto angulo
Q O R, maior erit. Quoniam vero latera N O, N Q, trianguli
N O Q, æqualia ſunt lateribus A D, A E, trianguli A D E; Eſt au-
tem & angulus O N Q, angulo A, æqualis, per conſtructionem;
b 4 pri. b erit O Q, ipſi D E, hoc eſt, ipſi K L, æqualis. Eodem modo erit
O R, ipſi K M, æqualis. Connexa iam recta Q R, cum latera K L,
K M, trianguli L K M, æqualia ſint lateribus O Q, O R, trianguli
O Q R; & angulus L K M, maior angulo Q O R, vt oſtendimus:
c 24. primi. c erit baſis L M, hoc eſt, F G, maior baſe Q R. Quoniam igitur la-
tera B F, B G, trianguli B F G, æqualia ſunt lateribus N Q, N R,
d 25. primi. trianguli N Q R; & baſis F G, maior baſe Q R; d erit angulus B,
maior angulo Q N R. Rurſus quia angulus O N Q, angulo A;
& angulus O N R, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus
Q N R, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur
angulo B. Igitur & angulus Q N R, maior erit angulo B. Quod eſt
abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo Q N R. Non ergo mi-
nores ſunt A D, A E, quã N K, N L; ſed neq; æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ A D, A E, maiores ſint rectis N K, N L,
vbicunque centrum N, exiſtat; poſſit recta A D, plus quam recta
N K, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadra-
e 12. 6 ad ec. tum rectæ A D, æquale ſit quadratis rectarum N K, & T. e Ex cen-
tro N, excitetur ad planum circuli K L M, perpendicularis N V,
rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ K V, L V, M V. Quo-
niam igitur N V, recta eſt ad planum circuli K L M, recta quoque
f 47. primi. eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas N K, N L, N M, f ac pro-
inde quadratum rectæ V K, quadratis rectarum K N, N V, æquale
erit. Cum ergo & quadratum rectæ A D, æquale ſit ex conſtru-

ctione,

tione, eiſdem quadratis rectarum K N, N V, æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum V K, & A D. Ac propterea æquales erũt rectæ V K, A D. Rurſus quia latera V N, N K, trianguli V N K, æqualia ſunt lateribus V N, N L, trianguli V N L; & anguli ipſis contenti V N K, V N L, recti; *a* erit baſis V K, æqualis baſi V L; Atq; eadem ratione rectæ V M. Quare tres rectæ V K, V L, V M, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta V K, æqualis rectæ A D. Tres ergo rectæ V K, V L, V M, æquales ſunt rectæ A D, & ob id, rectis A E, B F, B C, C H, C I. Quamobrem, cum latera V K, V L, trianguli V K L, æqualia ſint lateribus A D, A E, trianguli A D E; & baſis K L, baſi D E; *b* erit angulus K V L, angulo A, æqualis. Non ſecus demonſtrabimus, angulum L V M, angulo B; & angulum K V M, angulo C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus V, continetur tribus angulis planis K V L, L V M, M V K, qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

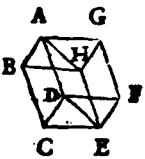
a 4. *prim.*

b 8. *prim.*

THEOR. 21. PROPOS. 24. XXIV.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia.

SIT parallelepipedum A B E F, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris A C, C F, F H, H A, A F, B E, quarum aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma ſimilia, & æqualia. Cum enim parallela plana B G, C F, ſecentur plano A C; *c* Erunt communes ſectiones A B, C D, parallelæ. Similiter cum plana parallela A F, B E, ſecentur plano A C; erunt communes ſectiones A D, B C, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera A B C D. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ A B, B H, parallelæ ſint rectis D C, C E, & non in eodem plano, ſed in oppoſitis; *d* erunt anguli A B H, D C E, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi B G, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi C F. *e* Quoniam vero A B, ipſi D C, in parallelogrammo A C; & B H, ipſi C E, in parallelogrammo B E, æqualis eſt; erit vt A B, ad B H, ita D C, ad C E; Ac propterea vt B H, ad H G; ita C E, ad E F, &c. eadem de cauſa: Erunt latera parallelogrammorum B G, C F, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis iam diametris A H, D E, *f* cum latera A B, B H, trianguli A B H, æqualia ſint lateribus D C, C E, trian-



c 16. *Vndec.*

d 10. *Vndec.*

e 34. *primi.*

f 34. *primi.*

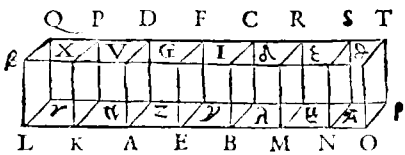
a 10. 11. 12. Ondec. b 4 prr. c 34. primi. CE, trianguli DCE; *a* & angulus ABH, **angulo DCE, æqualis** vt ostensum est; *b* erunt triangula ABH, **DCE, æqualia inter se.** *c* Quare cum triangula ABH, DCE, **dimidia sint parallelogrammorum** BG, CF; erunt parallelogramma **BG, CF, inter se æqualia.** Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. **Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt,** similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

XXV. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum AB **CD, plano EF,** parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est **basis AG, ad basim BG,** ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. **Intelligatur** enim parallelepipedum AB CD, productum in **vtramque** partem quantumlibet, sumanturq; in AB, protracta **quotcunq;** rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, **NO, ipsi EB, æquales.** Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur **plana** KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, **per** scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AE**FD, continetur** planis parallelis ex hypothesi; ipsum parallelepi**pedum erit, ex** definitio**ne,** *d* **habebitq;** plana **opposita,** parallelogramma similia & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. *e* **Quoniam** vero parallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AL, KL, æqualia sunt; & similia quoq;, *f* cum **anguli vnius** sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos **vnius** æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque **proportionalia.** Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelo**gramma AY, KZ, LΔ.** Cum igitur æqualia quoq; sint, & similia **parallelogramma AD,** KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, **solidi AE, FD,** æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, **solidi AKPD,** & tribus planis LX, LΔ, LQ, solidi KLQP: *g* **Sunt autem** tria in eaquoque solido æqualia, & similia tribus **reliquis** oppositis eidem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EB. igitur

d 24. Ondec.

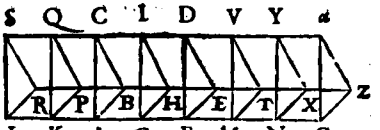


e 36. primi. f 29. primi. g 24. Ondec.

gitur per defin. 10. huius lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, PMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD; Et quam multiplex est basis OG, basis BH, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BC, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis maior est base, solidum quoq; solido maius est; & si minor, minus; in quacunq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinem, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY, ad basin CY, & vt basis AY, ad basin BY, & vt basis DG, ad basin CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propositio accommodari etiam potest omniprismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma ABCDEF, cuius plana aduersa sint triangula ABC, DEF, secenturque plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ, & ex AF, protracta vtrinq; capiantur quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZu, parallela planis ABC, GHI, FED, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI, a erunt communes sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH; b erunt communes sectiones: AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogram-



a 16. huius.

b 15. huius.

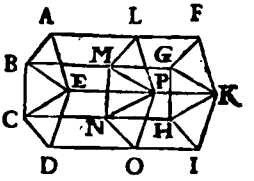
grammum A E. Igitur parallelogrammum eſt A H. Eodem modo parallelogrammum oſtendetur C H. Quoniam vero latera A G, A B trianguli A B C, aqualia ſunt lateribus G I, G H, trianguli G H I a *cum A C, ipſi G I, & A B, ipſi G H, ſit aquale:* b *& anguli C A B I G H, ſunt quoque aquales, eo quod recta C A, A B, parallela ſunt rectis I G, G H, & non in eodem plano;* c *erunt triangula A B C, G H I, aqualia inter ſe, & aquiangula.* d *Quare latera circa aquales angulos proportionalia habebunt: atq; ideirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum A B C I H G, contentum duobus planis oppoſitis A B C, G H I, aqualibus & ſimilibus, atq; parallelogrammis A I, I B, B G, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt A B C Q P K, K P Q S R L, F E D I H G, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y a Z O, L R S I H G, O Z a I H G. Quoniam vero S Q C I D V Y a R P B H E T X Z L K A G F M N O parallelogramma A I, K C, L Q, aqualia ſunt, & ſimilia; nec non A H, K B, L P, & C H, Q B, S P, erunt omnia plana priſmatis A B C I H G, aqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum A B C Q P K, K P Q S R L. Quare, per defin. 10. huius lib. aqualia erunt priſmata A B C I H G, A B C Q P K, K P Q S R L. Eadem ratione aqualia erunt priſmata F E D I H G, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y a Z O. Quare quam multiplex eſt baſis L I, baſis A I, tam multiplex erit priſma L R S I H G, priſmatis A B C I H G, & quam multiplex eſt baſis O I, baſis F I, tam multiplex erit priſma P Z a I H G, priſmatis F E D I H G. Quare ſi baſis L I, (multiplex baſis A I, prima magnitudinis) aqualis eſt baſi O I, (multiplici baſis F I, ſecunda magnitudinis,) aquale quoque eſt priſma L R S I H G, (multiplex priſmatis A B C I H G, tertia magnitudinis,) priſmati O Z a I H G, (multiplici priſmatis F E D I H G, quarta magnitudinis;) propterea quod baſibus L I, O I, exiſtentibus aqualibus, aqualia quoq; ſunt & ſimilia omnia plana priſmatis L R S I H G, omnibus planis priſmatis O Z a I H G: Si autem baſis L I, maior eſt baſe O I, priſma quoq; priſmate matum eſt, & ſi minor, minus, in quacunq; multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt baſis A I, prima magnitudo ad baſin F I, ſecundam magnitudinem, ita priſma A B C I H G, tertia magnitudo ad priſma F E D I H G, quartam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt eſt baſis A H, ad baſin F H, & vt baſis C H, ad baſin D H. Quod eſt propoſitum.*

S I T deinde priſma A B C D E F G H I K, cuius oppoſita plana ſint polygona, nempe pentagona, ſeceturque plano L M N O P. Dico rurſus vt eſt baſis C M, ad baſin N G, ita eſſe ſolidum A B C D E L M N O P, ad ſolidum L M N O P F G H I K. Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoque priſma in totidem priſmata, atque

a 34. primi.
b 10. vndec.
c 4. pri.
d 4. ſex.

a, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis B P, ad basim M K, ita prisma A B E P M L, ad prisma L M P K G F, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis C P, ad basim N K, ita prisma B C E P M N, ad prisma M N P K G H, & prisma C D E P N O, ad prisma N O P K H I. a Vt autem B P, ad M K, & C P, ad N K, ita est recta E P, ad rectam P K, hoc est, ut C N, ad N H: & ut C N, ad N H, ita est C M, ad N G. Igitur prismata A B E P M L, B C E P M N, C D E P N O, ad prismata L M P K G F, M N P K G H, N O P K H I, eandem habent proportionem ei, quam habet C M, ad N G, ac proinde eandem inter se. b Vt autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma B C E P M N, ad prisma M N P K G H, hoc est, ut basis C M, ad basim N G, ita prisma A B C D E L M N O P, ex tribus compositum ad prisma L M N O P F G H I K, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.

a 1. sext.



b 12. quinti.

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in utramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, c propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum, d ac proinde angulos æquales undec. comprehendunt, &c. Vnde, ut primo, ostendetur prismata ex una parte inter se æqualia, nec non & prismata ex altera parte, &c. undec.

c 16.

d 10.

COROLLARIVM.

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in prioti prismate, triangulum G H I, æquale esse & simile triangulo A B C, atque adeo triangulo D E F. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvj.

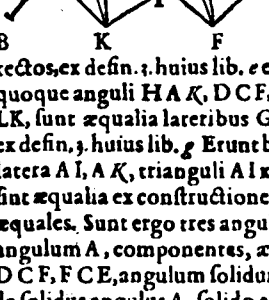
AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta A B, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, non in eodem plano existentibus. e Ducatur ex F, ad planum per C D, C E, ductum perpendicularis F G, undec. connectanturque rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde abscindatur A H, æqualis ipsi C D, f fiatque angulus H A I, angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis.

e 11.

f 23. primi.

Rursus in plano per A H, A I, ductum constituatur angulus H A L æqualis angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto existit; & a 12. recta A L, rectæ C G, æqualis. *a* Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres A H, A L, A I, erigatur perpendicularis L K, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis H K, H L, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia sint lateribus C D, C G, trianguli C D G, & anguli H A L, D C G, æquales, per b 4 pri. constructionem; *b* Erunt bases H L, D G, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui æquales sunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli A L I, æqualia sint lateribus C G, C E, trianguli C G E, c 4. pri. per constructionem; *c* æquales quoq; erunt L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia sunt lateribus G D, G F; & anguli H L K, d 4. pri. D G F, recti ex defin. 3. huius lib. *d* erunt & bases H K, D F, æquales.



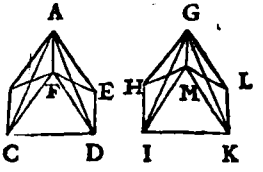
Quare cum & latera A H, A K, trianguli A H K, sint æqualia lateribus C D, C F, trianguli C D F, ex cõstructione. (cum enim A L, L K, latera lateribus C G, G F, æqualia sint ex constructione, comprehendantq; angulos æquales, nimirum e 4 pri. rectos, ex defin. 3. huius lib. *e* erunt bases A K, C F, æquales.) *f* Erunt f 8. pri. quoque anguli H A K, D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, sunt æqualia lateribus G E, G F, & anguli I L K, E G F, recti g 4. pri. ex defin. 3. huius lib. *g* Erunt bases I K, E F, æquales: Cum igitur & latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F, trianguli C E F, h 4 pri. sint æqualia ex constructione; *h* Erunt quoq; anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli plani H A I, H A K, K A I, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, angulum solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulos planos recta in uno eodemque existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant, pyramidesque quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulus soli-

in ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis contineatur, conſtatum erit totum angulum ſolidum tots angulo ſolido æqualis.

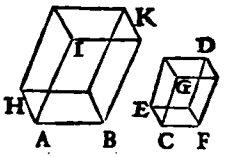
VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidum angulum æqualis, ſubtendenda ſunt angulis planis recta BC, CD, DE, EF, FB, & fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidum angulum æqualis G, contentum tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidum angulum G, contentum tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et deniq; angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidum angulum G, contentum tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totum angulum ſolidum G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulum ſolidum conſtituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27. xxvij.

ADATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SIT à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, a 26. eiuſque punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita *Vndec.* vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt eſt CF, ad CG, *b* ſic fiat b 12. AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt *ſexti.* CF, ad CE, ita AB, ad AH. Poſt hæc, perficiatur parallelepipedũ AK, completis nimirũ parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterque poſitum. Cum enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione, erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterque poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterque poſita parallelogramma HI, EG, & IB, & F. Tria igitur



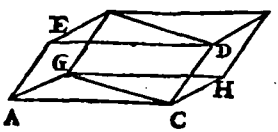
plana B H, H I, I B, solidi A K, similia sunt, similiterque posita tribus planis F E, E G, G F, solidi C D. a Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi A K, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi C D. Ac proinde ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterque posita solida A K, C D. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describemus. Quod erat faciendum.

a 24. Vndec.

xxviij. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint A H, E B, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur vtraque C D, G F, parallelæ est, b & æqualis ipsi A E, cum sint parallelogramma C E, G E; c erunt & inter se parallelæ, & æquales C D, G F. d Ac proinde, quæ ipsas coniungunt C G, D F, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. e Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G; F E D, D B F, proportionalia. f Igitur similia quoque erunt dicta triangula. g Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B; & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, C F, prismatis A C G F E D, æqualia & similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, B G, C F, prismatis H G C D B F; propterea quæ prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



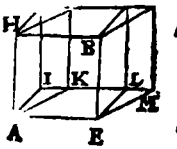
b 34. primi. c 9. Vndecimi. d 33. primi. e 24. Vndec. f 6. sexti. g 24. Vndec.

xxix. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin A B, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana

lana parallela, sint constituta duo parallelepipeda AEDB, AFGB, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in isdem collocentur lineis, nempe AI, AK, BL, BM, in recta IM; & IC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDB, AFGB, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AB, & in eisdem parallelis constituta; *a* 35. *primi.*

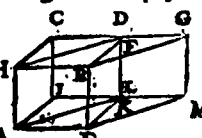


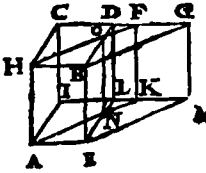
erunt, ablato communi trapezio ABLK, æqualia quoque triangula AIK, BLM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum BLM, triangulo BDG, æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo BD; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo BG: *e* Sed & IB, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales. (*f* Nam cum rectæ, IL, KM, æquales sint ipsi AB, erunt quoque inter se æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM,) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis BLMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDB, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

b 34. *primi.* *c* 4. *sex.* *d* 24. *vndec.* *e* 26. *primi.* *f* 4. *pri.*

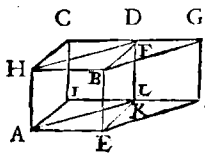
SCHOLIVM.

HÆC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, & ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando utrumque punctum K, in punctum L, cadit; vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, & in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. Vnde & prima, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.

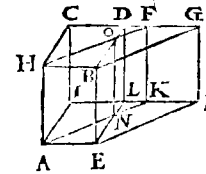




IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, demantur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, aqualia; quibus si addatur triangulum commune KLN, erunt triangula AIK, ELM, aqualia inter.



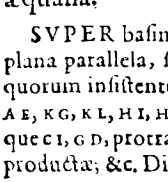
Unde, & prima, aqualia erunt prisma AIKFCH, ELMGDB, a quibus si auferatur prisma commune KLNODF, (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO,) remanebit solidum comprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, aquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur utrique prisma commune AENOBH, fient parallelepipeda AGDE, AFGE, inter se aqualia.



XXX. THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem colloçantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFL, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AG, AE, KG, KL, HI, HM, ED, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia.



Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, eadem in punctis P, Q; adiungantur q; rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo EF, & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, EB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. b Igitur & HB, EB, PQ, parallelæ sunt & æquales, ideoq; parallelogrammum CIHPQB Eadem ratione parallelogramma CNHPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP Igitur parallelepipedum est APQR. c Quamobrem parallelepi-

a 34. *primi.*
b 33. *primi.*
c 29. *primi.*

lelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque precedens, in hunc modum.

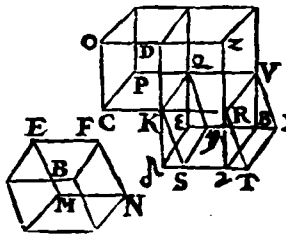
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine, erunt æqualia abscissum, & reliquum. 2 Cùm igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum. 2 29. vel 30. vndecimi.

THEOR. 26. PROPOS. 31. xxxj.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases cõstituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se. xxxij.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primùm insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitq; KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, constituatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelo-



gramma ϰT, LG, æqualia & similia; Rursus quia latera ϰQ, ϰS æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QϰS, ELA, recti, per defin. 3 huius lib. eo quod ϰQ, LE, rectæ ponantur ad plana KI, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera ϰR, ϰQ æqualia sint lateribus LB, LE, anguli QϰR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma ϰV, LF, æqualia & similia. Quare cum plana, ϰT, QS, kV, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia; a tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, b tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF; inter se æqualia.

a 24. 11 def. b 24. 11 def.

CONVENIANT rectæ Dk, TS, productæ in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturq; parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturq; parallelepipedum IkRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qδγ V, eandem habent basin kV, sunt quæ in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela kV, δX, & insistentes ipsorum lineæ kδ, kI, RT, Rγ, QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, εX, ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V.

c 29. 11 def.

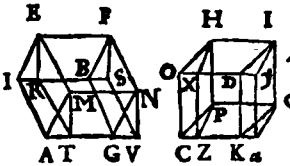
dQVONIAM vero parallelogramma kT, kγ, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales. e Quare erit, vt CD, ad DR, ita kγ, ad DR: f Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIk, ad solidum kIαR; cum parallelepipedum CHαR, secetur plano Ik, planis oppositis, CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt kγ, ad DR, ita est solidum Qδγ V, ad solidum IkRα; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano kV, oppositis planis Dαβ, parallelo. g Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIk, Qδγ V, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IkRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, kγ, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoq; erũt parallelepipeda AEFG, CHIk. Quod est propositum.

d 35. primi. e 7. quinti. f 25. 11 def. g 9. quinti.

SINT iam neque insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB, neque CP, kQ, QH, QI, ad basin CD, perpendiculares:

Et à

rũ α punctis E,F, M, N, demittantur E R, F S, M T, N V, ad planum, in quo basis A B, perpendiculares; Item à punctis, H,I,P,Q, ad planum, in quo basis C D, perpendiculares H X, I Y, P Z, Q α. Sunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ R S, S V, V T, T R: Item rectæ X Y, Y α, α Z, Z X, vt fiant parallelepipeda E T V F, H Z α I, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantq; insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. b Sed parallelepipedum E T V F, æquale est parallelepipedo A E F G, cum hoc eandem cum illo habeat basin E N, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum H Z α I, æquale est eadem ratione parallelepipedo C H I K; cum hoc eandem cum illo basin H Q, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

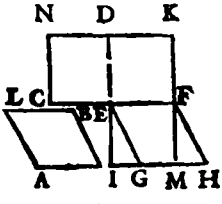


a 11. Vndec.

b 29. vel 30. Vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes linea ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Numerum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes linea ad bases A B, C D, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B, & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammũ E H, quod æquale erit, & simile parallelogrãmo A B. Conueniat autẽ H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammũ I K. Iam vero intelligantur super bases E H, I F, E K, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super A C, C D, constructis; sintq; insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super E H, æquale esse ac simile solido super A B, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint



a 29. &n decimi. *sint & similia planis huiu dionem.* a *Sunt autem & lelepipeda super E H, I F, cui sin eandem, cuius infimum dam super planum I K; I opposita, quorum latera inf in eodem plano, cuius infi atque insistentes lineas E G,*

b 35. pri mi. *&c. in eisdem rectis lineis I H, &c. Igitur aequale erit dum super I F, parallelepipedo super A B.* b *Quoniam logramma E H, I F, aequalia sunt; & E H, aequale*

c 7. quinti. *qualia erunt I F, C D.* c *Erit igitur, vt I F, ad E K, ita*

d 25. &n decimi. d *Est autem vt I F, ad E K, ita solidum super I F, ad E K, quod solidum super I K, secetur plano super E F, planis super D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C solidum super C D, ad solidum super E K, cum solidu secetur plano super D E, erecto parallelo planis super C M Quare erit vt solidum super I F, ad solidum super E*

e 9. quinti. *super C D, ad solidum super E K.* e *Ac proinde aequali lelepipeda super I F, & C D. Ostensum est autem par super I F, aequale parallelepipedo super A B. Aequalia parallelepipeda super A B, C D. Quod est propositum.*

CONVERTETVR quoque haec propos. 31. in

SOLIDA parallelepipeda æqualia sup baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallel qualia in eadem altitudine; ſuper æquales ſu non habuerint eandem baſin.

f 31. &n decimi. *SI enim vnum altero crediatur altius, ſi ab eo abſci lelepipedum in eadem cum altero altitudine, fient ſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aequale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

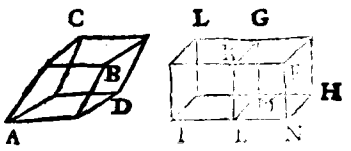
QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius ior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis aequalis abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altit ſtrabimus eodem modo partem toti eſſe aequalem. Quo

xxxiij. THEOR. 27. PROPOS

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H tudinis ſuper baſes A B, E F. Dico eſſe ſolidum A g 45. pri baſis ad baſin. g Super rectam enim F K, conſtru xxi.

ammum IK, æquale parallelogrammo AB, in
ngulo IEK, qui sit æ-
talis angulo ENF. Cō-
tuent autem paralleloamma EF, IK, totum



rallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum vnum parallelepipedum LH; *a* erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cùm habeant æquales bases, per constructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex *hypothesi*. *b* Quare erit vt solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad idem solidum EFGH: est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, vt basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

a 31. Vndecimi.
b 7. quinti.
c 25. Vndecimi.

SCHOLIVM.

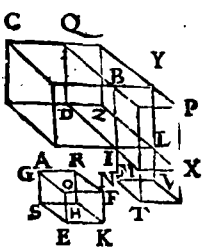
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori æqualis, & ducatur planum si parallelum, d *erit* q. *vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum.* e *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

d 32. Vndecimi.
e 9. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvj.

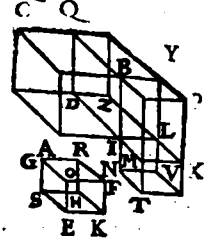
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda CD, EFGH, super bases similes CD, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item IL, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam verò latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO; *f* & anguli contenti æquales, cùm angulus ILM,



f 15. primi.

L I M, ſit æqualis angulo A I D, qui ob ſimilitudinem parallelepedorum æqualis eſt angulo E k H, ſeu R G O; erunt parallelogramma I X, G F, ſimilia, & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt & æqualia L N, R S; item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T parallelepipedi T X I V, ſimilia ſunt, & æqualia tribus planis G E, R S, G E, parallelepipedi E F G *H*: *a* Sunt autem tria cuiuſq; ſimilia & æqualia tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt, & ſimilia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10 huius lib. Rurſus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur ob ſimilitudinem parallelepipedorum A B C D E F G H, eſt vt A I, ad E k, hoc eſt, ad I I ita D I, ad H k, hoc eſt, ad I M; & B I, ad F k, hoc eſt, ad I N. *b* Vt autem A I, ad I I ita eſt parallelogrammum A D, ad D L; Et vt D I, ad I M, ita parallelogrammum D L ad L M; & vt B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit vt A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. *c* Sed vt A D, baſis ad D L, baſin, ita eſt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q: & vt baſis D L, ad baſin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P; & vt baſis B L, ad baſin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, vt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Ac proinde quatuor quantitates ſunt continuè proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoq; proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc eſt, ad E F G *H*, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad ſecundam D L Y Q, ex defin 10. lib. 5. *d* Vt autem A D C B, ad D L Y Q, ita eſt baſis A D, ad baſin D L; *e* Et vt A D, ad D L, ita eſt recta A I, ad I L, hoc eſt, ad E k. Igitur proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H, eſt triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E k. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum Quod erat demonſtrandum.



a 24. 6 *Eucl.*

b 1. *ſex.*

c 32. 6 *Eucl.*

d 32. 6 *Eucl.*

e 1 *ſex.*

COROLLARIVM.

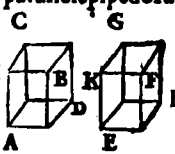
EX hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimirum laterum homologorum.

THEOR.

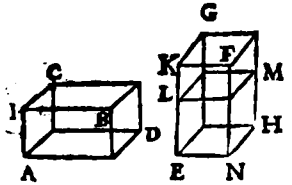
THEOR. 29. PROPOS. 34. XXXIV.

ÆQVALIVM ſolidorum parallelepipedorum baſ, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum rallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, la ſunt æqualia. XXXV.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes D, EH Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum DCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EH-F, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AI, Ek, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, Ek, ſint 1 defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, Ek, ſunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, rea, quæ ad finem propoſ 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo Ek, ad altitudinem AI: Ac oinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

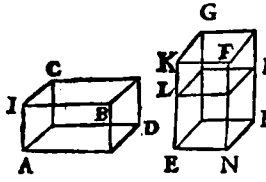


QVOD ſi altitudines AI, Ek, inæquales fuerint; ſit Ek, ma-; ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur pla- ML, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ 15. huius lib. quinti. goniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; e erit vt 7. DCB, ad ſolidum EHML, ita HGF, ad idem ſolidum EHML: Vt autem ſolidum ADCB, ad idum EHML, ita eſt baſis AD, baſin EH, cum æquales ponã- altitudines AI, EL. Et vt ſoli- EHGF, ad ſolidum EHML, eſt eadem ratione baſis KM, baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandem ha- nt altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN; erunt n inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, aſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: e Sed vt KN, ad LN, ita eſt re- Ek, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit aſis AD, ad baſin EH, ita altitudo Ek, ad altitudinem AI; Ac pterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.



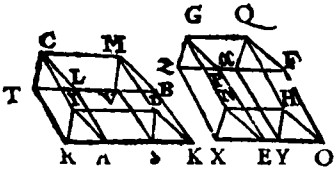
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepi- la eſſe æqualia. Si enim altitudines Ek, AI, ſunt æquales; cum baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo Ek, ad altitudinem AI, ex hy- heſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. d Quare parallelepipeda CB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudin- an- A n, inter ſe æqualia erunt.

QVOD



QVOD si altitudo E K, ior fuerit, abscindatur E L, A L æqualis, & per L, ducatur num L M, parallelum basi E Quia igitur ex hypothesi est, basis A D, ad basin E H, ita a tudo E K, ad altitudinẽ A I, h est, ad E L, ipsi A I, æqualem; a autem basis A D, ad basin EH, ita est solidum A D C B, ad so dum E H M L, cùm altitudines A I, E L, æquales ponantur. b vt E K, ad E L, ita est K N, ad L N; c Vt autem basis K N, ad ba L N, ita est solidum E H G F, ad solidum E H M L, cùm soli E H G F, E H M L, eandem habeant altitudinem, si bases pona tur K N, L N; erunt enim hæc ratione inter plana parallela K G H; Erit vt solidum A D C B, ad solidum E H M L, ita solidu E H G F, ad idem solidum E H M L; d ideoque æqualia erunt s lida A D C B, E H G F.

a 32. 6m decimi. b 1. sext. c 32. 6m decimi. d 9. quinti.



SED proponantur iam para lepipeda A B C D, E F G H, a qualia, quorũ insistentes line A I, K D, B M, L C; E N, O H, F C P G, nõ sint perpendiculares a bases A B, E F. Demittantur au tem à punctis I, D, M, C, ad pla nũ basis A B, perpendiculares I R, D S, M V, C T; Itẽ à pũctis N, H Q, G, ad planum basis E F, perpendiculares N X, H Y, Q α, G Z connectanturque rectæ R S, T V, R T, S V; X Y, Z α, X Z, Y α: E runtque perpendiculares R I, X N, parallelepipedorum altitudi nes, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, vt basis A B, ad basin E F, ita esse altitudinem X N, ad altitudinem R I. e Cùm enim æqualia sin solida A B C D, E F G H, ex hypothesi, sit autem A B C D, æqua le solido R V C D, quòd habeant eandem basin C D, eandemque altitudinem R I; & E F G H, eadem ratione, æquale solido X α G H: Erunt & parallelepipeda R V C D, X α G H, æqualia. Quare cùm habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases C D, G H, erit, vt iam demonstratum est, vt basis C D, ad basin G H, hoc est, vt basis A B, ad basin E F, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

e 29. vel 30. 6m decimi

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt priùs; Cùm sit vt basis A B, ad basin E F, ita altitudo X N, ad altitudinem R I; f Sit autem A B, ipsi C D, & E F, ipsi G H, æqualis; erit quoque vt basis C D, solidi R V C D, ad basin G H, solidi X α G H, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Quare cùm X N, R I, sint insistentes li-

f 24. 6m decimi.

nex

æ perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt, vt iam oſtenſum
,æqualia parallelepipeda RVCD, XaGH. a Sunt autem hæc a29. Vnd.
rallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur 30.
qualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idem- dem.
ie oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint
rpendiculares ad baſin, alterius verò non. Quam ob rem, Ae-
ualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines re-
procantur, &c. Quod erat oſtendendum.

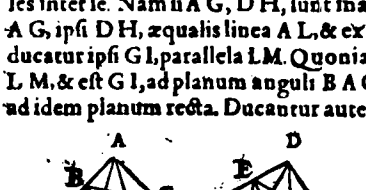
SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitio-
bus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; priſmatis,
a habent duo plana oppoſita triangularia, ſi producta hypotheſes
uentur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, &
er eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, appenantur
o alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallele-
eda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exi-
ntia. b *Quare æqualia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde* b 29.
data priſmatis, eorum videlicet dimidia. 30. Vnd.
RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & 31. Vnd.
er diuerſas baſes conſtitutis adijcientur duo alia priſmata illis æ- dem.
alia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiuſdem
itudinis. c *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt* c 31. Vnd.
ſis ad baſin; d *Atq; adeò priſma ad priſma, nempe dimidium vi-* dem.
u parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, d 15.
riſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certè vt triangu- quint.
m ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium al-
ius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.
PRÆTEREA, ſi duobus priſmatis prædictis ſimilibus addan-
alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituentur duo pa-
elepipeda ſimilia, e *quæ inter ſe habent proportionem triplica-* e 33.
proportionis laterum homologorum. Igitur & priſmatum, eorum dem.
rum dimidia, f *cùm eandem habeant proportionem cum pa-* f 15.
lelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorum- quint.
lat. tum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa pri-
tum.
DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur
e duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo paralle-
peda æqualia eorundem altitudinum cum priſmatis. g *Quare* g 31.
m baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciproca; & ba- dem.
priſmatum eadem ſint, vel certè triangula eorum dimidia h *eam-* h 15.
m habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eo- quint.
m altitudines reciproca.

xxxvij. THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani angu li æquales, quorum ve
bus ſublimes rectæ lineæ inſi ſtant, quæ cum lineis p
poſitis angulos contineant æ quales, vtrumque vtr
In ſublimibus autem linei : quælibet ſumpta fu
puncta, & ab his ad plana, n quibus conſiſtunt a
primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à
ctis vero, quæ in planis à per ɔendicularibus fiunt, a
gulos primum poſitos adiun ctæ fuerint rectæ lineæ
cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æqu: les B A C, E D F, quorum ver
cibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lin
A G, D H, ita vt angulus B A G, angulo E D H, & angulus C A
angulo F D H, ſit æqualis: à ſumptis autem punctis G, H, in rect
A G, D H, demittantur ad plana, in quibus anguli B A C, E D
exiſtunt, perpendiculares G I, H K, incidentes in puncta I, K,
adiungantur rectæ I A, K D. Dico angulos G A I, H D K, eſſe æqua
les inter ſe. Nam ſi A G, D H, ſunt inæquales, auferatur à maio
A G, ipſi D H, æqualis linea A L, & ex L, in plano trianguli A G
ducatur ipſi G I, parallela L M. Quoniam igitur parallelæ ſunt G
a 8. Vn- L M, & eſt G I, ad planum anguli B A C, recta; a erit quoque L M
decimi. ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rect



A B, A C, D E, D F, pe
pendiculares M B, M
K E, K F, & connectan
rectæ B C, B L, L C, E
E H, H F. Et quia L M,
cta eſt ad planum an
B A C, ipſa rectum an
lum efficiet cum recta A M, in eodem plano ducta per defi
b 47. huius lib. b Quare quadratum rectæ A L, æquale erit quadra
primi. rectarum A M, M L; c Eſt autem quadratum rectæ A M, æqu
c 47. quadratis rectarum A C, C M, cum & angulus A C M, rectus ſit
primi. conſtructione. Quadratum ergo rectæ A L, æquale eſt quadra
d 47. rectarum A C, C M, M L: d At quadratis rectarum C M, M
primi. æquale eſt quadratum rectæ C L, cum angulus C M L, rectus
e 48. per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ A L, æquale
primi. quadratis rectarum A C, C L; e Ac proinde angulus A C L, r
f 47. pr. ctus erit. f Rurſus quia quadratum rectæ A L, æquale eſt qu
g 47. pr. dratis rectarum A M, M L: g Eſt autem quadratum rectæ A M,
æqual

æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per
conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æqua-
le eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: *a* At quadratis recta- a 47.
rum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angu- primi.
lus BML, ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo re-
ctæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; *b* propterea- b 48.
que angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti an- primi.
guli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trian-
guli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH;
itemque latera AL, DH, æqualia; *c* Erunt & reliqua latera c 26.
AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argu- primi.
mento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare
cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE,
DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æqua-
les, ex hypotheſi; *d* erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli d 4 pri.
ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem &
toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DEF, æqua-
les: cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB,
reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum
& latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; *e* erunt latera BM, CM, e 26.
lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, primi.
trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trian-
guli DFK, & anguli ACM, DFK, ſunt recti; *f* erunt & baſes f 4. pri.
AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ
rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: Quia g 47.
vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, primi.
ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH,
quod anguli BML, EKH, recti ſint, ex defin. 3. huius lib. Erunt
& quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum
EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ
æqualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reli-
qua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde
rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM,
trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli
DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; *h* erunt & anguli LAM, h 8. pri.
HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales,
quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod
oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verti-
cibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primo po-
ſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis

extremis linearum sublimium ad plana angulorum primò positorum d missæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli pl ni B A C, E D F, ponuntur æquales & sublimes æquales A L, D H, cons tuunt angulos æquales L A B, H D E. Item L A C, H D F: demonstratu fuit, demissas perpendiculares L M, H K, esse æquales.

xxxviij. ## THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est de scripto à media linea solido parallelepipedo, quod æ quilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Constituatur q angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque D E D E G, F E G, ita vt recta D E, ipsi A; & E F, ipsi B, & E G, ipsi C, sit æ qualis. Completis autem parallelogrammis D F, F G, G D, perficia tur parallelepipedum D H: quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur

a 26. & 11 decimi.

a contineri, aut ex ipsis fieri. Deinde ad rectam I K, eiusque punctum K, fiat solidus angulus L, æqualis solido angulo E, ex tribus angulis planis I K L, I K M, L K M, qui æquales sint tribus D E F, D E G, F E G, ita vt rectæ I K, K L, K M, æquales sint mediæ lineæ B. Completis verò parallelogrammis I L, L M, M I, perficiatur parallelepipedum I N, quod contineri dicitur sub linea B, se ex ipsa describi. Dico solidum D H, æquale esse solido I M. Cùm enim sit vt D E, ad I K, ita K M, ad E G, (quod D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli

b 14. sexti. D E G, I K M, æquales: b Erunt parallelogramma D G, I M, æqualia, propterea quòd latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam verò anguli plani D E G, I K M, sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales E F, K L, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primò positis, ex constructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium D G, I M, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum D H, I N, si bases sint D G, I M, inter se æquales, per co-

c 31. & 11 decimi. roll. propos. præcedentis. c Quare parallelepipeda D H, I N, cùm habeant bases D G, I M, æquales, & æquales quæque altitudines inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

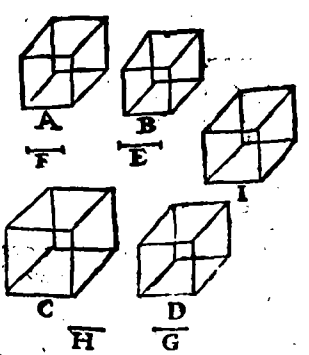
SCHOLIVM.

b *VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea de-*

descripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, ei sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto à media B. Dico A, B, C, esse continuè proportionales. Nam vt iuxta primum, ostendemus eorum altitudines ex F L, demissa esse æquales. Quare cùm & imponantur æqualia; erunt eorum bases D G, I M, æquales per eam, ad finem propos. 31. huius lib. demonstratum. Quæ bases cùm sint habeant æquales D E G, I K M, ex constructione: a habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt D E, ad ipsam I K, ad E G. Quapropter cùm D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumptæ sit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod erat propositum. a 14. sexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. XXXII.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & super ipsis parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

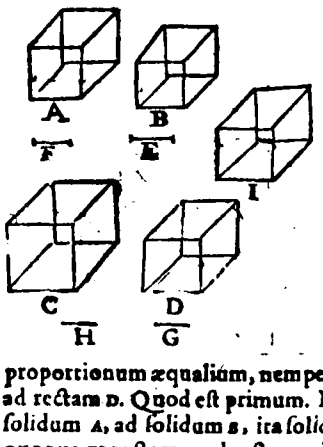


QUATTUOR rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; constituatur que super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, sive hæc sint similia, sive non. Dico esse vt solida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inveniantur enim tribus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item tribus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita solidum A, ad solidum B, Et vt C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

IAM è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico b tribus A, B, C, D, esse quoque proportionales. b Tribus enim rectis A, B, C,

a 27. Vndec. A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, a super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita b 9. quinti. ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. b Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectã D. Dico esse quoq; vt



c 33. Vndec. solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. c Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectã B; item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt d 33. Vndec. solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. d Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demõ-

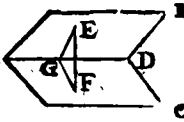
ratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ; perſpicuum eſt, q. propoſitum.

TOTA vero hac propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo latera aduerſa æqualia ſunt triangula, vt Campanus ait. Nam addu-ctis priſmatis, quæ ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hinc eſt demonſtratum, proportionalia erunt. a *Cum igitur, priſmatis, eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis proportionem; quinti. perſpicuum eſt, quod proponitur.* a 15.

THEOR. 33. PROPOS. 38. xiij.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM enim AB, rectum ſit ad planum AC, ſitq; eorũ communis ſectio recta AD; Et ab B, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionem AD.



Nam ſi fieri poteſt, cadat extra ad punctum F, *b* & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta BG, in plano AB Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atque adeo & ad rectam GB, per 3. defin. huius lib. Eſt autem & BF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo BFG, duo anguli BFG, BGF, recti ſunt, quod eſt abſurdum, *c* cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex B, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, cadet, ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum. b 12. *primi.* c 17. *primi.*

SCHOLIVM.

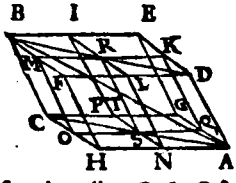
HÆC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demiſſa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionem, d *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ducta ſunt ad ipſum planum AC, duæ perpendiculares EF, EG. Quod fieri nequit, vt in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.* d 12. *primi.*

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxix.

SI ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſoli-

di parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorũ sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuò secare bifariam. Connexis enim rectis RE, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cùm sint parallelogramma AS, HS,) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales, Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: Ac propterea AS, CS, vnam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, ipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia verò AC, BD, parallelæ sunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuò secabunt, in puncto videlicet T. Cùm autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuò secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.



a 34. pri mi.
b 29. pri mi.
c 4. pri mi.
d 13 pri mi.
e 14. pri mi.
f 9. Undecimi.
g 33. pri mi.
h 7. Undecimi.
i 29. & 15. pri mi.
k 26. pri mi.

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuò bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

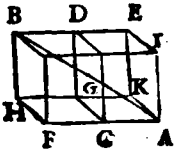
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum:

entrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

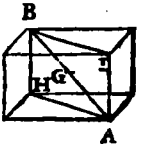
SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri AB, quod ſit G. Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planum CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum. a *Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcunq; proportionaliter; ſecatur autem BA, bifariam in G; ſecabuntur quoque latera aduerſorum planorum AH, BI, atque adeo & baſes AH, BI, bifariam.* b *Cum igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH, ita ſolidum AD, ad ſolidum CB, erit parallelepipedum AB, ſectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*



a 17. Vndec.

b 25. Vndec.

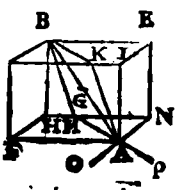
TRANSEAT ſecundo planum ſecans AI, BH, per diametros BI, AH, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelepipedum per centrum G, imò per totam diametrum AB, c *cum AB, in plano ſit parallelarum AH, BI.* d *Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.*



c 7. Vndecimi.

d 25. Vndec.

TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit aduerſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, ſecantur plano AKBM; c *erunt communes ſectiones AM, BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AL, BN, facta à plano AKBM. Quare parallelogrammum eſt AKBM;* f *ideoque tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ;* g *ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK.* h *Cum igitur OAP, æqualis ſit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.)* i *Erunt baſes KL, MN, inter ſe, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & ſimilia erunt triangula BKL, AMN,* k *cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, recta MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, eſt æqualis, vt oſtendimus; erit & reliqua IK, reliqua HM; & reliquum an-*



f 34. primi.

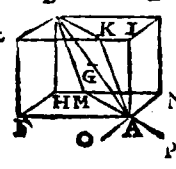
g 10. Vndec.

h 15. primi.

i 4. pri.

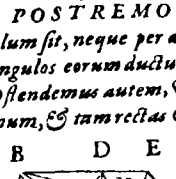
k 4. ſex.

gulus B K I, reliquo A M H; & reliquum K B E, reliquo A M N aequalis. (Est enim tota L I, totis N H, aequalis, & tota B K I, quam anguli A M N, A M H, duobus rectis aequales, toti angulo N A F, aequalis, ob similitudinem parallelogrammorum L E, F N.) Sunt autem & latera B K, A M, A F, F H, aequalia; & anguli B K I, A M H, A F H, F H M, ob



angulos A F H, F H M, ob L E, F N. Igitur quadrilatera aequilaterum, & aequiangula latero A M H F; Ac propter mile, cum singula singulis ra nimirum lateribus, & dem modo aequalia erunt & la B H M, A I K; & quadrilatera A K L F, B M sint & aequilatera & aequiangula. Quapropter so planis A K L F, F H M A, A K B M, M H B, B K, erit solido contento planis B M N E, E I K B, B M A N A I E, per 10. defin. huius libri, cum his planis aequalia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo plano A K B M, per centrum G, bifariam.

POSTREMO planum secans C D, neq; adlelum sit, neque per diametros planorum oppositorum angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana. Ostendemus autem, vt prius, planum secans C D, esse bifariam, & tam rectas C K, D M, quam rectas C M, K D

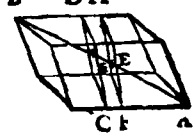


Ducantur in parallelogrammis C D, K M; connectantur B K. Quoniam igitur A I, L I, ob parallelogrammum a 29. vndecimi. sunt parallelae; b Erunt A cum illis plano; ac propterea bunt in centro G. In solo e

c 29. primi. A B, per hypothesim, secat planum C D, in quo exi
quoniam angulus B D C, angulo alterno A C D,
d 15. primi. autem & anguli B G D, angulo A G C, ad verti
tus B G, lateri A G, aquale, quod A B, bifariam
e 26. primi. e Erit & latus D G, lateri C G, aquale. Cum ergo
post. 34. lib. 1. ostendimus, diametri C D, K M, se
cent, transibit K M, per punctum G, ibique diam
Quia ergo latera B G, G D, trianguli B G D, aqu
f 15. pr. A G, G C, trianguli A G C; f & anguli B G
g 4. 1. A G C; g Erit & basis B D, aqualis basi A C.
aquales erunt recta B K, A M. Quocirca cum tri
K B, trianguli D D K, aequalia sint tribus lateribus

rianguli A C M; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1. demonſtrata ſunt, anguli illum angulis huius æquales: Eſt autem totus D B L, toti C A N, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum B I, A H. Igitur & reliquus K B L, reliquo M A N, erit æqualis. Quoniam igitur latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia ſunt lateribus A M, A N, trianguli A M N, & angulus K B L, angulo M A N, æqualis; a Erit & baſis K L, baſi M N; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si- a 4 pri. *gnetur æqualibus angulis B K L, A M N, æquales adiantur anguli B K D, A M C, fient toti anguli D K L, C M N, æquales. Quare quadrilaterum B D K L, quadrilatero A C M N, & æquilaterum eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota L I, toti N H, eſt æqualis, erit & reliqua I K, reliquæ H M, æqualis. Eademque ratione reliqua D E, reliquæ C F, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum D E I K, æquilaterum eſt quadrilatero C F H M: Sed & æquiangulum; cum anguli D E I, E I K, æquales ſint angulis C F H, F H M, propter ſimilitudinem parallelogrammorum B I, A H; & anguli E D K, I K D, angulis F C M, H M C, æquales, quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni L K D, B D K, angulis N M C, A C M. Igitur quadrilatera D E I K, C F H M, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia & quadrilatera A C K I, B D M H; Item D E N M, C F L K, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis C K L F, F H M C, C K D M, M H B D, D K L B, B H F L, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido contento planis D M N E, E I K D, D M C K, K I A C, C M N A, A I E N; cum hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur A B, ſectum eſt per centrum G, plano C D, bifariam.*

SED ſecetur iam parallelepipedum A B, plano C D, bifariam. Dico planum C D, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum C D, ſecat diametrum A B, diuidere diametrum A B, bifariam. Si enim diameter A B, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum F H, plano C D, parallelum, ſecabitur parallelepipedum A B, bifariam plano F H, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano G D;



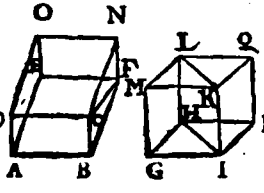
Igitur ſolida C B, F B, cum ſint dimidia parallelepipedi A B, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum A B, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonſtrandum erat.

THEOR.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHLKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitq; parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parall:logramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. *a* Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum; æqualia erunt parallelogramma AC, GP. *b* Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (*c* Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.



a 34. primi.

b 31. Vndec.

c 32. Vndec.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum oporteat parallelepipeda compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim tam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

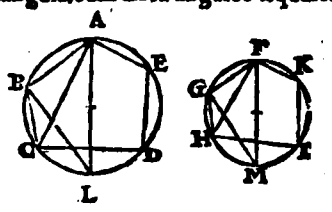
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et ſolidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; *a* erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: *b* Eſt autem angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, *c* nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; *d* erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. *e* Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. *f* Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ. Quæ



a 6. *ſexti.*
b 21. *tertij.*
c 31. *tertij.*
d 32. *primi.*
e 4 *ſexti.*
f 22. *ſexti.*

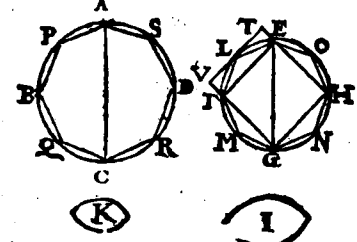
itaque

itaque in circulis polygona similia, inter se sunt, vt à diametri quadrata. Quod erat demonstrandum.

12. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico esse, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulum A B C D, ad circulum E F G H. Si enim ut non ita se habet; sit vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo E F G H. Sitem
a 7. quinti. esset æqualis, a haberet circulus A B C D, ad circulum E F G H, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circulum E F G H, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus E F G H, magnitudine scilicet x, ita vt circulus E F G H, æqualis sit magnitudinibus I, & x, simul. Inscribatur in



circulo E F G H, quadratum E F G H; quod quia dimidiũ est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli E F G H. Secentur bifariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiungantur que rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi E F, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurrat-
b 41. primi. que rectis H E, G F, productis in T, & V. b Quia ergo triangulum E L F, dimidium est parallelogrammi T E F V; maius erit triangulum E L F, quam dimidium segmenti circuli E L F. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ E L, L F, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si a circulo E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum E F G H; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula E L F, F M G,
c 1. decs. &c. atque in hunc modum, semper fiat detractio; c relinquentur tandem

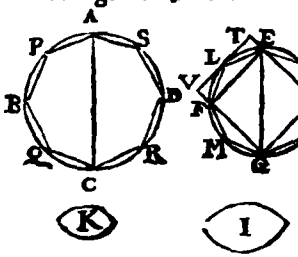
eadem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; & ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonū ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ EL-FMGNHO, vt patet. *a* Quoniam igitur est polygonum APB- *a* 1. *decimi.*
QCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. *b* Igitur & polygonum ELFMGN- *b* 14.
HO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est *quinti.*
absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura conferatur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFG*H*, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratū diametri minoris EG, ad quadratū maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuerse demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, *c* maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. *c* 14.
Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri *quinti.*
AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

Quam-

Quamuis autem circulus A B C D, maior est, & E F G H, minor eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli E F G H, ad quadratum diametri circuli A B C D, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circuli A B C D, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, eandem habere proportionem, quam habet circulus A B C D, ad magnitudinem circuli E F G H, minorem: quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nam



quam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriorem circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: Sed neque minor est, ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; a sit autem vt circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, siue circulus A B C D, circulo E F G H, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

a 7. quinti.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tum circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

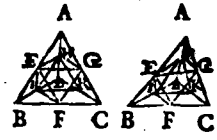
iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum A B C, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, o, H, I, K, connectantur

rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; huius vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, nec non eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter; *a* erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC.



a 2. *sex.*

b Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ; *c* erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB, *d* proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, Hκ, rectis AB, AC, sunt parallelæ; *e* erunt anguli IHκ, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIκ, ABC; & Hκι; ACB. *f* Quare latera trianguli *H*Ik, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum *HIK*, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula D*H*I, DIk, DkH, triangulis DAE, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HI*K*D, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDk, cum

b 9. *vn. decim.*

c 10. *vndec.*

d 4. *sex.*

e 10. *vndec.*

f 4. *sex.*

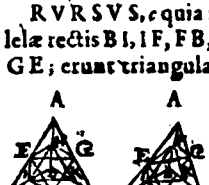
g 21. *vnd.*

similia sint ostensa triangulo A D C, & constituta super æquales rectas A H, H D. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula A E G, H I K, cum similia sint ostensa triangulo A B C, & super rectas positæ A E, H I, a quæ æquales sunt, ob parallelogrammum A E I H. Non secus æqualia erunt & similia triangula E H G, I D K, cum sint ostensa similia triangulo B D C, & habeant rectas H E, D I, b quæ æquales sunt, ob parallelogrammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales sunt & similes, per 10. de fin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi. RVRSVS, c quia rectæ E H, H G, G E, æquales sunt, & parallelæ rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B, F G H I, B F G E; erunt triangula E H G, B I F, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: d Sunt autem & parallela cum E H, H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ sint rectis B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur solidum B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G, B I F, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis B G F B, B E H I, I F G H, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum C F G H I K. e Cum enim rectæ F C, C G, G F, æquales sint, & parallelæ rectis I K, K H, H I, ob parallelogramma C F I K, C G H K, F G H I; erunt triangula C F G, H I K, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: f Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, per quas ducitur planum C F G, parallelæ sint rectis K I, K H, per quas planum K I H, ducitur. Igitur solidum C F G H I K, contentum duobus triangulis C F G, K I H, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H, prisma est Quoniam vero prismata E B F G H I, C F G H I K, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K; & parallelogrammum E B F G, basi illius, duplum est trianguli C F G, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. g Ipsa inter se æqualia erunt.



d 15. 11 dec.

e 34. primi.

f 15. 11 dec.

g 40. 11 dec. DENIQVE quia prisma E B F G H I, maius est pyramide E B F I, totum parte; Est autem pyramis E B F I, æqualis & similis pyramidi A E G H, nec non pyramidi H I K D, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata E B F G H I, C F G H I K, pyramidibus A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis A B C D, excedent, hæ vero à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, mi-

nor re-

or vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 10

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT supra bases triangulares A B C, E F G, duæ pyramides A B C D, E F G H, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in A I L M, M N O D; E P R S, S T V H; & in bina prismata æqualia I B K L M N, C K L M N O, P F Q R S T; G Q R S T V; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ A I L M, M N O D; E P R S, S T V H; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide A B C D, ad omnia prismata generata in pyramide E F G H, illis multitudine æqualia, vt est basis A B C, ad basin E F G. Cum enim sit vt B C, ad C K, ita P G, ad G Q, eo quod vtraque linea diuisa est bifariam; sint autem triangula A B C, L K C, similia similiterque posita; Item triangula E F G, R Q G, ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum A B C, ad triangulum L K C, ita triangulum E F G, ad triangulum R Q G. Et permutando, vt A B C, ad E F G, ita L K C, ad R Q G. Vt autem L K C, ad R Q G, ita est prisma C K L M N O, ad prisma G Q R S T V, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma I B K L M N, ad prisma P F Q R S T, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet I B K L M N, ad vnum prisma P F Q R S T. b ita sunt duo prismata I B K L M N, C K L M N O, ad duo prismata P F Q R S T, G Q R S T V. Igitur etiunt quoque, vt basis A B C, ad basin E F G, ita duo prismata in pyramide A B C D, ad duo prismata in pyramide E F G H. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in

a 22. sexti.

b 12. quinti.

pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bi-
priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFG
vt ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidum ad baſes EPRS, STV
harum pyramidum; & ſic deinceps eadem ſemper facta diuiſione.
Sed vt illæ baſes ad has, ita eſt LK, baſis quæ illis eſt æqualis & ſi-
milis, ad baſin RQG, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, vt in præce-
denti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt ba-
ſis ABC, ad baſin EFG. Igitur erunt quo-
que, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſ-
mata cuiuslibet pyramidis factæ in pyra-
mide ABCD, ad priſmata cuiuslibet pyra-
midis factæ in pyramide EFGH: Ac pro-
pterea erunt quoque vt priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata
pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſma-
ta pyramidis EPRS, quam priſmata pyramidis MNOD, ad pri-
ſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum ſint, vt duo
priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH,
a 12. quinti. a ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, & hæc illis multitudine ſint æqualia; Erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

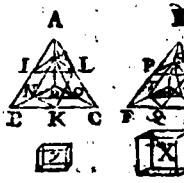
QVOD autem ſit LKC, ad RQG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſis ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. b 17. Vndec. *Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, b ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.*

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis A B C D, E F G H, quarum bases triangula A B C, E F G. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur vt basis A B C, ad basin E F G, ita pyramis A B C D, ad solidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide E F G H. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis E F G H, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide E F G H, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, a pyramide E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata P F Q R S T, G Q R S T V; a quæ maiora sunt dimidio pyramidis E F G H: Item à reliquis pyramidibus E P R S, S T V H, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; b relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis E F G H, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis E F G H, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide E F G H, maiora solido X. Diuidatur pyramis A B C D, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides A I L M, M N O D, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia, Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. c Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide A B C D, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide E F G H, vt basis A B C, ad basin E F G, hoc est, vt pyramis A B C D, ad solidum X. Sunt autem omnia prismata in pyramide A B C D, minora, quam tota pyramis A B C D; d erunt quoque omnia prismata in pyramide E F G H, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide E F G H.



a 3. *duo decimi.*

b 1. *dec.*

c 4. *duo decimi.*

d 14. *quinti.*

SIT deinde solidum X, pyramide E F G H, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis A B C D, ad solidum X, vt basis A B C, ad basin E F G: Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem A B C D, vt basis E F G, ad basin A B C. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem A B C D, ita pyramis E F G H, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide E F G H; e erit & pyramis A B C D, maior solido Y. Quare erit, vt basis E F G, ad basin A B C,

e 14. *quinti.*

ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH, ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X,

b 9. quinti. a ſit autem pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt ad pyramidem EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque vt a ſis ABC, ad baſin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim earum altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſui quoque

b 9. quinti. *erat ad totam pyramidem.* b *Pyramis ergo conſtituta æqualis eſt tertiæ pyramidi, pari toti. Quod eſt abſurdum.*

COROLLARIVM.

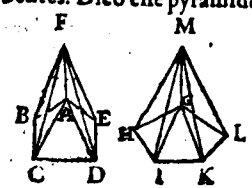
HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM ſequitur è conuerſo, pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 39. & 41. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

VI. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin.



c 5. duodecimi. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. c Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF: componendo vt baſis ABCD, ad baſin

ma A C D, ita pyramis A B C D F, ad pyramidem A C D F: a Sed rursus est vt basis A C D, ad basin A D E, ita pyramis A C D F, ad pyramidem A D E F. Igitur ex æquo vt basis A B C D, ad basin D E, ita pyramis A B C D F, ad pyramidem A D E F. Componendo ergo erit vt basis A B C D E, ad basin A D E, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem A D E F. *Simili* argumento erit vt basis G H I K L, ad basim G K L, ita pyramis G H I K L, ad pyramidem G K L M; & conuertendo vt basis G K L, ad basin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. b Rursus quoniam est, vt basis A D E, ad basin G K L, ita pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erunt quatuor bases A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, in eisdem proportionib. cum quatuor pyramidibus A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit vt basis A B C D E, ad basin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. *duodecimi.*

b 5. *duodecimi.*

A B C D E	A B C D E F
A D E	A D E F
G K L	G K L M
G H I K L	G H I K L M

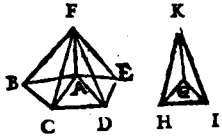
SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygona latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura contineat latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. c *Quoniam vero est, vt basis A B C, prima quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem; ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem:* d *Erit vt basis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis A B C D, prima quantitas, ad basin G H I, se-*

c 5. *duodecimi.*

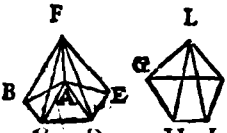
d 24. *quinti.*

cundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, & modo est ostensum
a 5. duo decimi. *a & vt basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem*
b 24. quinti. *GHIK, quartam quantitatem; b Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem,*



ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides qualibet, quarum vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere à triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygona, sintque plura latera in vna base quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratum, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quan-



c 24. quinti. *titatem; c Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem,*

vt ante

ut ante est ostensum; a Erit [illegible] *basis* A B C D E, *primæ quanti-* a 24.
tati cum quintæ, ad basim G H I K, *secundam quantitatem, ita pyra-* quinti.
mis A B C D E F, *tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem* G H I-
K L, *quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter proce-*
dendum erit, si plura triangula fuerint in basi A B C D E.

HANC autem propositionem 6. & eas, quæ in hoc scholio demon-
stratæ sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

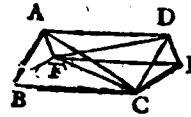
PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

CONVERSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vj.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuidit in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma A B C D E F, cuius duo triangula opposita, æquales, ac similia A B F, D C E. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe A C, in A B C D; C F, in B C F; F D, in A D E F. *b* Quoniam igitur triangula A B C, A D C, b 34. *primi.*



c 5. *duo decimi.*

qualia sunt; cestque vt basis A B C, ad basim A D C, ita pyramis A B C F, ad pyramidem A D C F, cum hæ pyramides eandem altitudinem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum A B C D, demissam; Erunt & pyramides A B C F, A D C F, inter se æquales. Rursus ducta C F, pyramis A D C F, eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, E F D C, super æquales bases A D F, E F D, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum A D E F, demissa. Est autem pyramis A D C F, eadem pyramidi A D F C, cum illa continetur quatuor planis, nempe basi A D C, & triangulis A D F, C F, D C F; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi

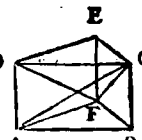
ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, (seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur plani CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, ut perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF, in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

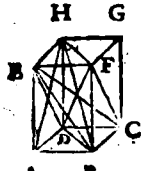
HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Sine prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin & altitudinem.

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, a & demonstratum est; *Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, ut eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma ipsum esse pyramidis triplum.*

a 7. duodec.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, DF, erit, & demonstratum est, pyramis ADBE tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit & pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; b Ac propterea & una pyramis ad unum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul sum-



b 12. quinti.

vt ante est ostensum; a *Erit etiam vt basis A B C D E, primæ quanti-* a 14.
tatis cum quinta, ad basim G H I K, secundam quantitatem, ita pyra- quinti.
mis A B C D E F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi A B C D E.

H A N C autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.

Q V O D non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

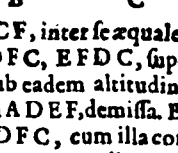
PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vj.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

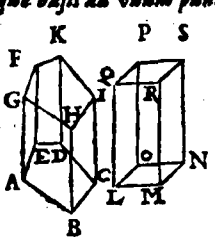
SIT prisma A B C D E F, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia A B F, D C E. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe A C, in A B C D; C F, in B C E F; F D, in A D E F. *b* Quoniam igitur triangula A B C, A D C, b 34.
æqualia sunt; *c* estque vt basis A B C, ad basin A D C, ita pyramis A B C F, ad pyramidem A D C F, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum A B C D, demissam; Erunt & pyramides A B C F, A D C F, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, E F D C, super æquales bases A D F, E F D, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum A D E F, demissa. Est autem pyramis A D C F, eadem pyramidi A D F C, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi A D C, & triangulis A D F, A C F, D C F; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi



primi.
c 5. duo decimi.

ſint figura multilatera. Dico & eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis circumq. baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi oppoſitum, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes; Ac proinde per corell. dictum huius propoſ. qualibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. a Quam ob rem erit, & pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, & baſis ad baſin, & oſtenſum eſt propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque & baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.

a 15. quinti.



CONVERSO modo, ſi priſmata quotcumque baſium inter ſe ſint, & baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtituta, quæcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

SCHOLIVM II.

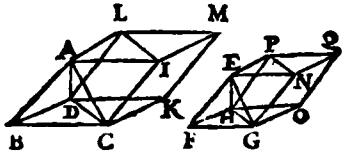
CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelliguntur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo priſma dici ab Euclide, & in deſin. priſmatis diximus. Nam ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis vnum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia pars ipſius priſmatis, & in corollario 1. demonſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, & in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tuli baſis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, ſed duæ tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, & parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex

rallelepipedi prædicti, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur, erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma reposito 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hæc enim ratione, si vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, duæ tertiæ partes prismatum, & modo demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

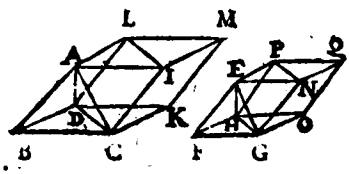
THEOR. 8. PROPOS. 8. viij

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares A B C D, E F G H, ita vt basis A B C, E F G, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G. Extendantur enim plana triangulorum A B C, C B D, D A B, perficianturque parallelogramma B I, B K, B L. Deinde ducantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta K M. Erit igitur completum parallelepipedum B M, eiusdem cum pyramide altitudinis, cum plana solidi B M, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, sunt æquales, estque vt A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, similia. Eodem modo cum anguli A B D, E F H, sint æquales, sitque vt A B, ad B D, ita B F, ad F H; item anguli D B C, H F G, æquales, & vt D B, ad B C, ita H F, ad F G: erunt & parallelogramma A L, B K, parallelogrammis F P, F O, similia.



similia. *a* Sed tam tria B I, B K, B L, parallelepipedi B M, reliquis tribus oppositis D M, A M, C M, quam tria F N, F O, F P, parallelepipedi F Q, reliquis oppositis tribus H Q, E Q, G Q. *b* sunt æquales, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum B M, similia sunt sex planis solidum F Q, ambientibus; Ac proinde ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniam vero duo triangula L I, P N, *c* prismata duo triangula H F G N P E, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q, eorum dupli; *d* pyramides A B C D, E F G H, eandem, quam prismata dicta, eandem tripla; *d* habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. *e* Cum igitur proportio parallelepipedi B M, ad parallelepipedum F Q, sit triplicata proportionis homologorum laterum B C, F G; erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

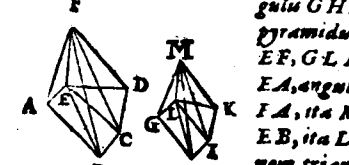


a 24. Undec.
b 24. Undec.
c 15. quinti.
d 11. quinti.
e 33. Undec.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum A B C D E, G H I K L. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa A B, G H. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectas E B, E C, L H, L I, & dissecta erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula A B E, E B C, C D E. similiaque triangulis G H L; L H I, I K L. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula A E F, G L M, similia sunt, & anguli F E A, angulo M L G. æquales; erit ut F E, ad E A, ita M L, ad L G: Ut autem E A, ad E B, ita L G, ad L H, propter similitudinem triangulorum A E B, G L H. Ergo ex æquo erit, ut F E, ad E B, ita M L, ad L H. Rursus quia est ut E B, ad B A, ita L H ad H G, ob triangula similia A B E, G H L; Et ut B A, ad B F, ita H G, ad H M, cum ob eandem similitudinem similia sint triangula A B F, G H M: Ex æquo quoque ex æquo, ut E B, ad B F, ita L H, ad H M: Ac propterea sit, ut F E, ad E B, ita M L, ad L H; & ut E B, ad B F, ita L H ad H M, f 5. ex. erit etiam ex æquo, ut F E, ad F B, ita M L, ad M H. g Quare simi-



e 15. quinti.
f 20. sexti.

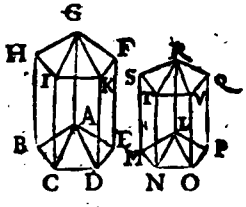
mia, atque adeo & similia sunt triangula F E B, M L H. Sunt autem & triangula F E A, F A B, A B E, triangulis M L G, M G H, G H L, similia. Igitur pyramides A B E F, G H L M, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides E B C F, L H I M; item C D E F, I K L M. a Quapropter, vt demonstratum est, pyramides a 8. duo decimi.
A B E F, E B C F, C D E F, ad pyramides G H L M, L H I M, I K L M singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, singulorum ad singula. Cum igitur A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium A B C D E, G H I K L; habebunt quoque pyramides A B E F, E B C F, C D E F, ad pyramides G H L M, L H I M, I K L M, vnam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; b *Atque idcirco erit vt vna pyramis A B E F, ad vnam pyramidem G H L M, ita omnes pyramides, nempe pyramis A B C D E F, ad omnes pyramides, simitum ad pyramidem G H I K L M. Quam ob rem, cum pyramis A B E F, ad pyramidem* c 8. duo decimi.
G H L M, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum A B, G H; habebit quoque pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum A B, G H. Quod erat propositum.

b 12. quinti.

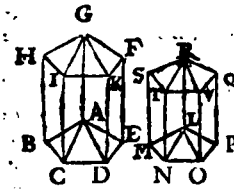
SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ A C, A D; L N, L O, d erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula A B C, C A D, D E A, triangulis L M N, N L O, O P L, similia. Similiter si ex angulis G, & R, ducantur rectæ G I, G K; R T, R V, erunt triangula G H I, I G K, K F G, & triangulis R S T, T R V, V Q R, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogramma C H, N S, similia sunt; erit vt I C, ad C B, ita T N, ad N M; Vt autem C B, ad C A, ita quoq; est N M, ad N L, ob similitudinem triangulorum B C A, M N L. Igitur ex æquo erit vt I C, ad C A, ita T N, ad N L. Rursus quoniã angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinẽ prismatũ; si ille huic superponatur, omnia inter se cõuenient, nimirũ angulus M N O, angulo B C D, & angulus T N M, angulo I C B, & angulus T N O, angulo I C D; Conuenit autem & recta N L, rectæ C A, eo q; anguli M N L, B C A, sunt æquales. Igitur anguli I C A, T N L, æquales sunt, ac propterea cũ latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia,

d 20. sexti.



nalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atque & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstrantur ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.



EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes dividi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis corolli.

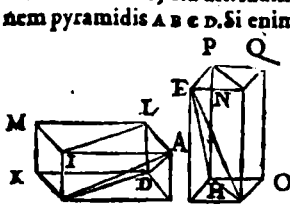
EODEM modo infertur, prismata multangula similia dividi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

vij.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, FQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales pronuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum



sint

sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. *a* Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: *b* Vt autem basis BI, ad basim FN, ita est triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur. a 34. vndec. b 15. quinti.

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; *c* cum sit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ; *d* Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum. c 14. quinti. d 34. vndec.

SCHOLIVM.

EADEM ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illa sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, basin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera vocetur ad parallelogrammum,

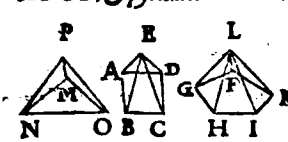
per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 41. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; e erit vt basis ABC, ad basin KLM, hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim has altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis e 9. duo decimi.

ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, aequalium bases & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse aequales. Constructa enim figura eodem modo, cum basis KLM, aequalis sit basi EFG, & altitudo pyramidis KLMN, aequalis altitudini pyramidis EFGHI, ponatur autem esse vt ABC, ad EFGH, sta altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt basis ABC, ad basin KLM, sta altitudo pyramidis KLMN, ad

a 9. duo decimi. *istud. nem pyramidis ABCD. a Quamobrem aequales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, aequalis sit pyramidis EFGHI, per ea, quae ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, aequalis. Quod erat propositum.*

SINT deinde pyramides aequales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multangula. Fiat rursus triangulum MNO, aequale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Erit quoque ex scholio propos. 6. huius lib pyramis MNOP, aequalis pyramidi ABCDE. Sed haec aequalis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, aequalis erit pyramidi FGHIKL. Quare, vt



nunc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, ita aequalis, ad basim FGHIK, sta altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim ha altitudines aequales) Ac proinde pyramidum aequalium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse aequales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO, aequalis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quae pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, sta altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIk, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante ostendimus, aequales erunt pyramides MNOP, FGHIkL. Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, aequalis ex scholio propos. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, aequalis erit. Quod est propositum.

OMNIA hac facile quoque demonstrabuntur conuersis propositionibus quibuscunque. Nam si proportionales fuerint, aequales, erunt pyra-

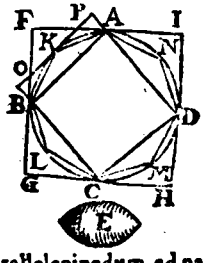
pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertia partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certè duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, linea recta, vt in ſchulio eiuſdem propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eadem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatu habentium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certè ſeſquialtera, æqualia quoq; ſunt. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 12.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum A B C D, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non erit dimidium cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni.

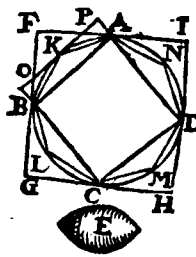


Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelligantur q; ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium eſt quadrati F G H I, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; *a* eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis A B C D, dimidium parallelepipedi baſis F G H I; Ac proinde parallelepipedum baſis A B C D, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus A B C D. Secentur bifariam peripheriæ A B, B C, C D, D A, in punctis K, L, M, N, adiungantur q; rectæ K A, K B, L B, L C, M C, M D, N D, N A. Ducatur quoq; per k, recta O P, tangés circulum in k, quæ parallela erit ipſi A B, vt ad prop. 27. lib. 3. oſtendimus, occurrátq; rectis D A, C B, productis in P, & O; & ſuper A k B, A B O P, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. *b* Quia ergo triangulum A k B, dimidiũ eſt parallelogrammi A B O P; erit quoq; priſma baſis A k B, dimidium priſmatis, ſeu

a 32. 6 vndec.

b 41. primi.

parallelepipedi basis A B O P: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, cõstituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam vero si a cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio;



a 21 dec. a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I: intelligantur quæ super hæc quadrata, pyramides sub altitudine

b 6. duo decimi. coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, &c. quæ vt

que vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiungantur quæ rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi *A B*, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratque rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A k B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo trian- *a* 41. gulum A k B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque *primi.* pyramis super basin A k B, dimidium pyramidis super basin A B O P, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam ba- *b* 6 *duo* ses; ac proinde pyramis super basin A k B, maior erit dimidio se- *decimi.* gmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A k B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ A k, k B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quã dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium A k B, B L C, C M D, D N A; atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tan- *c* 1. *dec.* dem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A k, k B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A k B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in co-

rollario propoſitionis ſeptimæ huius libri à nobis eſt demonſtratum, erit huiuſcemodi priſma maius cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo cylindrus minor eſt triplo coni: Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, propterea que conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

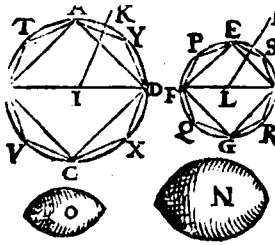
QVAMVIS propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib 11. *omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, vt perſpicuum eſt eius demonſtrationem diligenter inuenti. Itaque propoſitio vniuerſe ita proponi poterit.*

OMNIS conus ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuslibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni & cylindri.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli A B C D, E F G H, altitudines vero æquales l k, L M. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, ſit vt baſis A B C D, ad baſim E F G H, ita conus A B C D k, ad aliquam magnitudinem, nempe ad M, quæ vel maior erit, vel minor cono E F G H M. Si enim eſſet æqualis, a haberet conus A B C D k, ad conum E F G H M, & ad N, proportionẽ eandem, ac propterea eſſet conus ad conum, vt baſis ad baſim: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O, ita vt conus E F G H M, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H, diuidantur que peripheriæ E F, F G, G H, H E, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ E P, P F, F Q, &c. Quoniam igitur ſi ex cono E F G H M, detrahatur pyramis ſuper baſin E F G H,



a 7. quinti.

eiuſdem

ſuſdem altitudinis, & à reliquis ſegmentis auferantur pyramides eiuſdem altitudinis baſium E P F, F Q G, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur, vt in poſteriore parte præcedentis propoſitionis oſtenſum eſt; a relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, exceſſus coni E F G H M, ſuper N. Sint ergo iam ſegmenta coni relicta baſium E P, F Q, E Q, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus E F G H M, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmentis maior eſt; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum E P F Q G R H S, eiuſdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo A B C D, polygonum A T B V C X D Y, ſimile polygono E P F Q G R H S, vt in propoſ. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri B D, F H. Quoniam igitur per coroll. propoſ. 2. huius lib. eſt vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita polygonum A T B V C X D Y, ad polygonum E P F Q G R H S: Vt autem circulus A B C D, ad circulum E P G H, ita ponitur conus A B C D k, ad magnitudinem N, b & vt polygonum, ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis A T B V C X D Y k, ad pyramidem E P F Q G R H S M, vt conus A B C D k, ad N. Cum igitur pyramis A T B V C X D Y k, minor ſit cono A B C D k, pars toto, c erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quam N. Oſtenſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono E F G H M.

a 21. *duo*

b 6. *duo decimo.*

c 14. *quinti.*

SIT Secundo N, maior cono E F G H M. Cum igitur ponatur vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita conus A B C D k, ad N; Erit & conuertendo vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita N, ad conum A B C D k. Ponatur vt N, ad conum A B C D k, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono E F G H M; maior quoque erit conus A B C D k, quam O. Quare erit vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono A B C D k. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N, magnitudo cono E F G H M. Sed neque minor eſt oſtenſa; Æqualis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, vt baſis A B C D, ad baſin E F G H, ita conus A B C D k, ad N; d Sit autem, vt conus A B C D k, ad N, ita idem conus A B C D x, ad conum E F G H M; erit quoq; vt baſis A B C D, ad baſin E F G H, ita conus A B C D x, ad conum E F G H M. e

d 7. *quinti.*

e 15. *quinti.*

QVONIAM autem, vt conus A B C D k, ad conum E F G H M,

ita eſt cylindrus A B C D k, (qui triplus eſt coni A B C D k,) ad cylindrum E F G H M; (qui triplus eſt coni E F G H M,) Erit quoq; vt baſis A L C D, ad baſin E F G H, ita cylindrus A B C D k, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR hac propoſitio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

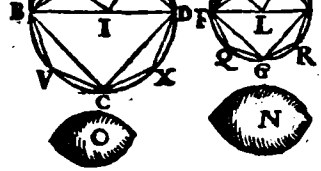
SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

SINT ſimiles coni, & cylindri, quorum baſes circuli A B C D, E F G H, axes vero L k. L M, & diametri baſium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non detur, habeat conus A B C D k, ad aliquam magnitudinem N,

propor-

oportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Erit-
ie N, vel minor, vel maior cono E F G H M. Si enim esset æqua-
a haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, pro- a 7. *quinti.*
rtionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad co-
m E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri
D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum
minor quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatque ea-
m prorsus constructio fi-
æ, quæ in præcedenti
positione, ita vt rursus
amis E P F Q G R H S M,
ior ostendatur, quam N.
cantur deinde rectæ K B,
, M F, M P, vt habean-
duo triangula B K T, E-
, pyramidum A T B V-
D Y K, E P F Q G R H-
; & connectantur rectæ
, P L. Quoniam igitur coni A B C D K, E F G H M, similes po-
tur; erit ex 14. defin. lib. 11. vt diameter B D, ad diametrum
. *b* ac propterea vt semidiameter B I, ad semidiametrum F L, b 15.
xis I K, ad axem L M; Ac permutando vt B I, ad I K, ita F L, ad *quinti.*
. Cum igitur anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib. 11.
d coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorum ba-
Erunt triangula B I K, F L M, æquiangula; *d* Ac propterea vt c 6. *sex.*
ad B I, ita erit M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad d 4 *sex.*
ob similitudinem triangulorum B I T, F L P. (Cum enim an-
B I T, F L P, insistentes similibus arcubus B T, F P, sint æqua-
t in scholio propos. 2. lib. 3. ostensum est; sitque vt B I, ad I T,
L, ad L P, ob æqualitatem tam linearum B I, I T, quam F L,
erunt triangula B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, vt K B, e 6. *sex.*
T, ita M F, ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B,
lia sunt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis la-
us comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis I K, rectus
tur ad circulum A B C D, *f* erunt bases K B, K T, æquales. f 4. *pri.*
m modo æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ
K T, rectis M F, M P, proportionales erunt, cum vtrobique
oportio æqualitatis. *g* Quoniam vero vt K B, ad B T, ita K T, g 7.
ndem B T; Item vt M F, ad F P, ita M P, ad eandem F P: Erit *quinti.*
m vt K B, ad B T, ita M F, ad F P: Erit quoque vt K T, ad B T,
P, ad F P; Et conuertendo vt B T, ad T K, ita F P, ad P M,
re cum sit vt T K, ad K B, ita P N, ad M F, & vt K B, ad B T, ita
ad F P; Et vt B T, ad T K, ita F P, ad P M, veluti ostensum est;
bunt triangula B K T, F M P, latera proportionalia, *b* ideo b 6. *sex.*

que æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quorum sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8 huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP;



a 11. quinti. Et vt BI, ad FL, ita BD, ad EH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & portio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur & vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; erit b 14. quinti. pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono EFGHM.

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo proponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime ostendimus: Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Erat c 14. quinti. N, maior ponitur quam conus EFGHM; erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habebit triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem

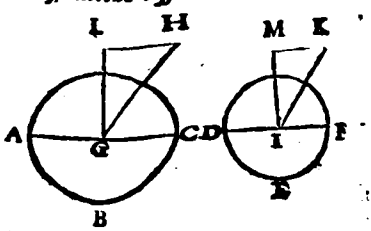
o cono minorem, proportionẽ habere triplicatam eius, quam
bent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, co-
EFGHM: Sed neque minor est ostensa. Æqualis igitur est
ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad a 7.
num EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, *quinti.*
N, in triplicata proportione diametrorum BD, & FH; erit
ioq; conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem dia-
etrorum proportione triplicata.

QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, ean- b 15.
m quoq; obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylin- *quinti.*
us ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus tripli-
tam Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus
conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylin-
i, atq; prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ra-
one sunt diametrorũ, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

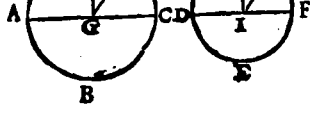
SCHOLIVM.

QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, per-
icuum est, ex secunda parte huius propos. Euclidem assumere, de-
nstratum esse propos. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maio-
m habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod
defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, &
eum, Sit habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes co-
& cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis
cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes rectos
bases Quocirca eam hac ra-
ne ostendemus in similibus
s & cylindris scalenis. Sint
iles coni, & cylindri scaleni,
rum bases circuli ABC, D-
, axes vero GH, IK. Dico
conum ad conum, quam
ndrum ad cylindrum habe-
proportionẽ diametri ad dia-
trũ triplicatam. Intelligãtur enim super easdem bases duo coni, &
rectis earundem cum scalenis altitudinũ, quorũ axes GL, IM.
ntur per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secantia bases
rectis AC, DF, quæ diametri basiũ erũt. Quoniã igitur axes GL, c 12.
IK, IM, ad easdem rectas, d AC propterea perpendiculares lineæ ex Eucl.
K, ad bases demissæ cadent in AC, DE, cõmunes sectiones; & prom- d 38.
unt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, quæ æquales inter Eucl.
se erunt,



se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem
a 32. primi. *& anguli C G L, F I M, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Reliqui igitur, H G L, K I M, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni A B C H, A B C L, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta H L*
b 29. primi. *per axium vertices ducta ipsi A C, parallela; b ideoque angulus L recto. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli C G L, F I M, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli C G H, F I K. Trianguli igitur G H L, I K M, æquiangula sunt;*
c 4. sex. *c atque idcirco erit vt G H, ad G L, ita I K, ad I M; & permutando, vt G H, ad I K, ita G L, ad I M. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita est A C, diameter ad D F, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & G L, axis ad I M, axem erit, vt diameter A C, ad D F, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti A B C L, D E F M, similes erunt ex definitione.*
d 12. duodec. *d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus A B C L, cono & cylindro A B C H, (cum eundem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus D E F M, cono & cylindro D E F K, (ob eandem rationem,) est aqualis, vt constat ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit vt conus & cylindrus A B C L, ad conum & cylindrum D E F M, ita conus & cylindrus A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, ideoque proportio coni & cylindri A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, triplicata quoq; erit diametri A C, ad diametrum D F. Quod est propositum.*



xj.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus A B C D, plano G H, parallelo aduersis planis A B, C D, quod quidem secet axem E F, in I. Dico vt est cylindrus A B H G, ad cylindrum G H C D, ita esse axem E I, ad axem I F. Intelligatur enim cylindrus A B C D, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo E C, ad cuius reuolutionem describitur est cylindrus, protractus quantum libet: Sumant itque in axe producto quotcunque rectæ E K, K L, æquales ipsi E I; Item quotcunque rectæ F M, M N, N O, æquales ipsi F I. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ I H, K P, L Q, M T, N V, O X, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli E C, describent circulos G H, P Q, Q S, T R, V Z,

T α, V Z, X Y, parallelos æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum S Q X Y. Quoniam vero tam cylindri S P, P A, A H, ſuper baſes æquales Q S, P R, B A, & ſub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales ſunt, quam cylindri X Z, Z T, T D, D H, ſuper æquales baſes X Y, V Z, T α, C D, & ſub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quam multiplex eſt axis I L, ipſius axis I E; Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quam multiplex eſt axis I O, ipſius axis I F. Quoniam autem ſi axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi I O, (multiplici axis I F, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, ſecundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

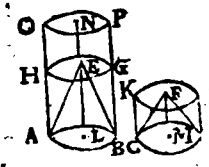
ETSI hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demonſtrat; tamen eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodabis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni, ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita vt quemadmodum in cono recto rectangulum circa quieſcens latus circumfertur, ſic quoque in cono ſcaleno circumferantur ſemidiametri L S, K R, E A, &c. ſemper æquidiſtantes circa centra L, K, E, &c. vna cum recta S T, ſemidiametros coniungente. Hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, vt conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſectione cylindri.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xj.

SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.

SINT

SINT ſuper baſes æquales A B, C D, duo coni A B E, C D F, & duo cylindri A B G H, C D I K, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) L E, M F. Dico eſſe conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, vt eſt altitudo L E, ad altitudinem M F. Extendatur enim cylindrus A B G H, ad partes G H, vna cum eius axe L E, & rectangulo A G; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O P, eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. a cylindro A G, ad ipſos eandem habebit proportionem. b Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, vt axis, ſeu altitudo L E, ad axem, ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo L E, ad altitudinem M F.



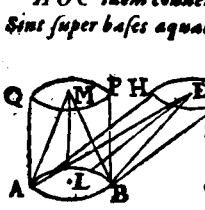
a 7. quinti.
b 15. duodec.

c QVIA vero coni A B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; d ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, vt altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

c 10. duodec.
d 15. quinti.

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E; C D F, & cylindri A B G H, C D I K, ſcalenis, quorum altitudines L M, N O. Dico conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, eſſe, vt eſt altitudo L M, ad altitudinem N O. Super baſin enim A B, conſtituatur cylindrus rectus A B P Q, ſub altitudine L M; item ſuper baſin C D, cylindrus C D R S, ſub altitudine N O. e *Quoniam igitur eſt cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrum rectum C D R S, vt altitudo L M, ad altitudinem N O: Eſt autem cylindro A B P Q, cylindrus A B G H: item cylindro C D R S, cylindrus C D I K, æqualis ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus A B G H, ad cylindrum C D I K, vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod eſt propoſitum.* f *QVONIAM autem coni, f cum ſint tertiæ partes cylindrorum, eandem*



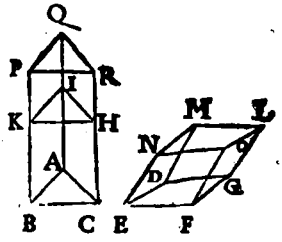
e 14. duod.
f 10. duodec.

in eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus a 15.
A B E, ad conum C D F, vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod quinti.
eadem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari po-
test, vt perspicuum est, si super bases A B, C D, fiant coni recti A B M,
C D O, earundem altitudinum cum cylindris A B P Q, C D R S.

IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum,
scilicet conus A B E, & cylindrus A B G H, fuerit scalenus; alter ve-
ro, nempe conus C D O, & cylindrus C D R S, rectus. Nam cum
cylindrus scalenus A B G H, aequalis sit cylindro recto A B P Q; sit au-
tem cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrum rectum C D R S, vt alti-
tudo L M, ad altitudinem N O, vt Euclides demonstrauit: Erit quo-
que cylindrus scalenus A B G k, ad cylindrum rectum C D R S, vt al-
titudo L M, ad altitudinem N O. Quod est propositum.

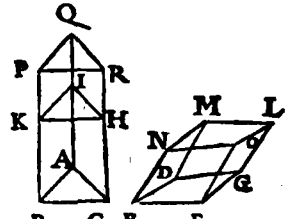
b *QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam* b 15.
cylindri, c cum illi horum sint tertia partes; Erit etiam conus scale- quinti. &
nus A B E, ad conum rectum C D O, vt altitudo L M, ad altitudinem c 10.
N O. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in duod.
cylindris, vt manifestum est.

EADEM quoque haec propositio conuenit prismatis, parallelepi-
pedis, & pyramidibus super aequales bases constitutis. Sint enim super
bases aequales A B C, D E F G, prismata A B C H I K, D E F G L M.
N O, & pyramides sub eisdem al-
titudinibus. Dico esse prisma ad
prisma, & pyramidem ad pyrami-
dem, vt est altitudo ad altitudi-
nem. Sint namque insistentes lineae
A I, C H, B K, prismatis A B C H-
I k, ad basin A B C, perpendicula-
res, ita vt B k, sit altitudo prismatis
A B C H I k; Productis autem re-
ctis A I, C H, B k, sumantur I Q,
H R, k P, aequales altitudini prismatis E L; & ductis rectis P Q, Q R,
R P, compleatur prisma H I k P Q R, eiusdem altitudinis cum prisma-
te E L. Eruntque prismata H I k P Q R, E L, cum habeant & bases,
& altitudines aequales, inter se aequalia, ex coroll. 2 propos. 7. huius lib.
d *Ac propterea prisma A B C H I k, ad vtrumque eandem habebit* d 7.
proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma A B C H- quinti.
I k, ad prisma H I k P Q R, est vt planum B I, ad planum k Q; e Et vt e 1. sex.
planum B I, ad planum k Q, ita est recta B k, ad k P; erit prisma A B-
C H I K, ad prisma H I K P Q R, hoc est, ad prisma E L, vt B K, altitu-
do prismatis A B C H I K, ad K P, altitudinem prismatis H I K P-
Q R, hoc est, prismatis E L. Quod est propositum.



QVOD si insistentes lineae A I, C H, B K, non sint perpendiculares
ad basin A B C, constituendum erit super basin A B C, aliud prisma,
cuius

cuius insistentes sint perpendiculares ad basin, & aequales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cum ex 2. coroll propos. 7. huius lib. hae duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin, sint aequalia, sitque prisma constitutum ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.



a 15. quinti. b 10. duodec.

a *QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem cum prismatis,* b *quod illa sint horum tertia partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.*

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HÆC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA quoque hac facile conuerti possunt hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM alioquin pars aequalis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

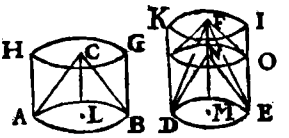
xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudinesve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propos. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.

QVOD

QVOD ſi altitudines L C, M F, inæquales fuerint, ſit M F, maior, ex qua abſcindatur M N, ipſi L C, æqualis; & per N, ducatur planum O N, baſi D E, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri D O, O K. Quoniam igitur cylindri ponuntur cylindri A B G H, D E I K; a erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O. b Eſt autem vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, baſis A B, ad baſin D E, cum cylindri ſint altitudines: c Item vt cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cum baſes ſint æquales imò vna & eadem D E. Igitur erit quoque vt baſis A B, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc eſt, ad huic æqualem L C; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.



a 7. *quinti.*

b 11. *duodec.*

c 14. *duodec.*

N conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni A B C, D E F, ſint æquales; erunt & cylindri A B G H, D E I K, æquales. Cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, d 10. *duodec.* æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus M N, N F, conſtituantur duo coni, vt in figura.

SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris confirmatur hac ratione. Si altitudines L C, M F, ſint æquales, cum ſit vt baſis A B, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem; erunt & baſes A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes A B, D E, & ſub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt ſupra. Quia igitur ponitur, vt baſis A B, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem L C, hoc eſt, ad huic æqualem M N; e Eſt autem vt baſis A B, ad baſin D E, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, cum altitudines ſint æquales: f Item vt altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cum baſes ſint æquales: erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O; g Ideoque cylindrus A B G H, cylindro D E I K, æqualis erit.

e 11. *duodec.*

f 14. *duodec.*

g 9. *quinti.*

AT vero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum A B C, D E F, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cum eæ ſint baſes, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem,

ob'rem, vt oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum terriæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo nos eſſe æquales, quo oſtendimus cylindros æquales eſſe. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur baſes altitudines, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

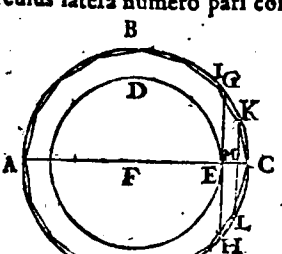
NON difficile erit idem oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eidem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eadem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, vt demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoq; erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt per ſpicuum eſt, ex iis, quæ ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oportetque in maiori ABC, inſcribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior eſt arcu GC, ex AGC, auferatur dimidium AG, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium IK, ſic deinceps; & relinquetur tandem minor arcus quam CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG minor, & ſubtendatur recta CK. Dico rectam CK, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes



xi. dec.

mero & magnitudine æquales partibus arcus C I, & quadrans
, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est
adrans B C; nec non semicirculus A H C, in totidem partes,
ercontinet semicirculus A B C; deinde omnibus arcubus re-
linęæ subtendantur, a quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ a 29.
C, eo quod arcus arcui C K, æquales subtendant: Descriptum *tertij.*
polygonum in circulo A B C, & æquilaterum, & parium late-
a. Quod quidem non tangere circulum minorem D E, ita
ndetur. Ex K, ad A C, demittatur perpendicularis K L, secans
m A C, in M Quoniam igitur anguli G E M, K M E, recti
t; b erunt rectæ G H, k L, parallelæ. Quare cum recta G H, b 29.
gat circulum D F, in solo puncto E; recta k L, erit tota extra *primi.*
um circulum, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam
recta G H, conueniat. Multo igitur minus recta C k, quæ
gius à circulo D E, abest, quam k L, circulum D E, tanget. Ac
preterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint
ri C K, c ideoque æqualiter cum C k, à centro F, distent, cir- c 14.
im D E, contingent. Duobus itaque circulis circa idem cen- *tertij.*
n existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

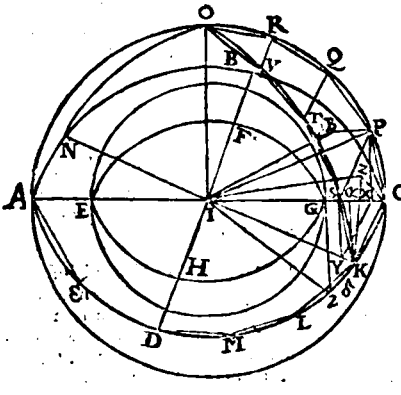
INC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti,
d cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis,
: nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra
a cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extre-
puncto K, lateris C K, cum diametro A C, conuenientis, ad A C, dia-
rum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum D E.

PROBL. 2. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS sphæris circa idem centrum existenti-, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, od non tangat minoris sphæræ superficiem.

INT duæ sphæræ A B C D, E F G H, circa idem centrum I, teatq; in maiori A B C D, inscribere solidum polyedrum, seu ilaterum, quod non tangat minorem sphæram E F G H. Se- ur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintq; commu- ectiones factæ in sphæris plana A B C D, E F G H, quæ circuli it, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrū sphæratum am semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ de- untur, circumducti congruent sectionibus A B C D, E F G H. ne dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ e cadentes ex I, ad peripherias sectionū sunt æquales, cum du- ur ex centro sphæratū ad earū superficiem, erunt ipsæ sectio-

nes, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, vt fiant
a 16. quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. a Deinde in maiori circulo
duode. A B C D, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ, ad circumferentiam vsque circuli A B C D, quæ circulum
b 1. E F G H, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, b ap-
quarti. plicetur in circulo A B C D, recta æqualis A ε. Quia vero si arcui
c 19. C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, c latus
primi. C γ, oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ,

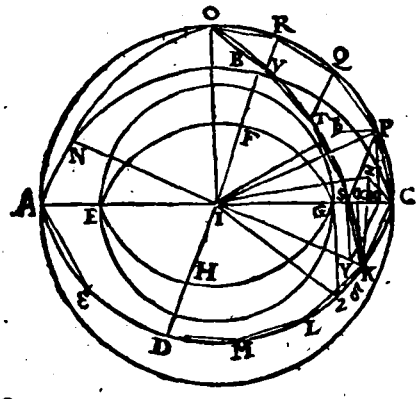


quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta C γ, maior recta A ε; ac proinde arcus C γ, arcu A ε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod si ex quadrante C D, dimidiū auferatur D L, & ex reliquo C L,
d 1. dec. dimidium L K, & sic deinceps; d relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, seu arcu A ε. Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C κ, subtensa minor quam recta A ε, hoc est, quam G γ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C κ, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet; multo minus recta C κ, subtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tan-
e 12. get. Rursus ducta diametro κ N, e erigatur ex centro I, ad plana
6 dec. circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, κ N,
f 18. plana ducantur, f quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficient-
6 dec. que communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia vero anguli O I C, O I κ, recti
g schol. sunt, ex defin. 3. lib. 11. g quadrantes erunt O C, O κ; atque adeo
21. ter. cum circuli A B C D, A O C, N O κ, æquales sint, quod eorum diametri sint, & sphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D,

C D, O C, O κ, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æ-
les distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; & quadrantes
C, O κ, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus: qua-
ntis C D; *a* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus sub- a 29. *tertij.*
sæ, nimirum C k, k L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; k S, S T,
', V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demit-
tur ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, b 38.
b quæ in communes sectiones A C, N k, cadent; *c* eruntque *undec.*
r se parallelæ. c 6. *un-*
QVONIAM igitur triangulorum P C X, S k Y, anguli P X C, *decimi.*
k, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *d* & anguli P C X, S k Y, æqua- d 27.
quod & æquales sint peripheriæ A O P, N O S, quibus insi- *tertij.*
it; (Nam si ex semicirculis A O C, N O k, æqualibus demen-
arcus æquales C P, k S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales
que erunt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X,
ales duobus angulis S k Y, S Y k, trianguli S k Y. Sunt autem
itera P C, S k, rectis angulis opposita, æqualia. *e* Igitur reliqua e 26.
ra P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y k, æqualia erunt. Quare *primo.*
i rectæ P Y, S Y, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta
, *f* æquales quoque erunt & parallelæ P S, X Y, inter se. *g* At f 33
i & rectæ C k, X Y, parallelæ sunt, quod latera I C, I k, pro- *primi.*
ionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris I C, I κ, æqua- g 2 *sex.*
s demantur æquales rectæ C X, κ Y, relinquentur & I X, I Y,
ales; Ac proinde erit, vt I X, ad X C, ita I Y, ad Y κ.) *h* Erunt h 8.
llelæ quoque P S, C k, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi *duode.*
i ideoque eas coniungentes rectæ C P, k S; in eodem cum i 7. *un-*
plano existent. Totum igitur quadrilaterum C k, S P, in vno *decimi.*
plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli
C D, perpendiculares, & connectantur rectæ Q C, T k, osten-
us similiter C k, Q T, esse parallelas; atque adeo ipsas P S,
', inter se parallelas esse, cum eidem C k, sint parallelæ; to-
que quadrilaterum P S T Q, in vno esse plano. Eadem ratio-
i vno erit plano quadrilaterum Q T V R. *k* Est autem & trian- k 2. *un-*
im R V O, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur *decimi.*
r reliqua latera k L, L M, M D, ductis scilicet quadrantibus
, O M, O D, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo he-
sphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & trian-
s, quæ similia sint prædictis inter quadrantes O C, O k, super
s C k, constructis, inscriptum erit in sphæra maiori solidum
edrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis.
: ergo dico non tangere sphæram minorem E F G H.
DVCATVR enim ex I, ad planum C k S P, perpendicularis
connectanturque rectæ Z C, Z k. Cadere autem perpendi-
rem I k, intra quadrilaterum C k S P, in scholio sequenti

ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli I Z C, I Z κ recti sunt; *a* erit quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ I κ, quadratis rectarum I Z, Z κ, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium I C, I κ, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, quadratis rectarum I Z, Z κ, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato I Z, reliqua quadrata rectarum Z C, Z κ, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectæ Z C, Z κ, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad P Φ, ducentur, æquales esse & inter se & rectis Z C, Z κ. Quare circulus ex Z, ad intervallum Z C, describtus per quatuor puncta C, κ, Φ, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera P Φ T Q, Q T V R, & triangulum R V O, circulos describi posse: demonstrabimus Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus C Z κ, obtusus est; *b* erit quadratum rectæ C κ, maius quadratis rectarum Z C, Z κ; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ C κ, duplo quadrati rectæ Z C.

a 47. *primi.*



b 12. *secundi.*

D V C A T V R ex k, ad rectam A C, perpendicularis k α. Cum igitur A C, dupla sit ipsius A I, & A α, maior sit, quam A I, erit A C, minor duplo ipsius A α. Quam ob rem cum sit, *c* ut A C, ad A α, ita rectangulum sub A C, α C, ad rectangulum sub A α, α C, quod bases horum rectangulorum sint A C, A α, & eadem altitudo α C; erit quoque rectangulum sub A C, α C, minus duplo rectanguli sub A α, α C. *d* Est autem rectangulum sub A C, α C, æquale quadrato rectæ C κ, & rectangulum sub A α, α C, æquale quadrato rectæ k α; quod recta C k, inter A C, α C, sit media proportionalis, & recta k α, inter A α, α C, ex coroll propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta A k, fieret triangulum rectangulum A C k.) Igitur & quadratum rectæ C k, minus erit duplo quadrati rectæ k α. Ac propterea cum quadratum rectæ C k, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ Z C, erit quadratum rectæ k α, maius quadrato rectæ Z C. *e* Quoniam vero quadratum rectæ I C, æquale est quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ I k, quadra-

c 1. *sex.*

d 17. *sexti.*

e 47. *primi.*

tis re-

rectarum I α, α k; Suntque æqualia quadrata rectarum æquam I C, I k. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quatis rectarum I α, α k Si ergo ex his dematur quadratum maius, ut pe rectæ α k; & ex illis minus, videlicet rectæ Z C, erit reliuum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; eoque recta I Z, maior quam recta I α. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorem E F G H, quod per coroll. propos. præcedentis recta k α, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani C k S P, longius absint à sphæra E F G H, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum C k S P, sphæram E F G H.

S E D & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum C K S P, non tangere sphæram minorem E F G H, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam C K, minorem esse recta c γ: α Est autem a 19. C k, maior quam Z C, quod angulus C Z k, obtusus sit, vt mox *primo.* demonstrabitur; Multo maior erit G γ: quam Z C; Ac propterea quadratum rectæ G γ, maius quadrato rectæ Z C. b Quia vero b 47. quadratum rectæ I γ, æquale est quadratis rectarum I G, G γ; & *primi.* quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, sit sphæræ minoris E F G H, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum C k S P, sphæram E F G H, nequaquam continget.

D V C A T V R rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa P S T Q, descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. c erit quadratum rectæ I P, æ- c 47. quale quadratis rectarum I β, β P. Quia vero & quadratum rectæ *primi.* I c, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I c, I P,) æquale est quadratis rectarum I Z, Z c; erunt quadrata rectarum I β, β P, quadratis rectarum I Z, Z c, æqualia; Est autem quadratũ rectæ Z c, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z c, maior sit, quam linea β P, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratũ rectæ I β, reliquo quadrato rectæ I Z, maius erit; ideoque & linea, I β, maior quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram E E G H, existet, quam punctum Z; propterea quæ multo minus planum P S T Q, quam c k s P, tanget sphæram maiorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus,

quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

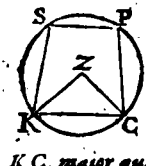
EX iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium. Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autẽ, vt vna pyramis ad vnã pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum vnius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, a cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

a 15. quinti.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum C K S P, & angulum C Z K, in quadrilatero C K S P, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt I K, ad K C, ita I Y, ad Y X, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula I C K, I X Y, similia sint.) Est autem I K, maior quam I Y; b erit & K C, maior quam Y X. Cum igitur Y X, aqualis sit ostensæ ipsi S P, erit quoque K C, maior quam S P. Ac propterea in hac figura, arcus C K, maior c erit arcus S P, ex scholio propos. 28. lib. 3. c Quare cum arcus C P, K S, arcus C K, sint æquales, quod & lineæ C P, K S, ipsi K C, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus C P, K S, arcu P S, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum C K, C P, K S, quadrantem circuli C K S P, excedet; atque à semicirculo superabitur; ac proinde multo magis segmentum S P, minus erit semicircu-

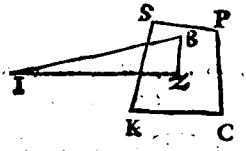


b 14. quinti.

c 28. tertij.

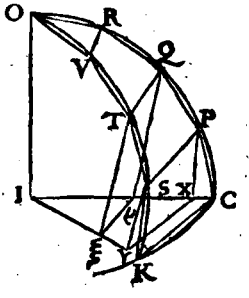
micirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Kβ, cadere intra quadrilatera; nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo Iθ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius à centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.



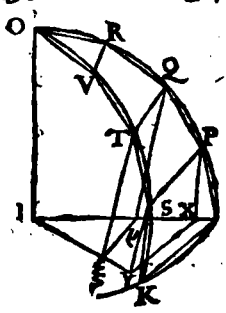
a 19. primi.

TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, b quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, c erunt que inter se sese parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ; erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales PS, XY. d Quia vero μξ, ipsi CK, parallela est; quod latera IC, IK, proportionaliter sint sectain μ, & ξ, & vti doximus de recta XY; e erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ; Est autem IY, maior quam Iξ. f Igitur & YX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, maior erit quam QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.



b 38. vndec.
c 6. vndec.
d 2. sex.
e 30. primi.
f 14. quinti.

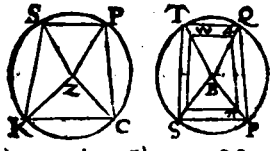
HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, C, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturque à centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; CP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis.



a 25. primi.

b 8. primi.

Quia ergo latera Z K, Z C, aequalia, ponuntur lateribus β S, Θ P, & basis K C, maior est basi P S; a erit angulus K Z C, maior angulo S Θ P: Eadem ratione maior erit angulus S Z P, angulo T Θ Q. At quoniam bases K S, C P, basibus S T, P Q, sunt aequales; b erunt anguli K Z S, C Z P, angulis S Θ T, P Θ Q, aequales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad Θ: Sunt autem & aequales, cum tam hi, quàm illi quatuor rectis sint aequales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur aequalis est recta Z C, rectae Θ P. S I T deinde Z C, minor quam Θ P. Et abscindantur Θ π, β ρ, β ω, β φ, ipsis Z C, Z K, Z S, Z P, aequales, connectantur q, recta π ρ, ϱ ω, ω φ, φ π, c quae parallela erunt rectis P S, S T, T Q, Q P, eò quòd rectae ex centris sectae sunt proportionaliter; ac proinde ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit Θ t β S, ad S P,



c 2. sext.

d 14. quinti.

ita β ρ, ad ϱ ω. Cùm ergo β S, maior sit quàm β ϱ, d erit & S P, maior quàm ϱ π. Eadem q, ratione maiores erunt S T, T Q, Q P, rectis ρ ω, π φ, φ π; Ac propterea cùm P S, minor sit, quàm C K, & S T, P Q, aequales rectis K S, C P; & T Q, minor quàm P S, erunt rectae π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, minores rectis C K, K S, S P, P C. Quare cùm recta β π, β ρ, β ω, β φ, rectis Z C, Z K, Z S, Z P, sint aequales; c erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & aequales. quod tam illi, quàm hi sint quatuor rectis aequales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta Z C, quàm β P: Sed neque aequalis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

c 25 primi.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHÆRÆ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT duæ sphæræ A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. Dico sphæram A B C, ad sphæram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra A B C, ad aliam sphæram G H I, minorem, vel K L M, maiorem, quàm D E F, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrum A C, ad diametrum D F. Habeat primum sphæra A B C, ad sphæram G H I, minorem sphæræ D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; intelligaturque sphæra G H I, concentrica sphæræ D E F. f Inscri-

fi-. duo decimi.

barur

batur in ſphæra maiori D E F, polyedrum D N E O F P Q R, non tangens minorem ſphæram G H I; Atque huic ſimile polyedrum A S B T C V X Y, inſcribatur in ſphæra A B C. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ A B C, ad ſphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri A S B T C V X Y ad polyedrum D N E O F P Q R, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R. Quare cùm ſphæra A B C, maior ſit polyedro A S B T C V X Y, [a] erit & ſphæra G H I, maior polyedro D N E O F P Q R, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.

[a] 14. quinti.

HABEAT ſecundò ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cùm igitur ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, habeat proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R: Et conuertendo, vt ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, ita polyedrũ D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrũ A S B T C V X Y, in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Igitur & ſphæra k L M, ad ſphæram A B C, erit in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Ponatur vt ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, ita ſphæra D E F, ad aliam ſphærã Zαβ. Habebit igitur & ſphæra D E F, ad ſphæram Zαβ, proportionẽ triplicatam diametri *D F*, ad diametrum A C. Et quia ſphæra k L M, maior ponitur, quàm ſphæra D E F, erit quoq; ſphæra A B C, maior, quàm ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra D E F, ad ſphæram Zαβ, minorem ſphæra A B C, proportionem habet triplicatã diametri D F, ad diametrum A C. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt,

non

non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphæram kLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI

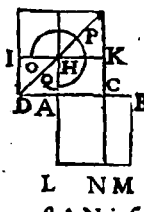
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et ſolidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur Ik, parallela ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, kG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum CM, ſub AB, CB, æquale ipſi kG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, duplà ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB; & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: [c] Eſt autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad Ak, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius Ak. Quoniam autem Ak, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus Ak, IG. Additis igitur æqualibus CM, kG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, qua-



a 3. *def. ſexti.*
b 17. *ſexti.*
c 1. *ſex.*
d 43. *primi.*

A M, quadruplum sit quadrati A I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea A B, dupla ponatur lineæ A D, erit & gnomon O P Q. eiusdem quadrati A I, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni O P Q. addatur ipsum quadratum A I, quintuplum efficietur quadratum C E, quadrati A I.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A I, quadruplum est quadrati rectæ A D, quòd linea A B, dupla lineæ A D, ponatur. a Est autem quadratum rectæ A B, æquale rectangulis sub A B, A C, & sub A B, B C, comprehensis; Et rursus, quod sub A B, A C, æquale est ei quod sub A D, A C, bis; (sicut enim A B, ipsius A D, est dupla, b ita quoque erit rectangulum sub A B, A C, rectanguli sub A D, A C, duplum, cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo A C. Ac propterea rectangulum sub A D, A C, bis sumptum æquale erit rectangulo sub A B A C.) c Quod verò sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ A C, cùm sit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Igitur quadratum rectæ A C, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ A D; Ac proinde quadrata rectarum A C, A D, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ A D. d Quocirca cùm quadratum rectæ C D, æquale sit quadratis rectarum A C, A D, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis; Erit & quadratum rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremã & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. sec.

b 1. sext.

c 17. sexti.

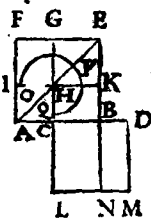
d 4. sec.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta A B, in C, possitq; quintuplum segmenti A C; sumatur autem ipsius A C, dupla C D, quæ, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento B C. Dico si C D, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse C B, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ex C, ducatur ipsi A F, parallela C G, secans diametrum in puncto H, per quod agatur I K, parallela ipsi A B. Producta deinde G C, perficiatur quadratum C M, producaturque E B, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. C I, K G, quadrata rectarum A C, C B. Quia igitur quadratum B F, quæ-

ilum ponitur quadrati C I; Si tollatur quadratum C I, relinque-
ur gnomon O P Q, eiuſdem quadrati C I, quadruplus: Eſt autem
k quadratum C M, quadruplum quadrati C I,
x ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd recta C D,
ſupla ſit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q qua-
drato C M, æqualis erit. Rurſus quoniam C D,
ponitur ipſius A C, dupla; eſtque L C, ipſi C D; &
C H, ipſi A C, æqualis; erit & L C, ipſius C H,
ſupla. a Cùm igitur ſit vt L C, ad C H, ita re-
tangulum L B, ad rectangulum C K; erit quo-
que illud huius duplum: b Eſt autem c k, ipſi
I F, æquale. Aequale igitur eſt L B, ipſis C K, H I; Ac proinde &
reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam er-
go ſunt tres rectæ C D, C B, B D; eſtque rectangulum B M, ſub C D,
B D, comprehenſum æquale ipſi K G, quadrato rectæ C B; c Erit vt
C D, ad C B, ita C B, ad B D. Quam ob rem, ex definitione, recta C D,
recta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmen-
tum C B.

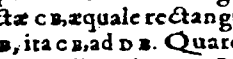


a 31. ſexti.

b 43. pri mi.

c 17. ſe- xti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum po-
ſitur quadrati rectæ A C; d eſtque quadratum rectæ A B, æquale
quadratis rectarum C B, A C, vnà cum rectangulo ſub A C, C B, bis;
erunt & quadrata rectarum C B, A C, vnà cum rectangulo ſub A C,
B, bis, quintuplum quadrati rectæ A C. Dempto igitur quadra-
to rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum
b A C, C B, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectæ A C; Eſt au-
m & quadratum rectæ C D, eiuſdem quadrati rectæ A C, quadru-
plum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum
rectæ C B, & rectangulum ſub A C,
C B, bis, quadrato rectæ C D. Cùm er-
go rectangulum ſub A C, C B, bis, æ-
quale ſit rectangulo ſub C D, C B; (ſicut enim recta C D, dupla eſt
rectæ A C, e ita quoque duplum erit rectangulum ſub C D, C B, re-
ctanguli ſub A C, C B; cùm vtriuſque rectanguli eadem ſit altitudo
C B; Ac propterea rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangu-
lo ſub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectæ C B, & rectangulum
ſub C D, C B, quadrato rectæ C D, æquale: f At quadratū rectæ C D,



d 4. ſec.

e 1. ſexti.

f 2. ſec.

quale eſt rectangulis ſub C D, C B, & ſub C D, B D. Igitur quadratum
rectæ C D, & rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulis ſub
C D, C B, & ſub C D, B D; Ac proinde dempto communi rectangulo
ſub C D, C B, relinquetur quadratum rectæ C B, æquale rectangulo
ſub C B, B D; g ideoque erit vt C D, ad C B, ita C B, ad D B. Quare ex
definitione recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque
maius ſegmentum maius C B. Si igitur recta linea ſuiipſius ſegmenti
quintuplum poſſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 17. ſexti.

LEM-

LEMMA.

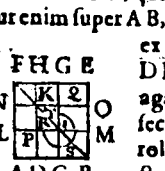
QVOD autem recta CD, maior sit necessario quam CE, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, a cum aquale sit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CE. Quod est propositum.

a 4. secundi.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

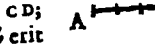
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, k, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, b erit rectangulum sub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earum latera Hk, IQ, æqualia; c ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. d Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. e Est autem IO, ipsi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æquale



b 17. sexti.
c 34. primi.
d 36. primi.
e 43 pr.

quale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus nomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostentum sit quadruplum quadrati PQ; erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato Q, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, & recta CD.

ALITER. Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita CB, erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum sub AB, BC, quadruplum est quadrati rectæ CD; Nam cum sit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *b* erit rectangulum sub AB, AC, æquale quadrato rectæ AC: quod cum, scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ CD; erit rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.



a 6. secundi.

b 17. sexti.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum dimidium maioris segmenti quintuplum posterius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

IT recta AC, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum AB, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, eiusdem quadrati quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum sit quadrati PQ,) ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquitur gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale rectangulum CE, vt supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, compre- c 17. sexti. *hendatur; Quocirca proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, &*

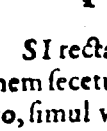
ea, ex definitione secta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod erat propositum.

ALITER. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita G B,
a 6. secundi. *erit rectangulum sub A B, B C, vna cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cum quadratum ex rectalinea B D, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta C D, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis A B, B C, descriptum, vna cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiusdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Est autem eiusdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale est rectangulum sub A B, B C*
b 17. sexti. *b Quamobrem erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde secta erit A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

V. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum A B, B C, simul tripla esse quadrati rectæ A C. Describatur enim super A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi B D, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi A B. Eruntque C H, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad A C, ita A C,



c 17. sexti. ad C B; *c* erit rectangulum sub A B, B C, nempe A H, æquale ipsi I F, quadrato rectæ A C. Cum ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon k L M, vna cum quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectæ A B, vna cum quadrato C H, rectæ B C, eiusdem quadrati I F, rectæ A C, triplum.

d 17. sexti. ALITER. Quoniam est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; *d* erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C; Atque adeo rectangulum sub A B, B C, bis, vna cum quadrato rectæ A C,
e 7. secundi. triplum quadrati rectæ A C. *e* Sunt autem quadrata rectarum A B, B C, simul æqualia quadrati rectæ A C, vna cum rectangulo sub A B, B C, bis. Igitur & quadrata rectarum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C. Quocirca si recta secundum extremam & media-

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraque simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, vna cum quadrato CH, duplum eiusdem quadrati IF: Est autem gnomen KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC; a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema ac media ratione. a 17. sexti.

ALITER Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati recta AC; b Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato recta AC, & rectangulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum recta AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati recta AC. Dempto ergo quadrato recta AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati recta AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato recta AC. c Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione. b 7. secundi. c 17. sexti.

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaq; assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmēto describitur, quadrati: Recta

illa linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt.

SIT primum recta A B, ſecta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta B D, minori ſegmento B C, æqualis. Dico quadratum ex A D, quintuplum eſſe quadrati ex A C, maiore ſegmento. a *Quoniam enim quadratum ex A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, B C, quater contento, & una cum quadrato ex A C:* b *Rectangulum autem ſub A B, B C, æquale eſt quadrato ex A C; (quod A B, A C, C B, ſint continuè proportionales) erit rectangulum ſub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C; atque adeo rectangulum ſub A B, B C, quater & una cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C. Igitur & quadratum ex A D, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub A B, B C, quater, & una cum quadrato ex A C,) eiuſdem quadrati ex A C, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.*

a 8. ſecundi.

b 17. ſexti.

SIT deinde recta A B, ſecta inæqualiter in C, cui addatur recta B D, minori ſegmento B C, æqualis, ſitque quadratum ex A D, quadrati ex A C, maiori ſegmento quintuplum. Dico A B, in C, ſectam eſſe extrema ac media ratione. c *Quoniam enim quadratum ex A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, B C, quater, & una cum quadrato ex A C; erit quoque rectangulum ſub A C, B C, quater, & una cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C; ac propterea rectangulum ſub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C: hoc eſt, rectangulum ſub A B, B C, æquale quadrato ex A C.* d *Igitur erit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B: Ac proinde A B, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

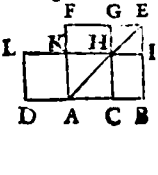
c 8 ſecundi.

d 17. ſexti.

IV. THEOR. 5. PROPOS. 5.

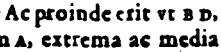
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum A C, & adiiciatur ei in rectum A D, æqualis maiori ſegmento A C. Dico rectam B D, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeq; maius ſegmentum A B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum B E, in quo ducta diametro A E, ducatur ex C, ipſi B E, parallela C G, ſecans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipſi B D, parallela I K, & ex D, ducatur



atur ipſi A F, parallela B L, occurrens ipſi I K, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. c K, I G, quadrata rectarum A C, B C. Quoniam igitur eſt vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; a Erit rectangulum I F, contentum ſub A B, B C, æquale quadrato C K, rectæ A C. b Eſt autem c K, ipſi A L, æquale. Igitur I F, æquale erit ipſi A L; additoque communi B K, erit rectangulum B L, contentum ſub B D, D A, æquale quadrato B F, rectæ A B; c Ac proinde erit vt B D, ad A B, ita A B, ad D A. Quare B D, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum A B. a 17. *ſexti.* b 36. *primi.* c 17. *ſexti.*

ALITER. Quoniam eſt vt A B, ad A C, hoc eſt, ad A D, ita A C, ad C B; Erit conuertendo vt D A, ad A B, ita B C, ad C A; & componendo vt D B, ad A B, ita A B, ad C A, hoc eſt, ad A D. Secta igitur eſt B D, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea B D, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum A B, minus autem ſegmentum A D, & ex maiori ſegmento A B, detrahatur recta A C, æqualis minori ſegmento A D. Dico maius ſegmentum A B, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam A C, quæ æqualis eſt minori ſegmento A D. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cum ſit vt B D, ad A B, ita A B, ad A D, d erit rectangulum B L, contentum ſub B D, A D, æquale quadrato B F, rectæ A B; & ablato communi B K, erit A L, æquale ipſi I F; e Eſt autem A L, ipſi C K, æquale. Æquale igitur eſt I F, contentum ſub A B, C B, quadrato C K, rectæ A C; f Ac proinde erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quare A B, recta eſt in C, extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt A C, minus vero ſegmentum recta C B. Quod eſt propoſitum. d 17. *ſexti.* e 36. *pr.* f 17. *ſexti.*

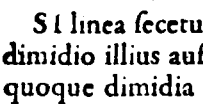
ALITER. Quoniam eſt vt tota B D, ad totam A B, ita A B, detracta ex B D, ad A D, hoc eſt, ad A C, detractam ex A B; g erit quoque ita A D, reliqua ipſius B D, hoc eſt, A C, ad C B, reliquam ipſius A B, vt totam D B, ad totam A B, hoc eſt, vt A B, ad A C; Ac pro- g 19. *quinti.*

ptereà diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod erat propositum.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC.



Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, totum ad DE, totum, ita AC, ablatum ad DF,

a 19. quinti. *ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; a erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt totum ad totum; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE.* b *Quoniam vero est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE,*

b 15. quinti. *ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod erat propositum.*

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento

c 1. tertiidee. AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. c Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. d Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 14. lib. 8.

d 6. decimi.

e 9. dec. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) e erunt

rectæ

rectæ CD, AD, longitudine incommunſurabiles; Ac proinde rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commenſurabilis; *a* erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome. *a* 74. decimi.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento ſub AB, CB; cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *b* erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum ſecundum lineam Rationalem AB, *c* facit alterum latus BE, hoc eſt, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum. *b* 17. ſexti. *c* 98. decimi.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque minus ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C. ſitq; maius ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico minus ſegmentum CB, eſſe Apotomen. Diuiſa enim AC, bifariam in D, erit CD dimidia ipſius Rationalis AC, Rationalis cum ſit ipſi AC, commenſurabilis. d Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum eſt quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; e ac propterea commenſurabilia exiſtens. Quare & ipſæ rectæ ED, CD, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum igitur CD, ſit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5 ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde ſi à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commenſurabilis; f erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.

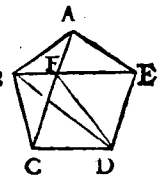
d 3. tertiæ. *e* 6. decimi. *f* 74. decimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps ſint, æquales A, B, C. Dico ipſum pentagonum eſſe

æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ B E, A C, B D; & ex puncto F, vbi se interſecant rectæ B E, A C, recta ducatur E D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli
a 4. pri. quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; a erunt & baſes B E, B D, & anguli A E B, C D B, æquales; b Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, cum
b 5 pri. æqualia ſint oſtenſa latera B E, B D; Totus igitur anguli A E D, C D E, æquales erunt. Rurſus quia latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus B A, B C, trianguli B A C; & anguli quoque ipſis conteati æquales, ex hypotheſi: c Erit & baſis B E, baſi A C, æqua-
c 4 pri. lis, & anguli A B E, A E B, angulis B A C, B C A, æquales. Cum e-
d 6. pri. go æquales ſint anguli A B E, B A C, trianguli A B F; d erunt quoque latera B F, A F, æqualia; Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus B E, A C, erunt reliquæ lineæ F E, F C, æquales. Itaque cum latera F E, E D, trianguli F E D, æqualia ſint lateribus
e 8. pri. F C, C D, trianguli F C D; & baſis communis F D; e erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, æquales: Sunt autem & anguli A E B, B C A, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli A E D, B C D; Ac proinde cum angulo A E D, oſtenſus ſit æqualis angulus C D E, & angulo B C D, æquales ponantur anguli A B C, B A E; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.



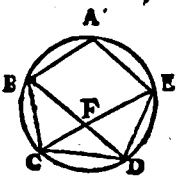
SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi;
f 4. pri. f Erunt & baſes B E, E D, & anguli A-
g 5. pri. E B, C D B, æquales; g Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera B E, B D. Igitur toti anguli A E D, C D E, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli B A E, C D E; erũt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratũ eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demõſtrandum.

xj. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo A B C D E, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ lineæ

E B, se mutuò secantes in F. Dico ipsas se-
cari extrema ac media ratione, maioraque
earum segmenta F B, F E, æqualia esse lateri
cuilibet pentagoni. *a* Descripto enim cir-
culo circa pentagonum; *b* erunt quinque
arcus A B, B C, C D, D E, E A, æquales. Quia ve-
rò latera C D, C B, trianguli C D B, æqualia
sunt lateribus D C, D E, trianguli D C E; & anguli quoque ipsis con-
tenti æquales, ex hypothesi; *c* Erunt & bases D B, C E, & anguli C D B,
D C E, æquales; Ac proinde cùm in triangulo C D F, duo anguli
F C D, F D C, sint æquales, *d* & ipsis æqualis sit externus angulus
B F C: erit angulus B F C, duplus anguli D C E: *e* Est autem & an-
gulus B C E, eiusdem anguli D C E, duplus, quod & arcus B A E, arcus
D E, sit duplus. Igitur anguli B F C, B C F, æquales sunt: *f* Ideoque
recta B F, lateri pentagoni B C, æqualis. *g* Quoniam autem anguli
D B C, E C D, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo
anguli D B C, C D B, trianguli B C D, æquales duobus angulis D C F,
F D C, trianguli C F D. *h* Ac proinde æquiangula erunt triangula
B C D, C F D. *i* Quare erit vt B D, ad D C, hoc est, ad B F, æqualem ipsi
D C, ita C D, hoc est, sibi æqualis B F, ad F D; Ac propterea B D, secta
est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum B F,
lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostende-
mus, rectam C E, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque
illius segmentum E F, æquale esse lateri pentagoni D E. Itaque si
pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod e-
rat ostendendum.



a 14. quarti.
b 28. tertij.
c 4 primi.
d 32. primi.
e 33. sexti.
f 6. primi.
g 27. tertij.
h 32. primi.
i 4 sexti.

SCHOLIVM.

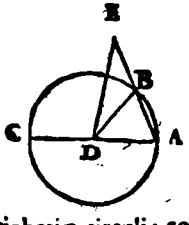
FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni aquilateri & aquianguli subtendit, parallelam esse oppositæ lateri: hoc est, B D, parallelam esse lateri A E, & C E, lateri A E. Descripto enim circulo circa pentagonum, k *Quoniam tam duo anguli A, & B C E, quàm duo A B C, A E C, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & A B C, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli B C E, A E C, æquales. Cùm ergo A, & B C E, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & A E C, duobus rectis æ-*
quales: l *ac proinde A B, C E, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

k 22. tertij.
l 28. primi.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo A B C, sit latus decagoni A B, cui in rectum adda-



tur B E, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inſcripti. Dico B A, rectam ſectam eſſe in B, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum eſſe E B, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter A C, coniungaturque r: & D B, D E. Quoniam igitur A B, arcus, eſt decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus ſemicirculi arcum A B, quinquies: Ac proinde arcus B C, quadruplus erit arcus A B. *a* Quare & angulus B D C, anguli A D B, quadruplus erit. Rurſus quia latera B D, B E, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni: (eſt enim B E, latus hexagoni ſemidiametro B D, æquale, ex coroll. propoſ. 15 lib. 4) & erunt & anguli B D E, B E D, æquales: *c* quibus cùm æqualis ſit externus A B D: erit angulus A B D, duplus anguli B E D: *d* Eſt autem angulus A B D, æqualis angulus B A D, ob æqualitatem laterum D A, D B. Igitur & angulus *B* A D, duplus eſt anguli *B* E D: ac proinde duo anguli D A *B*, D B A, ſimul quadrupli erunt anguli *B* E D. *e* Cùm ergo angulis D A *B*, D B A, æqualis ſit externus *B* D C, erit angulus *B* D C, quadruplus eiuſdem anguli *B* E D: Atqui idem angulus *B* D C, oſtenſus fuit quadruplus anguli A D B. Igitur æquales ſunt anguli A E D, A D B. Quocirca cùm duo anguli A E D, D A E, trianguli A D E, æquales ſint duobus angulis A D *B*, *B* A D, trianguli A *B* D, *f* erunt triangula A D E, A *B* D, æquiangula. *g* Igitur erit vt E A, ad A D, hoc eſt, ad E *B*, ipſi A D, æqualem, ita A D, hoc eſt, E *B*, ſibi æqualis ad *B* A: Atque idcirco recta E A, ſecta eſt in *B*, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum E *B*, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.

a 33 ſex.
b 5 primi.
c 32 primi.
d 5 primi.
e 32 primi.
f 32 primi.
g 4 ſex.

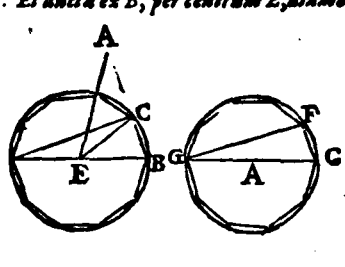
SCHOLIVM.

QVIA verò demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum lineæ diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur, maius ſegmentum ſecari quoq; extrema & media ratione, eiuſq; ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractũ. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitũ cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Namſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5 huius lib oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

CONVERSVM quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonſtrabimus. Videlicet.

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentũ latus decagoni eiuſdẽ circuli. Quod ſi minus ſegmentũ fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitq; primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ſtq; CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt, vt AB. ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoq; vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, a ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erũt, cùm habeant latera circa communem angulum B, proportionalia; erit q; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni; b erunt anguli CAE, CEA, æquales; quibus cùm æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: d Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A. e Cùm ergo anguli BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, quæ æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus. f Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoq; totæ peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.



a 6 ſexti.

b 5. primi.

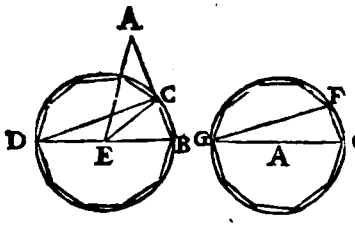
c 32. primi.

d 5. primi.

e 32. primi.

f 33. ſexti.

SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentũ AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD; ducaturq; diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFH, cuius diameter CAG; eritq; ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniã igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt tam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum, & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; erunt q; latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniam verò, ſi com-



si connectantur rectæ C D, F G, anguli C D B, F G C, sunt æquales, & in scholio propos. 22. lib 3. ostendimus, quod insistant arcubus similibus B C, C F, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoq; anguli B C D, C F G, in semicir-

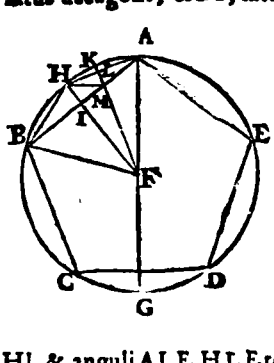
a 31. ter tij. *culis æquales, a nimirum recti:* b *Erunt quoque latera B D, C G, inter se æqualia. Quam ob rem cùm diametri B D, C G, sint æquales,*
b 36. pri mi. *æquales quoque erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde cùm recta A C, sit latus hexagoni circuli C F G, erit quoque eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D. Quod est propositum.*

E.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

In circulo A B C D E, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vnà cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diuiso deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I; eritq; recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu A H, bifariam in K, adiũgatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, pũcto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; c erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cùm latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipsi contenti æquales quoque; d erunt & bases A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, ideoque recti: Eademq; ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G, inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D. Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cùm arcus A B, C D, æquales sint; erunt quoque



c 27. ter tij.

d 4. pri mi.

eorum

m dimidii arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cùm arcus
, duplus sit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiusdem arcus
Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales sunt, & est arcus
, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiusdem arcus B H, a L
us. Quare arcus C G, B C, æquè multiplices sunt, nempe du- quinti.
areuum H K, B H; a Ac propterea totus arcus B G, duplus b 33 se-
que erit totius arcus B K, b & idcirco angulus quoque B F G, ad
us anguli B F K: c Sed quia idem angulus B F G, ad centrum c 20 sex
us est quoque anguli F A B; erunt idcirco anguli B F M, F A B, d 32. pri
les; d Ac propterea triangula A B F, F B M, cùm habeant mi.
los F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem; e 4 sexti
angula erunt. e Quocirca erit vt A B, ad B F, ita B F, ad B M; f 17. sexti
oque rectangulum sub A B, B M, æquale erit quadrato re-
F.

V R S V S quia latera A L, L M, trianguli A L M, æqualia sunt
bus H L, L M, trianguli H L M, & anguli quoque ipsis con- g 4. pri
æquales, nempe recti; g erunt & bases A M, H M, & anguli
M, L H M, æquales: h Est autem angulus L A M, angulo mi.
A, æqualis, quòd & latera H A, H B, æqualia sint. Igitur & an. h 5. pri
us L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; i Ac propterea mi.
ngula A B H, A H M, cùm habeant angulos A B H, A H M, æ- i 32. pri
ales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. k Quā mi.
rem erit vt A B, ad A H, ita A H, ad H M; l ideoque rectangu- k 4. sex.
m sub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Ostensum est l 17. sexti
tem & rectangulum sub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F.
itur rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, simul æqualia sunt
adratis rectarum B F, A H. m At verò rectangula sub A B, B M. m 2. sexti
sub A B, A M, æqualia sunt quadrato rectæ A B. Quadratum et. corolla
rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis te-
rum B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni.
igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c.
uod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quem-
m bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, &
anguios rectos. Ostensum enim est, rectam F H, propterea quòd arcum
3, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad an-
los rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

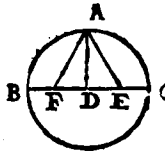
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis
nagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo
positum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos
los: Demonstratum enim est, diametrum A G, ex puncto A, ductam
idere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam
iare ex præfato coroll. cùm transeat per centrum, secabit quoque latu
C D, b

C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusq; demonstrationem huic loco distulimus; paucis nunc à nobis ea demonstrandæ est. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem in diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F, adiungaturq; recta A F. Dico rectam A F esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, recta sit bifariam in E, eiq; addita D F,



a 6. sec. *a erit rectangulum sub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, id-*

b 47. primi. *que quadrato rectæ E A, quæ ipsi E F, est æqualis. b Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ D E, relinquetur rectangulum sub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc est, quadrato rectæ C D.*

c 17 sexti. *c Quam ob rem est vt C F, ad C D, ita C D, ad D F. propterea quæ recta C F, diuisa est in E extrema ac media ratione. Cùm igitur maius segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propos. 15 lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni eiusdem circuli, &c demonstrandum ait pro-*

d 10. ter tÿdec. e 47 primi. *posito 9. huius lib. d Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, vnà cum quadrato lateris decagoni D F, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli; e Est autem eiusdem quadratum rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea recta A F, latus pentagoni æquale. Quod est propositum.*

xij. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetq; A G, latus C D, in E, rectanguli; rectæ A C, A H, quarum A C, secet diametrum in

Lat-

eorum dimidii arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cùm arcus A H, duplus sit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiusdem arcus H K. Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales sunt, & est arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiusdem arcus B H, duplus. Quare arcus C G, B C, æquè multiplices sunt, nempe duplus, arcuum H K, B H; *a* Ac propterea totus arcus B G, duplus quoque erit totius arcus B K, *b* & idcirco angulus quoque B F G, duplus anguli B F K: *c* Sed quia idem angulus B F G, ad centrum duplus est quoque anguli F A B; erunt idcirco anguli B F M, F A B, æquales; *d* Ac propterea triangula A B F, F B M, cùm habeant angulos F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit vt A B, ad B F, ita B F, ad B M; *f* ideoque rectangulum sub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ B F.

a 1. quinti. b 33. sexti. c 20. tertij. d 32. primi. e 4. sexti. f 17. sexti.

RVRSVS quia latera A L, L M, trianguli A L M, æqualia sunt lateribus H L, L M, trianguli H L M, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & bases A M, H M, & anguli L A M, L H M, æquales: *h* Est autem angulus L A M, angulo H B A, æqualis, quòd & latera H A, H B, æqualia sint. Igitur & angulus L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula A B H, A H M, cùm habeant angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. *k* Quâ ob rem erit vt A B, ad A H, ita A H, ad H M; *l* ideoque rectangulum sub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Ostensum est autem & rectangulum sub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, simul æqualia sunt quadratis rectarum B F, A H. *m* At verò rectangula sub A B, B M. & sub A B, A M, æqualia sunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

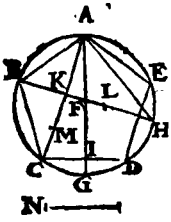
g 4. primi. h 5. primi. i 32. primi. k 4. sexti. l 17. sexti. m 2. secundi.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, *lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam*, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam F H, propterea quòd arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, *diametrum circuli ex angulo quouis* pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est, diametrum A G, ex puncto A, ductam diuidere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cùm transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bi-



dratum (vt patet ex coroll. propoſ. 14. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 15. ad 5. vel 5. ad 1) *a* Erunt rectæ B L, K L, longitudine incommenſurabiles: ideoque, cùm oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantùm commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali B L, dematur Rationalis K L, potentia tantùm cõmenſurabilis; *b* erit reliqua B K, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei verò congruens erit K L.

a 9. *dec.*

b 74. *de elem.*

IAM verò recta B L, poſſit, plus, quàm recta K L, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ B L, æquale eſt quadratis rectarum K L, & N; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ K L, Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N; proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. *c* Quare commenſurabilia erunt; proptereaq; rectæ ipſæ B L, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia; Eſt autem B L, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia verò quadrata rectarum B L, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 14. lib. 8. quòd proportio eorum ſit, quæ 5. ad 4.) *d* Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles. Quapropter cùm tota recta B L, Rationalis longitudine ſit commenſurabilis Rationali B H; (Qualium enim partium 8. eſt B H, talium 5. eſt B L) poſſitque plus, quàm congruens K L, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt: Erit B K, Apotome quarta, ex definitione.

c 6. *dec.*

d 9. *dec.*

POSTREMO quia recta A B, eſt media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6 (quòd triangulum A B H, habeat angulum B A H, rectum, à quo ducta eſt A K, ad baſin perpendicularis) *f* erit quadratum rectæ A B, æquale rectangulo ſub B H, B K. Quocirca cùm ſuperficiem contentam ſub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, poſſit recta linea A B; *g* Erit A B, linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habentē diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 31. *ter tij.*

f 17. *ſex.*

g 5. *dec. elem.*

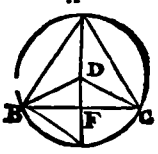
viij.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN cir-

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum ſcribatur A B C. Dico quadratum lateris A B, triplum eſſe, qua- *ati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ ſecet, ex* roll. 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam C, *bifariã* quoque, & ad angulos rectos in pun- o F; cùm arcus B C, ſit tertia pars totius peri- eriæ; erit arcus B E, eiuſdem peripheriæ ſext a rs, ideoq; coniuncta recta B E, latus erit he- goni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex co- il. propoſ. 15. lib. 4. Quod etiã ita probabitur. micirculus A B E, continet tres ſextas partes tius circuli; arcus verò A B, cùm ſit tertia pars tius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur ar- s B E, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta B E, latus eſt he- goni, & æqualis ſemidiametro D E, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale eſt quadratis re- rum A B, B E, *b* quòd angulus A B E, in ſemicirculo rectus ſit; autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd linea A E, dupla ſit lineæ B E; e- it quadrata rectarum A B, B E, ſimul, quadrupla quoque qua- ti eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4 ſunt drata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum re- B E; & ideirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. are quadratum rectæ A B, triplum eſt quadrati rectæ B E, quæ ualis eſt ſemidiametro Si igitur in circulo triangulum æqui- rum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

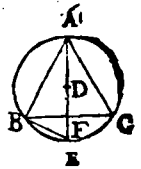


a 47. pri mi.

b 31. ter tij.

COROLLARIVM I.

EQVITVR ex his, diametrum circuli potentia ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circu- deſcripti. Nam cùm latus A B, oſtenſum ſit potentia um ſemidiametri A D, poſito quadrato ex A B, 3. e- uadratum ex A D, 1. atque adeo quadratum ex A E, d ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadruplum eſt quadra- A D, erit 4. Quare quadratum ex A E, quadrati ex , ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, n 4. ad 3.



T quia ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. vt eſt A E, ad A B, ita ſe habet A B, A F; erit quoque latus trianguli æquilateri A B, perpendicularis A F, no angulo ad baſin demiſſæ potentis ſeſquitertium: quod tamen alie- monſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.

COROLLARIVM II.

INC facilè etiam colligi poteſt, ſemidiametrum D E, bifariam ſe- in F, à latere trianguli B C. Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum uadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit ſtratum rectæ B E, talium partium 4. *c* Eſt autem quadratum rectæ æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt

c 47. pri mi.

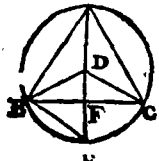
quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ BF (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur & 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc est, quadratum rectæ DE, sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex scholio propos. 4. lib. 2. recta DE, dupla erit ipsius FE. Quare DE, bifariam secatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, secare latere BC, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE, sub latera AB, AD, æqualia sint latera AC, AD, triangulique CAD; & bases BD, CD, æquales quoque: a *Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod est primum.*



a 8. primi.

DEINDE, cùm latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales: b Erunt & bases BF, CF, & anguli ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

b 4. primi.

POSTREMO, cùm anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse æquales; c erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BC, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit BE, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro primum BD, æqualis, ex coroll. propos. 15 lib. 4. d Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; e Erunt & latera DF, EF, æqualia quod est tertium.

c 26. tertij.

d 5. primi.

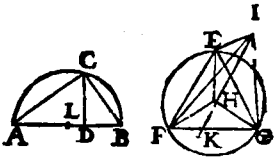
e 26. primi.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra comprehendi; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

AT

SIT datæ sphæræ diameter A B, circa quam semicirculus describatur A B C; & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt sit A D, ipsius D B, dupla; at vero A B, eiusdem D B, tripla; & ipsius A D, sesquialtera. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, cõnectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ H E, quæ æqualis sit ipsi C, describatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur E F G, adiunganturq; rectæ H F, H G, quæ singulæ æquales erunt ipsi D C, cum æquales sint ipsi H E, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde H, ad planum circuli perpendicularis H I, quæ æqualis ponatur rectæ A D, & ex I, demittantur rectæ I E, I F, I G. Dico solidum contentum quatuor triangulis F. G, I E F, I F G, I E G, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam enim latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib 11. erit basis A C, basi I E, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam A C, æqualem esse rectis I F, I G. Rursus quia tres lineæ A D, D C, D B, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt A D, ad D B, ita adratum rectæ A D, ad quadratũ rectæ D C; & componendo, vt B, ad D B, ita quadrata rectarũ A D, D C, simul ad quadratum rectæ D C: *b* Sunt autẽ quadrata rectarũ A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoq; vt A B, ad D B, ita quadratũ rectæ A C, ad quadratũ rectæ D C; Ac proinde cum A B, sit ipsius D B, tripla, & quadratũ rectæ A C, triplum quadrati rectæ H E, cum H E, æqualis sit ipsi D C: *c* Atqui & quadratum rectæ E F, triplum est eiusdem quadrati rectæ H E. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectæ E F. Quare cum recta A C, ostensa quoq; sit æqualis rectis I E, I F, I G; erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis E F G, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter A B; & diametrum sphæræ A B, potentia sesquialteram esse lateris E F, vel A C.



EXTENDATVR perpendicularis I H, vsq; ad K, vt sit H K, æqualis D B; & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres rectæ I H, H E, H K; erunt quoque I H, H E, H K, proportionales. Quare cum H E, sit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K, semicirculus circa I K, descriptus in plano rectarum I K, H E, transibit per E, vt mox ostendetur; Eodemque

a 4. primi.

b 47. primi.

c 12. tertiæ.

argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H F, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H G, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cùm per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cùm ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quòd diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehenderetur idem Tetraedrum ſphæra data.

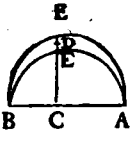
QVONIAM verò tres rectæ A B, A C, A D, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt A B, ad A D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta A B, ſeſquialtera rectæ A D, quòd qualium partium 3. eſt A B, talium 2. ſit A D. Igitur & quadratum rectæ A B, ſeſquialterum erit quadrati rectæ A C; Ac propterea cùm A B, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa I K, in plano rectarum I K, H E, deſcriptus, tranſeat per E, facilè demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad A B, perpendicularis C D, & media proportionalis inter A C, & C B. Dico ſemicirculum circa A B, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque C E, media proportionalis inter A C, & C B, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ C D, quàm quadratum rectæ C E, a *æquale erit rectangulò ſub A C, C B; Ac proinde quadrata rectarum C D, C E, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.*



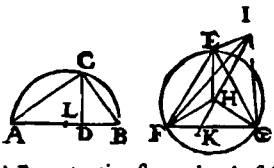
a 17. ſexti.

HINC

HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, transire per , cùm HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis ter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facilè colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadrulam sesquialteram semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti. ùm enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris ramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. t quadratum rectæ AB: At quaum partium 6. est quadratum re- EF, talium partium 2. est quatum rectæ HE, a quòd quadram rectæ EF, triplum sit quadrati tæHE. Qualium igitur partium 9. quadratum rectæ AB, talium rtium 2. erit quadratum rectæ E; Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesialtera semidiametri HE, cùm proportio quadratorum sit, quæ 9. 2.



a12. *ter tijdes.*

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyradis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiatri. Sit enim L, centrum semicirculi ACB, eritque L, centrum oque sphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro sphæræ basin EFG, ducitur perpendicularis; cùm AD, æqualis sit ipsi IH, ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem est, od centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe re- AB, & tertiam partem semidiametri AL. Quoniam enim AD, duest ipsius DB; Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB: ae inde talium 6. tota AB, & semidiameter AL talium 3. Quare si AD, 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ AB, quæ t partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem tium 3.

SIMILITER altitudo pyramidis HI, duas tertias partes contineipsius diametri. Est enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias metri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula ilatera æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facilè ex ipsis ritè inter se compliis componetur Tetraedrum, secundum totam ditatem. Hanc verò praxin, & sequentes et tres, quibus reliqua quatuor solida regula-

via in materia quauis ſenſibili confici queant, deſumpſimus ex Athen Durero non ignobili ſcriptore.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quòd ſphæra diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur AEB, & a centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectantur-que rectæ AC, BC, *a* quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuò ſecantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales; cùm ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratum eſt. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LHE, LHG, LFG, eſſe octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus FI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, recti; (ipſe quidem EIK ex defin. lib. II. At verò EIG, *b* eo quòd ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH,.) *c* Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemque *modo* eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeò æqualia triangulo KEH, cùm illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diametri AB, qua *nimirum* & pyramis conſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.

a 4. primi.

b 8. primi.

c 4. primi.

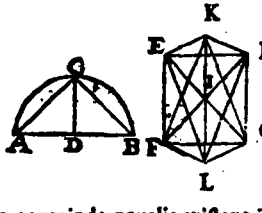
QVONIAM enim IE, perpendicularis eſt ad KL, ex 4. defin. lib. II. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL; (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales ſint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, deſcriptus tranſibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propoſitionis. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idem-

demque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, ùm per omnes illius angulos incedat. Cùm ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB; (Nam cùm rectæ GC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quàm quadratum rectæ FB, quadrati rectæ BI; Erunt & rectæ AD, BI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

QVIA verò quadratum rectæ AB, *a* æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cùm AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum. *a* 47. primi.

COROLLARIVM I.

EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuò ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, sentes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atque proide, cùm KI, recta sit ad lineas EG, F: *b* recta quoque erit ad planum FGH, per ipsas ductum: *c* Ideoe & plana KFLH, ELGK, per l, ducta, recta erunt ad planum EFH. Immò eadem ratione, vt paulò rem complectar, tria plana EFH, KFLH, ELGk, se mutuò ad gulos rectos secabunt: Quæ quim plana sunt quadrata, cùm omnia rum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inse, comprehendantque angulos rectos, eo quod (cum quadratum metri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus) adratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri FK, *d* Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademque est ratio cæteris angulis.



b 4. Undecimi. c 8. Undecimi. d 48. primi.

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, earum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHk, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat; cùm sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. a Quoniam igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris terraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. b Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri sphæræ. Igitur cùm talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

a 13. ter tÿdec.

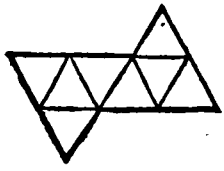
b 14. ter tÿdec.

COROLLARIVM IV.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: c Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

c 15. Vndecimi.

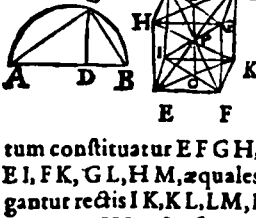
SCHOLIVM.



QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facilè ex ipsis ritè inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totum soliditatem, vt ait Albertus Durerus.

XIV. PROBL. 5. PROPOS. 15.

CVBVM constituere: & sphæra complecti, qua & priores figuras; & demonstrate, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.



SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoq; ipsi BC, quarũ extrema coniũgantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniã ergo rectæ EI, FK, ad planum EF, GH, rectæ sunt; d erũt rectæ EI, FK, parallelæ. Sunt autẽ

d 6. Vndecimi.

& æqua-

& æquales, quod vtraq; æqualis posita sit ipsi B C, hoc est, ipsi E F.
a Igitur & E F, I K, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est E F K I; In quo, cum lineæ E I, I K, K F, æquales sint ipsi E F, omnes quatuor lineæ æquales existunt: b Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum E I K, F k I, æquales sint oppositis angulis rectis k F E, I E F. Igitur E F k I, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt F k L G, G L M H, H M I E; Atque idcirco & I k L M, quadratum erit, c cum simile sit & æquale quadrato oppositio E F G H. Est enim E L, solidum parallelepipedum, d quod eius plana opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit E L. Quem dico comprehendi sphæra diametri A B. Sint enim planorum oppositorum E F k I, G H M L, diametri E k, F I, G M, H L, per quas ducantur plana E k L H, F I M G. e Quia igitur tam planum E k L H, quam F I M G, cubum bifariam secat; vtrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiusdem propos. se mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet N O, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana E k L H, F I M G, rectangula sunt, (Cum enim H E, perpendicularis sit duabus rectis E I, E F, ob quadrata E M, E k; f perpendicularis quoque erit ad planum E k, ideoque & ad rectam E k, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est H E k. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E k L H, nec non & anguli in plano F I M G. Rectangula ergo sunt plana E k L H, F I M G,) & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri E L, H k, F M, G I, æquales, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidiametri P E, P L, P H, P k; P F, P M, P G, P I, æquales erunt. Quare semicirculus circa E L, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro E L, sphæram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ diametri A B, ita demonstrabitur.

a 33. pr.
b 34. pr.
c 24. 6 vndec.
d 15. 6 vndec.
e 28. 6 vndec.
f 4. 6 vndecimi.

CVM quadratum rectæ E k, g æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F k, ac proinde duplum quadrati rectæ E F, hoc est, quadrati rectæ k L: Erunt quadrata rectarum E k, k L, tripla quadrati rectæ k L. h Est autem quadratis rectarum E k, k L, æquale quadratum rectæ E L, quod angulus E k L, sit rectus in rectangulo E k L H. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ k L, hoc est, quadrati rectæ B C: At vero eiusdem quadrati rectæ B C, triplum est quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ A B, B C, B D, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est A B, ad B D, ita erit quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B C. Cum ergo

g 47. primi.
h 47. primi.

A B, ipſius B D, ſit tripla: erit quoque quadratum rectæ A B, quadrati rectæ B C, triplum. Igitur quadrata rectarum E L, A B, æqualia ſunt; ac propterea ipſæ rectæ E L, A B, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarum ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri E L, triplum eſſe quadrati lateris cubi k L, manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi E L, H K, F M, G I, æquales eſſe, ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta N O, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum G H M L: E F k I, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli O F P, O P F, trianguli O F P, æquales ſunt duob. angulis N M P, N P M, trianguli N M P: (a Nam anguli O F P, æqualis eſt alterno N M P, inter lineas F I, G M, b quæ parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum E F K I, G H M L, c & angulus O P F, æqualis eſt oppoſito ad verticem N P M.) Sunt autem & latera P F, P M, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera P O, P N, æqualia erunt; ac proinde recta N O, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra oppoſitorum quadratorum.

a 29. pr.
b 16. 11 dec.
c 15. pr.

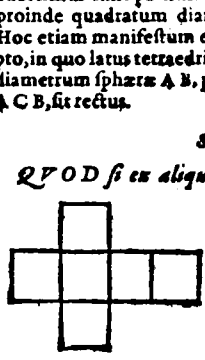
COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiæ laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. d Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri: e Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrum ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt A C, cubi vero B C. f Perſpicuum autem eſt, diametrum ſphæræ A B, poſſe & rectam A C, & rectam B C, cum anguli A C B, ſit rectus.

d 13. ter tiidec.
e 15. ter tiidec.
f 47. pr.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hac figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rectè complicentur inter ſe. Efficitur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulis ſolidis continens inſtar teſſaræ cuneiformis, vt conſtat.



PROBL. 4. PROPOS. 16.

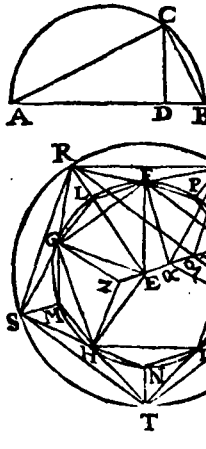
ICOSAEDRVM constituere: & sphæra comple-
qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod lco-
dri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

SIT sphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter
circa quam semicirculus describatur A C B: Et ex A B, abscin-
r quintæ pars B D, vt A B, ipsius B D, sit quintupla; & ipsius
sesquiquarta; At vero A D, ipsius B D, quadrupla. Deinde du-
D C, perpendiculari ad A B, connectantur rectæ A C, B C. Ad
ruallum rectæ E F, quæ ipsi B C, sit æqualis, circulus describa-
x centro E; a in quo pentagonum æquilaterum inscribatur a 11.
H I K. Post hæc diuisis arcubus F G, G H, H I, I K, K F, bifa- quarti.
in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ F L, L G, G M,
, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis
, N, O, P, ad planum circuli F G H I K, perpendiculares eri-
tur E Q, L R, M S, N T, O V, P X, quæ æquales ponantur se-
diametro E F, seu rectæ B C. Eruntque omnes inter se æqua- b 6. hu-
: b sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, b 6. vnde-
mpe E L, Q R, E M, Q S, E N, Q T; E O, Q V; E P, Q X. (quas decimi.
nen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus) c binæ c 33. pri.
ter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint E L, E M,
. semidiametro E F; æquales quoque erunt Q R, Q S, Q T, d Quia d 15.
V, Q X, & inter se, & semidiametro E F, seu rectæ B C. undec.
to planum per rectas Q R, Q S, ductum parallelum est plano eidem E G H.
G H I K, per rectas E L, E M, ducto, eademque ratione planum
er rectas Q S, Q T, ductum parallelum est planum per rectas
K, per rectas E M, E N, ducto, conuenit autem planum efficiens
K, Q S, cum plano per Q S, Q T, in recta Q S. Igitur 16. lib. 11.
æ duo plana vnum planum per ea, quæ ad Propos.
stendimus. Non aliter ostendemus planum per Q T, Q V, cum
oc plano efficere vnum planum; nec non planum per Q V, Q X,
planum per Q X, Q R. Sunt ergo quinque lineæ Q R, Q S, Q T,
V, Q X, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum
K, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T,
, X, transibit, eritque æqualis circulo F G H I K. Coniungantur
unctæ R, S, T, V, X, rectis A S, S T, T V, V X, X R. e Quia igitur e Quia
R, P X, æquales sunt, & parallelæ; si concipiatur duci recta L P;
erunt quoque L P, R X, æquales & parallelæ; f Ac proinde in f
ireulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem L P
uintam partem circuli F G H I k, nempe duas decimas parte
L, F P. Igitur & R X, quintam partem auferet circuli R S T
X. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rect
R S, S T

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum eſt RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIk. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIk, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, Vk, Xk, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt, lateri hexagoni circuli FGHIk, & eſt LF, latus decagoni; a erit quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF:

a 10. ter tiidec.

b 47. primi.



b Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademq; ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c reliquis lateribus vtriuſq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIk, VkX, XkF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia; cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri.

Poſt hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, ſintque rectæ QY, EZ, æquales ſingulæ lateri decagoni circuli FGHIk, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, ſemidiameter eſt circuli RSTVX, hoc eſt, latus hexagoni, & QY, latus eſt decagoni eiuſdem circuli; c erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; d Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus ſit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela ſint oſtenſa, ſitque EQ, ad illius planum recta, ex conſtructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale eſt quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis oſtendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confuſionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV,

c 10. ter tiidec.

d 47. primi.

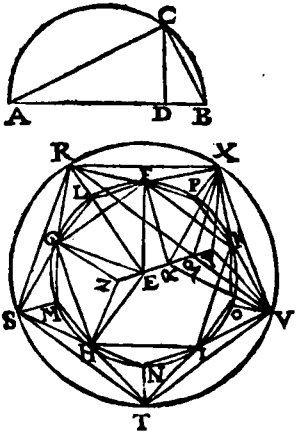
YV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, priori-
as decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentago-
i. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum
G, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & EZ, latus deca-
ons, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non qua-
ior triangula HZI, IZk, kZF, FZG, (quorum tamen lineas,
e pareremus confuſionem, non duximus,) quæ omnia prioribus
undecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia
ec triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturque
gula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſti-
rum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico comprehendi ſphæra
ametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ α, F,
X, & V. Quoniam igitur latera α Q, QX, trianguli α QV, æquila-
ſunt lateribus α Q, QX, trianguli α QV, æqua-
midiametri circuli RSTVX: ſunt autem & anguli α QV, α-
X, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. α Erunt & baſes α V, α
T, oſtendentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter ſe, & ipſis
V, α X. Rurſus quia latera α Q, QX, trianguli α QX, æqualia
nt lateribus α E, EF, trianguli α EF, cum QX, EF, ſint ſemidia-
etri circulorum æqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariam in α: Sunt
tem & anguli α QX, α EF, æquales nimirum recti, ex defin. 3.
:11. b Erunt quoque baſes α X, α F, æquales: eodemque modo b
x α, E, ad G, H, I, k, rectæ ducantur, oſtendentur α G, α H, α I,
æquales ipſi α X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem an-
los F, G, H, I, k, R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE,
midiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIk; & EZ,
us decagoni eiuſdem circuli; c erit QZ, diuiſa in E, extrema ac c
edia ratione, mainſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſe-
nentum ZE, aſſumens E α, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt,
ta α Z, d quintuplum poteſt eius, quod ex E α, deſcribitur, qua-
ati: Poteſt autem & recta α F, quintuplum eiuſdem quadrati re-
α E α. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit qua-
ata rectæ α E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit
ius E α; Erunt quadrata rectarum EF, E α, ſimul quintupla
adrati rectæ E α. e Cum ergo quadratis rectarum EF, E α, æ-
ale ſit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ α F,
intuplum quadrati rectæ E α.) Igitur æqualia ſunt quadrata
arum α Z, α F, ac proinde rectæ ipſæ α Z, α F, æquales erunt.
m igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (propterea quod ſi æquali-
is α E, α Q, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Z α, Y α, æ-
ales ſiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos
edri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum
ZY, e

ZY, ex centro α, per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſphæræ diametri AB.

a 15. quinti. CVM enim ſit vt α Z, ad α E, ita YZ, dupla ipſius ℓ, ad QE, duplam ipſius α E; b Ac propterea vt quadratum rectæ ℓ, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; ſit autem quadratum rectæ α Z, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ α E; erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc eſt, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis ſit poſitæ ſemidiametro EF, hoc eſt, rectæ BC; Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propoſ. 2. lib. 6. ſit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Ac proinde exiſtente AB, quintupla ipſius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplū quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia ſunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & ſphæræ circa ipſas, æquales erunt.

b 22. ſexti.



QVONIAM denique diameter ſphæræ AB, *Rationalis* ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendum eſt, latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) poteſtq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc eſt, rectæ illi æqualis EF; erit quoque ſemidiameter EF, circuli FGHIk, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. c erunt commenſurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & EF, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGHIk, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, d Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur conſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antecedentes figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur **Minor.** Quod erat faciendum.

c 6. decimi.

d 11 ter tiadec.

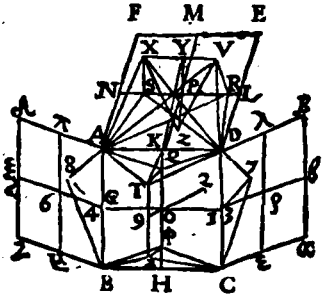
COROL.

TYV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZk, kZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturque ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico comprehendi ſphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ α, F, α X, & V. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia ſunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, ſint ſemidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. α Erunt & baſes αV, αX, æquales. Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter ſe, & ipſis αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia ſunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. libri 11. b Erunt quoque baſes αX, αF, æquales: eodemque modo ſi ex α, E, ad G, H, I, k, rectæ ducantur, oſtendentur αG, αH, αI, αk, æquales ipſi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, k; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIk; & EZ, latus decagoni eiuſdem circuli; c erit QZ, diuiſa in E, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens Eα, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta αZ, d quintuplum poteſt eius, quod ex Eα, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta αF, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit quadrati rectæ αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius Eα; Erunt quadrata rectarum EF, Eα, ſimul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipſæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (propterea quod ſi æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum ZY, ex

a 4. pri.
b 4. pri.
c 9. ter-tiidec.
d 3. ter-tiidec.
e 47. pri.

Problematis lib. 4. Secentur O k, P L, P N, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares Q T, R V, S X, æquales segmentis maioribus O Q, P R, P S. Coniunctis deinde rectis A T, A X, D T, D V, V X; Dico A T D V X, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi.



Quod enim pentagonum A T D V X, sit in vno plano, ita ostendetur, Cum R V, S X, sint ad quadratum A D E F, rectæ a ipsæ erunt parallelæ; Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora P R, P S, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ P L, P N, æquales sint. b) erunt quoq; contingentes rectæ R S, V X, æquales & parallelæ: c Est autem & A D, eidem R S, siue L N, parallela, eo quod A N, D L, parallelæ sunt & æquales. d Igitur & A D, V X, parallelæ sunt; e Ac propterea rectæ coniungentes A X, D V, in eodem cum ipsis erunt plano, ideoque trapezium A D V X, in vno existet plano: Est autem & triangulum A T D, in vno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio A D V X. Ex P, namque ducatur P Y, parallela ipsi R V, f quæ erit recta ad quadratum A D E F, quod ad idem recta sit R V: Et connectantur rectæ k T, k Y. Quoniam igitur est vt O k, ad O Q, ita O Q, ad Q k, ob sectionem rectæ O κ: Est autem κ P, ipsi O κ, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi,) & P Y, ipsi O Q, (cum æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt κ P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illis æqualis, ad Q κ. Quare cum triangula P κ Y, Q T κ duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum κ, composita, g ita vt homologa latera sint parallela, nempe P κ, & Q T, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A B C D; & P Y, Q κ, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F: h Erunt reliqua latera κ Y, κ T, in rectam lineam collocata, i Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoque planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

a 6. Vndecimi.
b 33. pr.
c 33. pr.
d 9. Vndecimi.
e 7. Vndecimi.
f 8. Vndecimi.
g 6. Vndecimi.
h 32. sexti.
i 1. Vnd.

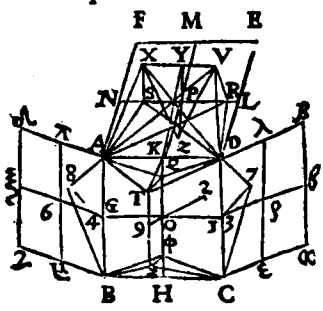
QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A κ, κ Q, trianguli A κ Q; (Sunt enim A N, A k, dimidia latera cubi, & N S, k Q, segmenta minora rectarum æqualium sectarum) & anguli A N S, A K Q,

AK Q, recti; si ducatur recta A Q, *a* erunt bases A S, A Q, æqua- *a 4. primi.*
es. Rursus cùm latera A S, S X, trianguli A S X, sint æqualia late-
ibus A Q, Q T, trianguli A Q T. (Nam rectæ A S, A Q, ostensæ
unt æquales, & S X, Q T, sunt segmenta maiora rectarum æqua-
ium sectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3. lib. 11. *b* E- *b 4. primi.*
unt quoque bases A X, A T, æquales. Quod si ducatur recta D Q,
ostendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; si verò
ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, esse æqualem. Sunt
gitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V, æqualia: qui-
us etiam æquale ostendemus reliquum V X, hac ratione. *c* Qua- *c 4. ter-*
drata rectarum P N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ P S, hoc *tiidec.*
st, quadrati rectæ S X: Est autem quadrato rectæ P N, æquale
quadratum rectæ A N. Igitur & quadrata rectarum A N, N S, si-
mul tripla sunt quadrati rectæ S X. *d* Cùm ergo quadratis recta- *d 47.*
rum A N, N S, æquale sit quadratum rectæ A S; erit quoq; qua- *primi.*
dratum rectæ A S, triplum quadrati rectæ S X. Ac proinde qua-
drata rectarum A S, S X, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ
S X. *e* Est autem quadratis rectarum A S, S X, æquale quadratum *e 47.*
rectæ A X. Quadratum ergo rectæ A X, quadruplum quoq; erit *primi.*
quadrati rectæ S X, hoc est, quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati
rectæ X Y; *f* Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. Cùm igitur & *f 34. pri*
quadratum rectæ V X, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ *mi.*
X Y, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod V X, dupla sit ipsius X Y; E-
unt quadrata rectarum A X, V X, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ
æquales. Quare cùm & X A, A T, T D, D V, ostensæ sint esse æ-
quales; æquilaterum est pentagonum A T D V X.

QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Du-
ctis rectis A R, A V; cum P N, secta sit in S, extrema ac media ra-
tione, eiq; addita P R, æqualis maiori segmento P S; *g* erit quo- *g 5. ter-*
que N R; secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmen- *tiidec.*
um erit N P. *h* Quadrata igitur rectarum N R, R P, simul tripla *h 4. ter-*
unt quadrati N P, hoc est, quadrati rectæ A N: Est autem qua- *tiidec.*
ratum rectæ R V, æquale quadrato rectæ R P. Ergo & quadrata
ectarum N R, R V, tripla sunt quadrati rectæ A N; Ac proinde
uadrata rectarum N R, R V, A N, quadrupla sunt eiusdem qua-
rati rectæ A N. *i* Sunt autem quadrata rectarum N R, A N, æ- *i 47. pri*
ualia quadrato rectæ A R. Igitur & quadrata rectarum R V, A R, *mi.*
uadrupla sunt quadrati rectæ A N. *k* Cum ergo quadratis re- *k 47.*
tarum A R, R V, æquale sit quadratum rectæ A V; Erit quoque *primi.*
uadratum rectæ A V, eiusdem quadrati rectæ A N, quadruplum.
t vero eiusdem quadrati rectæ A N, quadruplum est quadratum
ectæ A D, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod A D, dupla sit ipsius
N. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum A V, A D, ideoque
rectæ A V, A D, æquales. Simili argumento, ductis rectis D S,

DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres anguli AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli
a 8 pri. DXV; & bases AD, DX, æquales quoque: a Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero
b 7. ter 11 dec. ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, b ipsum erit æquiangulum.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cαβ D, Bγδ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD,

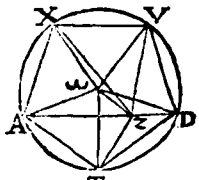


AB, quorum singula latera bifariam secentur in ε, ϕ, λ, l, μ, π, G, punctis, quæ rectis inter se congantur se mutuo secantibus in quadratorum centris κ, ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, per extrema ac media rationem in punctis φ, Q, l, ε, ρ, ductis ad plana quadratorum ducantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 3, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 46, coniunganturque rectæ T2, C7, C7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.

INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorũ latera bifariam secantes ducuntur, scilicet planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta latera ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ
c 19. 11 dec. sunt ad plana ADEF, ABCD; c Etunt & communes sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta in plano ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa, communis

ommunis ſectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur.
Quia vero dictæ communes ſectiones & diametri cubi ſe mu- a 39.
o bifariam ſecant; ſecent ſe mutuo bifariam in Z: Secant au- Vndec.
m ſeſe diametri cubi bifariam in centro ſphæræ cubum comple-
entis, ex corolla. propoſ. 15. huius lib. Punctum igitur Z, cen-
am erit ſphæræ circa cubum deſcriptæ; Ac proinde omnes re-
æ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter ſe æquales erunt:
ibus omnibus æquales quoq; eſſe omnes rectas ex Z, ad omnes
gulos Dodecaedri ductas, ſic fiet perſpicuum, ducta recta ZX.
Quoniam parallelæ ſunt KP, OZ, quod vtraque recta ſit ad b 6. Vn-
inum ABCD; Item parallelæ ſunt OK, ZP, quod vtraque re- decimi.
ſit ad planum ADEF; erit PKOZ, (debent enim duo pun-
Z, intelligi eſſe coniuncta) parallelogrammum, ac propterea
, æqualis erit ipſi KO, hoc eſt, ipſi NP, dimidio lateri cubi:
autem & PY, ipſi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqua-
erit. c Quare cum quadrata rectarum NR, PR, ſimul tripla c 4. ter-
t quadrati rectæ NP, quod NR, in P, ſecta ſit extrema & me- tiidec.
ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc eſt,
adrata rectarum ZY, YX, ſimul tripla quadrati rectæ PZ;
ſt enim XY, æqualis ipſi PS, hoc eſt, ipſi PZ:) d Eſt autem d 47.
idratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igi- primi.
& quadratum rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc
quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiuſdem quadrati dimi-
ateris cubi triplum eſt quoq; quadratum ſemidiametri ſphæ-
cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cu- e 15.
ita eſt ſemidiameter ad dimidium lateris; f Ac proinde vt quinti.
dratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum ſemi- f 22.
metri ad quadratum dimidij lateris. g Cum ergo quadratum ſexti.
metri triplum ſit quadrati lateris, erit quoque quadratum ſe- g 15. ter
liametri triplum quadrati dimidij lateris.) Æquale igitur eſt tiidec.
dratum rectæ ZX, quadrato ſemidiametri ſphæræ, ſeu eu-
Ac propterea ZX, æqualis ſemidiametro. Eadem ratione
ducta recta ZV, ſemidiametro æqualis. Vel certè quia cum
ra ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia ſint lateribus ZY, YV,
nguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, ſit per-
dicularis ad LN, erit quoque eadem ad ſibi parallelam VX,
pendicularis.) b Erunt baſes ZX, ZV, æquales: Sunt au- h 4. pri.
& ZA, ZD, ad angulos cubi, ſemidiametro ſphæræ æ-
les, vt dictum eſt. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex
centro ſphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X,
ales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem oſtendatur & recta du-
ZT, ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcri-
ir circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum,
ulus ATDVX, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ

perpendicularis demittatur Z ω, connectanturq; rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale
a 47. primi. est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum A Z X, æqualia, quod rectæ Z A, Z X, ostensæ sint æquales; igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoque rectæ ipsis ω X, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, æquales, quod & rectæ Z V, Z D, æquales sint ostensæ rectis Z A, Z X. Quare cum



b 9. ter. ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ, b puncto ω centrum erit circuli; Ac proinde ω T, requis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt
c 47. primi. quadratis rectarum Z ω, ω T. c Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; propterea quæ & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque A T D V X; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac proptereà eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, quæ cubus.

d 15. quinti. POSTREMO cum sit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: d erit quoque vt N L, dupla ipsius N P, ad R S, duplam ipsius P S, in R S, dupla ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L, nimirum ad duplam ipsius S N. Si igitur cubi latus N L, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R; Sed N L, recta ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius)
e 6. tertiadec. e Igitur maius segmentum S R, hoc est dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Cum ergo demonstratum sit; recta L N, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: Sit autem L N, æqualis lateri cubi, R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema & media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROL-

COROLLARIVM II.

IC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum
tagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi
:endit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis A V,
, subtendentibus angulos X. & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni se-
extrema ac media ratione, a facit maius segmentum latus pentagoni: b
ropterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum penta-
i, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dode-
dri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus dodecaedri, &
us segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac
ia ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius se-
ntum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

a 8. *tertiidec.*
b 5. *tertiidec.*

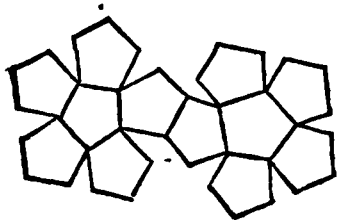
COROLLARIVM III.

ONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum
opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à
is lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque,
l angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt V X, T z,
videlicet parallela sunt lateribus cubi E F, A B: aliaque quatuor repe-
tur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi
ositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus paralle-
oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angu-
lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quæ-
nt rectæ Y Z, 9 Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo inter secant
ntro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam
em, quoniam cum rectæ P Z, O Z, æquales sint dimidio lateri cubi, &
9 O, æquales maioribus segmentis æqualibus P S, O Q; Erunt totæ
Z, æquales: Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppo-
am laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt,
e bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in
le logrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus est, cum opponatur re-
9 K P. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium con-
:ntes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus
parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IV.

ENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri
am, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ra-
, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri ea-
sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum Z Y, Y P, tripla
la sint quadrati rectæ P Z: erit Z Y, secta in P, extrema ac media ratio-
aiusque segmentum erit P Z, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proin-
it vt Z Y, ad Z P, ita Z P, ad P Y: c ideoque ut dupla ipsius Z Y, nempe c 15.
diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius Z P, *quinti.*
rum ad latus cubi, ita eadem duplam ipsius Z P, ad duplam ipsius P Y,
:st, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dode-
i bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum,
cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.

SCHOLIVM.

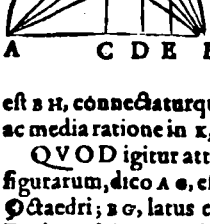


QVOD si ex aliquamateria conficiantur duodecim pentagona aequilatera, & aequiangula, inter se aequalia, disponanturque, vt hac figura indicat, compietur Dodecaedrum solidum totum soliditatem, si rite inter se complicentur.

xviij. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; la D, vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsa AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH, connectaturque recta BI. Postremo BC, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim AC, media proportionalis est inter BA; AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; *a* Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri. *a* 13. *tertiæ.*

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AF. *b* Quare cum diameter sphæræ *b* 14. *tertiæ.*

sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit A B, latus Octaedri. Eodem modo erit B E, latus Octaedri.

DEINDE cum B G, sit media proportionalis inter A B, B D, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem A B, ipsius B D, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. a Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit B G, latus cubi. a 15. terdec.

PRÆTEREA quia, ex eisdem corollariis, B H, est media proportionalis inter A B, B E, atque ideirco vt A B, ad B E, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. propos. 16 huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. b Igitur latus pentagoni potest B H, & H I, simul; Ac proinde c cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni eiusdem circuli eiusdem. d Quam ob rem B I, latus est Icosaedri. b 10. terdec. c 47. pr. d 16. terdec.

DENIQVE cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

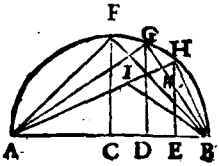
QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratū lateris Tetraedri; talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum. e Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atq; adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt

Diamet. 6.
Tetraed. 4.
Octaed. 3.
Cub. 2.

e 6. def.

a 9. dec. constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. a Erunt huiusmodi lineæ, mirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorū, cum latera priorū sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.



SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apo-
b 104. decimi. tome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor.
c 106. decimi. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo,
d 16. ter tiidec. d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo ptæfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 18. lib. 3.

EODEM

EODEM modo oſtendemus, latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam B G, cubi latus.

LATVS autem cubi B G, maius eſſe latere Icoſaedri B I, hac ratione demonſtrabimus. Quoniam A B, tripla ponitur ipſius B D; quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit ergo quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B D, cùm non-uplæ proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ B, talium 1. erit quadratum rectæ B D. Qualium autem partiũ eſt quadratum rectæ A B, talium 3. eſt quadratum rectæ B G; quòd illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum G D, B D, cùm æqualia ſint quadrato rectæ B G. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ B D, talium partium 1. linquetur talium partium 2. quadratum rectæ G D. Quoniam verò quadratum rectæ A B, quintuplum eſt quadrati rectæ B H, & quadratum rectæ B H, minus quàm talium partium 2. Nam 5. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quòd ad 2 quintuplam proportionem habeant 5. & erit numerus, ad quem 5. habent proportionem quintuplam, minor quàm 2. Quadratum rectæ G D, maius eſt quadrato rectæ B H, ideoque recta G D, maior quàm recta B H. Rurſus quia diameter ſphæræ componitur ex B H, ſemidiametro circuli, ex quo Icoſaedrũ conſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni H I, eiuſdem circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. conſtat latus decagoni H I, minus eſſe tertia parte rectæ A B, hoc eſt, minus recta B D. Nam ſi recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ A B; erit dupla illius æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipſi A D; Ac propterea reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi B D; Atqui cùm quadratum rectæ A B, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectæ B D, erit idem quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B H. Quod eſt abſurdum. quia noncuplum enim eſt oſtratum. Non ergo H I, tertia pars eſt ipſius A B: Sed ne maior tertia parte. Si enim recta H I, dicatur maior tertiæ rectæ A B, & proinde dupla ipſius H I, maior quàm dupla, hoc eſt, quàm A D, erit B H, minor quàm tertia pars B D, te quadratum rectæ A B, maius erit, quàm noncuplum quadrati rectæ B H. Quod magis eſt abſurdum. Non igitur maior est tertia parte ipſius A B: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt adimus. Minor ergo eſt quàm tertia pars, hoc eſt, quàm B I, ue cùm rectæ G D, D B, maiores ſint rectis B H, H I, vt ſtratum eſt; erunt quoque quadrata illarum quadratis maiora: dEſt autem quadratum rectæ B G, æquale quadctarum G D, D B; & quadratum rectæ B I, quadratis rec

rum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoq; erit quadrato rectæ BI, Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quàm recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cùm rectæ BG, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK; atq; adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo re-
a 2. *sec.* ctanguli sub BG, GK: a Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK. (Nam
b 17. *sexti.* cùm sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; b erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH. (Cùm enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quàm quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB. Quæ tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnum quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cùm illa quinque his sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quàm recta BK; Ac propterea cùm BI, maior sit quàm BH, multò maior erit BI, latus videlicet Icosaedri, quàm BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum expositarum, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ plana & æquilatera & æquiangula contineatur inter se æqualibus & pari ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, solidus angulus constitui non potest, cùm saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus.

EX

EX quinque, angulus Icosaedri;

EX sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cùm enim triangulus aquilaterus angulus contineat duas tertias partes ℂnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertia partes ℂnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis aquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. a Nam solidus omnis angulus minoribus quàm quatuor rectis angulis continetur. Multò ergo minus ex pluribus, quàm sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis aquilateris, & aquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cùm enim quinque anguli pentagoni aquales sint sex rectis, ℭt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde ℂnus angulus contineat ℂnum rectum, ac præterea quintum partem ℂnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes ℂnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus conficiì potest. Cùm enim ℂnus, ℭt dictum est, maior sit recto, eo quod continet ℂnum rectum, & insuper recti quintã partem; erũt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; ac propterea multo minùs ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus conflabit. Nec sanè ex aliis figuris aquilateris, & aquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cùm sex anguli hexagoni aquilateri sint octo rectis, ℭt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; ac proinde ℂnus angulus contineat ℂnum rectum, ac præterea duas partes ℂnius recti; continebũt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atq; idcirco multò minus ex pluribus eiusmodi angulis, quàm tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis aquilateris, & aquiangulis inter se aqualibus contineatur.

NAM si tria triangula aquilatera & aqualia coeant in ℂnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI verò quatuor eiusmodi triangula conuenient ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinq; talia triangula ad efformandum

angulum solidum, conficietur Icosaedrum Gigantis triangulis eiusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata aequalia coeant in vnum punctum & constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona aequilatera, & aequiangula inter se aequalia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figura regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia verò vtrumque horum latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, sunt Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vnde fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, quæ sunt 4. fiunt 24 quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos habeat quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt numerus bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli. Quia verò tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, dividendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularium solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui dividantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) facient 4. angulos solidos Pyramidis. Si verò 6 quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius qua-

fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (*Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi*) *faciunt* 8 *angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt* 24. *anguli, qui diuiſi in* 4. (*Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri*) *conficiunt* 6. *angulos ſolidos Octaedri. Si rurſum* 20. *triangula Icoſaedri multiplicentur in* 3. *numerum angulorum vnius trianguli, fiunt* 60. *anguli, qui diuiſi in* 5. (*Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum*) *Icoſaedri producunt* 12. *angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique* 12. *pentagona Dodecaedri multiplicentur in* 5. *numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt* 60. *anguli, qui diuiſi in* 3. (*Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri*) *efficiunt* 20. *angulos ſolidos Dodecaedri.*

DENIQVE conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero repetuntur, & contrà. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos: Octaedrum verò octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solum Tetraedrum, (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes, totidemque ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTII DECIMI.

EV

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij verò, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinæ societatem commendatus longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumq; disserrent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, vt pater meus distribat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certè ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cùm sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, studium postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cùm in omnibus disciplinis tum vel maximè in Geometria versatus, scitè ac prudenter

fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) faciunt 8 angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

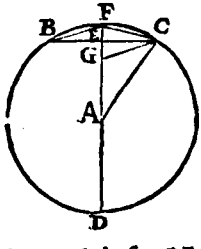
DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & Octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solides. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contrà. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos: octaedrum verò octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases, totidemque solidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLI-

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli B C D, ducatur A E, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico A E, dimidiũ eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim A E, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter D F, ſumptaque E G, æquali ipſi E F; connectantur
a 3. tertij. rectæ A C, C G, C F, B F. *a* Quoniã igitur perpendicularis A E, ſecat rectam B C, bifariã; erunt latera B E, E F, trianguli B E F, æqualia lateribus C E, E F, trianguli C E F; Cum
b 4. primi. igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; *b* erunt baſes C F, B F, æquales;
c 28. tertij. *c* ideoque & arcus C F, B F, æquales; Ac proinde exiſtente arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit C F, eiuſdem pars decima; atque adeò recta C F, latus erit decagoni. Rurſus quia latera C E, E F, trianguli C E F, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, ſuntq; anguli contenti recti;
d 4. primi. *d* erunt & baſes O F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia verò arcus C F, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ D C F, cùm ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus C F, qualium 4. eſt arcus D C, hoc eſt, arcus D C, quadruplus erit
e 33. ſex. arcus C F. *e* Quare & angulus D A C, quadruplus erit anguli
f 20. tertij. C A F: *f* Eſt autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cùm illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis D C. Igitur angulus C F D, atq; adeò illi æqualis oſtenſus C G F,
g 32. primi. duplus erit anguli C A F: *g* Atqui angulus C G F, externus, æqualis eſt internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cùm igitur G A C, ſit dimidium anguli C G F, vt oſtenſum eſt, erit G C A, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoque æquales erunt
h 6. primi. anguli G A C, G C A; *h* ac proinde & latera A G, C G, æqualia. Eſt autem C G, recta oſtenſa æqualis rectæ C F. Igitur & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F G, ſimul: Ac proinde tres ſimul A E, E F, F C, hoc eſt, duæ ſimul A F, F C, duplæ erunt ipſius A E, atq; idcirco è contrario erit A E, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pen-



a pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta æc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam A E, uæ ex centro perpendicularis eſt ad B C, diuidere arcum B C, bifariam in F.

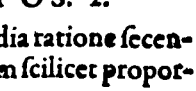
COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni uctam æqualem eſſe vtrique lineæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus rianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, erpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, dimidio lateris decagoni ſimul: Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad itus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. IV. ij.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

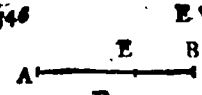
SECENTVR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, ſſe vt A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item vt A E, ad B, ita C F, ad F D, &c. Cùm enim ſit, vt A B, ad A E, ita A E, ad B; & vt C D, ad C F, ita C F, ad F D; a erit



a 17. ſ. ſtt.

ctangulum ſub A B, E B, æquale quadra- o rectæ A E; & rectangulum ſub C D, F D, quale quadrato rectæ C F. Quam ob rem it vt rectangulum ſub A B, E B, ad quaratum rectæ A E, ita rectangulum ſub C D, F D, ad quadratum ctæ C F (eſt enim vtrobiq; æqualitatis proportio) Ac propterea, er ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quaruplum rectanguli ſub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita uadruplum rectanguli ſub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: componendo, vt quadruplum rectanguli ſub A B, E B, & quaratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum retanguli ſub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum retæ C F: b Sed quod quater continetur ſub A B, E B, vnà cum quarato rectæ A E, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex A B, E B; t quod quater continetur ſub C D, F D, vnà cum quadrato rectæ F, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex C D, F D. Igitur erit uoque vt quadratum lineæ compoſitæ ex A B, E B, ad quadra-

b 8. ſ. ſeq.



tum rectæ A E, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ C F, *a* Ac proinde, vt recta composita A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et componendo vt composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, vt dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F; *b* Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo vt A B, ad C D, ita A E, ad C F, Ac propterea, cùm sit vt tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F, ablatam; *c* erit quoq; reliqua E B, ad reliquam F D, vt tota ad totam. Quare vt A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cùm vtraq; proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit vt A E, ad E B, sic C F, ad F D, & sic deniq; iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. sec.

b 15. quinti.

c 19. quinti.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

QVONIAM enim d latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; e & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni: f fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti recta angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoq; latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.

d 9. tertiidec.

e 8 tertiidec.

f 2. quartodecimi.

EX hac quoq; propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquila-

quilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extremo ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circulo ductæ; minus verò segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namq; recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius 6. arcus BC, nempe quintæ pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F, a Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni, minus vero segmentum FC, latus decagoni. Quare & in hac propos. ostensum est, erit & tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum; & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: b Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri, & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cùm ergo per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse dictæ perpendiculari, minus verò ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.

a 9. huius.

b 2. quarti decimi.

THEOR. 3. PROOPS. 3.

ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatq; recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A; per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa CG,

latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, a 47. primi. plà est rectæ FG: erit ex scholio propos. 4. lib. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: a Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur quadrata rectarum AC, CG, quadruplum quadrati rectæ FG; Atque adeò tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati b 10. ter iusdem rectæ FG: b Cùm ergo quadratis rectarum FG, CG, tij dec. nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur quadrati. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. c Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG, &c.

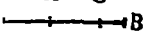
c 3. quarti decimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

e. iij.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi AB; d erit tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum BA: Semi-



d 9. tertij dec.

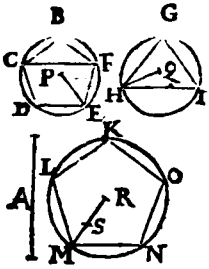
us autem & A B, secta in C, similiter. a Igitur erit vt B D, tota ad a a.
maius sui segmentum A B, ita A B, tota ad maius sui segmentum *quarti-*
C: Sed est quoque vt B D, tota ad maius sui segmentum A B, *decimi.*
a A B, maius segmentum ad A D, segmentum minus, per defini-
onem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt A B,
d A C, ita eadem A B, ad A D; Ac propterea A C, A D, æquales e-
int. Cùm ergo A D, ponatur latus decagoni illius circuli, cu-
is latus hexagoni est A B; erit & A C, eiusdem circuli latus deca-
oni.

ALITER. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D, æqua-
i maiori segmento A C; b eritque tota recta B D, diuisa in A, b 5. ter-
trema ac media ratione. Cùm igitur A B, maius segmentum i- tijdeo.
us, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ de-
onstrauimus ad propos. 9. lib. 13. A D, minus segmentum eius-
m circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D,
us erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius A B, latus
xagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c.
Quod erat ostendendum.

THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pen-
gonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ in-
ipterorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Do-
aedrum, cuius vnum pentagonum B C D E F, & Icosaedrum,
us vnum triangulum G H I. Dico eundem circulum circum-
bere & pentagonum B C D E F, & B G
ngulum G H I, hoc est, circulos B C-
E F, G H I, ipsa circumscribentes es-
quales. Circumscribat enim circulus
M N O, pentagonum K L M N O,
quo Icosaedrum sphæræ inscribi-
, ita vt quinque latera huius penta-
i sint latera Icosaedri, ideoq; quod-
t ipsorum æquale, cuiuis lateri trian-
G H I. Deinde ex centris P, Q, R,
antur rectæ P E, Q H, R M; Secetur-
R M, extrema ac media ratione in S; d eritq; maius segmen- d 4.
R S, latus Decagoni in circulo K L M N O, in quo R M, est *quarti-*
s hexagoni. Subtendat quoque recta C F, angulum B, penta- *decimi.*
i Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus
in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eius-
propos. B F, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris



cubi CF, ſecti extrema ac media ratione
a 2. *quartidecimi.* a erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; Ac propterea vt quadratum
b 22. *ſexti.* rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratū rectæ RS; Atq; adeò per ea, quæ demõſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. quàm quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æ-
c 10. *ſer tuidec.* quale erit quintuplo quadrati rectæ RS: c Quia verò quadrati rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinq; quadratis rectæ RM, & quinq; quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cùm hæc oſtenſa ſint æqualia quinq; quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinq; quadratis rectæ RS. Sed
d 5. *quartidecimi.* quoniam, d (cùm quadrata rectarum CF, BF, quinq; quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cùm MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi
e 12. *ſer tuidec.* GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; e ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoq; quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco ſemidiameter BE, ſemidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrandum.

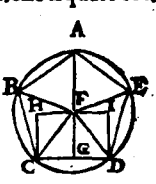
iij. vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendicula-

ri com-

ri comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri A B C D E, ducatur ad latus C D, perpendicularis F G. Dico rectangulum sub F G, & C D, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cùm bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta H I, parallela ipsi C D, occurrens duabus perpendicularibus C H, D I, ductis ex C, D, ad C D, in punctis H, & I. Eritq; rectangulum C I, contentum sub H C, hoc est, sub F G, & C D. a Quoniam verò rectangulum C I, duplum est trianguli F C D, atque adeò cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi F C D, æqualium; erit rectangulum C I, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cùm quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeò sextuplum rectanguli C I, quinquies sumpti, nimirum rectangulum C I, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



a 41. primi.

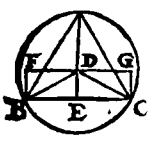
ALITER. Facta eadem figuræ constructione, b cùm rectangulum C I, duplum sit trianguli F C D, hoc est, æquale triangulo F C D, bis sumpto; Erit rectangulum C I, trigesies sumptum æquale triangulo F C D, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cùm enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum F C D, sumptum sexagesies æquale erit superficiei Dodecaedri.

b 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri A B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum ſub D E, & B C, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoq; per D, recta F G, parallela ipſi B C, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus B F, C G, ex B, C, ductis ad B C; eritq; rectangulum B G, contentum ſub F B, hoc eſt, ſub D E, & B C.



[a] Quoniam verò rectangulum B G, duplum eſt trianguli B D C; atq; adeò cuiuslibet reliquorũ duorum triangulorum ipſi D B C, æqualium: Erit rectangulum B G, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cùm tria talia triangula æqualia ſint vni triangulo Icoſaedri; Atq; adeò idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli B G, ter ſumpti, æquale erit viginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 41. primi.

[b] ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, [b] cùm rectangulum B G, duplum ſit trianguli D B C, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum B G, trigeſies ſumptum, æquale triangulo D B C, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quòd tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, trigeſies ſumptum æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

[b] 41. primi.

COROLLARIVM.

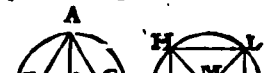
ITAQVE ſuperficies, (repetita figura proximè antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. [c] Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto; [d] Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoque ſumpto: Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri. [e] Quare erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt rectangulum illud, trigeſima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

[c] 6. quartidecimi.
[d] 7. quartidecimi.
[e] 15. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, sive quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptũ sexies, superficies Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficies Octaedri, & cubi aquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, aquale esse superficies Tetraedri.



a Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aquilatera ipsi A B C, aqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aquale. a 41 pr.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptum, aquale esse superficiei Octaedri.

b Cum enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum aquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptum aquale est superficiei Octaedri. b 41. primi.

SIT tertio quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula aqualia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, aquale esse superficiei cubi. c *Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, aquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptũ aquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totã superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum aquale superficiei cubi. Quod est propositum.* c 41. primi.

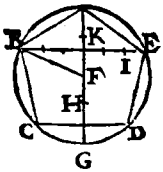
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum IL KL; (sunt enim IP, PH, aequalia, cum rectae OI, sit dimidium rectae HI, nempe aequalis ipsi MN) constituent duodecim talia rectangula sex quadratis eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

ex viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum vero A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sint quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F; quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cum sit semidiameter, erit A H, ipsius A F, sesquialtera. Quia vero recta F A, diuidens arcum B A E, bifariam, diuidit quoque rectam B E, bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam K B, quam K E, tres sextas rectæ B E; atque adeo cum B I, contineat quinque, continebit K I, duas: Ac proinde & K B, ipsius K I, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt A H, ad A F, ita K B, ad K I; a atque idcirco rectangulum sub extremis A H, K I, æquale erit rectangulo sub mediis A F, K B. b Est autem rectangulum sub A F, K B, duplum trianguli A B F, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin A F, & eandem altitudinem B K, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta, Igitur & rectangulum sub A H, K I, duplum erit eiusdem trianguli A B F: c Est autem & rectangulum sub A H, K I, duplum rectanguli sub A H, I E; proptere a quod & basis k I, dupla est basis I E, (continet enim k I, duas sextas partes ipsius B E, & I E, vnam) eademque semper altitudo A H. Igitur æqualia sunt triangulum A B F, & rectangulum sub A H, I E; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At rectangulum A B C D E, quintuplum est trianguli A B F, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. d Rectangulum vero sub A H, I I, quintuplum est rectanguli sub A H, I E; quod basis B I, quintupla sit basis I E, eademque semper altitudo A H.



a 16. sexti.
b 41. primi.
c 1. sex.
d 1 sem.

igitur

gitur pentagonum A B C D E, & rectangulum sub A H, B I, æqua-
ia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat
lemonstrandum.

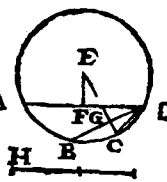
COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum A B C D E, statuatur basis Dode-
aedri in aliqua sphæra descripti, B E, est latus cubi in eadem sphæra de-
cripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri
n eadem sphæra constituti, (a comprehensi videlicet eodem circulo, a 5.
uo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum A G, in H, (cum ex *quartidecimi.*
oroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum F G, bifariam, quemadmo-
lum & punctum H, eandem semidiametrum F G, bifariam diuidit.) Ma-
ifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo
rianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub A H, & sub quin-
ue sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscri-
ti, nimirum sub B I, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæ-
a constituti.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IV. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Ico-
aedri in eadem sphæra descripti, eandem proportio-
iem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo A B C D, *b* circumscribente & pentagonum Dode- b 5.
aedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni B D, & trian- *quartidecimi.*
guli A D; & ex centro E, ducatur ad A D, B D, perpendiculares E F,
G; Sit deniq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, &
cosaedro descripti. Dico esse, vt H, latus cubi, ad A D, latus Ico-
aedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri Quo-
niam enim lateris cubi H, secti extrema ac
media ratione, maius segmentum est B D,
atus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib.
3. Rectæ autem E G, sectæ quoque extrema
c media ratione maius segmentum est E F,
x scholio propos. 2. huius lib. *c* Erit vt H,
ota ad B D, maius sui segmentum, ita E G,
ota ad E F, maius sui segmentum; *d* Ac pro-
de rectangulum sub extremis H, E F; æquale erit rectangulo d 16.
b mediis B D, E G. *e* Quia vero est, vt H, ad A D, ita rectangu- *sexti.*
m sub H, E F, ad rectangulum sub A D, E F, cum bases sint H, e 1. *sexti.*
D, altitudo vero semper eadem E F; Erit quoque vt H, ad
D, ita rectangulum sub B D, E G, (quod est æquale rectan-
ulo sub H, E F,) ad idem rectangulum sub A D, E F. Quare
m ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub B D, E G,
d rectangulum sub A D, E F, ita superficies Dodecaedri ad super-
ciem Icosaedri; Erit quoq; vt H, latus cubi, ad A D, latus Icosae-
ita superficies Dodecaedri ad superficiē Icosaedri. Superficies

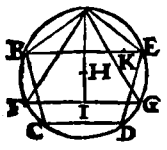


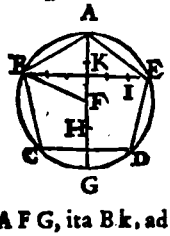
c 2. *quartidecimi.*

itaque

itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. *quarti decimi.* ALITER. *a* Circumſcribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icoſaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint B k. Dico rurſus eſſe, vt B E, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub A I, B k, æquale eſt pentagono A B C D E, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale eſt triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B k, ad I F, cum baſes ſint B k, I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque vt pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B k, ad I F; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta B k, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æque multiplicentur per numerum 20. *c* erit quoque vt pentagonum A B C D E, duodecies ſumptum, hoc eſt ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta B k, duodecies ſumpta ad rectam I F, vigeſies ſumptam: Atqui recta B k, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B k, contineat quinque ſextas partes ipſius B E, continebit eadem B k, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E.) Recta vero I F, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri F G, decies ſumpto; (eo quod F G, eſt ipſius I F, dupla,) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi B E, decies ſumptum ad latus Icoſaedri F G, decies ſumptum; Ac propterea, *d* eum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.





b 1. *ſex.*

c *ſchol.* 2 2. *quinti.*

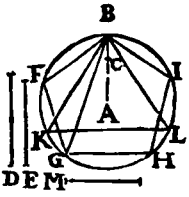
d 15. *quinti.*

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10. IV. IX.

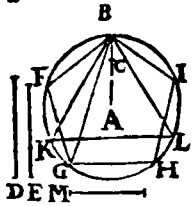
SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum Bkl. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam vero AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, *a* est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni; *b* poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. *c* Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri Bk, triplum est quadrati semidiametri AB: *d* Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ Bk, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ Bk, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. eo quod BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; *e* Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF; *f* Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF, ita



a 4. *quartidecimi.*
b 10. *tertiid.*
c 12. *tertiidec.*
d 4. *tertiidec.*
e 2. *quartidecimi.*
f 22. *sexti.*

B F, ita quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B K, ita
a 22. sexti. quadratum rectæ B F, ad quadratum rectæ M; a Ac propterea vt recta B G, ad rectam B K, ita recta B F, potens totam A B, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & minus segmentum B C, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

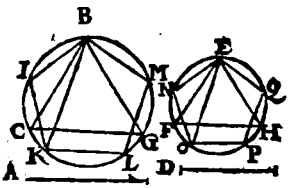


SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eandem sphæra eandem habeant proportionem, quam recta B G, B K, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & B C, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & E F, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad B C, ita D, ad E F. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum B C G, E F H, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona æquilatera B I K L M, E N O P Q, connectanturque rectæ B K, C K, E O, F O.



b 5. quartidecimi. b *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & quoniam B C G, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descriptum quæ cubus lateris A: Erit B I K L M, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta B K, latus erit cubi eandem sphæram, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit rectæ E O, lateri cubi D. Rursus quia arcus B I K, E N O, similes sunt, (Nam vterq; continet duas quintas partes sua circumferentiæ,) simul arcus B G C, E H F; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli B C K, E F O, a centro*

bitione sequentium similesmo, aequales inter se, quam anguli B
IOF, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum fi
ua existant: Proinde, ex coroll. 1. propos 32. lib. 1. reliquus
EBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO,
i erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, aequ
um. Quare erit vt BK, hoc est, recta A, illi aequalis, nempe lat
i, ad BC, latus Icosaedri, sta EO, hoc est, rectae D, illi aequalis
ilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod erat proposit

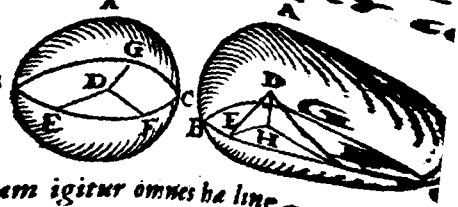
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione
atur, nimirum tandem habere proportionem D, & E, latera
cosaedri in vna sphara, quam habent BG, BK, latera cubi
iedri in alia sphara.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superfic
cosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi
tum Icosaedri in eadem sphara cum ipsis, vt vult propos. 9. huius
rdetiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quac
lia sphara.

LEMMA I.

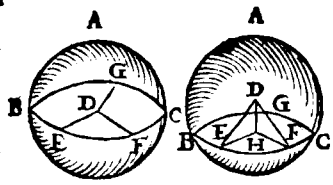
SI sphæra plano quopiam secetur, communis se
rculus erit.

SECETVR sphara ABC, cuius centrum D, plano
ci ente communem sectionem planum BEFGC. Dico
G, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per
ra sphara, ita vt centrum
sat in plano, seu communi
te one BEFCG; ducan-
que ex D, centro sphara
extremitatem communis
nis, linea recta, quot-
que DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ duct
cunque fuerint, aequales sunt, ex definitione sphara, cum e
centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli figur
BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum
idem cum centro sphara.



TRANSEAT secando planum secans non per centrum
ra: Ducatur autem ex D, centro sphara ad planum secan.
rpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE,
, ad extremitatem vsque communis sectionis, & com-
ctam

nectantur rectæ D E, D F. *Quoniam igitur anguli* D H E, D H F,
a 47. primi. *ex defin. 3. lib. 11. recti sunt*; a *erit tam quadratum rectæ* D H, *quadratis rectarum* D H, H E, *quam quadratum rectæ* D H, *quadratis rectarum* D H, H F, *æquale*: *Sunt autem quadrata rectarum* D E, D F, *æqualium ex centro sphæræ eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* D H, H E, *quadratis rectarum* D H, H F, *æqualia erunt*; *& proinde, dempto communi quadrato rectæ* D H, *reliquum quadratum rectæ* H E, *reliquo quadrato rectæ* H F, *æquale erit. Quare & rectæ* H E, H F, *æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex* H, *ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & illis duabus* H E, H F. *Figura igitur plana* B E F C G, *unica hac contenta, ex defin. circuli, circulus erit*; *eiusque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis* D H, *cadit. Quod & propositum.*



COROLLARIVM.

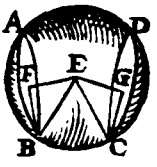
ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficiet circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN sphæra A B C D, *cuius centrum* E, *sint circuli æquales* A B, D C. *Dico ipsos æqualiter à centro* E, *distare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* E F, E G, *quæ per 12. lib. precedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* F B, G C, *ad circumferentias circulorum vtrasque, connectanturque rectæ* E B, E C. *Quoniam igitur anguli*
b 47. primi *E F B, E G C, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11.* b *erit tam quadratum*

um rectæ E B, *quadratis rectarum* E F, F B, *quam quadratum ectæ* E C, *quadratis rectarum* E G, G C, *æquale: Sunt autem uadrata rectarum* E B, E C, *æqualium, cum cadant ex centro hæra ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectaum* E F, F B, *quadratis rectarum* E G, G C, *qualia erunt. Et proinde demptis quadratis qualibus rectarum æqualium* F B, G C, *cum nt ſemidiametri circulorum æqualium, erit eliquum quadratum rectæ* E F, *reliquo quarato rectæ* E G, *æquale: Atque adeo æquales runt rectæ perpendiculares* E F, E G. *Quam ob rem circuli* A B,) C, *æqualiter diſtant à centro* E.

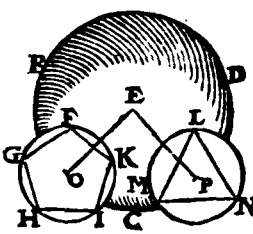


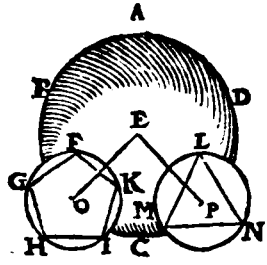
SED iam æqualiter diſtent circuli A B, D C, *à centro ſphæræ* E. *Dico ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, ſtendemus eodem modo, quadrata rectarum* E F, F B, *æqualia ſſe quadratis rectarum* E G, G C; *Ac proinde, demptis quaratis æqualibus rectarum æqualium* E F, E G, *cum circuli æqualiter ponantur diſtare à centro, reliquum quadratum rectæ* F B, *reliquo quadrato rectæ* G C, *æquale erit; atque adeo æquales erunt rectæ* F B, G C, *ſemidiametri ſcilicet circulorum* A B, D C. *Circuli igitur* A B, D C, *æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. II. PROPOS. II. IV. X.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem ſum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus coſaedri; in vna eademque ſphæra.

IN ſphæra A B C D, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum F G H I K: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra A B C D, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangũt; ſi per pentagonũ, & triangulum plana ducãtur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in ſphæra F G H I k,





a 6. *quartidecimi.* LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a Quæ verò idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idemmet circuli FGHIK, LMN; Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorũ centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ; resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cùm & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemq; modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. b Quoniam autem est, vt basis FGHIK, ad basin LMN ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cùm vtriusq; eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5 demonstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, totum videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est (sicut modò diximus) vt tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: c Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ; atque adeò ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunq; sphæræ. Quapropter Dodecaedrũ ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

b 6. *duodecimi.*

c 9. *quarti decimi*

d 9. *quartidecimi.*

e 10. *quartidecimus.*

COROLLARIVM.

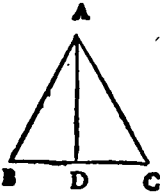
QVONIAM verò ostensum est quoque, d ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra. e Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemque sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quam-

mamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad neam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: Item ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi d latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est, has quatuor roportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri: & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri: & lineæ potentis totam quamcunque ectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem otam eandem, & minus segmentum illius: & Dodecaedri ad Icosaedrum iisdem sphæris, esse inter se æquales. a 11. quarti decimi.

THEOR. 12. PROPOS. 12. e. xj.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, sesquitertium esse quadrati perpendicularis A D. Quoniam enim ob æqualitatem laterum A B, A C, anguli B, & C, æquales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli A D B, æquales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autem & latus A D, commune, el A B, A C, æqualia. c Igitur & reliqua latera D, C D, æqualia sunt; ac propterea latus B C, oc est, latus A B, duplum rectæ B D; & idcirco quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex scholio propos. 4. lib. 2. d Cùm igitur quadrato rectæ A B, æqualia int quadrata rectarum A D, B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, quadrupla quadrati rectæ B D; Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ A B, vel quadrata rectarum A D, D, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ A D. Quare quadratum rectæ A B, partium 4. sesquitertium est quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.



b 5. primi.

c 26. primi.

d 47. primi.

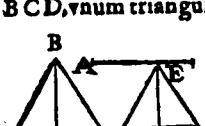
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est B D, & C D, rectas æquales esse, hoc est, latus B C, secari bifariam à perpendiculari A D. Quare cum latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia sint lateribus A C, A D, trianguli A C D: & basis B D, basi C D, æqualis: e Erunt & anguli B A D, C A D, æquales, id est, angulus B A C, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari A D. e 8. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

o. xiij. SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis A. Dico tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius sphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita C D, F G, perpendiculares B H, E I. *a* Quoniam igitur quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri B C, *b* & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, E F, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. *c* ideoque commensurabilia erunt: Quare lineæ ipsæ A, B C, E F, commensurabiles existent saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, E F, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt C H, F I.



a 13. *ter tiidec.*
b 14 *ter tiidec.*
c 6. *dec.*

RVRSVS, *d* quia tam quadratum rectæ B C, quadrati rectæ B H, quam quadratū rectæ E F, quadrati rectæ E I, sesquitertium est; habebunt tam quadrata rectarum B C, B H, quam quadrata rectarū E F, E I, proportionem inter se, quam numeri 4. 3. *e* ideoq; tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ B C, B H, quam lineæ E F, E I, commensurabiles existent. Est autem & tam C H, ipsi B C, quam F I, ipsi E F, dimidia videlicet toti, commensurabilis. *f* Igitur & tam B H, C H, quam E I, F I, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde cum C H, & F I, ostensæ sint Rationales, erunt quoque B H, E I, Rationales. *g* Quoniam vero tam C H, B H, quam F I, E I, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionē, quam 1. ad 3. *b* cum ostensum sit talium partiū 1. esse tam quadratū C H, quam quadratū F I, qualium 3. est tam quadratum B H, quam quadratum E I.) Erunt tam C H, B H, quam F I, E I, Rationales potentia tantum commensurabiles: *i* Ac proinde tam rectangulum sub C H, B H, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub F I, E I, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula B C D, E F G, æqualia rectangulis sub C H, B H, & sub F I, E I, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum C D, F G, duplæ sint basium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula B C D, E F G, Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri trian-

d 12. *quarti decimi.*
e 6. *dec.*
f 12. *decimi.*
g 9. *dec.*
h 12. *quarti decimi.*
i 22. *decimi.*

triangulo B C D, sit commensurabilis; (est enim triangulum B-
C D, totius superficiei quarta pars) Item tota superficies Octaedri
triangulo E F G, commensurabilis; (Est enim triangulum E F G,
totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos.
4. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur
sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetrae-
dri, quã Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

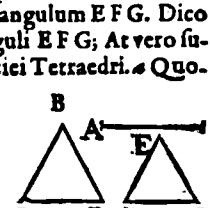
SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangu-
um æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam.
Iam ex eo, quod latera B C, E F, & ob id eorum dimidia C H, F I, Ratio-
alia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas C H, B H, quam F I, E I,
sse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectan-
ula sub C H, B H, & sub F I, E I, hoc est, triangula B C D, E F G, ipsis æ-
ualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquila-
ero, cuius vnum latus sit Rationale: perspicuum est, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ in-
scribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octae-
dri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei
Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit
triangulum B C D; Octaedri vero basis triangulum E F G. Dico
triangulum B C D, sesquitertium esse trianguli E F G; At vero su-
perficiem Octaedri esse sesquialterã superficiei Tetraedri. Quo-
niam enim quadratum diametri A, sesqui-
alterũ est quadrati lateris Tetraedri C D;
duplum vero quadrati lateris Octaedri
G; fit, vt qualium partium 6. fuerit qua-
tratum diametri A, talium 4. sit quadra-
um lateris C D; & talium 3. quadratum
ateris F G. Quare quadratum rectæ C D, sesquitertium est qua-
rati rectæ F G: Vt autem quadratum rectæ C D, ad quadratum
ctæ F G, ita est triangulum B C D, ad triangulum E F G. (c quia
um quadrata, quam triangula proportionem inter se habent la-
rum C D; F G, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangu-
um B C D, sesquitertium est trianguli E F G.

RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum B C D, sesqui-
ertium esse trianguli E F G; Ac propterea qualium partium 4.
erit triangulum B C D, talium 3. esse triangulum E F G; Efficie-
ur, vt triangulum E F G, octies sumptum, hoc est, tota superficies
Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum B C D, quater
umptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16.



a 13. tertiidec.

b 14. tertiidec.

c 20. & 19. sex.

Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad dictam baſin.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturq; ex angulo D, per E, centrum ſphæræ recta DEF, incidens in baſin ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC, & DF, perpendicularem eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & baſes AD, CD, æquales,

a 8. primi. cùm ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. a Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui

b 13. primi. AEF, CEF, æquales erunt, b eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, ſi conſiderentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia ſunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipſis contenti,

c 4 primi. oſtenſi æquales; c Erunt baſes FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, ſi conſiderentur triangula EBF, ECF. Quare cùm tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales;

d 9. tertij. d erit F, centrum baſis ABC, ſeu circuli eam circumſcribentis.

QVIA verò ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli ABC, demiſſa in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planum circuli, ſeu baſis Tetraedri ABC. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cùm F, quoq; ſit demonſtratum centrum eiuſdē circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis verò vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, AD, FDC, & in ſphæra deſcriptũ, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinũ, quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphæræ, ductæ videlicet è centro ad ſuperficiem ſphæræ: *a* quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; quadruplum quadrati ſemidiametri AG, ex ſchol. propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphæræ, talium partium 2 erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cùm ergo quadratum rectæ AG, quale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarũ AG, BG; *b* Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. *c* Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ; *d* atque adeò rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent plano; *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipſis. Quare quadrilaterum ACD, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarũ baſis communis ABCD, vertices verò E, & F; quæ pyramides æquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cùm quælibet conſtet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia ſunt & ſimilia, & baſi communi ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe æquales, & baſin ABCD, eſſe quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Quoniam enim oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; *f* Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, in mutuò ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, *g* ipſa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe

a 14. ſecundæ.

b 8. primi.

c 4. primi.

d 2. vndecimi.

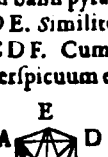
e 7. vndecimi

f 8. primi.

g 4. vndecimi.

ad basin pyramidum. Quare E G, altitudo est pyramidis A B C. D E. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis A. C D F. Cum ergo E G, F G, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Iam

a 14. ter tiidec.



sus quia A C, est diameter sphæræ; a erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterum A D, D C.

b 48. primi.

b Quare angulus A D C, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere Octaedri A B;

c 12. ter tiidec.

c constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

MVLTO brevius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2 propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Verumtamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

o. xvij.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

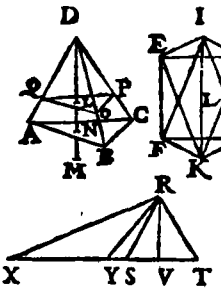
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

d 15. quinti.

SIT Tetraedrum A B C D, & octaedrum E F G H I k, in eadem; sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ D M, incidens in basin A B C, ad punctum N. d Et itigitur N, centrum basis A B C, & D N, perpendicularis

laris ad eandem baſin. Quia verò pars diametri L N, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit D L, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrũ L, planum O P Q, parallelum plano A B C; *a* Eruntq; rectæ Q O, O P, P Q, parallelæ rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulum Q O P, æquiangulum erit triangulo æquiatero A B C, *b* cùm anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſingulis: At A B C, eſt æquianguium ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. ideoque ſimile ipſi A B C: Sunt autem & triangula D Q O, D O P, D Q P, triangulis D A B, D B C, D A C, æquilateris ſimilia, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Igitur pyramides A B C D, Q O P D, ſimiles ſunt ex defin. 9. lib. 11. *c* Rurſus quia plana parallela A B C, Q O P, ſecant rectas D N, D C, proportionaliter; erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P: Erat autem D N, ad D L, vt 4. ad 3. (cùm oſtenſum ſit D N, eſſe talium partium 4. qualium 3. eſt D L.) Igitur & D C, ad D P, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, *d* cùm pyramides ſimiles habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis 4. ad 3. vt conſtat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri ſunt minimi in proportione 4. ad 3. vt conſtat ex propoſ. 2. lib. 8. Rurſus *e* quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ D C, ad quadratum rectæ D P, vt 64. ad 36. vt in iiſdem numeris conſtat.



a 16. 6. decimi.

b 10. 6. decimi.

c 17. 6. decimi.

d 8. duo decimi.

e 20. ſexti.

SIT iam triangulum æquilaterum R S T, æquale triangulo Q O P; demittaturque ex R, ad S T, perpendicularis R V. *f* Erit que latus R T, hoc eſt, D P, illi æquale, potentia ſeſquitertium perpendicularis R V. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ D P, talium 27. erit quadratum rectæ R V. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ D C. Igitur linea R V, eſt potens vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. quarti decimi.

RVRSVS extenſa T S, fiat T X, ad T S, vt 64. ad 27. ex coroll. propoſ. 6. lib. 10. diuidaturque T X, bifariam in Y, vt ſit T Y, talium partium 32. qualium 27. eſt T S, ſeu illi æqualis D P. Quoniam verò proportio D C, ad D P, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquiter-

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cùm enim AE, tripla ſit ipſius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

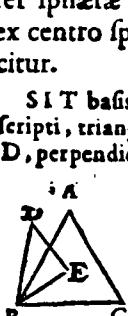
EX quibus rurſus ſit, rectam AD, rectæ DE, duplam eſſe.

o. xvij.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur: erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum E, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque ſemidiameter ſphæræ DB. Dico ſemidiametrum DB, potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum ABC, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; a quoniã quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. b Quia verò quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare c cùm quadratum rectæ DB, æquale ſit quadratis rectarum BE, DE; ſit autẽ quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 14. ter tisdoc.

b 12. ter tisdoc.

c 47. pri qui.

o. xviij.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum

tatum diametri ſphæræ D M, ita pyramis, ſeu tetraedrum A B D, ad octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

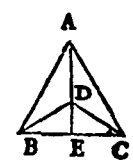
SCHOLIVM.

QVONIAM verò D C, talium partium 4. fuit, qualium 3. D P, intumebit D P, ſeu illi æqualis R T, tres quartas partes lateris tetraedri D C: Ac proinde, a cùm recta R T, ſit potentia ſeſquitertia rectæ R V; erit R V, potentia ſubſeſquitertia ipſius R T, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia T Y, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, ſeu D P; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit T Y, ſuperquintupartiens vigeſimaſeptimas partes ipſius S T, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K, vt rectangulum ſub R V, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub T Y, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimaſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus. a 11. quartæ decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18. o. xvij.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt illius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta A E, quæ perpendicularis erit ad B C, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico A E, triplam eſſe rectæ D E, quæ ſcilicet perpendicularis eſt è centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cùm latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia ſint lateribus D B, D C, trianguli B D C; (è centro enim ducuntur) ſit autem & baſis A B, baſi B C, æqualis: Erunt triangula A B D, B D C, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atq; eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare ob æqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, trianguli A B C, triplum eſt trianguli B D C. Quoniam verò rectangulum ſub A E, E B, triangulo A B C, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm baſis trianguli B D C, dupla ſit baſis B E, vtriuſq; rectanguli; Erit quoque rectangulum ſub A E, E B, triplum rectanguli ſub D E, E B: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub A E, E B, ad rectangulum ſub D E, E B, eiuſdem altitudinis E B, ita baſis A E, ad baſin D E. Igitur & A E, tripla eſt ipſius D E. Linea ergo perpẽdicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum.



b 1. ſexti

COROL.

COROLLARIVM.

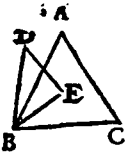
ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cùm enim A E ſit ipſius D E: qualium partium 3. ponetur A E, talium 1. erit D E: totius igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea A E, ſeſquitertia erit ipſius A D.

EX quibus rurſus fit, rectam A D, rectæ D E, duplam eſſe.

o. THEOR. 19. PROPOS. 19.

xvij. SI octaedrum ſphæræ inſcribatur: erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum B deſcripti, triangulum æquilaterum A B C, in quod è centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur D E; ducaturque ſemidiameter ſphæræ D B. Dico ſemidiametrum D B, potentia triplam eſſe perpendicularis D E. Cùm enim per coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis D E, in centrum circuli ſphæræ, quod eſt angulum A B C, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta B E; a quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ D B, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum ſemidiametri partium 12. erit quadratum lateris A B, 6. & quadratum rectæ ſilicet B E; Erit quadratum rectæ B E, talium partium qualium 6. fuit quadratum lateris A B. Quare c cùm quadratum rectæ D B, æquale ſit quadratis rectarum B E, D E; ſit autem quadratum rectæ D B, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis D E, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ D B, triplum eſt quadrati rectæ D E. Si igitur octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 14. tertiidec.

b 12. tertiidec.

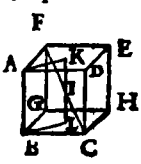
c 47. primi.

o. THEOR. 20. PROPOS. 20.

xviij. DVPLVM quadrati ex diametro cuiusliber ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus A B C D E F G H, in ſphæra deſcriptus, cuius cen-

centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. a Cùm enim quadratũ diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi. e



a 15. tertiidec.

PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cùm KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per schoium propos. 14. lib. 11. Rursus, b quia AB, KL, parallelæ sunt, quòd rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, c quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeò recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam verò perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cùm KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit Ik, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b 6. vndecimi.

c 16. vndecimi.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. d Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: e Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

d 15. tertiidec.

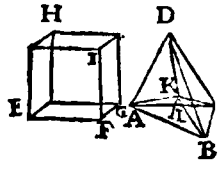
e 31. vndecimi.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro

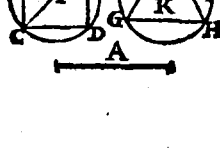
centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſin ductis tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſſe propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunq; A B C D, contentum planis A B C, A B D, A C D, B C D, ſolidum autem E F G H, contentum ſub E I, tertia parte ſuperficiei corporis A B C D, & ſub altitudine F G, quæ æqualis ſit perpendiculari K L, ductæ ex centro K, ad baſin A B C. Dico ſolidum E F G H, æquale eſſe dicto corpori regulari A B C D. Nam ductis à centro K, rectis K A, K B, K C, K D, &c. omnes angulos corporis, reſolutum corpus regulare in pyramides æquales, non æquales habeantes baſes & altitudines. Cùm enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſæ æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſitionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſarum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò priſma contentum ſub baſi A B C & altitudine K L, triplum eſt pyramidis A B C K, per coroll. 1. propoſ. 6. lib. 12. Atq; eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine K L, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine K L, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis A B C D. Quam ob rem cùm idem priſma triplum ſit priſmatis E F G H, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida E F G H, A B C D, æqualia. Quod eſt propoſitum.



THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum B C D E, & octaedrum, cuius vnum triangulum F G H. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum B C D E, & triangulum F G H, hoc eſt, circulos B C D E, F G H, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex centris I B, K F. *a* Quia igitur quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi B C, & quadratum lateris B C, triplum quadrati rectæ B I; (Nam ducta recta I C, fiet angulus B I C, rectus, cum ſubtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale eſt quadratis rectarum B I, I C. Quare cum re-



a 15. tertiædec.

b 47. primi.

ctarum

ſtarum æqualium B I, I C, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectæ B I) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C, & talium 1. quadratum rectæ B I. Rurſus a quia quadratum diametri A, duplum eſt quadrati lateris octaedri F G; b & quadratum lateris F G, triplum quadrati rectæ F K, ex centro duc-tæ; qualium partium 6 ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ F k. Cùm igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ B I; æqualia erunt quadrata rectarum B I, F k; Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti B C D E, F G H, æquales erũt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.

a 14. huius.

b 12. eiuſdem.

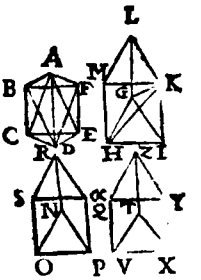
COROLLARIVM.

HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi, quàm octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circumſcribentium, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. c qui cùm ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt à centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cùm ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſchol. io propoſ. 14. lib. 11. propterea quòd parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quàm in octaedro. quod eſt propoſitum.

c 11. quartidecimi

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

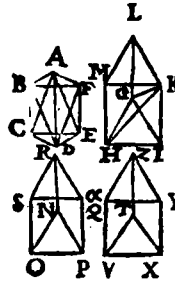


IN eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum A B C D E F, & tetraedrũ G H I k. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus B F, ad latus H I. Ducta enim in octaedro diametro A D, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus ommunis eſt ipſa diameter A D, & vertex ommunis A, nempe in B C D A, cuius baſis B C D; in B D F A; cuius baſis B D F; in C D E A, cuius baſis C D E; & in D E F A, uius baſis D E F; quæ quidem omnes baſes nfra quadratum B C E F, exiſtunt continentes cum ipſo dimidiam partem octaedri. Quoniam verò quælibet harum pyramidũ

dum conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtunt, a inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cùm contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper G H I, baſin tetraedri, priſma G H I K L M, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri N O P, & T V X, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata N O P Q R S, T V X Y Z α, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide A C D E, altitudinis. b Quoniam igitur G H I, hoc eſt, T V X, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius N O P, baſis octaedri: Erit quoque priſma T V X. Y Z α, priſmatis N O P Q R S, ſeſquitertiũ, cùm priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum A B C D E F, eiuſmodi priſmatis N O P Q R S, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati T V X Y Z α. Quis verò priſma T V X Y Z α, ad priſma G H I K L M, proportionẽ habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis T V X Y Z α, quod octaedro æquale eſt, eadem quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma G H I K L M, hoc eſt, ad triplum tetraedri G H I K, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quàm quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaq; octaedrum, atq; Tetraedrũ eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandum erat.

a 8. primi.

b 14. quarti decimi.



COROL-

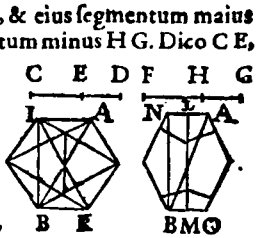
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. *a* Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram *a* 18. *ter tiidec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

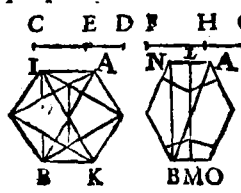
SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lateris Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta A *B*, rectam C D, & eius ſegmentum maius E; Item rectam F G, & eius ſegmentum minus H G. Dico C E, ſe latus Icoſaedri, & H G, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius A B, diameter exiſtit. Intelligatur enim in hæra, cuius diameter A B, deſcriptũ oſaedrum A I B K, & Dodecaedrum N *B* O. Latera deinde Icoſaedri oppoſita A I, B K, connectantur recta I B, iæ ſubtendet vnum angulum penta-



ni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, vt conſtat ex propoſ. *16. 13.* (Nam in ea figura, ducta recta Z F, erit R S H Z F, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia G R, G S, G H, G Z, F, cadentia in ſuperficiem ſphæræ, in quo recta R H, latera poſita R X, H I, coniungens angulum R S H, ſubtendit) clariſq; patebit ex conſtructione Icoſaedri, quam ad finem lib. 16. Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro ſolido. Quia verò A I, *B* K, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. *b* erunt anguli A I B, I B *K*, æquales duobus rectis, Ac proinde, cùm ſint inter ſe æquales (Ducta enim a diametro I *K*; cùm latera A I, I B, trianguli A I B, æqualia ſint ceteribus K B, B I; & baſes quoque A B, I K, æquales; *c* Erunt anguli A I B, I B *K*, æquales) recti erunt; *c* ideoq; quadratum rectæ oppoſitæ A B, æquale erit quadratis rectarum A I, I B; Erat autem *d* 47. rum quadratum rectæ A B, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum C D, C E: Igitur quadrata rectarum I B, I A, æqualia ſunt *b* 29. *primi.* *c* 8 *primi.* *d* 47. *primi.*

quadratis rectarum C D, C E; Ac propterea cùm C E, sit *minus* segmentum ipsius C D, diuisæ extrema ac media ratione in I A, maius segmentum ipsius I B, similiter diuisæ; (Nam libet tendit angulum pentagoni, cuius latus est I A, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, *a* maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit C E, maius segmentum ipsi I A, lateri Icosaedri. *b* Cùm enim sit vt C D, ad C E, ita I B, ad I A; et quoq; vt quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ C E, ita quadratum rectæ I B, ad quadratum rectæ I A, ostensa sunt autem quadratis rectarum C D, C E, æqualia quadrata rectarum I B, I A; *d* igitur & quadratum rectæ C E, æquale est quadratum rectæ I A; ideoq; rectæ C E, I A, æquales sunt. Quod est propositum.



a 8. tertiidec.
b 2. quartidecimi.
c 22. sexti.
d 14. quinti.

RVRSVS latera Dodecaedri opposita A N, B O, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta L M, & ipsa latera recta N B, coniungantur. Quoniam igitur N L, B M, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. *e* erunt quoque L M, N B, æquales & parallelæ: Est autem recta L M, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & N B, ad eadem perpendicularis erit, *f* Ac proinde quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B, N A. Quare cùm idem quadratum rectæ A B, æquale sit posito quadratis rectarum F G, H G; æqualia erunt quadrata rectarum N B, N A, quadratis rectarũ F G, H G. Ac propterea, cùm H G, sit minus segmentum ipsius F G, sectæ extrema ac media ratione: Item N A, minus segmentum ipsius N B, hoc est, ipsius L M, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit H G, minus segmentum ipsi N A, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauimus, C E, maius segmentum æquale esse ipsi I A, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea **proposita diameter existit.** Quod erat ostendendum.

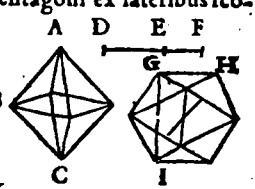
c 33. primi.
f 47. primi.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cùm enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; *a* erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; *b* Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. *c* Quia verò quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: *d* Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cùm sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. *f* Erit quoque vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



a 8. tertiidec.
b 5. tertiidec.
c 47. primi.
d 14. tertiidec.
e 2. quartidecimi.
f 22. sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulũ rectũ constituat; cui recta subtenda-

tendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta A B, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quæ æqualis sit minori segmento A C, angulum rectum A, cui recta subtendatur B D, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua A D, vel A C, latus est Dodecaedri. Cùm enim per coroll. 2. propos 17. lib. 13. maius segmentum B C, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum A C, vel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi: a Sunt autem & quadrata rectarum A B, A D, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti B C. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum A B, A D, hoc est, quadrato rectæ B D; Ac proinde recta B D, diameter est sphæræ. b Quare cùm diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta B D, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius B D; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4 tertiidec.

b 17. tertiidec.

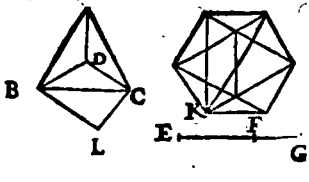
COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est A D, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum B C, sit maius segmentum, & A D, minus rectæ A B, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum B C) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum A D) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

c 18. tertiidec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ; latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



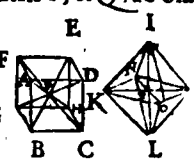
POSSIT Tetraedri A B C D, latus B C, maius segmentum E F, & minus F G, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico H I, rectam potentia esse

ſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti F G. Subtendat enim recta
H K, vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti,
onnectaturque recta I K, diameter. *a* Quia igitur H I, eſt ma- *a 8. ter-*
us ſegmentum rectæ H K, diuiſæ extrema ac media ratione; *tiidec.*
Erit quoque compoſita K H I, diuiſa eodem modo in H, ma- *b 5. ter-*
uſque ſegmentum H K, & minus H I. *c* Fiat ex rectis B C, E F, *tiidec.*
G, triangulum B C K, ita vt B L, recta ipſi E F, & C L, ipſi F G, ſit *c 22 pri*
equalis, *d* Etitq; angulus L, rectus, quòd recta B C, ponatur poſ- *mi.*
e rectas B L, C L, hoc eſt, rectas E F, F G: Eſt autem & angulus *d 48. pri*
H K, rectus, vt propoſ. 23. huius lib. oſtendimus; *e* Eſtq; vt B L, *mi.*
d L C, ita K H, ad H L *f* Igitur triangula B L C, K H I, æquian- *e 2.*
gula ſunt. *g* Ac propterea vt K I, ad I H, ita B C, ad C L; & per- *quarti-*
mutando, vt K I, ad B C, ita H I, ad C L. *h* Atqui I K, diameter eſt *dec.*
otentia ſeſquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & H I, latus *f 6. ſext.*
oſaedri erit potentia ſeſquialterum ipſius C L, hoc eſt, minoris *g 4. ſex.*
egmenti F H. Si latus itaque Tetraedri poſſit maius, & minus *h 13 ter*
egmentum, &c. Quod oſtendendum erat. *tiidec.*

THEOR. 27. PROPOS. 27.

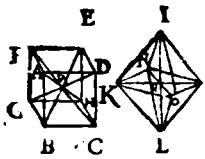
CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

SINT in eadem ſphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum I K L M N O, quorum centra P, & Q. Dico eam eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes



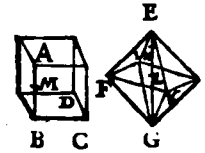
angulos tam cubi, quàm Octaedri, ductis lineis, reſoluetur cubus in ſex pyramides æquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines. (Cùm enim circuli deſcripti circa pyramidum, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac propterea æqualiter à centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, tandem ob cauſam. *i* Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum; æqualiter diſtabunt baſes pyramidum cubi, & octaedri à centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſin pyrami-

i 21. quartidecimi.



ramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtramus, ſextuplum pyramidis cubi, cuius cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſin pyramidis Octaedri; Ideoq; rurſus ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

SINT rurſus in eadem ſphæra cubus A B C D, & octaedrum E F G H I K, ſitq; diameter ſphæræ, ſeu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; item a ſemidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam verò quadratum I F K H, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, a quas Octaedrum ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. ſeſquialterum eſt quadrati B D, lateris cubi B C: Eſt autem & recta A B, rectæ B M, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur huius b 34. Vn decimi. I F K H, B D, & altitudines A B, B M: b Ac propterea parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo ſuper baſin B D, & ſub altitudine A B, eiusdem cubo A B C D. Rurſus quia recta E L, rectæ E N, tripla eſt: & parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine E L, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſin, & ſub altitudine E N, vt in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine E L, triplum eſt pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine L N, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quòd & altitudo L N, dupla ſit altitudinis E N. c Item Octaedrum E F G H I K, duplum eſt pyramidis I F K H E. Æquale igitur erit parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterùm quia parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine B M, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine L N, vt altitudo B M, ad altitudinem L N, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita eſt A B, ad E L (Cùm enim ſit vt A M, ad M B, ita E N, ad N L: & componendo, vt A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoq; permutando, vt



c 16. quartidecimi.

d E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine B M, æquale eſt oſtenſum cubo A B C D: Et parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine L N, æquale eſt octaedro E F G H I K. Igitur erit quoq; vt cubus A B C D, ad octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVIA demonſtratum eſt, a diametrum ſphæra, in qua omnia quinq; corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt ſi quadratum diametri ponatur 3 partium, eiuſdem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri per ſpicuum eſt. ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, & in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. oſtendimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio, maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3 partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæra ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum recta A C, continens duas tertias partes, a 13. ter-tiidec.

quadrati diametri A B: Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum A C, B C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.

RVRSVS b *cùm oſtenſum ſit, diametrum ſphæra potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium ſit quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum A D, B D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis ſecundum doctrinã ſcholij propoſ 33. lib 6 rectã A D, latum eſſe Octaedri.* b 14. tertiidec.

DEINDE, c *quoniam docuimus, diametrum ſphæra potentia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars ſit quadrati diametri A B; Vel ſi quadrato diametri A B, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum A C, B C, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus exiſtere. Vel certè cùm diameter A B, ſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2 propoſ. 15. lib. 13. manifeſtũ eſt. ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, relinqui quadratum lateris cubi B C; Quemadmo-* c 15. tertiidec.

dum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quamcunque rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; a *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat si quadrato diametri AB, quadrato beantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum; Rectum minorem BE, esse Icosaedri latus.*

a 23. quarti-decimi.

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totam eiusquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & maius illius b *segmentum; Maius segmentum latus est Dodecaedri cuiusdam sphæræ, cuius diameter prior linea: Sequet, si quadrato diametri AB, quadrato beantur, stituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum; Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.*

b 23. quarti-decimi.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ inscriptorum scripserunt. Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiecimus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

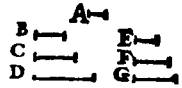
SI sint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales; nec non quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cùm enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; & habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplica-

c 10. sexti.

tam

tam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta



F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E: vt recta C, ad rectam F: *a* Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F. a 20. sexto.

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; *b* habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ E, ad cubum rectæ A, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: *c* Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.
b 33. Vndec.
c 33. Vndec.

SCHOLIVM.

HOC idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, deinque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatã proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-

portionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; a13.sex. Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. a Inueniatur ergo

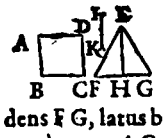
recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cùm enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. b17.sexti. b Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. c20.sexti. c Quoniam verò quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoq; duplicatam lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta dividens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpendicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; d cùm quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit d28.tertiadec. quadrati lateris cubi A B; e sit autem & duplum rectanguli sub e1.sext. latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangu-

ctangulum ſub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; *a* Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc eſt, tres rectæ F H, A B, E F, continuè erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continuè proportionales, ex conſtructione. Igitur cùm omnium antecedens ſit F H, *b* erit proportio rectæ E F, ad rectam E H, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ A B, ad rectam I K, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cùm & quadratum A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc eſt, ad triangulum E F G (eſt enim ex coroll. propoſ. 29. huius lib. quadratū rectæ I K, æquale triangulo E F G) *c* proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, vt latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 17. *ſexti.*

b 28. *quarti decimi.*

F H. A B. I K. E F. E H.

c 20. *ſexti.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis verò, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulum A B C, & altitudo, ſeu axis Tetraedri D E, latuſq; cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri A B, eſſe potentia ſeſquialterum axis D E: Axem verò D E, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* deſcripto circulo A B C; ad centrū D, in quod videlicet cadit axis D E, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur A D, ſemidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc eſt, lateris A B, *e* æquale eſt quadratis rectarum A D, D E, *f* & triplum quadrati ſemidiametri A D; Fit, vt poſito quadrato lateris A B, ſeu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

d 5. *quarti.*

e 47. *primi.*

f 12. *tertiidec.*

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, *g* potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris A B; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis D E. Igitur quadratum axis D E, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

g 18. *tertiidec.*

COROL.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris A B, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. [a] quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Eorundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis D E: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, [b] cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

a 13 *tertiidec.*

b 20. *sexti.*

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet [c] tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

c 12. *quartidecimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus A B C, & Tetraedrum D E F G. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super D E F, basim Tetraedri prisma D E F G H I, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [d] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi A B C, ad basim prismatis, seu Tetraedri D E F, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis D E F, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis D E F G H I, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis A B C; Erit basis prismatis A B C, ad basim prismatis D E F G H I, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata A B C, D E F G H I, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma D E F G H I, triplum est pyramidis, seu Tetraedri D E F G, ex coroll. 1 propos. 7. lib. 12. Cubus ergo A B C, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri D E F G. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.

d 30. *quartidecimi.*

COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto Ostensum enim est, cubum A B C, æqualem esse prismati D E F G H I, &c

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

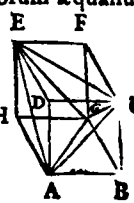
T SOLIDORVM QVINTVM, vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus,

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in requis tribus baſibus, quæ extrema priorum trium diametrorum nnectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium quales ſunt, quod potentia duplæ ſint latem æqualium quadratorum, vt in ſcholio opoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, perſpicuum t, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, CE, ex dictis diametris compoſita, æquilara eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pymidem, ſeu Tetraedrum conſtitui ex ipſis.



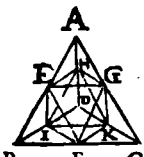
uia vero omnes anguli Tetraedri in angulis bi collocantur; manifeſtum eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptum, defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. uod faciendum erat.

PROBL.

ij. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro AbCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E,F,G,H,I,K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam verò latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quòd sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quòd sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: a æquales erunt bases EH, GH. Eadem q; ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoq; octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cùm omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 8. duo decimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM verò tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuò ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: b Eodemq; modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

b 8. duo decimi.

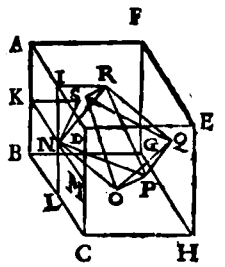
iij. PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NL, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadra-

COLLA-

torum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremò ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planũ conſiſtunt. Quoniam verò latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli kNS, quòd omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli conenti, æquales; propterea quod, cùm NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; angulus NIR, æqualis eſt recto angulo kAF, in quadrato AG, eademq; ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; *b* Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, relíquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ IK, Sk, ductæ ſunt ad k, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorũ centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt N ⊖ QRSP; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cùm omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 10. Undecimi.
b 4. primi.

ALITER. *c* In cubo dato inſcribatur pyramis; *d* In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod pronitur. Cùm enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera verò pyramidis demonſtrattone propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium bi, cùm ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos ctaedri tangere quoque baſes cubi; atq; adeò Octaedrum cubo inſcriptum.

c 11. quinti dec.
d 2. quintidec.

COROLLARIVM.

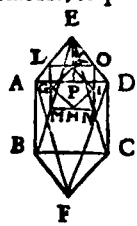
QVIA verò diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO (ſi ducantur) ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quæ

quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

IV. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.

DATVM Octaedrum sit A B C D E F, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis A B C D E, cuius basis A B C D, quadratum, triangula vero æquilatera A B E, E B C, C F D, D E A, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ L M, M N, N O, O L, parallelæ lateribus A B, B C, C D, D A.



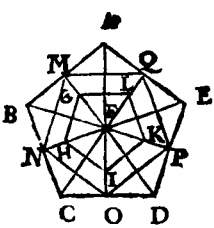
Erunt igitur & triangula L M E, E M N, N E O, O E L, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris A B E, E B C; C E D, D E A, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, præterea quod latera habent communia. Est enim E M, latus commune triangulis L M E, E M N; Et E N, commune triangulis E M N, N E O; & denique E O, commune triangulis N E O, O E L. Hinc enim fit, triangulum L M E, triangulo E M N; hoc vero ipsi N E O; & hoc ipsi O E L, æquale esse. Conueniunt etiam rectæ L M, M N, N O, O L, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ L M, M N, N O, O L, inter se
a 18. quarti decimi. æquales sunt. *a* Quia vero ducta recta E K P, tripla est rectæ K P,
b 2. sex. *b* Est autem vt E P, ad K P, ita E A, ad L A; Erit quoque E A, tripla rectæ L A. Eademque ratione E B, E C, E D, triplæ erunt rectarum M B, N C, O D. Quocirca rectæ L M, M N, N O, O L, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera eas proportione secantur, quadrilaterumq; constituent L M N O. Rursus quia L O, L M, parallelæ sunt rectis A D, A B, non in eodem cum ipsis existentibus plano;
c 10. Vndec. *c* æqualis erit angulus M L O, angulo B A D, et rectus est, cum A B C D, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & anguli M L O, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos L M N, M N O, N O L, rectos esse. Quoniam vero tres
d 15. Vndec. e 15. Vndecim. *d* planum per L O, L M, quam per N M, N O, ductum, *d* parallelum est plano A B C D, *e* ipsa, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca M N O, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, K k, trianguli E L K, æqualia sint

ribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipſis conti, æquales, quòd recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam ſecet angulum AED, r coroll. propoſ. 12. lib. 13. a Erunt & baſes KL, KO, æquales, a 4. primi. c eſt, recta LO, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione LM, N, NO, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ L, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cùm ſint laterum quati LN, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoque, cùm & anlos contineant æquales, nimirum rectos, b æquales erunt & b 4. primi. ctæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vehæ rectæ in plano exiſtunt quadrati LN, anguloſque comprendunt rectos; (c cùm enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus c 13. primi. t rectis æquales; Sint autem LKG, IkO, per corollarium 3. mi. poſ. 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GkI; Eademque ione recti erunt anguli kGH, GHI, HIk.) quadratum erit HIk, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi lem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra ngulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quata: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter ſe erit. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui idem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cùm o eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. ıare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum t.

PROBL. 5. PROPOS. 5. v. vj.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.

IT ex duodecim pyramidibus pennis, quæ in Icoſaedro continentur, rum videlicet baſes ſunt pentagona uinque Icoſaedri lateribus compovertices verò, duodecim anguli Icori, vna pyramis ABCDEF, cuius pentagonum ABCDE, triangula æquilatera AB F, BCF, CDF, F, EAF, ſint q; horum triangulorum



ra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, L G. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ deantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex ſcholio propoſ. 12. lib. ifariam ſecabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, ; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, , QA, æquales ſint, quæ cùm angulos comprehendant æles, nempe angulos pentagoni, d æquales quoque erunt re- d 4. primi. ctæ MN,

ctæ M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta M, N, O, P, Q, connectentes: *a* Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, æquales erunt, quod & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Dum enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B M, trianguli F B M, æqualia ſint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; *b* erunt baſes F M, F N, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam verò & rectæ F G, F H, F I, F K, F L, æquales ſemidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumſcribentium, æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; *c* Erunt & rectæ G H, H I, I K, K L, L G, æquales. *d* Rurſus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, quàm anguli B N M, M N O, O N C, æquales ſunt duobus rectis. *e* Sunt autem anguli A M Q, N M B, angulis B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum æquilaterum & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, exiſtens. Deniq; cùm rectæ F M, F N, F O, F P, F Q, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quòd & F G, F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales ſint; Vel certè quia F G, F H, F I, F K, F L, duplæ ſunt ipſarum G M, H N, I O, K P, L Q, ex coroll. propoſ. 33. lib. 14. *f* parallelæ erunt G H, H I, I K, K L, L G, ipſis M N, N O, O P, P Q, Q M; *g* Ac propterea anguli L G H, G H I, H I K, I K L, K L G, angulis æqualibus Q M N, M N O, N O P, O P Q, P Q M, ideoq; & inter ſe æquales erunt. *h* Quia verò plana per rectas G H, H I, & per H I, I K, ducta parallela ſunt plano pentagoni M N O P Q, per rectas M N, N O, O P, ducto conueniuntq; in recta H I, ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemq; modo oſtendemus plana per I K, K L, & per K L, L G, nec non per L G, G H, ducta idem planum conſtituere cum plano per G H, H I, I K, ducto. Quocirca G H I K L, pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cùm & latera habeant æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quòbrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin 31. lib 11. in Icoſaedro erit deſcriptu, cùm viginti anguli dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri con-

a 8. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.
d 13. primi.
e 4. primi.
f 33 ſext.
g 29 vndecimi.
h 15. vndecimi.

dri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum describimus. Quod erat faciendum.

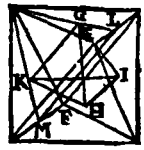
COROLLARIVM.

ITAQVE cùm omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basiũ, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentiũ, atq; adeò eorundẽ distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lem. 2. eiusdem propos. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atq; sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro A B C D E F. In pyramide octaedri superiori A B C D E, sumantur G, & H, centra triangulorũ ex aduerso sibi respondentium A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorũ ex aduerso quoq; sibi correspondentium C F D, A F B: quæ quidem centra coniungantur sex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, secantes latera opposita octaedri DE, B F, bifariam in L, & M, per scholiũ propos. 12. lib. 13. coniungaturq; recta L M, *a* quæ ipsi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cùm EL, BM; Item DL, F M, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ DE, B F, oppositorum in quadrato E F. Quoniã verò rectæ A L, A M, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quòd A G, A K, duplæ sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propos. 18. lib. 14. *b* Erunt G K, L M, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia. *c* Quare erit vt AL, ad LM, ita A G, ad G K; & permutando, vt A L, ad AG, ita LM, ad Gk. Est autẽ A L, ipsius A G, sesquialtera; *d* quòd G L, sit tertia pars ipsius A L, ideoq; A G, eiusdem A L, duæ tertiæ. Igitur & L M, hoc est, ipsi æqualis D F, sesquialtera erit ipsius G k. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, k, coniungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrum constitui: quod, cùm habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem describimus. Quod erat faciendum.



a 33. primi.

b 2 sext. 4 sex.

c 4. quinti

d 18. quarti decimi.

ALITER. *e* In octaedro dato inscribatur cubus, *f* & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri, & in angulis cubi

e 5. quarti decimi.

f 5. quinti decimi.

collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

COROLLARIVM L

QVIA verò oſtenſum eſt, vtramque G K, D F, parallelam eſſe ipſi L M. *a* ac propterea & G K, ipſi D F, atque adeò ipſi B E, parallelam eſſe: *b* Atque eadem ratione K H, ipſis F C, E A, parallelum eſſe: Atque id- circo, planum G K H, per G K, K H, ductum, parallelum eſſe plano D F C, per D F, F C, necnon & plano B E A, per B E, E A, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela', binis nimirum ſingula: Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

a 9. Vndecimi. *b* 11. Vndecimi.

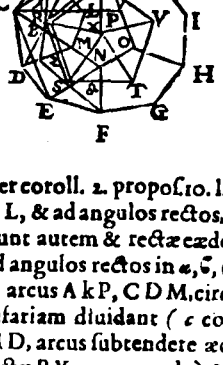
COROLLARIVM II.

PRAETEREA cùm octaedrum circumſcribat & cubum & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur: Atq; adeò recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per *coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel* per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

O. vij.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis A B L P K, P K L H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectæ ducantur K Y, D Y, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem Y k, Y D, rectas A P, C M, bifariam, & ad angulos rectos in α, ζ, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis, quod & arcus A k P, C D M, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant (*c* conſtat enim rectas A k, P k; Item C D, M D, arcus ſubtendere æquales.) *d* Igitur A α, C β, parallelæ ſunt rectæ B Y, *e* atque adeò & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æqua-

c 28. tertij. d 28. primi. e 9. Vndecimi.

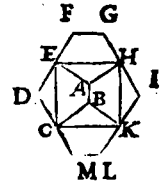
les,

s, nempe dimidia rectarum AP, CM, *a* quæ æquales sunt, cùm a 4. *pri*
tera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque con- *mi.*
neant æquales. *b* Rectæ ergo ipsas connectentes AC, αβ, æqua- b 33. *pri*
s erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, *mi.*
uos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur
Z, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales esse ipsas CE,
δ: *c* Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cùm contineant an- c 4. *pri-*
ulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera *mi.*
odecaedri AB, BC, quàm CD, DE, angulum pentagoni æquian-
uli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi au-
:m anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed
trorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur &
β, γδ, æquales erunt. Quapropter cùm & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ,
quales sint (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ
int æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum
qualiũ, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, *d* at- d 14. *ter*
ue adeò æquales. Item Qα, Rζ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarũ æ- *tij.*
ualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æ-
ualium, *e* ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, e 14. *ter*
δ, æquales erunt) *f* Erunt quoq; anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac *tij.*
ropterea, cùm & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; *g* æquales f 8. *pri-*
uoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Ea- *mi.*
em prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra g 4. *pri-*
entagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, *mi.*
XV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N,
), P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili mo-
o sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia tri-
ngula construantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angu-
s solidos) quæ quidem latera habent communia, descriptum
it Icosaedrum intra Dodecaedrum, cùm duodecim anguli soli-
i Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri.
i dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod fa-
iendum erat.

o.
viij.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum describere.



PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus AB-DE, EFGHA, AHIkB, BkLMC, conterminantia ad latus AB; duo quidem ABCDE, BkIH, secundũ latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLk, secundum angulos EAH, CBk. In his verò pentagonis subtendantur anguli A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK

quadrilaterum efficientes E H k C, quod æquilaterum erit. Cùm enim omnia latera A E, A H, D E, D C, B C, B k, I H, I k, æqualia
a 4. primi. sint, anguloſq; contineant æquales, ex hypotheſi; a æquales erũt
b 28. tertij. baſes E H, H k, k C, C E. b Quoniam igitur rectæ A E, B C, æquales, auferunt ex circulo pentagonum A B C D E, circumſcribente
c 9. Undecimi. arcus æquales; Erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectæ A B, C E, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt A B, H K. c Quare & E C, H k, inter ſe parallelæ erunt; d Ac propterea rectæ E H, C K,
d 33 primi. quæ ipſas connectunt, parallelæ erunt, e in eodemq; cum ipſis plano; ideoq; parallelogrammum erit E H k C; quod oſtendimus eſſe æqui-
e 7. Undecimi. laterum. Quia verò planum E C k H, producta communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. propoſitionis 10. lib. 14. circa
f 22. tertii. quadrilaterum E k, deſcriptum; f Erunt tam anguli oppoſiti E, k, quàm C, H, duobus rectis
g 14. primi. æquales; g Ac propterea cùm oppoſiti E, & K, ſint æquales, necnõ & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare E k, quadratum erit; collocans ſuos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorũ Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis ſimiliter octo angulis octo aliæ rectæ ſubtendantur eodem ordine; conſtitutum
h 4. primi. erit ſolidum ſex quadratis contentum; quæ cùm ſint æqualia, h eo quòd eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehenſos ſubtendentia æqualia ſunt, cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quòd duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiuſque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ ſubtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, G E, ipſi A B, eſſe parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 1. propoſ. 17. lib 13. nimirum A B, C D, E F, G H, I K, L M, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur N O, P Q, R S, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuò in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos

diui-

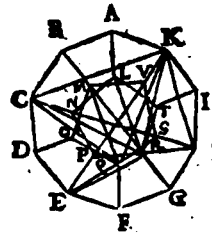
diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 11. æque adeò æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. *a* Quocirca duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales ſunt NP, PO, OQ, QN, NK, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cùm dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, conſtituentque octaedrum intra Dodecaedrum deſcriptũ, cùm ſex anguli octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex conſtructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 14. pri. mi.

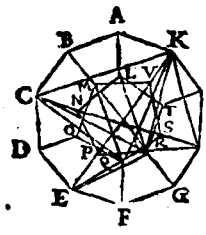
PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato dodecaedro pyramidem deſcribere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſiue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum ſolidum L componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorũ quidem C opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At verò K, lateri LV, communi pentagonis KLT, LTP; Deniq; R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipſi L, oppoſitum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt ſit pyramis conſtructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; *b* quoniam dodecaedrum in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli CHK extendatur, fiet communis eius ſectio cum ſphæra circulus per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. *c* Ac propterea angulus CKH, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. Nõ ſecus oſtendemus, rectos eſſe angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. *d* Quocirca cùm in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Aequalia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH,



b 17. 11. *c* 31. 11. *d* 47. primi.



& quadratis rectarum k R, R E, & quadratis rectarum k Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarū æqualium k H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H; (Hæ enim rectæ cùm subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, *a* æquales sunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum C k, C R, R k, k Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C k R, C k Q, k R Q, R C Q, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt C k R Q: quod cùm habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. primi.

b 8. quintidecimi. *c* 1. quintidec.

ALITER. *b* In proposito Dodecaedro cubus describatur; *c* & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque, in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

d 5. quintidecimi. *e* 8. quintidecimi.

d DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrum; *e* & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli verò Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

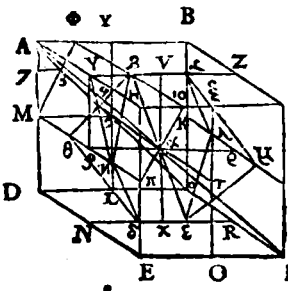
f 11. quintidecimi. *g* 1. quintidec. *h* 11. quintidecimi. *i* 1. quintidec.

IN dato Icosaedro *f* cubus describatur, *g* & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. *h* Cùm enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri: Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

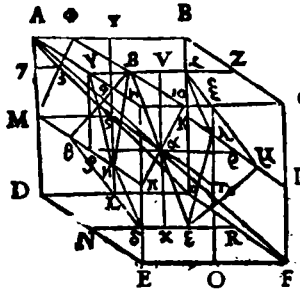


Ducatur in figura recta HaC.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in *l*, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis lL, YZ, ξΘ, Mϖ, kP, NR, nusquam inter se coeũtibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed vna dũtaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ se mutuò in centro α, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mπ, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt sint maiora segmenta, Yβ, Zγ, Mθ, πκ, ductis rectis Yρ, Yκ, βθ, βκ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρκ, 6V, segmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: *a* Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yϱ, ρκ, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, *b* cum quadratis rectarum Yϱ, ϱκ, æquale sit quadratum rectæ Yκ, *c* quòd angulus Yρκ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Y6. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yϱ, *d* recta est ad planum AE, per rectas AY, Yϱ, ductum, rectus erit angulus βYκ, ex defin. 3. lib. 11. *e* Ac propterea quadratum rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ (β(quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cùm quadratum rectæ Yκ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ) Ideoque *f* cùm quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βκ, rectæ (β. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & θκ, dupla ipsius κ, quòd minora segmenta θϱ, κϱ, rectarum æqualium Mρ, πϱ, æqualia sint. *g* Erit igitur vt Yβ, ad ϱκ, ita 6κ, dupla ipsius Y6, ad κ, duplam ipsius ρκ: Est autem Y6, maius segmentum ad ϱκ, rectam minori segmento βV, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde θκ, erit maius segmentum rectæ βκ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θκ, maius esse segmentum

a 4. *tertiidec.*
b 47. *primi.*
c 29. *primi.*
d 4. *undecimi.*
e 47. *primi.*
f 20. *sexti.*
g 15. *quinti.*

rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Y θ. Quare æquales erunt $\beta\theta$, $\beta\varkappa$, constituentes triangulum Isosceles $\beta\theta\varkappa$, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus: Ac proinde $\theta\varkappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\varkappa$, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.



INTELLIGATVR iam planum trianguli $\beta\theta\varkappa$, extendi (ducta per β, hecta $\beta\phi$, ipsi Mπ, parallela) per parallelas Mπ, ϕ10. vt sit planũ extensum $\phi\pi$, occurrens diametro A C, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi verò diametro A F, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aϕ, parallela, connectaturq; M S, σ quæ parallela est vtrique Aϕ, 73. Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo A M S;

a33. *primi.*

b4. *sex.* b ac proinde vt A M, ad M S, ita est A 7. ad 73. Sunt autem A M, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt M A, ad A ϕ, ita M 7. ad 73. Est autẽ A ϕ, ma-

c 34. *primi* ius segmentũ rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione (c quòd æquales sint A ϕ, Y C, necnon & MA, Y V, dimidia cubi latera) igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentũ erit rectæ M 7. extrema ac me-

d 5. *tertiidec.* dia ratione sectæ; d Ac propterea tota M A, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusq; segmentũ erit M 7. e Atqui vt M 7. ad

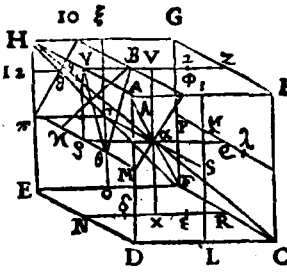
e 2 *sex.* 7 A, ita est S 3. ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratio-

f33. *primi.* ne in 3. maiusq; segmentum est S 3. f Quia verò S$\varkappa$ T, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi M S; si

g 17. *Vndecimi.* per S$\varkappa$T, planũ ducatur parallelum plano $\phi\pi$, ducto per Mπ, g secabuntur rectæ AS, A$\varkappa$, in eadẽ rationes, in punctis 3 & 4. cùm planum $\phi\pi$, rectas AS, A$\varkappa$, secet in 3. & 4. at planum per S$\varkappa$T, ductum plano $\phi\pi$, parallelum eadem secet in S, & $\varkappa$ Atq; idcirco, cùm A S, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo A$\varkappa$, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit $\varkappa$4.

IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro H F, quadrati E F G H, & diametro cubi H C, semidiametrum cubi secari in ρ. puncto extrema ac media ratione à plano $\phi\pi$, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, itavt quadratum A C, locum quadrati H F; & quadratum H F, locum quadrati A C, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, siue hac inuersione

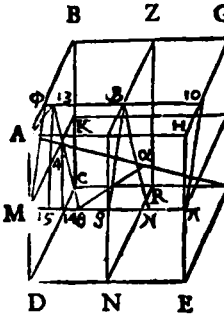
probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura; (Hæc deest in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum φπ, secet in 9. prope punctum H; intelligaturq; per rectã AH, planum plano φπ, parallelũ. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H; & 4, 9; (Nam planum φπ, eas secat in 4. & 9. planum verò per AH, ductum plano φπ, parallelum eadem secat in A, & H) α erit vt α4, ad 4A, ita α9, ad 9H. Cùm ergo αA, secta sit in 4. extrema & media ratione, erit quoque αH, similiter secta, quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur θ4, β4, β9. κ9, rectilineum β4, θκ9. in plano φπ, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.



a 15. decimi.

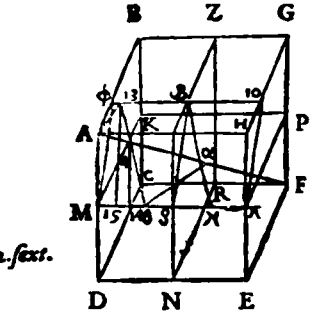
INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βθκ, siue planum φπ, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano φπ, recta coniuncta θ4. extendatur vsque ad rectam φ10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta kP, & iunctis rectis MK, πP, b planum MP, parallelum est plano AG, (quòd & rectæ Pk, kM, parallelæ sint rectis GB, BA) c secatq; cubum bifariam; ideoque per centrũ α, transit, per ea quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt; si per rectas α4A, θ413. planum extendatur, d fient αθ, A13. communes sectiones planorum MP, AG, parallelæ; Ac proinde triangula αθ4. 1α34. æquiangula erunt; e Eritque vt α4 ad 4A, ita θ4. ad 413. Quare cùm αA, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostendimus; eodẽ modo erit secta θ13. in 4.

b 15. decimi.
c 32. decimi.
d 16. decimi.
e 4. sext.



Rursus plano NZ, per centrum α, transeunti, parallelum ducatur planum per punctum 4. ex schol. propos. 15. lib. 11. secans φπ, recta 414. f Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. g Rectæ igitur αA, ϱM, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ϱM, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusq;

f 15. decimi.
g 17. decimi.



minuſq; erit ſegmentum 14M, ideoque æquale minori ϱθ, ipſius Mρ. Quare cùm ex ϱ14. maiori ſegmento ipſius ϱM, auferatur ϱθ, minus ſegmentum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. ρ14. diuiſa in θ, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit ϱθ. Poſtremò acta per 13. recta 13.15. rectæ 4.14. parallela, a ſecabuntur rectæ θ13. θ15. proportionaliter; Ac proinde & 915. ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentũ erit 914. b Quapropter erit vt ρθ, maius ſegmentum ad 914. minus, ita θ14. maius ad 14.15. minus: Vt autem 914. ad 14.15. ita eſt tota 915. ad θ14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ρθ, ad θ14. ita 915. ad eandem 914. Ac propterea rectæ ϱθ, vel ρκ, & 915. æquales erunt. Quoniam verò planum N Z, & planum illi parallelum per 4.14. ductum, ſecantur plano φπ, c erunt communes ſectiones βϱ, 4. 14. parallelæ, ideoque & 13.15. βϱ, parallelæ erunt, d angulúſque externus βρκ, interno 13.15 9. æqualis. Cùm igitur & latera βϱ, ρκ, lateribus 13. 15. 15 θ, ſint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ βκ, 13 θ. Ac proinde & earum ſegmenta maiora θκ, θ4 (Oſtenſum enim eſt θκ, eſſe maius ſegmentum ipſius βκ) æqualia erunt. Eadem arte & ζ4, ipſi βγ, in prima figura oſtendetur æqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſin βγ, cuius vertex conſiſtat in puncto, quod rectam I S, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eiſdem θκ, ζγ, æquales erunt κ9. ζ9. Aequilaterum ergo eſt pentagonum β4θκ9. quandoquidem βγ, θκ, rectæ æquales ſunt, cùm componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt Y V, Z V, πϱ, Mϱ. Sed & æquiangulum, vt mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirũ ad ſingulas rectas M π, Y Z, N R, I L, ξ O, K P; bina ipſi ζθκ, ſimilia, & æqualia conſtruantur; (Ita enim ad M π, duo huiuſmodi triangula vides βθκ, δθκ) & ipſorum beneficio duodecim pentagona ipſi β4θκ9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis M π, Y Z, N R, I L, ξ O, K P, bini nimirum in ſingulis, octo verò reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quæ ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris A α, & H α, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrum, quamuis non propriè, cùm non omnes eius anguli vel in angulis,

a 12. ſext.

b 2. quarti-decimi.

c 16. Vndecimi.

d 29 primi.

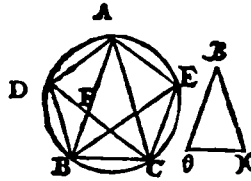
e 4. primi.

vel

vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo verò in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, residèant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem triangulum $C\theta x$, *cuius basis* θx, *maius segmentum existat vtriusque lateris* $\beta\theta$, βx, *extrema ac media ratione diuisi similè fit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles ABC, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE,*

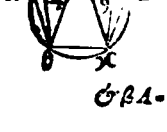


diuisisque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentq; se mutuò rectæ AB, CD, in F. a *Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentũ est AF, æquale lateri BC:* b *Erit vt AB, tota ad maius suum segmentum BC, ita* $\beta\theta$, *tota ad maius suum segmentum* θx; *Eodemque modo, vt tota AC, ad maius segmentum CB, ita* βx, *tota ad maius segmentum* $x\theta$: *Est autem quoque vt AB, ad AC, ita* $\beta\theta$, *ad* βx, *vtrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur* $\beta\theta x$, *ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli θ, B; Item x, C, & β, A; propterea que vterque angulorum θx, duplus erit anguli β; & triangula* $C\theta x$, *ABC, similia.*

a 8. huius.

b 2. quartidecimi.

PENTAGONVM verò $\beta 4\theta x 9$, *æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum* $\beta\theta x$, *circulus* $\beta A\theta xB$, *qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex iis, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si verò non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum* $\beta A\theta xB$. *Quoniam igitur tam recta* $A\theta$, $A\beta$, *quàm recta* 4θ, 4β, *æquales sunt rectæ* θx, *cùm &* $\beta 4\theta x 9$,



& βA-

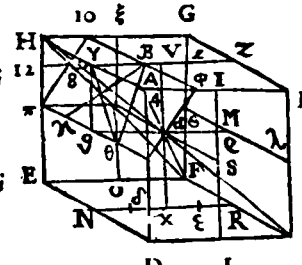
& β A θ x B, pentagonum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A, ϑ 4, quàm duæ β A, 4 β, æquales. quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo circulus trianguli β θ x, circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ x 9, æquiangulum eſt.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.



DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ι, intelligatur q͡ꝯ coniuncta recta γ ι, a æqualis exiſtens & parallela lateri cubi V X, quod & V γ, X ι, æquales ſint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus eſt; b rectus quoq͡ꝫ erit angulus β γ ι, ad γ, conſtitutus; c Ac proinde quadratum diametri 6 ι, æquale erit quadratis lateru̅ β γ γ ι, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt dodecaedri in cubo deſcripti: Maius verò ſegmentum latus cubi in hoc dodecaedro deſcripti.

IN eadem enim prima figura, d cùm ſit 6 Y X, ad β V, ita Y Z, duplæ ipſius Y V, ad β γ, duplam ipſius β V; Sit autem β V, minus ſegmentum ipſius Y V, ſectæ extrema ac media ratione. Erit & β γ, minus ſegmentum lateris cubi Y Z, ſecti extrema ac media ratione; compoſita 6 verò ex Y 6, γ Z, hoc eſt, recta β x (quæ duplaſuit oſtenſa ipſius Y β, ideoque compoſita ex Y β, γ Z, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione 6 γ, eſſe latus Dodecaedri e & β x, ſeu β θ, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cùm ſubtendat angulum pentagoni β ϑ x, vel 6 4 θ.

d 15. quinti.

e 8. quinti. decimi.

III.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus; Dodecaedri

caedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi ΥZ, componitur ex latere Dodecaedri ζγ, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Υβ. γZ, quam conſtat eſſe Latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim ΥZ, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, & perſpicuum eſt ex 8. propoſ. huius lib. a *Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris ΥZ, ſecti extrema ac media ratione: Erit βθ, exiſtens quoque maius ſegmentum eiuſdem lateris ΥZ, & aequalis duabus Υβ, γZ. ſimul, & iam demonſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris ΥZ, circumſcripti.* a 8. terti. 11. doc.

IV.

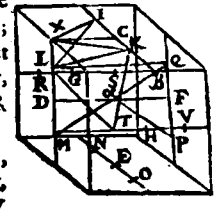
RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppoſiti, b *aequalis eſt rectae VX (quod & ζV, δX, aequales ſint, & parallelae) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.* b 33. primo.

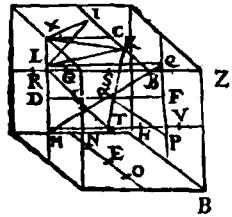
PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.

CVBVS datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrum, ſit AB, per cuius baſium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nuſquam inter ſe conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione ſecentur, ita vt maiora ſegmenta prope centra ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, κ, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt conſtituantur viginti triangula IKL, IkQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVk, TVO, ILR, ISQ. κTL, κQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim ſubtenduntur duodecim cubi lateribus, poſteriora verò octo eiuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, Xκ. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia ſunt lateri b. XC, Cκ, trianguli XCκ; c & anguli contenti, recti, quòd XC, c 29. primi paral lel.



parallela sit ipsi A Y; *a* Erunt & bases *XI*, *XK*, æquales. Deinde quia linea L X, recta est ad planum A Z, per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas X I, X K; Ac propterea, cùm latera L X, X *I*, trianguli L X *I*, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, & anguli contenti, recti; *b* æquales erũt bases L I, L k. Rursus *c* quoniam quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I; Et quadratum rectæ L X, quadrato rectæ I Y; quadratum verò, rectæ X I, quadratis rectarum X C, C *I*, est æquale: Aequale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, *C I*, *I Y*: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quòd eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ *LI*, æquale est tribus quadratis rectarum C Y, *C I*, *I Y*: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ *CI*. (*d* Cùm enim quadrata rectarum C Y, *I Y*, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ *C I*, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ *CI*, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum *C Y*, *C I*, *I Y*, quadrupla eiusdem quadrati rectæ *CI*.) Quadratum ergo rectæ *LI*, quadruplum est quoque quadrati rectæ *C I*; Ac propterea, cùm eiusdem quadrati rectæ *C I*, quadruplum sit quadratum rectæ *K I*, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarum *L I*, *I K*, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterum igitur est triangulum *I K L*, lateri cubi A G, substratum.



a 4. primi.

b 4. primi.

c 47. primi.

d 4. tertiidec.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atq; adeò inter se æqualia, cùm eorum latera *I* K, L M, *N* O, P Q, R S, T V, æqualia sint. Quoniam verò latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo k T L, latus k L, commune est triangulo I k L; & latus *K* T, triangulo T V *K*; & latus T L, triangulo L M T; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cùm eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

DIA-

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela est, & aequalis, quod & DL, FQ, parallelae sint, & aequales; b manifestum est, quadratum diametri QM, aequale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est, c cùm angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, sit rectus.

a 33. primi. b 47. primi. c 29. primi.

II.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cùm coniungant centra basium cubi oppositarum, aequales sunt lateribus cubi, sese q per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, dividunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, sta ostendatur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ, trianguli αFQ, aequalia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, d aequales erunt rectae αQ, αP. Eademque ratione aequales erunt omnes rectae ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

q Ex 3. huius.

d 4. primi.

III.

SI latus cubi extremaac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI, sit maius segmentum rectae CY; e sit q, ut CI, ad CY, sta KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY; f erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi CY. Si enim alia recta, quam KI, esset maius segmentum rectae βY, esset βY, ad illam rectam, ut CY, ad CI, hoc est, ut βY, ad KI, diuersum ab illa recta. quod est absurdum.

e 15. quinti. f 2. quarti.

IV.

ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita, inter se sunt parallela.

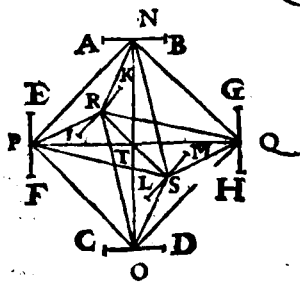
SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se aequalia, angulosque alternos habentia aequales ex 4. propos. lib. 1. quae quidem in centro conuenient. Quare quaelibet latera opposita parallela erunt; g Atq; idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

g 15. Vndecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

EXPONANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita A B, C D, E F, G H, I K, L M, quorum bifarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ N O, P Q, R S, æquales ſeſe in centro T, bifariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. præcedentis oſtenſa ſunt; ducanturque rectæ N P, N R, N S, N Q; O P, O R, O S, O Q; P R, P S; Q R, Q S, conſtituentes octo triangula, N P, S P O, S O Q, S Q N; R N P, R P O, R O Q, R Q N. Quia igitur latera T N, T S, trianguli T N S, æqualia ſunt lateribus T N, T P, trianguli T N P, (cùm ſint rectarum æqualium dimidia) angulosque contineant rectos, vt dictum eſt; [a] æquales erunt baſes N S, N P: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia; Ideoq; Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcripti eſt, cum eius anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaque Icoſaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.



[a] 4. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ N O, P Q, R S, per T, centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri N P O Q R S, ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, vbi ſe interſecant, centrum quoq; eſt Octaedri.

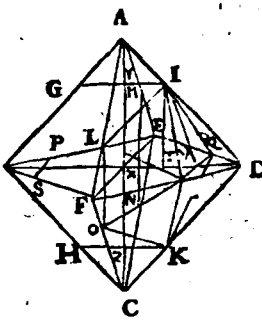
PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.

DATVM octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum ſit A B C D E F. Cùm à quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur à ſingulis bina non proxima, ſed ſibi è regione reſpondentia, hoc eſt, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina iuxta angulos oppoſitos eiuſdem quadrati, qualia ſunt B A, B C; D A, D C, iuxta angulos oppoſitos B, D, quadrati A B C D; A F, A E; C E, C F, iuxta angulos oppoſitos A, C, quadrati A E C F: (Nam à quolibet angulo ſumenda ſunt tantùm duo latera; at verò latera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, iuxta eoſdem angulos A, C, iam ſumpta fuere) E B, E D; F D, F B, iuxta angulos oppoſitos E, F, quadrati E B F D (Nam

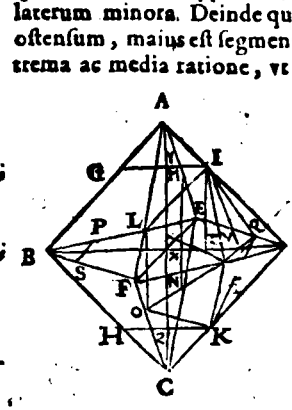
latera

latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos E,F, iam accepta sunt) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchrè indicat octaedrum materiale. Sunt nim tria in lateribus rel. quis ribus, quæ cum eo, in quo unctũ acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem uo sunt in duobus lateribus duorum triangulorũ octaedri, quæ abent commune illud latus, in quo punctum acceptũ est. Vt quia nctum acceptum est R, in latere DF, quod cum tribus DE, DA, C, pyramidem constituit in vertice D, est commune triangulis taedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinue laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, duis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, tese in centro X, secantis bifariã, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13 quam AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta V, agaturq, IT, parallela ipsi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, iangulI DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, triangulI DRI; sunt enim DQ, DR, minora segmenta rectarum æqualium DE, F) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum ctaedri ADE, ADF; a Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cùm , b vt BG, ad GA, ita DI, ad IA; c erit GI, rectæ BD, parallela. Eamq; ratione QR, ipsi EF, parallela; d Ac proinde vt DI, ad IA, ita , ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratio. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita AY, ad YI (quod triangulum YI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Et tem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare l, minus segmentũ est rectæ XA. Nõ aliter ostendemus AY, ipsi G, esse æqualem; ideoq; GI, rectã, bifariam in Y, similiterq; QR, V, secari. Cùm verò latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint eribus DQ, DR, trianguli DQR (minitum minora segmenminorib. segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehe nt rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; e æquales erunt



a 4. prim.
b 2. quarti.
d 4. sexti.
e 4 pri

bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostendentur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturque duo segmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13.



a 34. primi.

b 34. primi.

c 4. tertiidec.

Est autem XY, rectæ XV, æqualis (cùm ambæ sint maiora segmenta æqualium rectarum XA, XD) a & YI, rectæ XT; erit XT, maius segmentū ipsius XV, & ideirco TV, segmentum minus, eiusdē XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT (b cùm & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV, minoris segmenti, c tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris segmenti; Atq; adeò quadratum

d 47. primi.

rectæ IV, d æquale existens quadratis rectarum IT, TV, triplum est eiusdem quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cùm RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum IV,

e 47. primi.

VR, quadrupla quadrati rectæ RV: e At quadratis rectarum

f 8. primi.

IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, f quòd anguli IVR, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & subtensi basibus æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cùm eiusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR; Aequalia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula similem situm cum IQR, habentia, nempe KQR, GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN, atque adeò triangulo IQR, æqualia, cùm latera omniū sint æqualia inter se. quod tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cùm enim in quolibet horum triangulorum vnum latus subtendat angulum rectum, quadrati comprehensum duobus segmentis minoribus laterum octaedri; duo verò reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulos duobus segmentis laterum Octaedri, maiore & mino-

minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, subtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehensos minoribus segmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia sunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cùm subtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic verò segmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non secus latera I R, G L, æqualia erunt. Aequalia igitur sunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propos. 8 lib. 1. Atqui I Q R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur, reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet G M P, in A E B; H N P, in B E C; K N Q, in C E D; I M Q, in A E D; G L S, in A F B; H O S, in B F C; K O R, in C F D; I L R, in A F D, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cùm horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi (vt vides in quinq; R Q I, R I L, R L O, R O K, R K Q, solidum angulum R, componentibus) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alterius verò minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cùm enim in triangulo æquilatero A D E, maius segmentum lateris A D, sit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, ostensa æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti A I, a cùm quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perspicuum est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmenti minoris A I. a 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS sit, cùm octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namq; Octaedri superioris triangulum A E D, in quo collocatum est triangulum Icosaedri I M Q, sitq; C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D: C I, C M, C Q.

Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia sunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q, (quòd hæc latera sint ex cen-

tro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſchol. propoſ. 12. lib. 13. oſtendimus: Erunt baſes C M, C Q æquales. Non ſecus demõſtrabimus C I, æqualem eſſe lineis C M, C Q. Quare C, centrum erit trianguli I M Q.

COROLLARIVM III.

NON difficile eſt deniq; ex dictis colligere, idem centrum eſſe Octaedri, atq; ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunq; duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O; cum latera X A, A G, trianguli X A G, æqualia ſint lateribus X F, F O, trianguli X F O (Nam X A, X F, ſemidiametri ſunt Octaedri, & A G, F O, ſegmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac media ratione) angulosq; complectantur æquales, ſemirectos videlicet (cum A C, E F, diametri ſint quadratorum A B C E, & A F C: ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam ſecent.) *a* Æquales erunt & baſes X G, X O. Eodemque argumento oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.

a 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

b INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrum; *c* & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cùm enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concentricæ ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem centris octo baſium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere poteſt: Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

b 16. quinti decimi. *c* 5. quinti decimi.

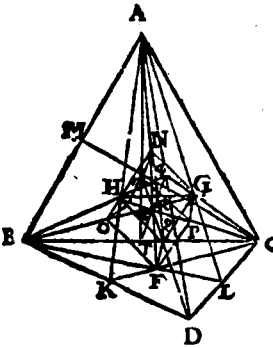
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum deſcribere.

DETVR pyramis A B C D, in qua cubus iubetur deſcribi; ſitq; eius centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur A E F, B E G, C E H, D E I, *d* quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes B C D, A C D, A B D, A B C. Per hæc centra porrò ex angulis A, B, C, rectæ ducantur A H K, A G L, A I T, B F L, B H S, C I M, C F K, C G S, ſecantes baſes oppoſitas B D, C D, A B, A D, B C, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S. Secentur quoq; rectæ ex ſolidis angulis per centrum E, demiſſæ A F, B G, C H, D I, bifariam in N, O, P, Q. punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris,

d 15. quarti decimi.

tris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico ſolidũ N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, E I, cubum eſſe. Cùm enim latera A F, F K, trianguli A F k, æqualia ſint lateribus A F, F L, trianguli A F L, (quod F k, F L, cùm perpendiculares ſint ad B D, C D, ex centro F, ductæ oſtendant æquales diſtantias rectarum æqualiũ B D, C D, à centro F) anguloſq; contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. a Aequales erunt & baſes A k, A L, & anguli k A F, L A F. Rurſus quia latera A N, A H, trianguli A N H, æqualia ſunt lateribus A N, A G, trianguli A N G, (ſunt enim A H, A G, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium A B D, A C D) angulos item comprehendunt æquales, vt demonſtrauimus; b Aequales erunt baſes N H, N G. Haud ſecus oſtendentur æquales rectæ Q G, Q H, ſi rectæ ducantur D G, D H, necnon & reliquæ, cùm omnes ſubtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos; vt perſpicuum eſt. Si enim recta ducatur F T, cùm latera A F, F T, æqualia ſint lateribus A F, F K. (Sunt namq; F T, F k; diſtantiæ rectarum æqualium B C, B D, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli T A F, k A F. Ac proinde cùm latera A N, A I, æqualia ſint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, ſemidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualium A B C, A B D) anguloſque contineant æquales: c Aequales erunt baſes N I, N H, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtẽdamus iam, ipſa plana eſſe atque rectangula, vt tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeò componere cubum N F.

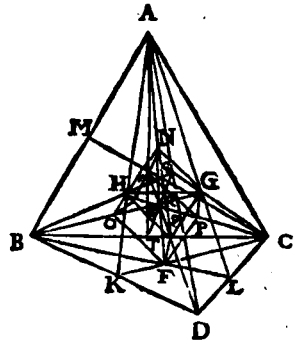


a 4. primi.

b 4. primi.

c 4. primi.

A S S V M A T V R quadrilaterum N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera B C, A D, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter octaedri in pyramide deſcripti, vt conſtat ex figura propoſitionis 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cùm & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia B C, A D. Quocirca cùm idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit



a 18. quarti decimi.

b 2. sext.

S T, per E, centrum pyramidis, æquales; erunt E S, E T, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia B S, C S, perpendiculares sunt ad A D, per scholium propos. 12. lib. 13. a erunt H S, G S, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium B S, C S. Quare latera B S, C S, trianguli B S C, proportionaliter secantur, b atq; idcirco H G, parallela est lateri B C, secatque latera T S, C S, trianguli T S C (quod quidem pars est trianguli B S C) proportionaliter; ideoq; & R S, tertia pars est ipsius S T; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ S E. Rursus c quia D I, perpendicularis est ad triangulum A B C; erit E I, tertia pars semidiametri D E, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13 hoc est, qualium partium 3. ponetur D E, talium 1. erit E I, ac proinde talium 4. recta D I, ideoq; eius dimidium D Q, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua E Q, talium partium erit 1. atq; idcirco E Q, tertia pars erit ipsius D E. Eadem ratione E N, tertia pars erit ipsius A E; Ac propterea, cùm latera D E, A E, trianguli A E D, proportionaliter secentur, d recta N Q, parallela erit lateri A D, secabitq; latera E S, E D, trianguli D E S (quod quidem pars est trianguli A E D) proportionaliter, ideoque, cùm E Q, sit tertia pars ipsius D E; tertia pars erit E R, ipsius S E; Ac proinde S R, duæ tertiæ partes eiusdem S E. Quoniam igitur vtraq; H G, N Q, ex S E, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur S E, à rectis H G, N Q; Atq; idcirco & ipsæ H G, N Q, in eodem sese puncto interfecabunt. e Quare in eodem sunt plano, propterea; & rectæ H Q, Q G, G N, N H, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum N Q; Eademq; est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

c 15. quarti decimi.

d 2 sex.

e 2. Vndecimi.

CVM ostensa sit H G, ipsi B C, parallela, atq; adeò trianguf 2. sext. lum S H G, simile triangulo S B C, ex coroll. propos. 4. lib. 6. f Erit vt S H, ad H G, ita S B, ad B C; & permutando, vt S H, ad S B, ita H G, ad B C: Est autem S H, tertia pars ipsius S B: igitur & H G, tertia pars erit lateris B C, Haud secus ostendemus N Q, tertiam esse partem lateris A D. Cùm ergo latera B C, A D, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q æquales. Ac proinde cùm subtendatur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G; g 8. primi. N H, Q H; g Æquales erunt quatuor anguli, H N G, N G Q, G Q H, Q H N. Quocirca cùm ipsi sint quatuor rectis æquales,

vt ostem-

t oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum
rit N Q. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilate-
a; Ac propterea cubum conſtituent, qui ideo pyramidi dicetur
nſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I,
n centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O,
, Q, in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyrami-
lis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.

ALITER. In data pyramide deſcribatur Octaedrum, & in
ioc Octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam
nim octo anguli cubi ſtatuuntur in centris octo baſium Octae-
lri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt con-
ſat ex propoſ. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt
nox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris
uatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori de-
nonſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes O-
taedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura pro-
oſ. 2. huius lib. (*a* cum enim rectæ E G, E H, parallelæ ſint rectis a 2. *ſem.*
I C, B D; *b* erunt quoque triangula E G H, B C D, per illas rectas b 15. 9. *decimi.*
ucta, inter ſe parallela, & ſic de cæteris) fit, vt perpendiculares ab
ngulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas
uatuor reliquas baſes Octaedri perpendiculares, ex ſcholio pro-
oſ. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ baſes abſcindant ex pyramide
yramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra di-
tarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyra-
idis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor baſes Octaedri diuidunt il- c 17. 9. *decimi.*
as perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis,
oc eſt, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſta-
uantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior
emonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe de-
criptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus:
Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea de-
cripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cum ſint dimidiæ partes
erpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſ-
rum, per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

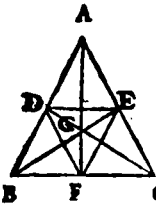
INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones op-
oſitorum laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamque
ſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim E R, ex E, centro cubi,
R, centrum baſis G N H Q, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat:
ecta R S, dupla ipſius E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, oſten-
ſit tertia pars ipſius S T; perſpicuum eſt, rectam S T, coniungentem S,
T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis A D, B C, tranſire
er centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi R S.

LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primùm pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E,F,G,H,I,K; & ex L, centro pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14.

Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF (cùm enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes, sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantia LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.

a 4. primi. *a Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cùm anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cùm ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cùm igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.*



SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri;

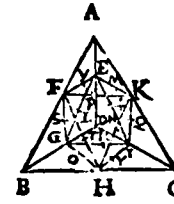
b 4. sex. *b erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF. quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, Ek, Hk, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrū in dicto octaedro, vt constat ex propos. 16 huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cùm ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quòd & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, kF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, denique latera Ik, kE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 2. *quartidecimi.*

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ *b* inscribatur Icosaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri: *Fa*ctumq; erit quod iubetur. Cùm enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus: consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in eārum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde *d* quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyra-

b 19. *quintidecimi.*

c 5. *quintidecimi.*

d 8. *quintidecimi.*

a 18. quintidecimi. pyramidi inſcriptus, a quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt, quatuor autem reliquos in biſariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem biſariis ſectionibus perpendicularium dictarum: ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

xiij. PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum complectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. 11. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter a centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies contexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliqua inſcribatur, vt ſint in vnumquemque vigintì inſcriptorum; vnum duntaxat Dodecaedrum impropriè deſcribitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non propriè in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 19 huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt propriè ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin 31. lib. 11. expoſuimus: qua quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, Octaedro, b 16. quintidecimi. *& Pyramidi; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.*

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcepit inſcripta: c 5. quintidecimi. *b In Octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde c Icoſaedro imponitur Dodecaedrum quod eidem Octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17.* d 8. quintidecimi. *huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro d deſcribitur cubus, cuius octo anguli,*

guli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident; ac propterea & cubum ipse in Octaedro descriptus est.

a Denique in cubo Pyramis includitur, qua ideo in Octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem primi legimus reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis. a 1. quintidecimi.

NEQVE vero praetereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphaera comprehendi. b Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, c conuenientque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat sphaeram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum sphaera illius superficies per horum solidorum angulos incedat. b 1. quintidecimi. c 8. quintidecimi.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium Octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18 huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesue quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliquae quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphaera depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuò inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

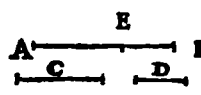
QVEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem lib 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib 16. interſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuò inſcriptas, nec nõ & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedens lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimuſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habeat maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit A B, & latus Dodecaedri in cubo lateris A B, deſcripti ſit D; diuidaturq; A B, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet A E. maius ſegmẽtum ad E B, minus. Cùm enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docui-

dicimus, Dodecaedrum, cubumque in illo deſcriptum, eadem comprehendantur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit A E, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit E B, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt A E, maius ſegmentum ad E B, minus. Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris ſegmenti A E, ad minus ſegmentum E B. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo A B C D E, ex angulo A, ad latus oppoſitum C D, perpendicularis demittatur A F. Dico A F, à recta B E, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta A D, quæ ſecet B E, in H; quoniam B E, recta lateri C D, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, *a* ſecabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: *b* Atqui A D, in H. ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum D H. Igitur & A F, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

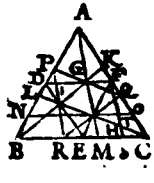
a 2. *ſex.*
b 18. *ter tiidec.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris,

lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit A B C, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, innctis rectis D E, E F, F D, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ G H, H I, I G, constituentes G H I, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in k, L, M, iunctis rectis B k, C L, A M. Dico has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosaedri G H I, hoc est, rectam B k, transire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectam A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipsi B C, parallela; erit triangulum F H O, triangulo F E C, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & F B C, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo A B C, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis est rectæ F H, maiori segmento rectæ F E, seu D F, ipsi æqualis: (Est enim & D E F, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualium laterum, eiusdem trianguli comprehensos; *a* ideoque æqualia sint.) *b* Est autem & N H, æqualis toti D F, in parallelogrämo D H, *c* propterea quod F H, D F, parallelæ sunt rectis A B, B C, seu N O. Igitur recta N O, composita ex N H, tota, & H O, maiori segmento, *d* secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ B C, N O, D F, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex iis, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam A M, transire per puncta G, H. Haud secus ostendemus B k, per puncta G, I; & C L, per puncta H, I, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus A C, A B; Atque idcirco rectæ B k, C L, A M, suis sectionibus producent triangulum Icosaedri G H I.



AGATVR iam per G, recta P Q, rectæ C L, parallela. Quoniam igitur A F, æqualis est rectæ D F, seu rectæ F E, cuius maius segmentum fuit F H, hoc est, F O, illi æqualis; Erit quoque F O, maius segmentum rectæ A F; *e* ac proinde tota A O, secta in F, *f* extrema ac media ratione: *f* Est autem vt A F, ad F O, ita A G, ad G H, ob

a 4. *pri.* *b* 34. *primi:* *c* 2. *sex.* *d* 5. *tertiidec.* *e* 5. *tertiidec.* *f* 2. *sex.*

GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntq; maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia verò est *a* vt AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris AB, maiusque reliqua BP; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione; atq; adeò in puncta R, Q, cadet. Quoniam verò singula latera trianguli PQR, cùm subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, *b* æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI (Cùm enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in easdem rationes, ex iis, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuidatur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, *c* secans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. *quarti.*

b 4. *primi.*

c 2. *sex.*

COROLLARIVM.

EX his facilè colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cùm enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. *d* Cùm igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; *e* sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC,

d 2. *sex.*

e 34. *primi.*

a 2. ſex. in S, ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde a quia F E, F S, ſimiliter ſecantur: ſecatur autem F E extrema ac media ratione, ſecabitur & F S, in T, extrema ac media ratione; maiuſque ſegmentū erit F T, recta b æqualis exiſtens lateri Icoſaedri G H, ob parallelogrammum G T. Igitur F T, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ F S, quæ diuidit E C, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.

b 34. primi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.

BASIS Pyramidis ſit A B C, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis B K, C L, A M, producentibus G H I, baſin Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcripiam triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli A B C, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera P Q, Q R, R P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propoſ. præcedenti demonſtratum eſt. Dico A P, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri H I. Cùm enim P Q dupla ſit potentia minoris ſegmenti A P, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. quadrupla verò potentia rectæ H I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd P Q, recta dupla ſit rectæ P G, hoc eſt, ſibi æqualis H I, ob parallelogrammum P H; Erit P Q, potentia 4. & A P, 2. & H I, 1. Quamobrem A P, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. c Cùm enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis: ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, d cum diametro potentia ſit commenſurabile. e Quare minus ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit. Atque ageò f cum minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.

c 13. tertiidec. d 6 dec. e 6. tertiidec. f 6. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus verò Pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cùm ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt cõstat ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Nam cùm sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus Pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti. a 2. *sexti*

DENIQVE b quia diameter sphæræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cùm diameter octaedri coniungat centra basium oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. b 14. *tertiadecimi.*

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potẽtia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 15. lateris cubi, qui in eo describitur; c existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Apertè colligitur, latus Dodecaedri maius, segmentum rectæ esse, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. c 17. *sexti decimi.*

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus deniq, Dodecaedri in eodẽ cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cùm enim ex iis, quæ in propos. 14. lib. 15. demon- A B C

ſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri maius ſegmentum ſit lateris cubi A; & C latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. eiuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi: Planum ſit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

CVM enim per ea, quæ in propoſ. 18. lib. 5. ſunt demonſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti (oſtenſum enim eſt ibi, G H, diametrum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partem lateris Pyramidis B C) *a* Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis nonuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cùm nonupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3 9. apparet. Quare cùm quadratum diametri baſis cubi duplum ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. fit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiuſdem baſis diametri ſit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.

a 20. ſexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus quoque ſit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inſcribitur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vlt. lib. 15. *b* Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi ſibi, & Dodecaedro inſcripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

b 8. ſexti decim.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſae-

Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

VT enim conſtat ex propoſ.16. lib.15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium propè minora ſegmenta (qualis fuit ibi recta G I, ſubtendens angulum rectum G A I, minoribus ſegmentis A G, A I, comprehenſum) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare *a* cùm hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum. *a* 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum octaedri A B C D E, cuius baſis quadratũ A B C D, triangula verò ad E, verticem, A B E, E B C, C E D, D E A, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur K L, L M, M N, N K, rectis A B, B C, C D, D A, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ F G, G H, H I, I F; erit F G H I, quadratum cubi in octaedro deſcripti, vt demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta E H O, ſeſquialtera eſt rectæ E H, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur E O, talium 2. erit E H: *b* Arqui vt E O, ad E H, ita eſt E B, ad E L. Igitur qualium partium 3. continet E B, talium 2. erit E L, ſeu L M, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L, M N, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi G H, videlicet F G H I, talium partium 2. cùm quadratum L N, duplum ſit quadrati G I, ſibi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. demonſtrauimus. Eſt enim L N, quadratum ex diametro quadrati H I, deſcriptum; *c* cùm G I, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri L M. Quapropter latus octaedri E B, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi G H, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum.

b 2. ſex.

c 33. primi.

COROLLARIVM.

QVIA verò latus cubi extrema ac media ratione diuiſum efficit maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per coroll.2.propoſ.13. lib. 15. inſcribunturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib.15. perſpicuum fit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema

ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti: cuius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ. 14. lib. 15. eiuſque ſcholio: Et in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cùm per ea, quæ ad propoſ. 14. lib. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. *a* Atqui diameter ſphæræ ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

a 14. ter huius.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. minus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cùm ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius ſegmentum, vel maioris ſegmenti ad minus (quod tota linea, maius ſegmentum, atque minus, ſint tres rectæ continuè proportionales) liquidò conſtat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

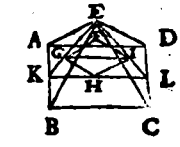
PRÆ-

PRÆTEREA, cùm constet ex coroll. 1. propos. 17. lib 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cùm enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula autem ad verticem E, sint A B E, E B C, C E D, D E A, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur F G, G H, H I, I F, quadratum cubi in octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam verò pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus, Estque latus pyramidis in cubo



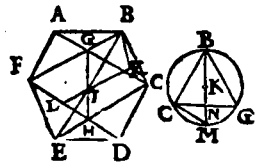
descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri B C, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I, Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera A B, C D, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque E K, E L, sesquialteræ erunt rectarum E G, E I, per coroll. propos. 18. lib. 14. a Ac propterea G I, a 2. sexti parallela erit rectæ K L, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum E G I, simile triangulo E K L. Quare erit vt E K, ad K L, ita E G, ad G I, & permutando, vt E K, ad E G, ita K L, ad G I, ideoque cùm E K, sesquialtera sit ipsius E G, erit & K L, sesquialtera ipsius G I. b Cùm ergo B C, æqualis sit ipsi K L, quòd & B K, b 33. primi C L, æquales sint, & parallelæ; Erit B C, latus octaedri sesquialterũ mo. lateris Pyramidis G I, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum A B C D E F G H, cuius diameter B E, &

centrum I; triangula verò oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. B C G, E F H, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum B C G, perpendicularis I K, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur K I, perpendicularis quoque erit ad planum E F H, parallelum plano B C G, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cùm cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, vt conſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeò angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit K L, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cùm ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri æquales: Conjuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum B C G, circumſcribentis; erit angulus B K I, rectus, ex defin. 3. lib. 11. a Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum B K, K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis, & K L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi K L (6 quod triplum eſt quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extenſaque B K, vſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. c erit recta B C, potentia ſeſquitertia rectæ B N: Vt autem B C, ad B N, ita eſt B M, ad B C, quòd B C, ſit media proportionalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. d cùm angulus B C M, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur B M, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri B M, ſeſquitertium eſt quadrati lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 74. primi.

b 15. ter tiidee.

c 12. quarti decimi.

d 31. ter tij.

COROLLARIVM.

HINC ſit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambien-

dientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli trianguli BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, a duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones *coniungentis* diuisæ extrema ac media ratione minus segmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi rectæ coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri *minus* segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum. a 14. *huius.*

THEOR. 17. PROPOS. 17.

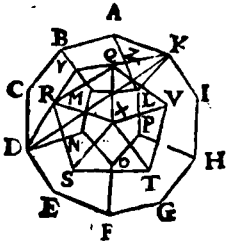
DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circumdantis: *b* Potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basin Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & sui ipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basin Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum. b 13. *huius.*

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atq; extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdé lineæ inter centrum pentagoni & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABML*K*, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ. QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt: igitur quinque trianguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſium BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam biſariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſitionis 10. lib. 13. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo *K*; ſecabitur *a* perpendicularis kY, in Z, extrema ac media ratione.



a 2. ſexti.

Dico ita eſſe latus Dodecaedri LM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt kZ, minus ſegmentum perpendicularis kY, ad rectam QY, inter centrum Q. & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta Dk, quæ per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius Dk, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodem ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam verò latera YD, Yk, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q (ſunt enim RD, Qk, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) *b* parallela erit QR, ipſi Dk; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDk, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. *c* Quamobrem erit, vt Dk, ad kY, ita QR, ad QY, *d* Vt autem Dk, tota ad totam kY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus kZ. Vt igitur LM, ad kZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita kZ, minus ſegmentum perpendicularis kY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 2. ſexti.

c 4. ſexti.

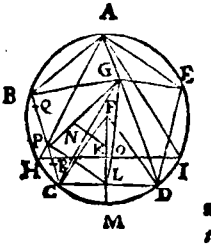
d 2. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

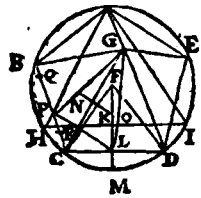
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinq; latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, exiis, quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cùm quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cùm sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; propterea q; rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FkL, a secans rectas HI, CD, bifariam in k, & L; coniunganturq; rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, dividentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demõstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro descripti. Deniq; BP, dimidiũ lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cùm enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, secetur in k, extrema ac media ratione (quòd FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari Fk, per coroll. propos. 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento Fk, æqualis recta kM, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum kM, sectum quoque in L, à minori segmento kL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ suiipsius segmento LM. Quoniam verò iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descri-



a 3. huius.

deſcripti, idemque centrum F, habentis, ex ſcholio vltimo lib. 4. ideoque ſimilis illi: erunt triangula F C D, F P L (ſi recta ducerentur F P) ſimilia, per ſcholium propoſ. 20. lib. 6. Quare vt F C, ad C D, ita erit F L, ad L P; & permutando, vt F C, ad F L, ita C D, ad L P; Atqui F C, hoc eſt, ſibi æqualis F M, excedit rectam F L, minore ſegmẽto dimidii ipſius F M, nempe minore ſegmento rectæ K M, vt oſtendimus. Recta igitur C D, vel ſibi æqualis B C, excedet quoque rectam L P, minore ſegmento dimidii ipſius B C, nimirum minore ſegmento rectæ B P, quod ſuit P Q; ideoque reliqua C Q, rectæ P L, æqualis erit. Rurſus quia G P, G L, proportionaliter ſecantur in centris N O (quòd G N, G O, duplæ ſint ipſarum N P, O L, per coroll. propoſ. 18. lib. 14.)

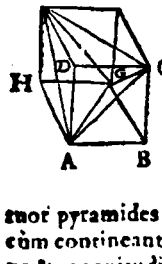


a 2 ſex. b 4 ſex. parallelæ erunt P L, N O; ac proinde triangulum G N O, triangulo G P L, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. & Igitur erit vt G P, ad P L, ita G N, ad N O; & permutando, vt G P, ad G N, ita P L, ad N O: Eſt autem G P, ipſius G N, ſeſquialtera, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Quare & P L, hoc eſt, ſibi æqualis C Q, ſeſquialtera erit ipſius N O; Ac proinde, cùm C Q, ſeſquialtera quoque ſit rectæ Q R. (Nam qualium partium 3. eſt C Q, talium 1. eſt C R, per conſtructionem; Ac *propterea* earundem 2. Q R) æqualis erit Q R, ipſi N O, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaque lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectũ fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.

IN cubo A F, deſcripta ſit pyramis A C E G. Dico cubum pyramidis triplum eſſe. Cùm enim inſcriptam pyramidem æquilateram circumſtent quatuor pyramides fundatæ ſuper quatuor baſes ipſius, vertices verò habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non reſident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inſcriptæ: (Nam ſuper baſin A C E, fundatur pyramis A C E D; ſuper baſin A E G, pyramis A E G H; ſuper baſin C E G, pyramis C E G F; & ſuper baſin A C G, pyramis A C G B: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10. definitione libri vndecimi, cùm contineantur planis ſimilibus æqualibuſque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim conſtat tribus æqualibus & ſimili-



similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basin habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem verò eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 17. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. *a* Cùm igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quòd & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum. *a* 32. vndecimi.

ALITER. Cùm cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. *b* Cubus verò triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicuè colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur. *b* 32. quarti decimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cùm enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt propos. 3. lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cùm contineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterũ æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) *c* Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum (cum octupla proportio sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicuè apparet) hoc est, quælibet

c 8. duodecimi.

bet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis A B C D; Atq; idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis A B C D, conficient. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis A B C D. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. *a* Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, *b* & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeò cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

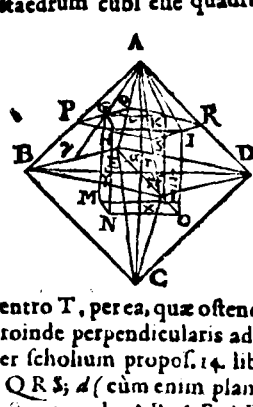
a 10 *sextidec.*

b 21 *sextidec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro A B C D E F, cubus describatur sit G H I K L M N O, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri B E D F A, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ P Q, Q R, R S, S P, lateribus B E, E D, D F, F B, parallelæ quadratum cõstituentes P Q R S, vt in propos. 4. lib. 15. est demonstratum; *c* quod quidem parallelum erit quadrato B E D F. Ducatur quoque octaedri diameter A C, perpendicularis existens ad quadratum B E D F, in centro T, per ea, quæ ostendimus in corollario propos. 4. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi G I, M O, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati P Q R S; *d* (cùm enim plana B E D F, P Q R S, parallela secent rectas æquales A B, A E, A D, A F, proportionaliter, erunt & A P, A Q, A R, A S, æquales. Intelligantur ductæ rectæ V P, V Q, V R, V S. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium A P, A Q,



c 15. *undecimi.*

d 17. *undecimi.*

e 47. *primi.*

ABAQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ. quòd anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ. propterea que & rectæ ipſæ VP, VQ. æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS) Igitur & centrũ erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſchol. vltimũ lib. 4. Secantur n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariãin G, K, I, H, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodẽ argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Necnon & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. a Cùm ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cùm æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: necnon VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cùm ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cùm per coroll. 1. propoſ 15. lib. 13. rectæ centra baſium cubi oppoſitarũ connectentes ſeſe bifariam ſecent in centro. Iam verò quoniam VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla autem fuit & AV, eiuſdem VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. cùm vtriuſque eadem ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX: b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quòd & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia verò pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cùm triangula huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius) c proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterum, quòd & recta Aγ, d proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18 27. conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. eſſe cubum GO, iam demonſtratum eſt. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet,

217. 6m decimi.

b 6. 6m decimi.

c 8. duo decimi.

d 2. ſexti.

habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atque cubi ſibi inſcripti. Oſtendimus enim T, vtriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcripti cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. a Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram, quam videlicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum.

a 11. ſextidec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

QVONIAM vt oſtendimus ad finem lib. 15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur; b Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & c cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis c triplus: qualium partium 2 ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27 octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptã pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc eſt, tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

b 13. ſextidec.

c 20. ſextidec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.

IN pyramide A B C D, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidem cubi eſſe noncuplam. Aſſumantur enim G H. centra duarum baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib. 11. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa verò recta G H; cùm B H, C G, duplæ ſint rectarũ H S, G S, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter ſe-

d 2. ſex. e 4. ſex.

centur B S, C S, d parallelæ erũt B C, H G, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, ſimile. e Erit ergo vt B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, vt B C, ad H G, ita C S, ad

C S, ad G S: *a* Est autem C S, ipsius G S, tripla. Igitur & B C, tri- a 18. quarti decimi.
pla erit ipsius H G. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ
in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstra-
tum est; Recta verò connectens duo centra basium pyramidis
commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide
descripti, vt perspicuū est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15 (Ibi
nim recta G H, iungens centra G, H, basium A C D, A B D, com-
mune latus A D, habentium diameter fuit basis G N H Q, cubi
descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis B C, diameter basis
cubi pyramidem A B C D, circumscribentis; G H, verò diameter
basis cubi in eadem pyramide descripti. Cùm ergo eandem ha-
beant proportionem diametri quadratorum, quam latera (Est
nim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter
alterius quadrati ad suum latus, quòd proportio vtraque
sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diame-
trum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius
quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alte-
rius quadrati ad ipsum quadratum, cùm vtrobique sit proportio
dupla. *b* Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad la- b 22. sexti.
tus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad
latus) habeat autem B C, diameter basis cubi circumscripti ad
G H, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt
ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus
cubi inscripti proportionē triplam. At verò cubi, cùm sint paral-
lelepipeda similia, *c* proportionem habent laterum homologo- c 33. vndecimi.
rum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscri-
ptum pyramidi A B D C, proportionē habet, quam 27. ad 1. Hæc
enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27.
videre licet. Quam ob rem, *d* cùm cubus ad pyramidem inscri- d 10. sexti decimi.
ptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam;
habebit pyramis A B D C, ad cubum sibi inscriptum proportio-
nem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeò pyramis si-
bi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

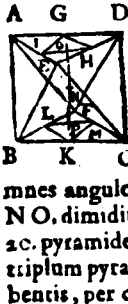
IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionē habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN octaedro A B C D E F, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases oc-

octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cùm enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atq; ex N, centro octaedri, necnon & Icoſaedri (idem enim vtriuſq; eſt centrũ, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſin A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoq; eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cùm ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. Recta O N, producta perpendicularis quoq; erit, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia verò octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autẽ priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſin, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At verò priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo verò O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri. Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſin A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo verò eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P; cùm per ea, quæ docuimus ad propoſ. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis G H I, altitudo verò O P, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: propterea quæ tripium huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem



G H I,

GHI, & sub altitudine OP, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo verò eadem OP; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius verò basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam verò, cùm duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes (cùm vnius basis sit ADE, nempe tres tertiæ partes ipsius ADE, complectens, alterius verò basis tertia pars ipsius ADE) ad bases prismatum Icosaedro æqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes (cùm vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipsius GHI, continens, alterius verò basis tertia pars ipsius GHI) Sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI, a ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cùm sex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipsius GHI (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cùm quindecim tertias complectantur) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

a 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionē habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadē cum in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam

habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR *Icoſaedrum* A B C, in quo recta D E coniungat centra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit A C; & *F*, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione *F*, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad rectam D E. Cùm enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeò oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit D E, diameter dodecaedri in Icoſaedro A B C, deſcripti, cùm copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc eſt, in eadem ſphæra, in qua Icoſaedrum A B C, deſcripto, cùm vtriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icoſaedrum videlicet A B C, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icoſaedri A B C, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, ſibi inſcriptum, componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri A B C, ad dodecaedrum diametri A C, in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icoſaedro A B C, deſcriptum. Cùm ergo Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem ſphæra comprehenſum, ſit vt *F*, latus Icoſaedri ad G, latus cubi (*a* Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icoſaedrum A B C, eiuſdem diametri eſt, vt G, latus cubi ad *F*, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) At verò Dodecaedrum eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icoſaedro videlicet A B C, deſcriptum, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem, ex coroll. propoſ. 7. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionem Icoſaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum diametri D E, componi quoque ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum

a 11. *quarti-decimi.*

pro-

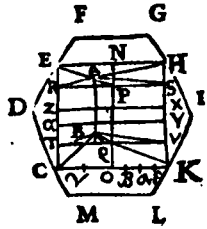
proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At verò altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

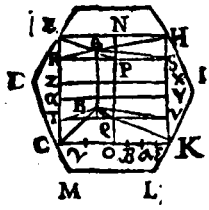
QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B k L M C, conuenientia ad latus A B; duo quidem A B C D E, A H I k B, ſecundum latus idem commune A B, alia autem duo A E F G H, B C M L k, ſecundum angulos E A H, C B k. His verò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C k H, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet C B k H A E, conſtans quinq; planis C B k, E A H, A B C E, A B k H, E C k H; quorum duo C B K, E A H, a triangula ſunt æqualia, cùm latera pentagoni B C, B k, æqualia ſint lateribus pentagoni A E, A H, angulosque comprehendant æquales pentagonorũ E A H, C B k. Duo verò A B C E, A B k H, trapezia ſunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona A B C D E, A B k I H, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata C D E, H I K, b æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia A B C E, A B k H;) Quintũ denique eſt baſis cubi inſcripti E C k H. Similimodo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia, & æqualia, per 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit à C E H k, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi C k, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at verò altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati late-

a 4. primi.



b 4. primi.

cis cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, Ck, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demiſſæ in planum Ek, vt conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentum lateris cubi NO, vel Hk, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, Ck, parallelæ; erunt quoque RT, SV, maiora ſegmenta laterum EC, Hk; atq; adeò ER, CT, ſimul, & HS, kV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVkB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cùm & earum baſes ERSH, TCkV, & altitudines PA, QB, æquales



a 33 primi. ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. a Quoniam autem AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cùm

b 15. vndecimi. coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, b parallelæ erunt plana triangulorum ARS, BTV, atq; adeò inter ſe æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cùm latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.

IAM verò, cùm oſtenſum ſit rectas HS, kV, minus ſegmentum efficere lateris Hk, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & kV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris Hk, duas tertias partes contineat VY, tertia verò pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides

c 6. duodecimi. ERSHA, CTVkB, æquales ſunt oſtenſæ; c vtriuſq; verò earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA,

d 1. ſexti. vel QB, conſtituta, d quòd & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; æqualis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVkB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex verò linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipſi VX, duas tertias partes continet priſma, cuius baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex verò pars

rectæ

rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. VI. a quòd & a 1. sexti
basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVkB; Ac proinde hoc prisma appositum primati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBkHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maioræ segmento, ideoq; à base cubi deficientem rectangulo αX, contento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinq; prismata æqualia & proximè dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulis rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo verò æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim Ck, latus cubi extrema ac media ratione in ζ. Itemq; Cβ, maius segmentum, & βk, minus bifariam in γ, δ; atque ex Ck, abscindatur Cι, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βι, dimidia pars minoris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB, & Cι, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βk, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti, quia βk, maior est, quàm dimidiũ maioris segmenti Cβ. Cùm enim sit, vt Ck, ad Cβ, ita Cβ, ad βk; sit autem Ck, minor, quàm dupla ipsius Cβ, quòd Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque Cβ, minor, quàm dupla ipsius βK, hoc est, erit βk, maior, quàm dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota Ck, ad maius segmentum Cβ, ita maius segmentum Cζ, ad minus βk; b erit quoque vt Cζ, dimidia b 25.

ipſius C K, ad C γ, vel β ε, dimidiam ipſius C β, ita C γ, vel β ε, ad β δ, dimidiam ipſius β K; Ac proinde ſi C O, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum C γ, vel C ε, & minus β δ. Quare & β δ, minus ſegmentum ſecabit β ε, maius ſegmentũ extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. eritque maius ſegmentum β δ, minus autem δ ε; Ac propterea rurſus δ ε, minus ſegmentum ſecabit rectam δ K, maiori ſegmento ζ δ, æqualem, extrema ac media ratione. minuſque ſegmentum erit ε K. Deficit igitur C ε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi C K, minore ſegmento ε K, rectæ δ K, vel ſibi æqualis rectæ β δ, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmentum minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum cubum, à baſe cubi deficere rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; altitudinem verò ab altitudine cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

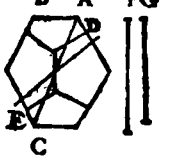
VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inſcripti deiicere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit. Alterius verò & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt omborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo verò à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius parallelepipedum, compoſitum erit parallelepipedũ prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo verò alter cubus, vt demonſtratum eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam

rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copu-
antem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in
adem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro A B C, diameter sit A C, & recta coniungens centra basium oppositarum D E; At verò F, latus cubi, & G, latus cosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum compo-ri ex proportione triplicata proportionis dia-metri A C, ad rectam D E; & ex proportione F, ateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cùm enim nguli Icosaedri in Dodecaedro descripti repo-antur in centris basium Dodecaedri, atque ideò anguli oppositi in centris basium opposi-arum; erit recta D E, centra basium Dodecae-dri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphæra um Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describe-ur, cùm eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tri-ous magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dode-aedrum videlicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam ma-nitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis unt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam ma-nitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, ertiam magnitudinem. Cùm ergo Dodecaedrum A B C, ad Do-lecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam dia-metri A C, ad diametrum D E, ex coroll. propos. 17. lib. 12. a Do-decaedrum verò diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, propor-ionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquidò onstat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi in-criptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex tri-plicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulan-em, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in ea-dem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi in-criptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. quarti decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo deniq; à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentũ minus existit, ita vt amborũ altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdẽ cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, a cùm pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cùm Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeò vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

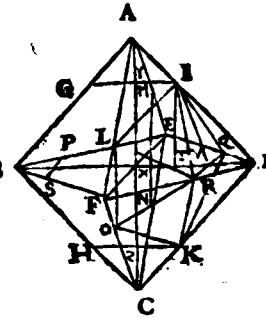
a 25. fere studes.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit A B C D E F, repetita figura propos. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptũ componentia esse I O P,

KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABCDEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri QR, altitudo verò IT, maius segmentum semidiametri AX. Cùm enim in quatuor basibus octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum solidum octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cùm earū altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri octaedri (Nam quemadmodum AX, secta est à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; secta est CX, à recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, a erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrū prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia verò triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ (Cùm DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoq; quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR,



a 34. primi.

IDQR, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, vel parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque eſt trium illarum pyramidum. Quare cùm earundem trium pyramidum quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrum ambientes; Aequale quoque erit priſma, ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptum; Ac proinde octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens. Cùm enim ex demonſtratis propoſ. 19. lib. 15. conſtet, ſi Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icoſaedrum imponatur, Icoſaedrum eidem Pyramidi eſſe inſcriptum: *a* octaedrum autem ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta videlicet IT, ſeu YX: Fit, vt octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur (*b* quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti octaedri) ſuperet duplum Icoſaedri in octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata à nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cùm altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramidis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

a 31. ſexti.

b 21. ſextidec.

DE QVINQVE CORPORVM REgularium deſcriptione in data ſphæra ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde verò eadem à ſphæra comprehendi, nona demonſtratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cùm eius ratio multò clarior videatur, & facilior, quàm conſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda ſunt, quorum aliqua etſi per elementa ſphærica Theodoſii demonſtrantur, non tamen propterea

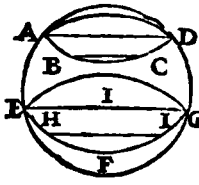
præterea ordinem Euclidis pervertere censeri possumus; quippe cùm propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant; & commodè ante lib. 12. atque adeò multò magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. In citandis autem Theodosij propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli parallelι A B C D, E F G; sitq; primum in A B C D, data diameter A D, cui in E F G, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, & in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum A D, planum rectum ad circulum A B C D, a faciens in sphæra superficie circulum A E G D. Quoniam igitur circulus A E G D, circulum A B C D, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus A E G D, maximus, transibitq; per polos circuli A B C D, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli E F G, b cùm parallelι eosdem polos habeant; c ideoque eum bifariam secabit. Communis ergo sectio E G, eius diameter erit: d qua cùm sit ipsi A D, parallela, patet propositum.

a 1. 2. Theod.



b 1. 2. Theod.
c 15. 1. Theod.
d 16. & undecimi.

DEINDE in circulo A B C D, data recta B C, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo E F G. e Ducatur ipsi B C, per centrum circuli A B C D, diameter parallela A D; cui in circulo E F G, ducatur diameter parallela E G, & proximè ostendimus. Quoniam igitur & tam B C, E G, eadem A D, parallela est, ex constructione, f ipsa quoq; B C, E G, inter se parallela erunt. Quod est propositum.

e 31. primi.
f 9. undecimi.

EADEM ratione recta B C, ducetur in circulo E F G, parallela H I, à diametro E G, diuersa, quæ ipsi B C, æqualis sit, si modò B C, maior non sit diametro E G. Nam si in circulo E F G, ducatur ipsi B G, parallela H I, & æqualis, & ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

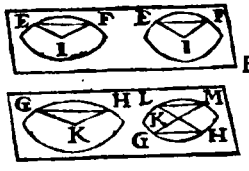
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes;

erunt

erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis A B, C D, descripti sint duo circuli, in quibus recta E F, G H, primùm parallela sint, ad easdem partes centrorum I, K, auferanturque arcus similes E F, G H, ac tandem iungantur ad centra rectæ E I, F I, G K, H K. Dico tam E I, G K, quàm F I, H K, parallelas esse. Quoniam enim arcus E F, G H similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propos. 22. lib. 3. a *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* b *Cùm ergo tam illi, quàm*



a 32. primi.
b 5. primi.

hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quàm angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ E F, G H, parallelæ sunt, & recta E I, G K, ad easdem partes plan per E F, G H, ducti efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt ex iis, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstrauimus, E I, G K, parallelæ. Eademque ratione F I, H K, parallelæ erunt.

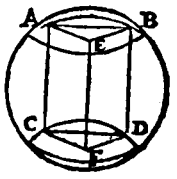
DEINDE sint E F, G H, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. Dico tam E I, H K, quàm F I, C K, esse parallelas. Productis enim G K, H K, iungatur recta L M. Et quia latera G K, H K, lateribus L K, M K, sunt æqualia, c *angulosque ad verticem K, æquales continent;* d *erunt & bases G H, L M, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M.* e *Igitur arcus G H, L M, æquales sunt, & rectæ G H, L M, inter se parallelæ: Ac proinde cum vtraque E F, L M, ipsi G H, sit parallela,* g *erunt & E F, L M, parallelæ inter se. Quia igitur E F, L M, parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes E F, L M (Nam cùm arcus G H, sit arcui E F, similis, erit quoque arcus L M, qui arcus G H, æqualis est, eidem arcui E F, similis) erunt tam E I, L K, hoc est, E I, H K, quàm F I, M K, hoc est, F I, C K, parallelæ. Quod erat propositum.*

c 14. primi.
d 4. primi.
e 28. primi.
f 27. primi.
g 9. vndecimi.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus sint



Sint duæ rectæ æquales & parallelæ A B, C D, ad eaſdem partes centrorum, quarum extrema iungantur ad eaſdem partes rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim A B, C D, parallelæ ſunt; a *erunt A C, B D, in eodem cum ipſis plano. Quare cùm A B, C D, ſint etiam æquales;* b *æquales quoq; erunt ac parallelæ A C, B D, quod eſt primum.* a 7. undecimi. b 33. primi.

E X centris deinde E, F, ductis rectis E A, E B; F C, F D, iunctaq; recta E F; erunt tam A E, C F, quàm B E, D F, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c *Igitur & A C, E F, & B D, E F, parallelæ erunt, & æquales.* d *Quoniam verò circuli A B, C D, paralleli circa eoſdem poles ſunt,* e *recta per eorũ polos ducta tranſibit per eorundem centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta E F, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta per eorum polos extenſa, quod eſt abſurdum. Haberent enim illa recta ſegmentum commune E F.* f *Igitur E F, ad plana circulorum A B, C D, recta eſt: & propterea & vtraque A C, B D, ipſi E F, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.* c 33. primi. d 2. Theod. e 10. 11. Theod. f 10. 11. Theod. g 8. undecimi.

H Æ C demonſtratio locum etiam habet, quando parallelæ A B, C D, ſunt circulorum diametri, ſed tunc E A, E B, F C, F D, erunt partes diametrorum, vt patet.

LEMMA IV.

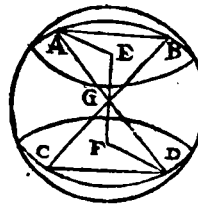
SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales; Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

I N ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, & in iis ducta recta parallela & æquales A B, C D, non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primùm non ad eaſdem partes iungantur rectis A D, B C. Dico rectas A D, B C, in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæra inter ſe æquales.

Quoniam

a 7. Undecimi. *Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt;* a *erunt A D, B C, in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuò intersecabunt, & in puncto H: quod deco esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis E A, E G; F D, F G.* b *Et quia anguli A G B, C G D, ad verticem æquales sunt:* c *Item tam alterni anguli B A D, C D A: quàm alterni A B C, D C B; æquiangula erunt triangula A B G, C D G.* d *Igitur erit & A B, ad B G ita D C, ad C G: Item & A B, ad A G, ita D C, ad D G. Cum ergo A B, C D, ponantur æquales,* e *erunt quoque tam B G, C G, quàm A G, D G, inter se æquales. Rursus quia A E, D F, semidiametri circulorum æqualium æquales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* f *ideoque anguli alterni E A D, F D A, æquales; erunt duo latera E A, A G, duobus lateribus F D, D G, æqualia, angulosque comprehendent æquales.* g *Igitur & bases E G, F G, & anguli A G E, D G F, æquales sunt.* h *Et quia A D, in eodem plano est, in quo parallelæ A E, D F;* i *& E G, F G, in eodem plano, in quo A D, A E, D F; erunt E G, F G, in rectum & continuum constituta, propter æquales angulos A G E, D G F, & ex Procla ad propos. 15 lib. 1. ostensum. Quare E F, recta contingens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, & in præcedenti lemmate demonstratum est,* k *perpendicularis ipsi ad eorum plana erit. Cum ergo E G, F G, æquales sint ostensæ, erit G, centrum sphæræ,* l *propterea quòd circuli æquales A B, C D, æqualiter à centro sphæræ absunt; inæqualiter verò abessent, si centrum sphæræ in recta E F, diceretur aliud punctum quàm G. Quocirca A D, B C, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.*

b 15. primi. c 29. primi. d 4. primi. e 14. quinti. f a 29. primi. g 4. primi. h 7. Undecimi. i 2. Undecimi. k 10. 1. Theod. l 6. 1. Theod.



S E D eam puncta extrema parallelorum æqualium A B, C D, ad easdem partes tangantur rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos C A B, A B D, B D C, D C A esse rectos. Quòd enim sint parallelæ & æquales, m *manifestum est, cùm extrema puncta parallelarum æqualium connungant. Quod autem ad A B, & C D, sint perpendiculares, sta ostendetur. In circulo C D, ad rectam C D, excitentur perpendiculares C E, B F, tangantur & E F, A E, B F. Quia igitur anguli E C D, F D C, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus E C D, F D C, semicirculi, ac proinde & reliqui* n *arcus E F D, C E F, semicirculi erunt,* n *& anguli E F D, C E F, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo D E, rectæ G D, E F, æqua-*

m 33. primi.

n 31. tertij.

les

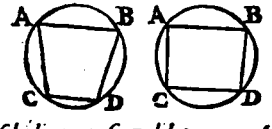
les sunt, a ideoque & AB, EF, parallela erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum recta erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtramque FD, FB; vt ostendimus, b perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: c ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.

a 9. vndecimi.
b 4. vndecimi.
c 8. vndecimi.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erũt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt AB, CD, d *erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducta igitur per ipsas plano,* e *fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ sint AB, CD; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales:* f *ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod si parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & æqualia, erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.*



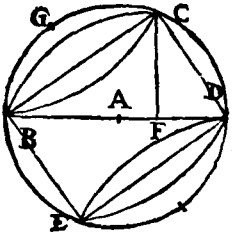
d 7. vndecimi.
e 1. 1. Theod.
f 29. tertij.

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. propos. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipsius FD, dupla sit; erit BD, talium partium 3. qualium 2. est BF; ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendicularis, iungantur rectæ BC, DC, ducta autem DE, ipsi BC, parallela, connectatur

a 29. pri mi. *recta BE.* a *Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quàm duo BED, CBE, duobus rectis æquales sunt;* b *est quoque tam BCD, quàm* b 31. ter tij. *BED, rectus; erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex corollario propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelo-*c 34. pri mi. *grammum est;* c *ideoque recta BC, DE, æquales sunt. Diuisus autem*



arcus BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariam in G, quia in scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoq; BE, CE, æquales sunt. Polo igitur G, & interuallo

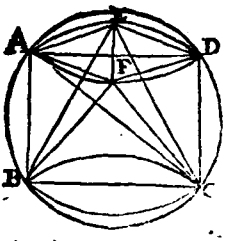
d 2. 2. Theod. *GB, GE, circuli in superficie sphæræ inscribantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quàm GE, GD;* d *qui parallelis erunt, cum eosdem habeant polos.* e *Et quia circulus maximus BGDE, per polos secat circulos BC,*

e 15. 1. Theod. *ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensa, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim ex corolli. propos. 8. lib. 6. rectæ DB, BC, BF, continuè proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autem BD, ipsius BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atq; adeo & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusq; diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.*

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinq; corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.



f 15. 1. Theod. *DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli ABC, ADC, æquales, & parallelos, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diametri sphæræ: & per eorum polos maximorum circulorum ducantur ABCD,* f *quorum ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde eorum communes sectiones facient diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, esse æquilatera & æ-*

quales.

qualia. Iunctis enim rectis A E, E D, D F, F A, A B, C D, C A; erit A C, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & A B, D C, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex 3 lemmate. Denique A E D F, quadratum erit in circulo A D, deſcriptum, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Itaq; quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ A C, ſeſquialterum eſt quadrati ex A D, diametro circuli; ſi ponatur quadratum ex A C, 3. erit quadratum ex A D, 2. Cùm ergo quadratum ex A C, a æquale ſit quadratis ex A D, D C, quòd angulus A D C, a 47. pri rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex D C, 1. ac proinde mi. quadratum ex A D, quadrati ex D C, duplum erit: Eſt autem & quadratum ex A D, quadrati ex D F, duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D F; b quibus cùm b 47. pri æquale ſit quadratum ex C F, quòd angulus C D F, ex defin. 3. lib. 11. mi. rectus ſit; erit quadratum ex C F, quadrati ex D F, quoq; duplum, propterea q; quadrati ex A D, æquale. Recta igitur C F, recta A D, hoc eſt, ipſi B C, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur B F, eidem B C, æqualis; ideoq; B C F, triangulum eſt æquilaterum.

RVRSVS quia quadratum ex A D, quadrati ex D C, duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex D E: æqualia erunt quadrata ex D C, D E: c quibus cùm c 47. pri æquale ſit quadratum ex C E, quòd angulus C D E, ex defin. 3. lib. 11. mi. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex C E, quadrati ex D E. Æqualia ergo ſunt quadrata ex C E, A D, propterea que recta C E, recta A D, hoc eſt, rectis B C, E F, æqualis eſt, atque adeò & recta C F, quæ ipſi B C, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur C E F, æquilaterum etiam eſt, & ipſi B C F, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum B E F, eſſe æquilaterum, & ipſis B C F, F C E, æquale. Ex quo ſequitur & B C E, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cùm latera B E, C E, ipſi B C, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt E B C F, ex defin. 16. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cùm eius anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

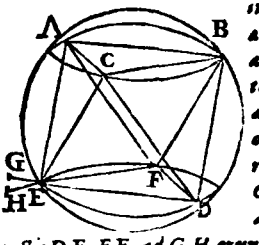
HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Nam latus pyramidis eſt æquale diametro A D, vt oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diametri A D.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circu-

culi æquales & parallelí A B C, D E F, sitæ vt sphæræ diametro dia-
a 2. metri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. a Describatur autem
quarti. triangulo æquilatero A B C, in circulo A B C, ducatur per primum
lemma, recta A B, in circulo D E F, parallela & æqualis D E, ad di-
uersas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri



in circulo D E F, describendi, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero D E F, erunt singula cum singulis lateribus trianguli A B C, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum A B, D E, æqualitatem; parallela verò, ex scholio propos. 16. lib. 11. Cùm enim parallelæ sint A B, D E, & anguli A B C, D E F, æquales; producantur rectæ D E, F E, ad G, H, erunt quoque anguli A B C, G E H, æquales. Cùm ergo parallelæ sint A B, G E, & B C, E H, ad easdem partes ductæ per A B, G E, ductæ; erunt quoque B C, H E, hoc est, B C, E F, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallelæ erunt D F, ipsi A C. Connectantur denique A F, E C, C D, D B, B F, F A, & in figura. Dico A D, octaedrum esse, hoc est, octo triangula A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ A B, D E, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ A D, B E (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ A E, B D, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas A B, D E.
b 47. primi. b Quadratum igitur ex B E, duobus quadratis ex B D, D E, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ B E, 6. quadratum ex D E, est 3. (Nam cùm per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli D E F: posito quadrato ex D E, 6. erit quadratum diametri circuli D E F, 4. At posito quadrato diametri circuli D E F, 4 quadratum lateris trianguli æquilateri D E, est 3. quod ex coroll. 1. propos. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri) Igitur & quadratum ex B D, est 3. ac proinde quadrata ex D E, B D æqualia sunt, & rectæ ipsa D E, B D, æquales. Est autem D E, ipsi A B, per constructionem, & B D, ipsi A E, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ A B, B D, D E, E A, æquales erunt, constituentq; quadratum A B D E, cuius anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4 lemmate.

RVRSVS quia B C, E F, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ B E, C F, non ad easdem partes diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ B F, C E æquales inter se, atque ad B C, E F, perpendiculares, estque rursus, vt prius, quadratum B C E F. Non aliter ostendemus, A C D F, quadratum

ejus

esse; cùm iuncta recta A D, C F, sint quoque sphæra diametri ex 4. lemmate, &c. Cùm ergo tria quadrata A D, B E, C F, constructa sint super latera æqualia A B, B C, C A, nimirum super latera trianguli æquilateri, cùm A B, latus sit quadrati A D; & B C, quadrati B E; & C A, quadrati C F; erunt omnia triangula octo A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est A D, ex defin. 27 lib. 11. & in data sphæra descriptum, cùm eius anguli solidi A, B, D, E, C, F, sphæra superficiem attingant. quod est propositum.

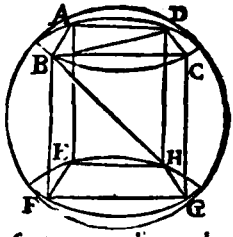
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex B E, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex D E, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

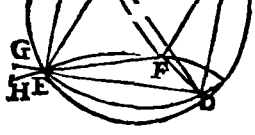
IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli A B C D, E F G H, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. a Descripto autem quadrato A B C D, in circulo A B C D, ducatur per 1. lemma recta A D, in circulo E F G H, parallela E H, & æqualis ex eadem parte centrorum, qualatus quoque erit quadrati in circulo E F G H, descripti, ob circulorum æqualitatem Completo ergo quadrato E F G H, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati A B C D, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum A D, E H, æqualitatem: parallela verò, ex scholio propos. 16. a 6. quarti.



lib. 11. Nam quia parallela sunt A D, E H, suntque anguli æquales A D C, E H G, nimirum recti; erunt quoque D C, H G, parallela, cùm sint ad eosdem partes plani per A D, E H, ducti, & sic de cæteris. Iungantur denique ad easdem partes centrorum rectæ A E, B F, C G, D H, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico A G, esse cubum, hoc est, sex quadrilatera A B C D, E F G H, A D H E, B C G F, A B F E, C D H G, esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis B H, B D, erit ex lemmate 4. B H diameter sphæræ; at B D, diameter circuli A B C D, quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex B H, sesquialterum est quadrati ex B D; quadratum autem ex B D, quadrati ex B C, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. si statuatur quadratum ex B H, 3. erit quadratum ex B D, 2. & quadratum

dratum ex D C, 1. atque adeò quadratum ex B H, quadratiex D C, triplum erit. Rursus quia quadratum ex B H, est 3. & quadratum
a47.primi. *ex B D, 2. a estque quadratum ex B H, aquale quadratis ex B D, D H, quod angulus B D H, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum est quadratiex D H. Fuit autem idem quadratum ex B H, triplum quadrati ex D C. Aequalia ergo sunt quadrata ex D C, D H, ac proinde recta D C, D H, aquales. Cùm ergo oppositis lateribus G H, C G, aquales sint, erunt omnia quatuor latera aqualia in parallelogrammo C H. Cùm igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit C H. Eadem ratione & B E, A H, B G, quadrata ostendentur: Sed & A C, E C, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se aqualia, ob laterum aqualitatem. Cubus igitur est A G, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus, cùm eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæra contingant. quod est propositum.*



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ B H, triplum esse quadrati lateris cubi D C, vel D H, vel A D, &c.

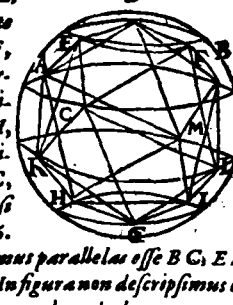
MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis est circulo A B C, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoq; est lib. 14. propos. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

b 12. *sexti.* *REPERIATVR* b *recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ data, & pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiatq; ex coroll. propos. 6. lib. 10. & numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiusdam linea, ad cuius internallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Describi*
c 1. *quinti.* *pto maximo circulo in sphæra data,* c *accommodetur in eo recta, quæ inuenta semidiametri sit dupla, cùm hæc recta minor sit diametro sphæræ: situe illius circuli maximi, & infrà probabitur. Nam si per eam*
d 11. *Theod.* *rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* d *faciet id circulum A B C, in sphæra, cuius semidiameter, ex constructione.*

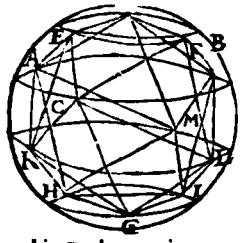
diens, potentia ſubtripla eſt recta initio inuenta. Deinde inueniatur a rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæra diameter, & 12. ſe-
pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono xii.
deſcripti; Erit q. & 13. ad 1. ita per coroll. propoſ. 6. lib. 10. quadratum
recta inuenta ad quadratum alterius lineæ, ad cuius internallum
alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo A B C, parallelus;
quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta aqua-
lis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro,
ex iis, quæ ad propoſ. 1. lib. 4. demonſtrauimus, & per eam rectam pla-
num extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circu-
lum maximum rectum, ex ſcholio propoſ. 18 lib. 11. Nam per idem ſcho-
lium, planum hoc erit circulo A B C, parallelum, b faciet q. in ſphæra b 1. 11.
circulum D E F, cuius ſemidiametet ſemidiametro inuentæ æqualis Theod.
eſt. Hu duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales
ac paralleli deſcribantur G H I, K L M, quod facilè fiet, ſi illorum
diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo
ducantur, &c. c Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æqui- c 2.
latero D E F, ducatur lateri E F, in parallelo circulo A B C, ex lem- quarti.
mate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quæ æ-
qualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in circulo A B C, deſcripti:
Item huic A B, agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circu-
lo K L M, & æqualis: Ac denique huic K L,
in circulo G H I, ducatur ex altera parte
centri, parallela H I, & æqualis ipſi E F,
hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in cir-
culo G H I, deſcripti. Completis ergo tri-
angulis æquilateris A B C, K L M, G H I,
erunt ſingula latera ſingulis lateribus tri-
anguli D E F, parallela; nimirum A C,
M L, G H, ipſi D F; at B C, M K, G I, ipſi
D E, quod probabitur ex ſcholio propoſ. 16.



lib. 11. Et in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe B C, E F,
ad diuerſas partes centrorum ductas. In figuranon deſcripſimus ea
triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum con-
fuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus.
Poſtremò ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquila-
terorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ,
videlicet ex puncto D, recta D E, D A, D M, D B, D F; ex G, recta G H,
G K, G C, G L, G I, &c. Et in figura apparet. Ex quolibet enim pun-
cto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico D G, eſſe Icoſae-
drum, hoc eſt, triginta triangula D E F, D E A, D A M, D M B,
D F B, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur,
oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe au-
tem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16.

lib 13) suos 12 angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos describsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in sphæra descripti Icosaedri DG, 12 anguli statuti in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia 5 rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cùm sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in uno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cùm ergo eius latera sint æqualia, utpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, Ek, EC, EF, ED: Et kHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia Ak, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icosaedri æqualia kH, kG, kC, kE, kA: Et GIMAk, ob latera quinque Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, Hk: Et ILCkH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, Gk, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinq; æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEk, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, GF, CE, Ck, ita ut 12. pentagona æquilatera, æquiangulaq; inter se æqualia constituantur. Quoniam verò recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppositi lateri æquidistat, ut in scholio propos. 8. lib 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AkCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. a *Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt,* b *facientq; circulos parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta kE, ipsi HI, parallela in pentagono ILCkH: Et iuncta kM, ipsi GI, in pentagono GIMAk: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMGH: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, kLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta kL, ipsi EF, in pentagono GLFEk.* c *Igitur EF, HI, cùm sint eidem iunctæ AB, vel kL, parallelæ, inter se parallelæ sunt, Eademque ratione DE, GI, cùm sint eidem iunctæ BC, vel kM, parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea quæ plana circulo-*



a 15 Vndecimi
b 1. 11. Theod.
c 9. Vndecimi.

culorum D E F, G H I, per rectas D E, E F, & H I, G I, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra D E F, A B C, k L M, G H I, parallelis inter se sunt: & tum circuli D E F, G H I, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quàm circuli A B C, K L M, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex tunctis A B, B C, C A; & k L, L M, M k, constituuntur: quippe cùm latera hæc sint recta subtendentes angulos pentagonorum æqualium.

QVIA verò tuncta recta K B, quæ connectit non ad easdem partes extrema K, B, parallelarum K L, A B, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæra diameter est, & angulus B A k, rectus ex 4. lemmate, quòd K A, connectat ad easdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; a erit quadratum a 47. diametri k B, æquale duobus quadratis ex A B, A k. Rursus quia in primi. pentagono E A M B F, recta tuncta A B, angulum A M B, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit A B, tuncta ad E F, vel A k, ipsi E F, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cùm latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus de- b10 ter cagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæra k B (quæ tiidee. cambas A B, A k, potest, vt ostendimus) latus pentagoni in eo circulo, in quo A B, latus est hexagoni, & A k, vel E F, latus decagoni. Quare sphæra diameter k B, ad tunctam A B, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at verò ad E F, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cùm tam A B, c12. ter latus trianguli æquilateri in circulo D E F, potentia triplum sit semi- tiidee. diametri sui circuli; erunt circuli D E F, A B C, ac proinde & G H I, & L M, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio proposituros descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri insitio inventa, mirorem esse diametro sphæra, vt suprà diximus.

HIS demonstratis facili negotio includemus, solidam figuram à nobis descriptam D G, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum D E F, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, à quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeò vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagonii in eodem illo in circulo. Nam descripto Icosaedro D G, in sphæra, ostensum est

esse diametrum sphæræ K B, ad B F, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

E X quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cùm duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles con-
a 20. primi. stituant: a ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

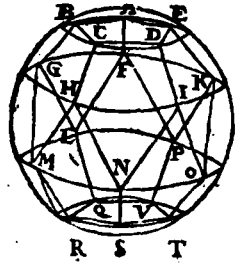
COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo A B C, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo A B C, descriptorum, ita diameter sphæræ K B, ad iunctam A B, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum A B. 6 Est autem latus hexagoni in circulo A B C, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ A B, quòd A B,
b 12. 13. decimi. sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo A B C, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo A B C, descripti.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, & vt in antecedenti propositione A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ita vt semidiametri circulorum A B C D E, Q R S T V, sint potentia subtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri verò circulorum F G H I K, L M N O P, potentia sint subtripla duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo A B C D E, pentagono A B C D E, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri C D, ad easdem partes centrorum parallela H I, in circulo F G H I K, & æqualis lateri pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem H I, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela L P, in circulo L M N O P: Hinc tandem L P, ad easdem centrorum partes ducatur parallela Q V, in circulo Q R S T V. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis (quorum tamen latera, & confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni



A B C-

ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallela ducta sunt: quod demonstrabitur, vt in problemate secundo ostendimus, parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erunt ipsi BC, &c. Postremò ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectæ videntur esse emissæ. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEkOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPkE, kPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propositione 17. lib. 13.) suos viginti angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos describimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem viginti puncta notauimus.

SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, k, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & Ik, lateri DE, in pentagono DEkOI; & kF, ipsi AE, in pentagono AEkPF; & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur recta AB, AE, rectis FG, Fk, parallela sunt; a erit & planum per FG, Fk, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quòd hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propositionis 16. lib. 11. plana per FG, Fk, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeò, ex eodem scholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per Fk, kI, & planum per kI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per Fk, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, k, ducta in sphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIk. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, Erunt que tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quàm duo FGHIk, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, Ik, kF; LM, MN, NO, OP, PL, c quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

a 15. Undecimi.

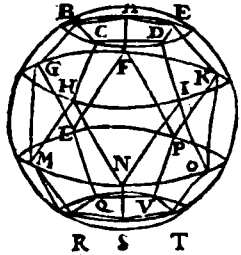
b 1. 1. Theod.

c 4. primi.

DEIN-

DEINDE quia ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. recta iuncta ND, MB, lateri CH, parallela ſunt in pentagonis CHNID, BGMHC; a erunt quoque ipſa iuncta ND, MB, parallela: Sunt autem & aquales, quod aquales angulos in pentagonis aqualibus ſubtendant. b Igitur & iuncta NM, BD, aquales erunt ac parallela. Eodem modo aquales erunt & parallela, iuncta NO, CE, cùm connectat duas NC, OE, aquales ac parallelas, quod & utraque lateri DI, ſit parallela. c Circulum igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelum eſt, cùm ille ducatur per rectas NM, NO, hic verò per rectas BD, CE, quibus illa parallela ſunt oſtenſa. Non ſecus oſtendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſint.

a 9. Undecimi.
b 13. primi.
c 15. Undecimi.



RVRSVS quoniam iuncta recta EF, OV, cùm ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVKPO, aequidiſtent, d parallela ſunt; necnon & inter ſe aquales, quòd angulos aquales in pentagonis aqualibus ſubtendant, e erunt & recta iuncta EO, FV, parallela & aquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in uno plano eſt, f cùm EF, OV, in eodem ſint plano cum parallelis EO, FV. Eſt autem & in circulo, g propterea quòd planum, in quo exiſtit, in ſphara circulum efficit. Igitur ex iis, quae ad propoſ. 31. lib. 3. demonſtrauimus, cùm in eo quadrilatero oppoſitae latera aqualia ſint, quadrilaterum rectangulum eſt EFVO; ac proinde cùm omnia latera aqualia ſint, ſubtendentia angulos aquales in pentagonis aqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum poteſt lateris FE, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. hoc eſt, recta iuncta FG, quòd aquales ſint FG, FE, ſubtendentes angulos pentagonorum aqualium: ideoque qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectae FG, talium 2. erit quadratum rectae FO, & ambo quadrata ſimul earundem partium 3. Quibus h cum aquale ſit quadratum iunctae rectae OG, quae diameter ſphaerae eſt (Nam cùm aquales ſint iuncta FG, ON, ſubtendentes aquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallela, quod duabus parallelis AB, ST, parallela ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter ſphaerae) erit quoque quadratum diametri ſphaerae 3. qualium 1. eſt quadratum rectae FG, hoc eſt, quadratum i diametri ſphaerae quadrati rectae FG, triplum erit. i Eſt autem & quadratum lateris trianguli aquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphaerae ad quadratum rectae FG, ita quadratum lateris trianguli ad k quadratum lateris hexagoni; k atque adeò vt diameter ſphaerae ad rectam FG, ita latus trianguli aquilateri ad latus hexagoni: Vt autem re-

d 9. Undecimi.
e 33 primi.
f 7. Undecimi.
g 1. 1. Theod.
h 47. primi.
i 12. tertiidec.
k 22 ſexti.

tem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, sta est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod FG, sit latus pentagoni. Igitur ex aqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli aquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in apposita formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoque vt diameter sphæra ad latus trianguli, hoc est, ad tunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ aqualis.

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt tuncta recta FG, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE; erit quoque vt latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæra ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proximè demonstratum est. Igitur ex aquo erit, vt diameter sphæra ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæra ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ aqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram AS, à nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli solidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & trian-

& triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo A B C D E, figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.

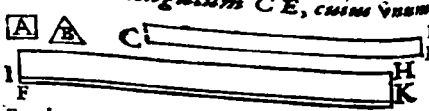
MANIFESTVM quoque eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtenderemus, ſi omnia quinque corpora regularia in eam ſphæram deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cùm poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper à minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quàm octo quadrata ſimul.



HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus D E, lateri eiuſdem quadrati æquale: Erit quoque rectangulum C E, 21. ſext. *octuplum quadrati A, a cum ſit, vt C D, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſa, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi G H, hoc eſt,* b1. ſext. *altitudini trianguli B, b vigecuplum eſt trianguli B; Et autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum F H, quippe cum baſis F G, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit* c 12. quarti decimi. *quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum F H, maius eſſe rectangulo C E. c Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus D E, potentia ſeſquitertium eſt eius perpen-*

perpendicularis, hoc est, lateris GH: Latus autem FG, ad
potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quòd FG, sit 10.
8. hoc est, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD
DE, ad GH. Est enim maior proportio 25. ad 16. supernonesq
sextadecimas, quàm 4. ad 3. sesquitertia, quòd maior sit fra
quàm 3. a Fiat vt FG, ad HK, quàm ad CD, ita DE, ad HK, eritque maior
proportio DE, ad HK, quàm ad CD, ita DE, ac proinde maior erit GH,
ad CD, itaDE, aequale: ideoque EH, maius, quàm CE. Quod est

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ
scripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra de
pti.

QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæra descrip
perficies cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo verò q
quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæ
scripti, quòd quadruplum diametri quadratis quadruplum sit quadratæ s
diametri, ex scholio propos. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata sem
metri sphæra æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem
Quod est propositum.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in e
sphæra describantur, erit perpendicularis è c
sphæræ ad vnam basin Icosaedri ducta, maior pe
dicularis ex eodem centro sphæræ ad vnam basin
dri, & cubi ducta.

NAM e quia latus octaedri maius est latere Icosaedr
dem sphæra; erit & vnum triangulum octaedri maius quoque
angulo Icosaedri. Quare si & vtrumque solidum ita intra sph
bituatur, vt triangulum vnius vtrumque triangulo alterius sit par
longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quàm triang
Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæra
Ac proinde perpendicularis è centro sphæra ad basin Icosa
Re maior erit perpendicularis ex eodem centro ad basin
Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendi
quòd basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circum
deoq; æqualiter à centro distent; erit quoque perpendi
Octaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.

IV.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula aquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæræ semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora vigintis triangulis aquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superiorum. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cùm vigintes triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo antè demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDItatum quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, a *vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum*: b *est autem latus cubi latere Icosaedri maius*; *maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.*

a 11. quarti. decimi.

b 18. ter uidet.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basin cubi demissa, vt in 3 theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Et solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contenti, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basin cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum

dum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icoſaedrum, quàm cubus. Quod eſt propoſitum.

III.

CVBVS Octaedro maior eſt.

QVONIAM eſt, a *vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ* b *(Namb cùm latus cubi maius ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ; erit latus cubi multò maius ſemidiametro ſphæræ) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.*

a 27. quarti. b 18. ter tiidec.

IV.

OCTAEDRVM Tetraedro maius eſt.

QVONIAM baſis octaedri minor eſt baſe Tetraedri, c *quòd baſis Tetraedri ad baſem octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſin octaedri demiſſa, maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quàm ſuprà theoremate 3. oſtendimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorem eſſe perpendiculari in octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies octaedri ſuperficie Tetraedri maior,* d *cùm illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſin Octaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei octaedri, maius eſt ſolido contento ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſin Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cùm ex ſcholio propoſ. 20. lib. 14. illud ſolidum octaedro ſit æquale, hoc verò Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

c 14. quarti. d 14. quinti. decimi.

ALITER. Quoniam eſt, e *vt latus Octaedri ad latus tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id eſt, ad ipſum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cùm ergo latus Octaedri maius ſit tertia parte lateris Tetraedri (Nam* f *quia quadratum lateris Tetraedri ſeſquitertium eſt quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem ſeſquitertia, ideoque multò minorem tripla;* g *ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

e 22. quarti. decimi. f 18. ter tiidec. g 10. quinti. h 17. quarti. decimi.

ALITER. h *Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum ſe habet, vt 12.*

& rectangulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. *quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente* $\frac{8}{9}$. *lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quòd eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.*

a 32. quarti decimi. *ALITER. Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor verò quàm triplus Octaedri. (Nam* b *cubus ad octaedrum est, & latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quàm tri-*

b 27. quarti decimi. *plum semidiametri sphæræ, quòd & tota diameter, quæ cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quàm triplum) Erit Octaedrum maius, quàm Tetraedrum. Quod est propositum.*

EODEM prorsus ordine se mutuò superant conuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

c 9. quarti decimi. d 18. tertiidec. *QVONIAM enim* c *est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, & latus cubi ad Latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius,* d *& suprà demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.*

SVPERFICIEM verò Icosaedri minorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulò ante theoremate 4. ante comparationem solidi tatum quinque corporum Regularium.

e 27. quarti decimi. *DEINDE* e *quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, & latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, & in theoremate tertio, quo ostendimus cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri maior.*

f 14. quarti decimi. *DENIQVE* f *quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.*

VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita & quò maius fuerit corpus, eò maiorem quidem habeat etiam superficiem, at

g 18. tertiidec. *minus latus. Nam* g *& suprà demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius verò superficies atque soliditas, & demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius verò conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra*

scri-

ſcriptæ ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atque ab Euclide deſcriptæ, ſe mutuò ſuperant, a vt ſuprà oſtenſum eſt, ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexæ, atque ſoliditates ſe mutuò ſuperant, & hoc loco demonſtrauimus. a 18. 100 tiidec.

CÆTERVM prætereundum non eſt hoc loco id, quod à Pappo demonſtratum eſt lib. 4. Mathematicarum collectionum; ſoliditates videlicet quinque corporum Regularium, ſi iſoperimetra ſint, atque ideireo, non in eadem ſphæra conſtructa, longè aliter ſe habere, quàm à nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Itaque Icoſaedrum ſuperet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius ſit.

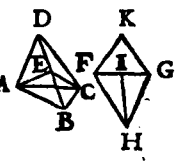
INVENTIO ANGVLI INCLINAtionis duarum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cùm perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum A B D, C B D, in quibus exiſtunt (b Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis A E C, baſium A B D, C B D, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur F G H: triangulum æquilaterum ſuper rectam F G, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum A B D, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, conſtituatur ſuper F G, triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc eſt, vtrique perpendiculari A E, C E, cùm perpendiculares H I, A E, C E, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem eſſe angulo inclinationis A E C, baſium A B D, C B D. Cùm enim latera F K, K G, æqualia ſint lateribus E A, E C; & baſis F G, baſi A C: c Æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico inſuper angulum inclinationis A G E, acutum eſſe. d Cùm enim latus A D, vel illi æquale

b 8. primi.



c 8. primi.

d 12. quarti.

æquale AO, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cùm in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

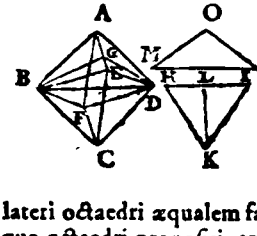
COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & latera pyramidum eoſdem ſubtendentia ſint æqualia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; ſectum in G, rectæ ducantur BG, DG, quæ cùm perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtunt [a] (quod in triangulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIk, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta kL, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti, triangulũ OMN, habens vtrumq; latus MO, NO, perpendiculari kL, æquale, hoc eſt, vtriq, perpendiculari BG, DG, cùm perpendiculares kL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cùm enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GD; & baſis MN, baſi BD; [b] Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico propterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum.



[a] 6. primi.

[b] 8. primi.

Cùm

a Cùm enim diameter octaedri B D, dupla sit potentia lateris A B : *b* latus verò A B, potentia sesquitertium rectæ B G: qualium partium 8 ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, earundemq; 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo simul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris B D, in triangulo G B D, maius est quadratis simul laterũ G B, G D; Ac proptereà angulus G B D, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus. *a* 14. *secundi.* *b* 12. *quarti decimi.*

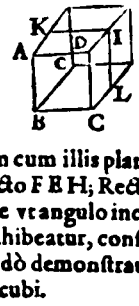
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cùm enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, D G, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est B D; *c* omnes inter se æquales erunt, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales. *c* 8. *primi.*

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus A B C D E F G H, in quo secetur latus D E, bifariam in I, nec non & latera illi opposita in quadratis A E, E C, cõmune latus illud D E, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur I k, I L; *d* quæ cùm æquales, ac parallelæ sint lateribus E F, E H (quòd & k F, I E, inter se, necnon & I E, L H, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoq; *e* angulos rectos ad latus D E, efficiant, continebunt k I L, angulum inclinationis basium A E, E C, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam verò rectæ I k, I L, parallelæ existentes rectis E F, E H, & non in eodem cum illis planò, *f* angulum k I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modò demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



d 33. *primi.* *e* 29. *primi.* *f* 10. *vndecimi.*

COROLLARIVM.

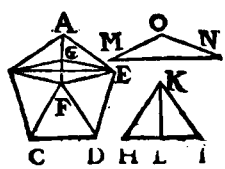
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicuè concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidibus Icosae-

dri, cuius basis pentagonum A B C D E, ex quinq; Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diuiso itaque latere A F, bifariam in G, ducantur ex triangulorum A B F, A E F, latus A F, commune habentium, angulis B, & E, lateri A F, oppositis rectæ B G, E G, quæ cùm ex demonstratis in probl. 2. huius scholij, perpendiculares sint ad A F, communem sectionem planorum A B F, A E F, in quibus ducuntur, comprehendent B G E, angulum inclinationis basium A B F, A E F, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulũ æquilaterum H l k, super rectam H l, lateri Icosaedri æqualem fabricatum,



hoc est, cuius triangulo l Icosaedri, ipsi videlicet A B F, æquale, in quo ducta recta K L, ad H l, perpendiculari, constituatur super recta M N, quæ rectæ B E, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum O M N, habens vtrumq; latus M O, N O, perpendiculari K L; æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari B G, E G, cùm perpendiculares k L, B G, E G, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum M O N, angulo B G E, inclinationis basiũ A B F, A E F, æqualem esse. Cùm enim latera O M, O N, æqualia sint lateribus G B, G E, & basis M N, basi B E; *a* Æquales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc etiam angulum inclinationis B G E, esse obtusum. Cùm enim B G, angulum rectũ faciat A G B; *b* erit recta A B, maior quàm recta B G; ad eundemq; modũ A E, maior erit quàm E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoque erunt rectis O M, O N, cùm hæ rectis G B, G E, positæ sint æquales. Si itaq; recta B E, super rectam sibi æqualem M N, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum M O N, ita vt rectæ A B, A E, rectas O M, O N, prorsus includant. *c* Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At hic obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales; per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintam. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multò igitur magis obtusus erit angulus M O N, hoc est, sibi æqualis B G E.

a 8. primi.
b 19. primi.
c 21. primi.

COROLLARIVM.

NON obscurè quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cùm singuli anguli inclinationũ contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, F G, subtendanturq; à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est B E: *d* omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & rectæ: illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, *e* æquales erunt.

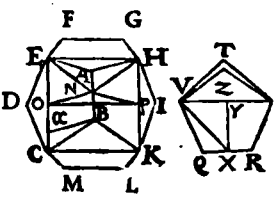
d 8. primi.
e 4. primi.

ANGV.

V.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15 quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnũ latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B k L M C, ad latus A B, conuenientia, duo quidem A B C D E, A H I k B, ſecundũ idem latus commune A B; alia autem duo A E F G H, B C M L k, ſecundũ angulos E A H, C B k. His porrò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C, K H, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorũ D, B, I, A. Diuiſo autem latere A B, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum A B C D E, A B K I H, ad A B, perpendiculares N O, N P, ſecantes latera E C, H K, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cùm rectæ E C, H K, ipſi A B, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur N O, N P, angulum O N P, inclinationis baſiũ A B C D E, A B k l H. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam Q R, lateri Dodecaedri A B, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum Q R S T V, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi A B C D E, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur V S, æqualis exiſtens rectæ E C, cùm & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, anguloſq; contineant æquales. Diuiſa deinde recta Q R, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; propterea q; perpendicularis ad V S, cùm V S, ſit parallela ipſi Q R, ex ſchol. propoſ. 8. lib. 13. Ac poſtremò ſuper recta V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumq; latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cum latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, anguloſq; comprehendant æquales; *b* Aequales erũt & baſes N E, N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoque & reſidui ex rectis; anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erunt. Quoniam igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec non & angulis V X Y, V Y X, trianguli V X Y (ſunt enim E O N, H P N, V Y X, oſtenſi recti) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum; *c* Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis late-



a 4. primi.

b 4. primi.

c 26. primi.

lateribus P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, [illegible] quales existentes ipsi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam verò, quia O E, P H, æquales sunt, ac parallelæ; a erit quoq; recta
a 33. primi. coniuncta O P, æqualis & parallela ipsi E H, ideoq; æqualis ipsi E C, hoc est, rectæ V S. Quam ob rem, cum latera Z V, Z S, lateri-
b 8. primi. bus N O, N P, æqualia sint; basis item V S, basi O P; b æqualis erit angulus V Z S, angulo inclinationis O N P. Dico etiam angulum hunc O N P, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta B α, ipsi N O, parallela; cum sit quoq; N B, ipsi O α, parallela, ex scholio
c 34. primi. propos. 8. lib. 13 Parallelogrammum erit N O α B, c ideoque recta B α, ipsi N O, æqualis. Quia verò B C, latus pentagoni oppositum
d 29. primi. angulo C α B, qui rectus est (d æqualis nimirum interno C O N) maius est latere B α, hoc est, recta N O, vel vtraq; Z V, Z S, quæ ipsi N O, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ T V, T S, maiores duab. rectis, Z V, Z S. Cadit igitur punctũ Z, intra triangulũ T V S, ita vt rectæ T V, T S, rectas Z V, Z S, includant omnino; Atque proinde angulus V Z S, ideoque illi æqualis O N P, maior est angulo pentagoni T: Hic verò, cum sit pentagoni angulus, paulò antè, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multò igitur maior recto erit angulus inclinationis O N P, ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cùm enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt N O, N P, subtendanturq; à rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certè, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta O Γ, lateri cubi inscripti E H, quod angulum pentagoni E A H, subtendit, æqualis: e Erunt omnes inter se æquales, cùm & omnes illæ
e 8. primi. perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint: necnon & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.

Elementi decimisexti Finis.