Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS accuratiq; scholiis illustrati: nunc quarto editi, multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

BIBLIOTECA PUBLICA DEL ESTADO

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate Iesv.

FRANCOFVRTI
Ex officina typographica Nicolai Hoffmanni, sumptibus
IONÆ RHODII.
M. DC VII.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES:

I.

Vnitas est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

Hactenus egit Euclides de prieri Geometria parte, ea scilicet, qua circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt absq; eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometria Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non rara pleraq; laterum sunt illa linea, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur. Vel si non sunt Irrationales, longitudine certe inter se sunt incommensurabiles atq; adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundē linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absq; hu nullo modo cognoscatur, opportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrina suis ordo, ratio q; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principijs, definit initio vnitatem, docetq; eam esse, secundum quam vnamquodq; eorū, quæ sunt,

vnum esse dicitur. Nam secundum vnitatem vnum lapidem, vnū animal, vnum corpus, & c. dicere solemus. Caterum vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

Cum numerus sit multitudo quadam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiuslibet numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates quarum qualibet, octaua pars dicitur octonarij. Sic quoq; numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, & c.

Ex his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos vna eademq; mensura, nimirum vnitas vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurima earum mensuram communē non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

Pars est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

Non est dissimilis hac definitio illi, qua Euclides li'. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definitum hac solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorū 12. 18 24. 30. 60. 630. & c. quia illo singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cū illū singuli hi metiantur, vt perspicuū est.

Omnis autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42 & in reliquis eodem modo.

IV.

Partes autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem. sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cū hoc numero 18. Quamuis enim, cum non metiatur, nisi per suas vnitates pars ipsius dici non debeat; apte tamē congruenter q; partes poterit appellari, quod quinq; contineat vnitates,

tes, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantã, vt volunt nonulli; alioquin superuacanea esset hac definitio quarta, qua partem aliquantam comprehendit.

Caterum partes quacunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eũ, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis deorum numerorũ mensura metiatur minorẽ per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintas, Tales partes sunt 6 huius nemeri 10. Nam communis eorum mẽsura 2. metitur 6. per 3. & 10. pars. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

Quod si rogas, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiã illum, qui partes non autem idipsũ quinto lib in magnitudinibus præstiterit; Neq; enim magnitudinem illam minorem, qua maiorem non metitur partes appellauit; sed tantum eam, qua maiorem metitur, partem. Respondemus. huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt proposi. 4. huius lib. ostenditur; pars quidẽ, cũ ipsũ metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus lõge aliter se res habet. Non enim proposito duabus magnitudinib. inaqualibus necessario minor aut pars aut partes est maioris, cũ ea persæpe sint incommẽsurabiles, vt aperto libro decimo demonstrabit, atq; adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nã solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illũ non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeru & partem, & partes explicauit.

V.

Multiplex vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

Quemadmodum ille solum numerus minor, maioris pars dicitur qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur. adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30, & hic illius multiplex est &c. Si vero maiorem minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris

non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur: Nam si metietur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4.10.40.100.1000. pares vocantur, quoniã diuidiuntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2.5.20 50.500.

VII.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur. vel qui vnitate differt à pari.

Omnes hi numeri 5.11.15.37.101.1001. impares nominantur quia bifariam diuidi nequeunt Vel certe quia vnitate differunt ab his paribus 4.10.14.36 100.1000. vel etiam ab hus 12.16.38.102.1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatẽ in numeris prorsus esse indiuiduam Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeo bifariã diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars esset quinque vnitates, & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

Quia numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltẽ binarius metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerũ parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8 per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24 pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. & c.

IX.

Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Quod si numerum parem metiatur numerus par per imparẽ numerum, v. cabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15 Sic quoq; par numerus 6 metitur eundem per numerum imparem 3 &c.

Cæterum si recte dua prox ima definitiones expendantur perspicuum erit fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar Nam par numerus 24. eum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerũ imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum.

surdum vt exclauderēt numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares & pariter impares videtur esse, addiderunt vtriq; definitioni particulam tantū, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerū parem tantū. Pariter aūt impar, quam par numerus metitur per numerum imparem tantum. Item, sit vt propositus numerus par 24. neq; pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiā par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum vt dictum est, par 8 per imparem 3. verum etiā par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quoddāmodo naturā vtriusq; vt constat. Itaq; tria constituentur genera numerē pariū inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar: pariter par & pariter impar, qui à quibusdā, pariter par & impariter appellabitur. Veruntamen hæc omnia vera quidē sunt, & ex sententia Pythagoreorum Nicomachi Boetij, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionib traditis, in quibus nō reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 14. lib. 9. vbi manifeste omnem numerum parem, quam aliquis par per parem metitur pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum deniq; quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonstratq; omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares: hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum. Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros deniq; qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demōstrationibus illorum propositionum, hos postremos numeros, alios q; similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; vnde eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

Quod si numerum quempiã nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita neq; pariter par, neq; pariter impar, neq; impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

Sicut numerus ille, quem solã vnitas metitur, Primus metitur: ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri quos prater vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli eorum habeant numeros, qui eos prater vnitã emetiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8 sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur. quamuis enim priorem metiantur hi numeri 1. & 5 posteriorem vero isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrumq; metitur, sed sola vnitas vtriusq; est cõmunis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 9. 16. primi inter se dicentur, quod prater vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram cõmunem, quamquã postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Deniq; vnitas, & quinus numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: quia sola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

Numerum, quem prater vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra cõpositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum horum numerorum 3. 5 metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, prater binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIV.

Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

Duo numeri, vel plures, quos prater vnitatẽ, aliquis alius numerus, tanquã mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit cõpositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem prater vnitatẽ, numerus quispiam metitur, cõpositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se cõpositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus vocetur.

NVME-

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, cum tories compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

Vt numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatus fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8 multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumserimus, tot ies scil. quot vnitates in multiplicante 8 continentur, procreauerimus eundem numerū 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1200. 12000. &c. dicētur multiplicare numerum 456. cū hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. totiēq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit, Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. & 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et si de reliquis.

Sequitur ex hu productum ex multiplicatione numerū eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantiū habet ad vnitatem. Cum n. ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicātium vnitatem cōtinet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrū multiplicātium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaq; Multiplicatio siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

Multiplicatio numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

Sic vides ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8 vt 6. ad 1.

Huic definitioni addenda est hac alia docens quid sit numerum diuidere numerum: quippe qua necessaria omnino sit ad ea, qua nos in iis, qua sequuntur, sumus demonstraturi.

Numerus numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

Vt numerus 6. dividere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit nu-

rit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. dividere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

Hinc fit numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quotiens diuidens numerus in diuiso continetur; cõtinebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continere: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quam diuisus numerus ad diuidentem. Itaque diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

Diuisio numeri per numerum, est inuentio numeri qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

Ita vides ex diuisione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48 ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

Ex his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem Diuiso enim numero A. per B. procreatur numerus C. Dico numerum A. gigni, ex

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1. *ductu numeri C, in numerum B Quoniã enim ex defin. multiplicationis numerus ex C, in B, procreatus is, a se habet ad B, vt C, ad vnitatem D: Ex definitione autem diuisionis, ita quoq; se habet A. ad B vt C, ad vnitatem D perspicuum est, numerum ex C in B, genitum esse numerum A, cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.*

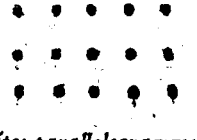
His omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris cũ fractis. Id est, Numerus fractus numerũ fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhaereant integris, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis. Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso cõtinetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoq; numerus, qui ad alterutrũ multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus 4 multiplicare dicitur numerum 20. quando numer. 20. toties fuerit com-

sit compositus, quod sunt in ½. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissē duntaxat est in ½ sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, qua est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerū ½. si ½. sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad ½. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt ½ ad 1. Sic etiam ½. & ½. se mutuo multiplicare dicuntur quando ½ sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum ⅓ tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando ½ sumptus fuerit per sui semissem, quia & ½ semissem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur ⅛. qui numerus tertia pars est numeri ½. siue ⅔. & semissis numeri ⅓ siue ⅙. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusque ad finem lib. 9.

Rursus numerus ½ diuidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum ½. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. qua numeri diuisi 10. ad diuidentem ½. Sic quoq; ¾. diuidere dicetur ⅛ quando sumptus fuerit numerus ⅓ indicans diuidentem numerum ½. non totum cōtineri in diuiso ¾. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus ½. idem sit qui ⅜ liquido constat tertiam huius partē, nimirum ⅛. contineri in ⅜. Caeterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia haec, quae de multiplicatione, diuisioneque fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

Cum autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorū numerorum planus appellatur, quia secūdū suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulū refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac recta linea angulum rectum ambiētes parallelogrammum rectangulum contiuere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus.

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorũ 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6 quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſita, prout latera exigũt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterũ vero 4, complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

Caterum cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras, Euclides ſolum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorũ diſputat, quod omnis e parte quadrata Geometrico, & figura altera parte longiori, ſimiles ſint & æquales, ſiue ambitum, ſiue aream, capacitatemve ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum ſpectat: tamẽ ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, Arithmeticam Iordani perlegerit.

Poteſt autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8 nec non 2. & 12. quia tã ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus, Ita quoq; numerus planus 100 latera habet 5 & 20: 4. & 25: 2. & 50: 9 & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

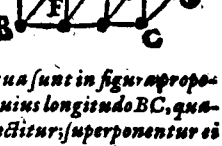
Quia vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quod quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planũ numerum eſſe compoſitum. Quod etiam de numero ſolido, qui iam iam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem, aliquãdo dici poſſe numerum planũ, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicata mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

Cum vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4 producitur numerus 12. & ex 12 in 2. generatur 24. appellabi-

pellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2.3.4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latũ atque profundum disposita referunt figuram quandam solidam, quæ parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimẽsiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidẽ longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8, basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24 altitudinem habens trium vnitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatũ, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerũ 24. in altitudine habẽs 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro basi, quæ bus sumptis faciet numerũ eundẽ solidum 24 cuius altitudo



continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit BGGF, octo vnitatũ, cuius longitudo BC, quatuor vnitates, & BF, latitudo duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus cõtineat 24. vnitates, eiusque altitudo BA, vnitates tres. Similiter si basis sit ABFE, sex vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietq; totus solidus numerus rursum 24. altitudinem BC, habens quatuor vnitatum. Si denique basis sit ABCD, 12. vnitatum, cuius lõgitudo EC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis & æqualis EFGH, constabitque totus numerus solidus 24. vnitatibus, quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 4. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.

Denique & vnitas interdum solidus appellabitur numerus, et si non propria, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earum multiplicatione pro. reantes.

Definit autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione, quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

Planum

Planum illum numerū, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longū & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum.

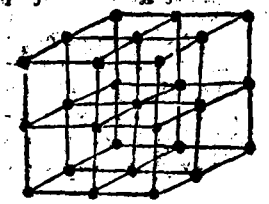
Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nā si eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideoq; æqualiter æquale erit.

Alteruter autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix verò quadrata ab Arithmeticis pleriſque appellantur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

Solidum quoque illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo & altitudo, siue profunditas, æquales sint, Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorū inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. siue ex eorū multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27 Omnes enim illius vnitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubū Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



Quilibet verò trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur Geometrū latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi,

cũndi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eędem partes: Vel certe, cùm primus ſecundum & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (huiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba, vel certe cum primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidu, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehẽdit olum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionib. reliquis minoris inæqualitatis. Namin porportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecũdi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplicivero, cum primus ſecundi, & tertius quarti eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidu. At vero ex ea nequaquã deprehẽdere poſſumus, quinã numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecũdi, & tertius quarti, neq; æque multiplex eſt, neq; eãdem pars, neq; eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eãdem inſuper illius partem, eaſdemve partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportionis, rationales copioſe explicuimus. Itaq; his in numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirum triplus: item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadẽ pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videl. tres partes quarta. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exẽplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem videl. ſextam. In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas. In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem videl. quintam, continet. In vltimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes cõplectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

Quotieſ-

Quotiescunq; igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus conferãtur, quod primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, cõtineat aqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex cõcedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referãtur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti esse partem eandem, vel partes easdem: Et è contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

Definit autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaqualitatis habent. Nam si de proportione aqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

Ex hac autem definitione aperte colligitur, aquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et cõtra eundem ad aquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eãdem habet proportionem, aquales esse. Cum n. aquales numeri sint eiusdem, vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem aqualiter contineant, eandemq; insuper illius partem, vel partes: Iterum idem numerus aqualium sit vel aque multiplex, vel eadẽ pars, vel eadem partes: Vel certe illos aqualiter contineat, eandemq; insuper eorum partem, vel partes, perspicuum est, aquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aquales, eandem habere proportionem, duxta hanc definitionem.

Rursus quæ numeri ad eandem habentes eandem proportionem, sunt illius vel aque multiplices, vel eadẽ pars, vel eadem partes: Vel certe illum aqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemq; insuper illorum partem vel partes, secundum hanc eandem definitionem, manifestum est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, aquales esse.

Pari ratione infertur, maiorus numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionẽ, maiorem esse: Ad

quem

quem autem idem habet maiorem proportionē, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

Hæc definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales $\frac{1}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. *quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad* $\frac{2}{8}.\frac{3}{8}$. *& posteriores quoq; ad eandem denominationē, vt ad* $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$ *Quo pacto autem fracti numeri ad eundem denominationē reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt* $2\frac{1}{8}.4.\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. *cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur* $\frac{17}{8}.\frac{38}{8}$ *& posteriores duo ad hos* $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$ *atque ita de cæteris.*

XXI.

Similes plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quilibet duo illius latera quibuscunq; duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus laterib. huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam rediguntur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & sex similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis hi eisdem non sint proportionalia alii illius latera nempe 8. 3. vel 12. 2.

Eodem modo vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quatuor tria vnius latera proportio. alia sint tribus quibuslibet laterib. alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eidem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 1.

Itaq; possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3 & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

Hæc porro similitudo planorum, & solidorum reperitur quoq; in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri nõ integri proportionales, & tam duo priores, quã duo posteriores inter se multiplicẽtur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri similes, &c Dixi, plerunq;, quia fieri potest, vt interdũ integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $2\frac{1}{2}$. 6 & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

XXII.

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

Numerus ille, cui omnes sua partes simul sumpta (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius l. b.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa cõstituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltimã lib. 9

Quod si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

Lucè autem clarius ex hoc loco colligitur, partẽ ab Euclide sumi tantum proparte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partib. sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici posset, siue eũ metiatur, siue non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propositis adiungẽda mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnulla alia, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12 per 3. quia multiplicatus per 3 producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12, metietur per 4, cum ex multiplicatione 4. in 3. numer. 12. produ-

producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4 metiatur 12 per 3, faciet 4 ipsum 12 toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3 multiplicans numerum 4 producet 12. Quia vero, vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idē numerus producitur ex multiplicatione 4 in 3. qui ex 3 in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12 procreari, si numerus 4 multiplicet numerum 3.

Hac quoq; definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$ metiri dicitur numerū $13\frac{5}{12}$ per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{15}{14}$.

XXIV.

Proportio numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel partes, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

Si numerus 10. cum numero 4 conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 10. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

Quæ cum ita sint perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cū primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes. Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æquali ter continet, eadem q; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

Termini, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi, nequeunt.

XXVI.

Cum tres numeri proportionales fuerint. Primus ad tertium, duplicatā rationem habere dicitur eius, quam habet ad secūdum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatā rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deincepsvno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Hac definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secūdi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita se habere, pluribus verbis antea demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

Possunt etiam huc referri definitiones illae in quinto libro traditae de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione & conuersione rationis; de ratione ex aequalitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quae circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoq; hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

Postuletur, cuilibet numero quotlibet posse sumi aequales, vel multiplices.

II.

Quolibet numero sumi posse maiorem.

Quamuis enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem cōtinuam vnitatis. Quare quilibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONUNCIATA.

I.

Qui numeri aequalium numerorum, vel eiusdem aeque multiplices sunt; inter se sunt aequales.

II.

Quorum idem numerus aeque multiplex est, vel aeque multiplices sunt aequales, inter se aequales sunt.

III.

Qui numeri aequalium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eadem partes fuerint, aequales inter se sunt.

IV. Quo-

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum metitur.

Nam vnitas sumpta totiis, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsũ metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per vnitatem.

Cum quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Numerus enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B, & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundẽ C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16 huius lib.

A.... B....
C.....

VIII.

Si numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

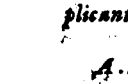
Vt quia numerus 6 metitur numerũ 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18 per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6 metitur 18 per 3 fiet numerus 18, ex multiplicatione 6. in 3 vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18 metietur per 6.

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

quem metitur, vel ab eo multiplicetur: illum quem metitur producet.

Metiatur enim numerus A, numerum C, *per* B. *Dico A, multiplicantem ipſum* B, *vel multiplicatum à* B, *producere ipſum* C.

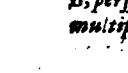


Nam numerus A, numerum C, *metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipſum* C, *producit, per defin.* 23. *Cum ergo* A, *metiri ponatur ipſum* C, *per* B; *perſpicuum eſt, numerum* A, *multiplicantem ipſum* B, *vel ab eo multiplicatum, producere ipſum* C.

X.

Numerus quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

Metiatur numerus A *numeros* B C, C D. *Dico eundem* A, *metiri quoque ex ipſis compoſitum* B D. *Cum enim A, metiatur ipſos,* B C, C D; *erit tam* B C, *quam* C D *ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo* B C *in partes* B E, E C, *ipſi A, æquales & ipſe* C D, *in partes* C F, F G, G D, *eidem* A, *æquales;*

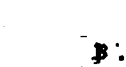


erit numerus B D, *compoſitus ex omnibus partibus* B E, E C, C F, F G, G D, *ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum* B D, *metitur. Quod eſt propoſitum.*

XI.

Numerus quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

Metiatur numerum A, numerum B, & B, numerum C D. *Dico eundem A, metiri quoque numerum* C D, *quem* B, *metitur. Cum enim* B, *metiatur ipſum* C D, *erit* C D, *ipſius* B, *multiplex. Diuiſo ergo* G D, *in partes* C E, E D, *ipſi* B, *æquales; metietur A, ipſos numeros* C E, E D, *quandoquidem numerum* B, *tam numero* C E, *quam numero* E D, *æqualem metiri ponitur. Igitur idem* A, *per pron.* 10. *metietur quoque numerum* C D, *ex* C, E, E D, *compoſitum. Quod eſt propoſitum.*



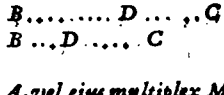
XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A totum B C, *& ablatum* B D. *Dico eundem A, metiri quoque reliquũ* D C. *Cum enim A, metiatur &*

B C,

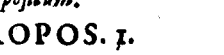
B C, & B D erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex, aut certe B D, ipſi A, æqualis erit, Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales: erit reliquus numerus D C, vel vna pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.



THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

Sint duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B; Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem G B, quæ quidem præcedentem, numerum F, D metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars ſit ipſius A E, vel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) *a* metietur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum A B, *b* Igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F *c* Igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, *d* metietur quoque reliquum E D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; *e* metietur etiam H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B. *f* Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.



a II. *pro nun.*
b 12 *pro nun.*
c II. *pro nun.*
d 12 *pro nun*
e II. *pro nun.*
f 12 *pro nun.*

SCHOLIVM.

Conuertemus cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur precedentem quoad assumpta sit vnitas.

Sint duo numeri inter se primi A, B CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest detrahatur, & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest, & reliquus FD, ex EB relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri precedentē, quoad vnitas assumatur.

A .....E..G--B
C .....F..D

Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus

a 11. pro nun. *GB precedentem FD, ex BE ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur, & FD ipsum EG, a metietur quoque GB,*

b 10. pro nun. *ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum metiatur, b metietur quoque numerum EB, ex EG GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum*

c 11. pro nun. *CF. c Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsum FD, positus sit metiri: metietur d quoque ipsum CD, ex CF,*

d 10. pro nun. *FD, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. e Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac propterea cum & ipsum EB,*

e 11. pro nun. *metiatur, vt ostensum est; f metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EBB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros*

f 10. pro nun. *AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus precedentē metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositū.*

Eodem modo & hoc verum est.

Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsq; non perueniet, sed ad numerum, qui precedentem detractū metiatur.

Nam si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, g vt Euclides demonstrauit. quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

Facile dignoscemus an duo quicunque numeri proposita sint inter se primi nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadā detractione, si nunquam reliquus precedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas, ipsi erunt inter se primi, h vt euclides docuit, si vero reliquus aliquis numerus precedentē metiatur, erunt inter se compositi cum ille idem reliquus numerus. numerum propositum metiatur, vt per spicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB,

merum GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

PROBL. I. PROPOS. 2. ij.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorũ maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadem detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad vnitatem deueniretur, *a* numeri A, B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesin. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico FD, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD, Quod enim vtrunque metiatur, ita ostendemus. Quia FD, metitur ipsum EB, & EB, ipsum CF; *b* metietur quoque FD, ipsum CF, atque adeo cum & seipsum metiatur, *c* metietur & totum CD, ex CF, FD, compositum. At CD, ipsum AE, metitur, *d* Igitur & FD, eundem AE, metietur, Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipsum EB, *e* metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A.....E.....B
C.....F..D
G------

a 1. *sept.*
b 11. *pro nun.*
c 10. *pro nun.*
d 1. *pro nun.*
e 10. *pro nun.*

Quod autem FD, sit maxima mensura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam FD, Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipsum AE, *f* metietur quoque G, ipsum AE, *g* Igitur & residuum EB: At vero EB, metitur CF, *h* Metietur ergo & G, eundem CF. *i* Igitur & residuum FD; maior minorem. Quod est absurdum Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde F, D maxima est mensura numerorum AB, CD.

f 11. *pro nun.*
g 12. *pro nun.*
h 11. *pro nun.*
i 12. *pro nun.*

Quod si minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & seipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

A.....B
C.....D

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros metiri quoq; maximam eorundem communem mensuram.

Hoc elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eadem q; ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

Ex ijs quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet nũeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres nũeri A, B, C. Primum ergo experiemur, per ea, quæ ad

A . . . . . *prop. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter*
B . . . . . *se primi: Quibus si fuerint inter se primi, non e-*
C . . . . . *runt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præterunitatem propter numeros A, & B, inter se primos. Si vero A, & B, fuerint inter se cõpositi a sit*

a 2. sep. A . . . . . *eorum maxima mensura cõmunis inuẽta D, quæ si metiatur & numerũ C, perspicuum est,*
B . . . . . *tres numeros A, B, C, esse inter se compositos.*
C . . . . . *cum habeant unum communem mensurã*
D . . . *Quod si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D. vel inter se primi vel non. Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita*

A . . . . . *vt habeant numerum communem mensuram;*
B . . . . . *metietur eiusmodi communis mensura numerũ*
C . . . . . *D, maximam mensuram numerorum A, & B,*
D . . . *per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerũ C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesin. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C,*

b 2. sep. A . . . . . *inter se compositi. b Inuenta enim numero-*
B . . . . . *rum C, & D, maxima mensura communi E;*
C . . . . . *cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A,*
D . . . . E . . *& B; c metietur quoque E, eosdem A, & B.*

c 11. prop. *Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.*

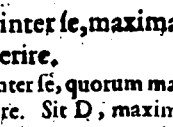
Simili arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in

quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. iij.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur tres numeri A, B, C, nō primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quæcunq; illorum mensura communis, per coroll. propos. 2 huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi *a* Sit eorum maxima mensura E. Dico E. esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipsos A, & B, *b* metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.



a 2. *sep.*

b 1. *prænun.*

Quod autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, &, C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

Hoc etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademq; in cæteris est ratio.

Pari

Pari ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se maxima eorum communis mensura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima communis mensura trium numerorum, si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura & Reliqua vero omnia perágenda, vt de tribus numeris dictum est.

iij.

THEOR. 2 PROPPS 4.

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

Sint duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primum A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A .....
B .....

Sint deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo

bj. *defi.* B ..... posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin 3. huius lib.

SED iam A, non metiatur ipsum B, *a* inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque

a2. *sep.* A .. D .. E .. F numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum
B ..... singulæ ipsi C, sint æquales. *b* Quia igitur C, pars
C .. est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B; similiter & D E, & E F; ac proinde totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C. in A, F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum

v. erat.

THEOR. 3 PROPOS. 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterq; vtriusq; simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F, Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est

A ..... | D ....
B ..... G ..... C | E ..... H ..... F

vel A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo

tudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars est A, ipsius BC, quæ D, ipsius EF. Quia igitur A, & BG, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & EH; erũt A, & D, simul æquales ipsis BG, & EH, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis GC, & HF, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in BC, EF; aggregatum numerorũ A, & D, tot aggregatis partium numerorum BC, & EF, æqualis erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, continetur. Ac propterea eadem pars erit vterq; A, & D, simul vtriusq; BC, & EF simul, quæ est A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Si numerus igitur numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendũ.

SCHOLIVM.

Idem hoc verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars est; atq; proinde vterq; simul A, D, vtriusq; BC, EF, simul eadem pars ostendetur, qua A, ipsius BC: si numerum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HE ipsis A, D, æquales, &c.

$A, \frac{2}{5}$ $D, \frac{3}{7}$
$B, \frac{2}{5}$ $G, \frac{2}{5}$ $C,$ $E, \frac{3}{7}$ $H, \frac{3}{7}$ F

Quod si quando contingat, numerum fractum diuidi non posse in partes æquales propositas, propterea quod numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per numerum partium. Procedabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propositas partes diuidi potest. Vt si fractio $\frac{5}{9}$ secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4 &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$ $\frac{15}{27}$ $\frac{20}{36}$ quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$ $\frac{5}{18}$, secunda in has tres $\frac{5}{27}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{5}{27}$, tertia vero in has quatuor $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{5}{36}$.

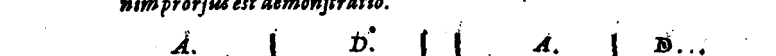
Rursus quando adsunt integra reuocanda prius erunt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodẽ modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $4\frac{3}{7}$ secandus sit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$, deinde vtrumq; eius numerũ per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$, cuius tres partes æquales sunt $\frac{31}{21}$ $\frac{31}{21}$ $\frac{31}{21}$. Atque hac in sequentibus quoq; propositionibus obseruanda sunt, quando fractionibus ac commodantur. Et semper nomine fractionum intelligẽdi quoq; sunt numeri integri cum fractis. Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.

Eodem modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas,

nitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicue in hus appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

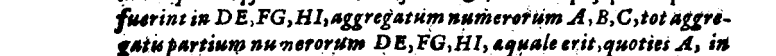


Possumus etiam hanc propositionem ad quotcunq; numeros transferre, hoc modo.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Sint numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorũ DE, FG, HI, simul eandẽ esse partem, quæ est A, ipsius DE. Diuisis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tam numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM, erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum DE, FG, HI, simul quæ A, ipsius DE.

Idem sequitur, si loco vnius numerorum A, B, C, sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.



Hæc etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunq; fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

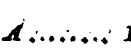
A, 1

A 1.	B $\frac{1}{2}$	C $\frac{3}{4}$
D 1 K 1 E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{3}{4}$ M $\frac{3}{4}$ I

Theoremati quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

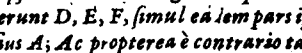
Demonstratio eadem hic est, qua in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multi lices esse, quã est A multiplex ipsius D.



Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F, erit è contrario D, ea∴ em pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, qua nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A B C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

Si numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æque multiplices; quam multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium, Vt ex demonstratione liquet.

Quod si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.



THEOR. 4. PROPOS. 6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Dico vtrumque numerum A B, & D E, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Diuisis enim numeris A B, D E, in par-

ces

tes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partiũ in numero DE; propterea quod eædem partes est numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG, numeri C, eadem est DH, numeri F; a erit vterque AG, DH simul eadem pars vtriusq; C, F, simul, quæ AG, ipsius C, vel DH, ipsius F. Eadẽ ratione erit vterq; GB, HE, simul eadem pars vtriusq; C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, simul vtriusq; numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. sept.

SCHOLIVM.

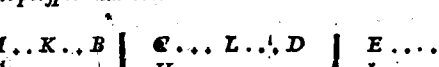
Eadem hæc propositio locum habet in numeris fractis, una cum demonstratione; vt hoc exemplum demonstrat.

$A, \frac{1}{9} G, \frac{1}{9} B$ $\quad$ $D, \frac{2}{7} H, \frac{2}{7} E$
$C, \frac{1}{7}$ $\quad$ $F, \frac{6}{7}$

Sed & hanc propositionem ad quotcunq; numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

Eadem enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur Id, quod secundo loco demonstrauimus, in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.



THEOR. 5. PROPOS. 7.

vij.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

Sit numerus AB, eadem pars num. CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem

eadem pars, quæ eſt AE, ipſius CF, vel totus AB, totius CD.

A...E..B
G...C.....F....D

Quia igitur A E, eadem eſt pars ipſius CF, quæ EB, ipſius GC: a erit vterque A, E, EB, ſimul eadem pars vtriuſque ſimus CF, GC, quæ AE, ipſius CF, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem ſit pars vtriuſque numeri FGCD, erunt ipſi numeri FG, CD, inter ſe æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD, Eadem igitur pars erit EB, ipſius FD, quæ ipſius GC, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD, Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendum. a 5. ſept.

SCHOLIVM.

A, 1/5 E, 2/5 B,
G, 4/5 C, 6/8 E, 4/5 D

Locum etiam habet hæc propoſitio, vna cum eius demonſtratione in numeris fractis, vt hic apparet.

Idem hoc theorema verũ eſt tã in numeris integris, quam in fractis etiam ſi ablata ſit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel denique in integris & ablata, & reliqua ſit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A.E...B | A...E.B | A.E.B.
G.....C..F..... D | G..C..F..D | G..C..F..D

Caterum & ex hu theoremati quinto lib. 5. ſimile hoc demonſtrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atq; ablatus ablati; Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

Quod quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus AB, totius CD Cum enim AB, ipſius CD, ſit æque multiplex, atque AE, ipſius CF. erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, qua ablatus CF, ablati AE b Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, qua totus CD, totius AB, Ac proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipſius FD, vt AB, ipſius CD, eſt multiplex.

A.....E.....B
C...F..D

b 7. ſept.

Quod ſi ex CD, ablata fuerit vnitas CF, vel reliqua ſit vnitas, FD. vel denique in integris & ablata ſit vnitas CF, & alia reliqua FD, idem demonſtrabitur. vt hac exempla commonſtrant.

A...E..... | A....E..B | A,...E....B
C.F..D | C..F.D. | C.F.D

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

Sit numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E ablati c F, *Dico* reliquum E B, easdem esse partes reliqui F D, quæ totus A B, est totius C D; *Sumpto enim numero* G H, æquali ipsi A B, erit G H, eædem partes ipsius C D, quæ A B, eiusdem C D, hoc est, quæ A E, ipsius G F Diuiso ergo G H, in partes G I, I H, numeri C D, & A E, in partes A K, K E, numeri C F, erit multitudo partium G I, I H, multitudini partium A K, K, E, æqualis, eademque pars tam G I, quam I H, ipsius C D, quæ tam A K, quam K E, ipsius C F cum ergo C D numerus maior sit numero C F, erit & tam G I, quam I H, pars ipsius C D, maior tam numero A K, quam K E, parte ipsius C F. Sumptis igitur numeris G L, I M, æqualibus ipsis A K, K E, erit G L, eadem pars ipsius C F, quæ A K, eiusdem C F, hoc est, quæ G I, ipsius C D; Ac proinde cum totus G L, totius C D, sit eadem pars, quæ ablatus G L, ablati C F, & erit & reliquus L I, reliqui F D, eadē pars, quæ totus G I, totius C D. Eodemq; argumento ostendemus M H, eandē esse partem ipsius F D, quæ est totus G I, vel I H, totius C D, Quoniam ergo tam G I, quam I H, eadem est pars ipsius C D, quæ est tam L I quam M H, ipsius F D; erit vterque G I I H, simul eædem partes ipsius C D, quæ vterque L I, M H ipsius F D Est autem G H, eædem partes ipsius C D, quæ A B, eiusdem C D, propter æqualitatem numerorum A B, G H, Igitur & vterque L I, M H, simul eædem partes erit ipsius F D, quæ A B, ipsius C D. Quia vero si ab æqualibus A B, G H, æquales auferantur A K, K E, & G L, I M, reliqui E B, & L I M H, simul æquales sunt; Et itaque E B, reliquus eædem partes reliqui F D, quæ A B, totus totius C D, nimirum eædem quæ vterque L I, M H, simul erat eiusdem F D. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A.....K.....E....B
C.....F.....
G.....L..I.....M..H

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ K, $\frac{2}{15}$ E, $\frac{6}{15}$ B
C, $\frac{6}{15}$ F, $\frac{6}{15}$ D
F, $\frac{2}{15}$ L, $\frac{3}{15}$ I, $\frac{2}{15}$ M, $\frac{3}{15}$ H

In numeris fractis eadem hac propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

Non

Non demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum precedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia nõ constabit hic reliquum numerum E B, alicuius numeri easdem esse partes, quas est numerus A E, numeri C F, *ibi vero perspicuum erat reliquum E B, alicuius numeri eandẽ esse partem, quas est* A E, *ipsius* c F. *Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti* G C, *vt* A E, *est submultiplex ipsius* c F.

THEOR. 7. PROPOS. 9 ix.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, sintque A, B, C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia vero B G, G C, inter se sunt æquales,

A....
B....G....C
D.....
E.....H.....F

& minores quam E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur; Erit B G, ipsius E H eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F, *a* ac propterea & vterque B G, G C, simul, nimirum B C, secundus vtriusque E H, H E, simul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, & c. Quod demonstrandum erat. *a 5. vel 6. sept.*

SCHOLIVM.

In numeris fractis propositio hac, vna cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

Quod si loco primi numeri vnitas accipiatur, qua numeri alicuius pars sit, qua alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadẽ pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

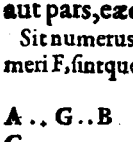
$A, \frac{3}{11}$
$B, \frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
$D, \frac{14}{22}$
$E, \frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

A.
B. G. C
D.....
E.....H.....F

THEOR. 8. PROPOS. 01.

x. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D F, numeri F, ſintque A, B, C, ipſis D E, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum A B, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri D E, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris A B, D E, in partes A G, G B, & D, H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipſius C, quæ tam D H, quam H E, ipſius F. *a* Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes A G, ipſius D H, & G, B, ipſius H E. quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes A G, ipſius D H, quæ G B, ipſius H E. *b* Igitur & vterque A G, G B, ſimul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes vtriuſque, D H, H E, ſimul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipſius D H-hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 9. ſep.

b 5. vel 6. ſep.

SCHOLIVM.

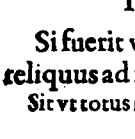
A, $\frac{2}{15}$ *G*, $\frac{2}{15}$ *B*, *C*, $\frac{6}{15}$ *D*, $\frac{3}{10}$ *H*, $\frac{3}{10}$ *E* *F*, $\frac{9}{10}$

Numeris fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

THEOR. 9 PROPOS. 11.

xij. Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum; Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

Sit vt totus numerus A, B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, eſſe, vt eſt totus A B, ad totum C D. Cum enim ſit, vt A B, ad C D, ita A E, ad C F; erit A B, ipſius C D, & *A* E, ipſius C F, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe A B, ipſius C D, & A E, ipſum C F, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum A B, ipſius C D, & *A* E, ipſius



c 20 de-fin.

ipsius CF, æque multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipsorum CD, CF. *a* Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æque multiplex erit, *b* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. a 7. *sept.* b 20. *def. fin.*

A...E..B
C..... F.... D

Sit deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito *c* erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; *d* Ac proinde erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. c 7. *vel* 8. *sept.* d 20. *def. fin.*

A....E...B
C.... F.. D

Contineat tertio AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. *e* Reliquus igitur FD, reliqui c 8. *sept.*

A.....E...B | A.....E.....B
C... F.. D | C..... F.....D

EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea *è* contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. *f* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. f 8. *sept.*

Quod si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoq; esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaq; si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....E...B
C.....F...D

SCHOLIVM.

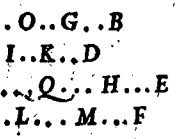
Eodem modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationu respondent.

$A, \frac{6}{9}E, \frac{1}{50}B$ | $A, \frac{14}{21}E, \frac{28}{25}B$
$C, \frac{1}{5}F\frac{2}{10}C$ | $C, \frac{5}{21}F\frac{10}{25}D$

LEMMA.

Quod autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter

liter contineat, eademque insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuisis igitur numeris CD CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quod GB, ipsius CD, sit eadem pars quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, EQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD CF, vel certe numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q3 multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atq3 adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri F, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.



Contineat deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. easdemque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF; ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices

plices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD CF,

erit multitudo partiū ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, aequalis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD,

A..P..Q..G..I..B
C..L..M..D

A...R...S...H...K..E
C...N...O...F

& CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, aequales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, aequalis propterea quod quaelibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD quae vnaquaeq; partium numeri HE est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, aequales, erit & multitudo partium numeri AG, aequalis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel aequales sint ipsis CD, CF, vel eorum aeque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, aequalis erit: Quibus si addantur aequales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, aequalis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quae vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, aequalis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quae CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

Iam vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, aequaliter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt ea multitudine inter se aequales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, aequales, erunt & ha multitudine inter se aequales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineãt æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudines æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Si sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunq; numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico esse quoq; omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniã igitur, propter eandẽ proportionem,

A .... C .. E ...
B ..... D .... F .....

a eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F, b erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; c erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. d Quare eadem porportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

a 20. de fin.
b 5. vel 6. sept.
c 5. sept.
d 20. de fin.

Sint deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorũ B, D, F. Quo posito, erit è contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo vt prius, e erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. f Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem

A .... C .. E ...
B ..... D .... F .....

e 5. sept.
f 20. de fin.

semper

semper demonstratio, vt hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A... C..... E.....	A... C... E.....	A... C...E...
B. D.. F...	D. D.. F..	B. D. F.

Sint tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. a Quia igitur propter eandem proportionē, A, ipsum B, & C: ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemq; insuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C & F, ipsius E, eædem partes. Igitur vt prius, b erunt omnes B, D, F, simul omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ ipsius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, simpl omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemq; insuper partem, vel partes. c Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B. a 20. def. fin.

A..... C.... E.....	b 6. sept.
B ..... D... F.....	

Sint quarto & vltimò A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur G, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul: quibus si rursum addantur æquales, E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnib. B, D, F, simul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobiq; sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunq; numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

A.... C... E.....	c 20. def. fin.
B.... D... F....	

SCHOLIVM.

In numeris quoq; fractis propositio hac vera esse eodem modo conuincetur, vt partes, si pro numeris integris fracti assumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiv.

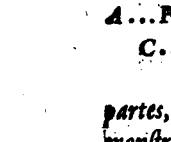
Si quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadē pars vel partes. d Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: e ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.... C.....	d 9. vel 10. sept.
B.... D.....	e 20. def. fin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam

liter contineat, eademque insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE ipsum CF, aequaliter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, aequaliter, nimirum semel vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel aequales ipsis CD, CF, vel eorum aeque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF ipsis GB, HE, aequales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, aequalis, quod GB, ipsius CD, sit eadem pars quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, EQ, QH, eisdem GB, HE, aequales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, aequalis. Cum enim AG, AH, vel aequales sint ipsis CD, CF, vel eorum aeque multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea quæ multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, aequalis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, aequalis: Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, aequalis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.



Contineat deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, aequaliter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. eaſdemque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel aequales ipsis CD, CF, vel eorum aeque multiplices

plices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD CF,

erit multitudo partiũ ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD,

A..P..Q..G..I..B
C..L..M..D
A...R...S...H...K..E
C...N...O...F

& CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis propterea quod qualibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD quæ vnaquæq; partium numeri HE est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

Iam vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt ea multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineãt æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudines æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Si sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunq; numeri proportionales A, B, C, D, E, F; hoc est vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico esse quoq; omnes A, C, E simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniã igitur, propter eandẽ proportionem, *a* eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F, *b* erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; *c* erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. *d* Quare eadem porportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

a 20. def.
b 5. vel 6. sept.
c 5. sept.
d 20. def.

Sint deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorũ B, D, F. Quo posito, erit è contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo vt prius, *e* erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. *f* Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem

e 5. sept.
f 20. def.

semper

ſemper demonſtratio, vt hic apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A... C..... E.....	A... C ... E.....	A... C...E...
B. D.. F...	D. D. F..	B. D. F.

Sint tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. a Quia igitur propter eandem proportionē, A, ipſum B, & C: ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemq; inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, b erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ ipſius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimpl omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemq; inſuper partem, vel partes. c Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

A..... C.... E.....
B..... D... F...

a 20. def. fin.

b 6. ſept.

c 20. def. fin.

Sint quarto & vltimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales, E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnib. B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunq; numeri proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E....
B.... D... F....

SCHOLIVM.

In numeris quoq; fractis propoſitio hac vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiv.

Si quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſſim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadē pars vel partes. d Viciſſim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: e ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A... C...
B.... D.....

d 9. vel 10. ſept.

e 10. def. fin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam

quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars vel partes. *a* Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, vel partes: Atq; adeo è contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, vel certe per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemq; insuper partem, vel partes. *b* Quare erit vt A, ad C, ita B ad D.

a 9. vel 10. sept.

A . . . C . . .
A . . . . D . . . .

b 20 def.

Sint tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C, quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemq; insuper partem vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certe per lemma propos 11 huius lib. eædem partes. *c* Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit vel partes. *d* Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

c 9. vel 10. sept.

d 20. def.

A . . . . . C . . . .
B . . . . . D . . .

Sint quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo, è contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe per lemma propos. 11. huius lib eædem partes. *e* Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. *f* Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

e 9. vel 10. sept.

f 20. def.

A . . . . C . . . .
B . . . D . . . .

Sint quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt; *g* Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

g 20 def.

Sint sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes; *h* erit vt A, ad C, ita B, ad D.

h 10. def.

A . . . . C . . .
B . . . . D . . .

Sint septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores

iores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales. a Quoniam 20. de-
igitur, ob eandem proportionem A, ipsius B, fin.
& C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem A..... C.....
pars, vel eædem partes; vel certe A, ipsum B, B... D...
& C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca si quatuor numeri proportionales sint, vicissim & proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Quod si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

Manifestum quoq; est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

Coacti vero sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosq; demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionib. rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerũ minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum pars appellarit numerum numeri minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solu luce clarius cõstat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis superuacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

sint

Sint quotcunque numeri *A*, B, *C*, & alij totidem D, E, F, sitque vt *A*, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita *E*, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt *A*, ad *C*, ita D, ad F. Quoniam enim est, vt *A*, ad B, ita D, ad E;

a 13. sep.

A	D.....
B	E.....
C...∤.	F...
G.....	H.....

a erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob causam, cum sit, vt B, ad *C*, ita E, ad F; erit vicissim, vt B, ad E, ita G, ad F. Igitur erit vt *A*, ad D, ita *C*, ad F; (Cum enim vtraque proportio *A*, ad D, & *C*, ad F, eadem sit proportioni B, ad *E*, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, vt mox ostendetur.)

b 13. sep. *b* Ac proinde vicissim, vt *A*, ad *C*, ita D, ad F.

Quod si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse vt *A*, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri *A*, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOHLIVM.

Perspicuum autem est, hanc propositionem eodem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

A.	D...
B..	F.....
C...	F.....
G..	G...

Idem verum est, si loco vnius numeri vnitas assumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perspicuum est.

LEMMA.

Quod autem dua proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem sunt inter se quoque eadem, quales sunt in demonstratione proportiones

A	B	C ..
D	E	F ...

A, ad D, *&* C, *ad F, quæ eadem ostensa sunt proportioni* B, *ad* E, *siue numeri sint integri siue fracti, ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit* B, *ipsius* E, *& tam* A, *ipsius* D, *quam* C, *ipsius* F, *æque*

aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit aqua- a 20 de
liter, eandemque inſuper partem, vel partes, a *Quare numeri A, ſin.*
D, C, F, proportionales ſunt. vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod
eſt propoſitum.

Hoc idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xvj.

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

Metiatur vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico viciſſim vnitatem *A*, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiſo enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes EI, IK, KF, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturque æque vnitas *A*, numerum D, & vnitas BG, ipſum EI, atque vnitas GH, ipſum IK, & vnitas HC, ipſum KF; atque idcirco eadem pars erit vnitas *A*, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, ſimul numerorum EI, IK, KF, ſimul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas *A*, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compoſitus numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compoſitum æque metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A. B G. H C. D. E. I. I. F

SCHOLIVM.

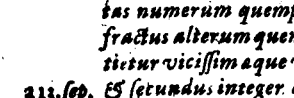
Illud idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris propterea quod vnitas nõ eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur atque numerus D, numerum EF, erit vnitas A, eadem pars numeri BC, qua numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A eadem pars numeri D, qua numerus BC, nu-

B C numeri E F; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

Hæc propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æque vnitas tertium numerum, qu fractus ponitur a13.sep. *& secundus integer quartum fractum; a sed solũ eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quã secundus ad quartũ.*

THEOR. 14 PROPOS. 16

Si duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

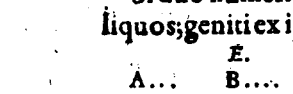


Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; *b* erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum G, æque metietur. *c* Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; *d* erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeo vnitas E, numerũ B, & numerus A numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Æque igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo sese multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

b35.def. c15.sep. d15.def.

SCHOLIVM.

In numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadẽ defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoq; est D, ad A, quod E multiplicans A facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum



PORISM. *Hac eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.*

Si duo

Si duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

Multiplicet enim A, ipsum B, *faciatque* C. *Dico eundem* C, *gigni, si* B, *ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum* B *faciat* C, *ostendemus vnitatem* E, *numerum* B, *& numerum A, numerum* C, *aque metiri. At vero, si numerus* B, *ipsum A, multiplicet, a etiam vnitas* E, *numerum* B, *& numerus* A, *numerum factum aque metitur. Idem ergo numerus* C, *gignitur ex multiplicatione* B, *in* A, *quandoquidem ipsum numerus* A, *aque metitur, atque vnitas* E *ipsum* B.

E.
A ... B ...
C .....

a 15. def. fin.

Quod si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, *facit* C; *erit ex defin.* 15. *vt* C, *ad* B, *ita A, ad* E, *vnitatem. Et permutando, vt* C, *ad A, ita* B, *ad* E, *vnitatem. At si* B, *multiplicet A, erit ex eadem defin* 15. B, *ad* E, *vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur* C, *ad* A, *vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui* C. *Quod est propositum.*

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quã multiplicati.

Numerus enim A multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; *b* erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F. est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E; æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit,

F.
A ...
B .. C ...
D..... E.....

b 15. def. fin.

c Ac proinde, erit vt B, ad D; ita C. ad *d*, & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

c 26. def. fin. d 13. sept.

SCHOLIVM.

Si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, *& C, facit D, & E; erit ex defin.* 15. *tam* D, *ad B, quam* E, *ad C, vt* A, *ad* F, *vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos.* 14. *vt D, ad* B, *ita* E *ad* C, *Igitur permutando, vt* D, *ad* E, *ita* B, *ad* C. *Quod est propositum.*

Theor.

xix. ## THEOR. 16. PROPPS 18.

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geneti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; a fiet quoque idem D, ex C, in, A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; b erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multipiicantes fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

a16. sep.

A.... B....
C...
D.....E.....

b17. se.

SCHOLIVM.

Liquido constat eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

Hanc autem propositionem, & precedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunq; numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F, c erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

e17. sep. 18. sep. xix.

A...
B..C...D....
E.....F.....G.....

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

Sint

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; *a* erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *b* erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videl. quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. scripsimus.

A . . .
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

a 17. sep.
b 18. sep.

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex C, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D, Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; *c* erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualē. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *d* erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eandem F. Quare proportiones A, ad B, & C, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B; ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c 17. sep.
d 18. sep.

SCHOLIVM,

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F; qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quam in integris facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si,

qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.

Sit primum maior proportio primi A *ad* B, *secundum, quam* C, *tertij ad* D, *quartum. Dico numerum ex* A *in* D, *procreatum esse maiorem eo qui fit ex* B *in* C. *Nam si intelligatur esse* E, *ad* B, *vt* C, *ad* D; (*siue* E, *numerus integer sit, siue fractus, siue integer cũ fracto: qui quidẽ reperietur, vt ad propos.* 19. *lib.* 9. *ostendemus, si numerus ex* B, *in* C, *procreatus diuidatur per* D,) *erit quoq; maior proportio* A, *ad* B, *quam* E, *ad* B, *ac proinde* A, *maior erit, quam* E. *Quare maior numerus fit ex* A *in* D, *quam ex* E, *in eundem* D: a *At qui fit ex* E, *in* D, *aqualis est ei, qui fit ex* B, *in* C. *Igitur & numerus ex* A, *in* D, *genitus, maior erit, quam numerus ex* B, *in* C, *procreatus. Quod est propositum.*

a 19. sep.

Fiat deinde maior numerus ex A, *in* D, *quam ex* B, *in* C. *Dico maiorem proportionem esse* A, *primi ad* B, *secundum quam* C, *tertij ad* D, *quartum. Si namq; intelligatur numerus* E, *ex quo in* D, *idem numerus fiat qui ex* B *in* C; (*siue* E, *numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto*) *fiet quoque maior numerus ex* A, *in* D, *quam ex* E, *in eundem* D: *ac proinde maior erit* A *quam* E. *Quare maior erit proportio* A, *ad* B, *quam* E, *ad* B: b *At ita est* E *ad* B, *vt* C, *ad* D. *Igitur maior est quoque proportio* A, *ad* B, *quam* C *ad* D. *Quod est propositum.*

b 19. sep.

Quod si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maiorus, mutes in vocem, minorus. Vt in hoc apposito exemplo appareret. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam maior est proportio A, *ad* B, *quam* C, *ad* D: *hoc est, maior est proportio* C, *primi ad* D, *secundum, quam* A, *tertij ad* B, *quartum; maior fiet numerus ex* C, *primo in* B *quartum, siue ex* B, *in* C, *quam ex* D, *secundo in* A, *tertium, siue ex* A, *in* D, *vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex* A, *in* D, *quam ex* B, *in* C, *quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex* A, *in* D, *quam ex* B, *in* C; *hoc est, maior ex* B, *in* C, *siue ex* C, *in* B, *quam ex* A, *in* D, *siue ex* D, *in* A; *erit maior proportio* C, *primi ad* D, *secundum, quam* A, *tertij ad* B, *quartum, vt iam est demonstratum*

A..... E.....
B....
C....
D..

ſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A. ad B, quam C, ad D. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 18 PROPOS. 20 xx.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: ipſi tres numeri proportionales erũt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur.

Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, A.....
erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita B.....D.....
D, ad C, numeruſque genitus ex B, in C.....
D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, *a* erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur. *a* 19 *ſep.*

Sed iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, *b* erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat. *b* 16 *ſep.*

SCHOLIVM.

Demonſtratio hac non variatur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

Quod ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: maior erit proportio primi ad ſecundum, quã ſecundi ad tertium.

Item ſi minor A..... | A....
fuerit proportio primi B.....D..... | B.....D.....
ad ſecundũ, C..... | C.....

quam ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecun-

xix. THEOR. 16. PROPPS 18.

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos; Geneti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; a fiet quoque idem D, ex C, in, A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipſos A, & B, facit D, & E; b erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 16. ſep.

A.... B.....
C...
D.....E.....

b 17. ſe.

SCHOLIVM.

Liquido conſtat eandem hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari, ſi numeri A, B, *G, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo. Hanc autem propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, ſiue numeri omnes ſint integri, ſiue non hac ratione.*

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunq; numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, *ex* A, *in* B, C, D, *vel ex* B, C, D, *in* A. *Dico eaſdem rationes habere numeros productos* E, F, G, *quas numeri multiplicantes, vel multiplicati,* B, C, D, *habent: hoc eſt, eſſe, vt* B, *ad* G, *ita* E, *ad* F; *& vt* C, *ad* D *ita* F, *ad* G. *Nam cum ex* A, *in* B, C, *vel ex* B, C, *in* A, *fiant* E, F, G, *erit vt* B, *ad* C, *ita* E, *ad* F. *Similiter quia ex* A, *in* C, D, *vel ex* C D, *in* A, *fiunt* F, G; *erit quoque vt* C, *ad* D, *ita* F, *ad* G, *Atque ita de cæteris.*

A...
B..C...D....
E,.....F.....G.....

c 17. ſep. 18. ſep. xix.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & quarto fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

Sint

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; *a* erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *b* erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videl. quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. scripsimus.

A . . .
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

a 17. sep.
b 18. sep.

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex C, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; *c* erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualē. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; *d* erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eandem F. Quare proportiones A, ad B, & C, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c 17. sep.
d 18. sep.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, sive omnes fracti sint, sive non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, aqualem esse numero F; qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

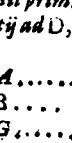
SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quam in integris facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si,

qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.

Sit primum maior proportio primi A, *ad* B, *secundum, quam* C, *tertij ad* D, *quartum. Dico numerum ex* A *in* D, *procreatum esse maiorem eo qui fit ex* B *in* C. *Nam si intelligatur esse* E, *ad* B, *vt* C, *ad* D; (*siue* E, *numerus integer sit siue fractus, siue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propos.* 19. *lib.* 9. *ostendemus, si numerus ex* B, *in* C, *procreatus diuidatur per* D,) *erit quoque maior proportio* A, *ad* B, *quam* E, *ad* B, *ac proinde* A, *maior erit, quam* E. *Quare maior numerus fit ex* A *in* D, *quam ex* E, *in eundem* D: a *At qui fit ex* E, *in* D, *aqualis est ei, qui fit ex* B, *in* C. *Igitur & numerus ex* A, *in* D *genitus, maior erit, quam numerus ex* B, *in* C, *procreatus. Quod est propositum.*

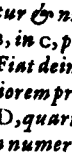
a 19. *sep.*



Fiat deinde maior numerus ex A, *in* D, *quam ex* B, *in* C. *Dico maiorem proportionem esse* A, *primi ad* B, *secundum quam* C, *tertij ad* D, *quartum. Si namque intelligatur numerus* E, *ex quo in* D, *idem numerus fiat qui ex* B *in* C; (*siue* E, *numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto*) *fiet quoque maior numerus ex* A, *in* D, *quam ex* E, *in eundem* D: *ac proinde maior erit* A *quam* E. *Quare maior erit proportio* A, *ad* B, *quam* E, *ad* B; b *At ita est* E *ad* B, *vt* C, *ad* D. *Igitur maior erit quoque proportio* A, *ad* B, *quam* C *ad* D. *Quod est propositum.*

b 19. *sep.*

Quod si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maiorus, mutes in vocem, minorius. Vt in hoc apposito exemplo appareret. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam maior est proportio A, *ad* B, *quam* C, *ad* D: *hoc est, maior est proportio* C, *primi ad* D, *secundum, quam* A, *tertij ad* B, *quartum; maior fiet numerus ex* C, *primo in* B *quartum, siue ex* B, *in* C, *quam ex* D, *secundo in* A, *tertium, siue ex* A, *in* D, *vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex* A, *in* D, *quam ex* B, *in* C, *quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex* A, *in* D, *quam ex* B, *in* C; *hoc est, maior ex* B, *in* C, *siue ex* C, *in* B, *quam ex* A, *in* D, *siue ex* D, *in* A; *erit maior proportio* C, *primi ad* D, *secundum, quam* A, *tertij ad* B, *quartum, vt iam est demonstratum.*



ſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A. ad B, quam C, ad D. Quod erat propoſitum.

THEOR. 18 PROPOS. 20 xx.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: ipſi tres numeri proportionales erũt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur.

Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, A.....
erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita B.....D.....
D, ad C, numeruſque genitus ex B, in C....
D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, *a* erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur. a 19 ſep.

Sed iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B. in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, *b* erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat. b 16 ſep.

SCHOLIVM.

Demonſtratio hæc non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

Quod ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: maior erit proportio primi ad ſecundum, quã ſecundi ad tertium.

Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundũ,

A....	A....
B.....D.....	B.....D.....
C.....	C.....

quam ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecun-

dum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedētis propos. liquet. si secundo numero sumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundū quā tertii ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æque metiri ipsos E, F, maiorem quidem A B, ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt A B, ad C D, ita E, ad F; *a* erit vicissim, vt A B, ad E, ita C D, ad F. Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E, F; *b* erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. *c* Erit ergo, vt A G, ad E, ita C H, ad F; *d* & vicissim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A .. G .. B
C .. H .. D
E .....
F .....

a 13. *sep.*
b 20. *def.*
c 20. *def.*
d 13. *sep.*

SCOLIVM

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continue proportionales, rimosq; duos esse in sua proportione minimos. Hoc e impositio ostendetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundum tertium, vt in hoc apposito exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri continue proportionales, quorū duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem

tus idem tamen demonstratur in tribus, etiam si primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propositio 12. lib. 9. demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur concedere, tres numeros esse continuè proportionales, primosq; duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primum metiri secundum, ex hac propos. quod antea negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9 PARTICULARI ratione, & hoc veriùs est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eisdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium &c.

SINT enim plures, quàm duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit proportio AB, ad CD, quæ CD, ad EF, siue non, ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis AB, CD, EF, minores quorum primus ad secundum sit vt AB, ad CD, & secundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis, nimirum proportio AB ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis AB, CD, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 10. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsùm in minoribus numeris proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio verò 20. ad 25. in 4. vel in 2. & 5.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi continuati in eisdem proportionibus, nimirum G ad H, vt AB, ad CD, & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipsum C, & CD, ipsum D, & EF, ipsum I, metiri æquè. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita G, ad H, erit vicissim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum sit vt CD, ad EF, ita H, ad I, erit quoque vicissim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. Quare AB, ipsius G, & CD ipsius H, & EF, ipsius I, erit eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD, EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt totidem partes in AB quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipsius G, & CL ipsius H, eadem pars. Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H, & vicissim vt AK ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL ad EF, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri

a13. sep.
b13. sep.
c20. de
fin.
d20. da
fin

EM, in proportionibus numerorum AB, CD. EF, & minores quam AB, CD, EF, Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A|B, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I. aque metietur. Quod est propositum.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint A.. B ..... C ... alij tres D, E, F, non minimi, qui eãdem D....E.....F..... habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, aque metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cum sint minimi in proportione A, ad B, aq; metientur ipsos D, E, eademque ratione B, C, ipsos E, F, Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, aque metiatur, ac B, ipsum E, metientur aque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

CÆTERVM hac propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: propterea quod in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibuslibet datis, dari possunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorũ numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi sed quo scunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Alia autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, aque conueniunt & integris numeris & fractis. quod satis est, semel hoc loco [illegible] esse.

xix.

THEOR. 20. PROPOS. 22

SI fuerint tres numeri: & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri, A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B. ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Cum

A ..... H ...
B ... D ...
C ..... E .....
G ..... F..

enim

enim sit vt A, ad B, ita E, ad F; *a* erit numerus ex A, in F, genitus æ- a 19. sep.
qualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B,
ad C, ita D, ad E, *b* erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis b 19. sep.
numerus, qui fit ex C, in D. Atque ideo numerus genitus ex A, primo in F, quatum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. *c* Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F. c 19. sep.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, B, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estq; eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM vero Euclides ex illis sex modis argumentandi, in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui à permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur propos. 14. & 22 huius lib. nō alienū à nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, d erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, e erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

A ..... C ..
B, ... B .. d 13. sep.
e 13. sep.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoq; proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo esse vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; a *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde vt tōtus AB ad totum DE,* b *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* c *Vicissim ergo erit quoq; AC, ad CB, vt DF, ad FE, quod est propositum.*

a 13. sep.

b 11. sep.

c 13. sep.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis cōuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis cōuersam esse quoq;, vt CB, ad AC, ita FE, ad DE. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoq; diuidendo, vt AC, ad CB ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoq;, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quid est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoq; compositi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; d *erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF;* e *Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul vt BC, ad EF;* f *Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.*

d 13. sep.

e 12. sep.

f 13. sep.

SIMILITER compositio rationis conuersa & contraria ostenditur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF Dico per compositionem rationis conuersam esse quoq;, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE Quia enim est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoq;, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF Cum enim sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hic quoq; per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoq;, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, *ad* CB, *ita* DE, *ad* FE; a *erit vicissim, vt totus* AB, *ad totum* DE, *ita ablatus* CB, *ad ablatum* FE; b *Ac proinde, vt totus* AB, *ad totum* DE, *ita erit reliquus* AC, *ad reliquum* DF. c *Vicissim igitur vt* AB, *ad* AC, *ita* DE, *ad* DF, *quod est propositum.* a 13. *sep.* b 11. *sep.* c 13. *sep.*

A.....C...B
D.....F..E

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5, Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, *primus ad C, secundum, ita* DE, *tertius ad F, quartum; Item vt* BC, *quintus ad C, secundum, ita* EH, *sextus ad F, quartum. Dico ita esse* AG, *compositum ex primo & quinto ad C, secundum,, vt est* DH, *compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, vt* BG, *ad C, ita* EH, *ad F; erit conuertendo vt C, ad* BG, *ita F, ad* EH. *Quoniam igitur est, vt* AB, *ad C, ita* DE, *ad F: & vt C, ad* BG, *ita F, ad* EH; *erit ex aqualitate, vt* AB, *ad* BG, *ita* DE, *ad* EH. *Componēdo igitur, vt* AG, *ad* BG; *ita* DH, *ad* EH. *Itaq; cum rursus sit, vt* AG, *ad* BG, *ita* DH, *ad* EH, *& vt* BG, *ad C, ita* EH, *ad F; erit ex aqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.*

A.....B..G | D.....E...H
C..... | F.....

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebūt.

SIT vt totus A B, ad C, ita totus D E, ad F; Item vt detractus A G, ad C, ita detractus D H, ad F. Dico & reliquum G B, esse ad C, vt est reliquus H E, ad F. Cum enim sit, vt A G, ad C, ita D H, ad F; erit conuertendo, vt C, ad A G, ita F, ad D H. Quia igitur est, vt A B, ad C, ita D E, ad F, & vt C, ad A G, ita F, ad D H; erit ex aqualitate vt A B, ad A G ita D E, ad D H. Diuidendo ergo vt G B, ad A G, ita H E, ad D H. Ita uè cum rursus sit, vt G B, ad A G, ita H E, ad D H; & vt A G, ad C, ita D H, ad F; erit ex aqualitate, vt G B, ad C, ita H E, ad F. Quod est propositum.

A ..... G .. B D ..... H .. E
C .... F .....

Item & hoc demonstrabimus.

VII.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

Sit vt primus A, ad secundum B C, ita tertius D, ad quartum E F; & vt primus A, ad quintum C G, ita tertius D, ad sextum F H. Dico ita esse A, primum ad B G, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad E H, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, vt A, ad B C, ita D, ad E F; erit conuertendo vt B C, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur est vt B C, ad A, ita E F, ad D; & vt A, ad C G, ita D, ad F H: erit ex aqualitate vt B C, ad C G, ita E F, ad F H: & componendo, vt B G, ad C G, ita E H, ad F H; & conuertendo, vt C G, ad B G, ita F H, ad E H. Quoniam ergo est, vt A, ad C G, ita D, ad F H: & vt C G, ad B G, ita F H, ad E H: erit ex aqualitate, vt A, ad B G, ita D, ad E H. Quod est propositum.

A .... D .....
B .. C .. G E ..... F .... H

Denique ex his omnibus inferemus hoc theorema.

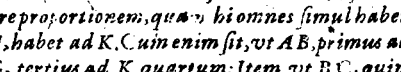
VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoq; illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunq; numeros proportiones habuerit, quas idem alius

nume-

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoq; idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunq; numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc est, sit vt AB ad E, ita FG ad K, & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul hoc est, ipsum AD, ad E, eam habere proportionem, quam hi omnes simul habent; hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoque vt AC,



primus cum quinto, ad E, secundum, ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunq; AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem EG, GH, HI; Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, vtpote ad FI. Cum enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad EG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad EH, quartum: Item vt E primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad CD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atq; ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM vero hæ demonstratis, ostendentur nouem vltimæ propositiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinib. demonstratæ fuere, si pro magnitudinibus, intelligantur numeri siue integri, siue fracti, pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur ijdem modi hoc lib. demonstrati; vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illæ quinti, lib. in manus sumantur. & magnitudines intelligantur esse numeri eædemq; prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR.

xxj. THEOR. 21. PROPOS. 23

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest,

A.....B....
C------D--
E.---

C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B, a metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque atque adeo se-

a21. sep.

cundum eundum numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in F. Itaque cum vnitas

b15. sep.

numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; b metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur, c metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B. Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B. Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

c15. sep.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, præter vnitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis metiaturque

A.....B....
C----
D-----E----

C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At vero ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igi-

d9. pro-nun.

tur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt vnitates in E, produ-

e18. sep.

cit ipsum B: d fit, vt D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. e Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E. Atque adeò,

adeo, cum D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunq; numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunq; numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarum propotionum. Itaut in minoribus numeris continuari non possint, quamus proportio quorũ in minorib. numeris reperiatur. Si n. non sunt minimi, erũt aliqui alij minores ipsis, nimirum, D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionũ. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C,

A ..... B ..... C ....
D ---- E ------ F ---
G ----

aquè, per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus: atq; adeo secundum vnum eundemque numerum, qui sit G: ita vt D, totum metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties vnitas est in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æque metitur; metietur quoq; vicissim æque vnitas numerum D, & numerus G numerum A: eademq; ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, aque atq; vnitas ipsos E, F. Atque adeirco A, B, C, cum habeant numerum G. communem mensuram non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad b, & B, ad C: sed ipsi A, B, C, minimi sunt. 21. sept.

IAM vero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionũ minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mẽsura numerus G. ita vt G, toties metiatur ipsum A, quoties vnitas est in D, & ipsum B, toties quoties vnitas est in E, & ipsum , toties quoties vnitas est in F. Quoniam igitur G, toties cõpositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D, E, F, sit vt D, E, F, ipsum G, multiplicãtes producãt ipsos A, B, C, Quare D, E, F, easdem habẽt proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ

ad pro-

ad propos. 18. huius lib. ostendimus: Atque adhuc, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

xx iiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri primi inter se fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

Sint inter se primi A, & B: & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C: metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipsum A: a metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint. &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. pro. huius.

A..... B....
C... D- ---

xxv.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

Sit vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi: sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties quot vnitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt vnitates in F, b fit, vt F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D: c & contra E, ipsum F, multiplicãs producat eundem D. Genitus est autem idem D. ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum, fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; d erit vt E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri; erit E, ad A, primus; Atq; adeo E, & A, cum sint inter se primi, f in sua proportione minimi erunt. g Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumq; B & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... B ...
G.....
D.....
E---- F----

b 9. pronun.
c 16 sep.
d 19. sep.
e 25. sep.
f 23. sep.
g 2. sep.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxi

Si duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

Sint inter se primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in seipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, *a* erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eadem q; arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C.....
D....

a 26. sup.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvii

Si duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumq; primi fuerint; Et qui ex eis gignētur, primi inter se erunt.

Sit vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit ad C; *b* erit quoq; E, ex ipsis genitus ad eundē C, primus. Rursus cum vterq; A, & B, ad D, sit primus, erit eodē modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; *c* erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A.... B...
E.....
C... D..
F.....

b 26. sup.

c 26. sup.

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviii

Si duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoq; primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

Sint primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cum enim A, B, inter se primi,

C... B..
C..... D....
E..... F.....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

mi,

a 27. sept. mi, a erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

b 27. sept. RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, b erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; c Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cum A, & C, primi sint ad B, d erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademq; ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; e erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, f erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus; nec non & H, ad A. g Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterq; A, G, ad vtrumq; B, H, sit primus. Si duo itaq; numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

c 28. sept.

d 26. sept.

e 28. sept.

f 26. sept.

g 28. sept.

A... B..
C.....D....
E.....F.....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

xxix. SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad vnum aliquē illorum primus fuerit; Et si vterq; simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & vtrumque simul A C, primum esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; h metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodēq; modo ad B C, ostēdemus eundem esse primum.

h 12. prop.

A....B.....C
D-----

SED iam vterque A B, B C, simul, primus fit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; h metietur quoque D. numerum A C, ex A B, B C, compositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eo-

h 11. prop. num.

mi. Eodemque argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit: per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Primus numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos, licet B, compositus sit. Si enim A & B, non sunt inter se primi, metiatur eos praeter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus igitur est A, ad B. Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . B C

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxij.

Si duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B; si non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C; toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; *a* erit vt D, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad E, quartum. *b* Quia vero primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; *c* erunt D, & A, in sua proportione minimi. *d* Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B. Eodemq; modo si D, non

A . . . . B . . . . . C . . . . . D . . . E . . . . . .

a 19. *sept.* *b* 31. *sept.* *c* 21. *sept.* *d* 21. *sept.*

metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Eodem modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

Si duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

Nam ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quod ad vnum ipsorum A, B, compositum esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quod inter

A .. B ....
C. .....
D. .....

se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositum est; erit vterq; A, & B, ad D, primus. a *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cum D ponatur, vel metiri ipsum G, vel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B cum non sit primus ad vtrumq;.*

a 26. sep.

XXX. PROBL. 31. PROPOS. 33.

Omnem compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Sit numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si vero compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; *b* metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus fuerit, metietur eum alius numerus.

b 11. pro nun.

Quia vero numerus non diminuitur infinite,

A .....
B .... C ...

veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum qui cum metiatur omnes præcedentes, *c* metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

c 11. pro nun.

Aliter. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim

A .....
B ... C ---

B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A, *d* metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus

d 11. pro nun.

rus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxij.

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

Sit numerus quicunque A. Dico eum esse vel primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur compositum: Si vero compositus; *a* metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metietur. Quod erat ostendendum.

A..... *a* 33. sept.

PROBLEM. 3. PROPOS. 35. xxxiij.

Numeris datis quotcunque reperire minimos omniũ eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunq; proportiones, sive eadẽ sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, sive non; oportetq; totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi aut compositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi per ea quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si vero nõ sunt inter se primi, *b* inuenta sit maxima eorum cõmunis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionib. numerorum A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F, G; *c* fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem tationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A..... B.... C.....
D..
E.. F.. G....
H — I --- K ---
L -----

b 33. sept.

c 9. prænun.

Quod vero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sint minimi; erunt aliqui alij ipsis minores minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito, *d* fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; *e* & vicissim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; *f* erit, vt E, primus ad H, ita eundum,

d 9. prænun. *e* 8. prænun. *f* 19. sept.

dum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior, quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem numeris datis quotcunq; reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

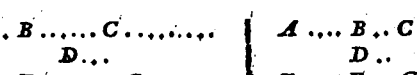
Hinc fit maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

Ex his facili via comperiemus data minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D, E, siue illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sine non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

Cæterum contingit interdum, vnum numerorum E, F, G, per



hanc propos. inuentorum esse vnitatem; quando scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, aqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in cõtinuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

THEOR. 4. PROPOS. 36.

xxxvj. **Duobus numeris datis reperire quem illi minimum metiantur, numerum.**

Sit reperiendus minimus numerus omnium quod dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicans faciant C. Dico C, esse mini-

minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; *a* metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque ipſum A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus: metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, ad B, eundem D, per F. Quo poſito, *b* tam ex A, in F, quam ex B, in F, & è contrario producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium *c* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, *d* & ob id, in ſua proportione minimi) *e* æque metientur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D *f* erit C, ad D, vt B, ad E. Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maiorminorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atq; adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

A....B.....
C.....
D----------
E------E----

Sint deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. *g* Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, *h* fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; *i* metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum B, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, *k* fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, *l* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H ad G. *m* metientur ipſos H, & G, æque, nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E; & F, *n* erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt, metietur etiam E, numerus numerum

A....B.....
C..D...
E.....
F---------
G----H----

a 7. prop. num.
b 9. prop. num.
c 19. ſep.
d 23. ſe.
e 21. ſep.
f 17. ſep.
g 33. ſep.
h 19. ſep.
i 7. prop.
k 9. prop. num.
l 19. ſep.
m 21. ſeptim.
n 17. ſeptim.

rum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem, atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, producl numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

Hoc autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

xxxv. THEOR. 33. PROPOS. 57.

Si duo numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Metiantur duo numeri A, & B, quem libet numerum C D, sitq; alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico &, E, ipsum C, D, metiri. Si enim E, ipsum C, D, non metitur, ablato E, ex C D, quoties potest auferti, relinquetur numerus quidam minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerum, si fieri potest, F D, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum C F, a metietur quoque tam A, quam B, ipsum C F. Itaque A, & B, cum metiantur totum C D, & ablatum C F, b metientur & reliquum F D, E st autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . B . . .
C . . . . . E ---- D
E . . . . .

a 11. *prop. nun.*
b 12. *prop. nun.*

xxxvj. PROBL. 5. PROPOS. 38.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

c 36. *sept.*

Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur, c Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metian-

metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest; A, B, C, aliũ numerum E, ipso D, minorem.

A... B... C.....
D.....
E----------

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A & B metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; *a* metietur quoq; D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. a 32. sep.

Sed iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. *b* Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; *c* metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; *d* metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B; metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum E, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; *e* metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A.. B... C.....
D.....
E.....
F -------

b 36. sep.

c 11. pro num.

d 37. septim.

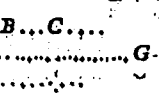
e 37. septim.

COROLLARIVM.

Sequitur ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

Hoc corollariũ alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E. sit q; F. minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E. metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D C,



relinquatq; numerum GE, seminorem. Quoniam igitur A,B,C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum DG, a metiantur quoq; A,B,C eundem DG; Ac proinde, cum & totum DE, ponatur metiri; b metientur & reliquum GE, ipso F, minorem. Quare F. non erit minimus quem A,B,C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Metitur igitur F, ipsum DE.

a11 pro nun.

b12. pro nun.

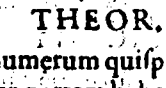
Pari ratione. Pluribus numeris datis, quam tribus reperiemus, quem ill iminimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

xxx vij.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

Metiatur numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A æque metitur; a & vicissim vnitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur: atque adeo eadem pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A, Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numer' metiatur, &c. Quod ostendendum erat.



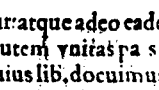
a15. sep.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

xxx viij

Si numerus partem habuerit quam libet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, á qua numerus C, denominatur. Dico C numerum ipsum A, metiri. Nam cum B, pars denominetur à C, sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsũ A, æque.



d15. sep.

d Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

PROBL.

THEOR. 6. PROPOS 41. xxxix.

Numerum reperire, qui minimus cum sit habeat datas partes.

Sint datæ partes A, B, C, Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; a minimusque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, b habebit G, partes à D, E F, denominatas; hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur à D, E F. Quod vero G, sit minimus illas partes habens perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest H, ipso G, minor easdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, c metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

D .. A, *Secunda* 38. *sep.*
E ... B, *Tertia*
F .... C, *Quarta*
G.....
H----------

b 39. *sep.*

c 40. *sep.*

SCHOLIVM.

Quod si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à D, E, F.

Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur aque vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G, d *Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I K. L, ipsum G, aque, atque adeo vnitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ à D, E, F.*

A, *Secunda* D..I.....
B, *Tertia* E...K....
C, *Quarta* F....L...
G.....

d 15. *sep.*

Ex hu autem sequitur, minimum numerum, quē quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimē metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, eiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

Iam vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas par-

tas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, sit illius duplus, numerus H, triplus vero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, &, I tertium &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeãt denominatas scil. à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I,

G.....A, D..
H.....B E ...
I.....C, F....
K-- ----- M- ----- L
N----------P------O

a 11. pronun. *& reliquos multiplices ipsius G, a metientur quoque D, E, F, eosdem H I, & reliquos multiplices ipsius G.* b *Quare H I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeros D, E, F, denominatas, quales enuntiatur partes A, B C.*

b 39. septim. *Quod autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quem G, minimus & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K*

c 40. sept. *L, relinquatur M L ipso G minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C,* c *metientur ipsum numeri D, E, F à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus quem D, E F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem &*

d 12. pronun. *G, ablatum K M, sibi æqualem.* d *Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.*

Non aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O,

e 40. sept. *relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C,* e *metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N*

f 12. pronun. *O per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem.* f *Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens, partes habet A, B, C, datas; Ac*

tas: Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eadem que ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

Huc quoque referri potest sequens problema.

Numerum reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

Sint datæ partes A, B, C; inueniendus sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt, pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; fiatque G, ex E, in F. Item H, ex D, in G. Dico H esse minimum numerum, qui quæritur.

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, totics quoties H, vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerũ G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G, erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E. Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatẽ. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest easdem partes eodem ordine, ita vt K sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata & M ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K pars est ipsius I, à D, denominata, erit K, totties in I, quoties vnitas in D; Atque adeo ex D, in K fiet I. Eadem a15. *de-*
ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos C, & fin.
K multiplicans faciat H, & I; b erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem b17. *se-*
ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G & K; erit vt G, ad K, ita F, ad ptim.
L. Et cum ex F in vnitatem, & M fiant F & L, erit, vt F ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I,

ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L, & vt H. G. F Vnitas
F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma I. K. E. M.

propos.

H.G.F.Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ.14.huius lib.vt H,ad I,ita vnitas ad M:Ponitur autem H numerus numero I,maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars tot. Quod eſt abſurdum.Nõ ergo alius numerus minor quam H,habet partes A, B, C,ordine prædicto,ſed ipſe H, minimus eſt.Quod eſt propoſitum.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt vis tenenda ac demonſtratio.Vt ſi numeri 2.3.4.5.6.ſint denominatores partium,fient 30.ex 5.in 6.& 120.ex 4.in 30.& 360 ex 3 in 120.& tandem 720. ex 2.in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hac aliam à 4.& hac aliam à 5.& hac denique partem à 6.denominatam,vt manifeſtum eſt,

Quod ſi numerum H, inuentum duplicemus triplicemus, &c. habebimus alios numeros,videlicet ſecundum,tertium quartum, &c.qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas,&c.Nã G,duplicatus, vel triplicatus,&c.dimidiata pars erit,ipſius H,duplicati,vel triplicati,&c.quemadmodum & G,ipſius H.Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, *a* erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: *b* Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. *c* Igitur tam A, ipſum E, quam D, ipſum H, æque metietur maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... E
B ..... F
C ..... G
D ..... H

a 14. ſep.
b 23. ſep.
c 21. ſep.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe

esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A. & D, inter se primi sint sive A,B,C,D sint continue proportionales, vt vult Euclides, sive non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

A.... E---
B.....F------
C.....G------
D.....H--------

ij. PROBL. 1. PROPOS. 2.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

Sint minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; *b* erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur.

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

a 17 sept.

b 17 septim.

Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos: *c* sunt autem A & B, inter se primi quod minimi sint in sua proportione; *d* Erunt & C, E, extremi, inter se primi. *e* Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

c 24 septim.

d 29 sept.

e 1. octa.

Im vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propos. 18 lib. 7. ostendimus numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, 18 sum E, mulplicantes, fecerunt H, & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. *g* Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E, eiusmodi F, ex A, in C, & I,

f 18 sept.

g 24 sept.

C, & I, ex B, in E, & erunt & F I, extremi inter se primi. b Quare F, G, H I, in sua proportione quæ est A, ad B, minimi sunt. a 29. sep. b 1. oct.

Non aliter, si ex A, in quatuor inuentos F G H I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinq; numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademq; ratione inueniemus sex, septē, octo, &c Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

Eodem modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. F. ant enim I, H, G, ex B, ne E, D C: & F, ex A, in C, quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod AB, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadē erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A B, quod B, multiplicans C, D, E, ipsos G H I, fecerit. Sunt ergo F, G H I, in eadem ratione, in qua A B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius. c 18. sep

Non aliter si ex B, in quatuor inuentos I H, G F, fiant O N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides quatuor F, G, H I, produci ex A, in C D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A . .	B . .
C . . . D	E . . . . .
F, 8	G, 12. H, 18. I 27.
K, 16.	L, 24, M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM. I.

Hinc sit, si tres numeri minimi sunt continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorū æqualium B, B, B, fit procreatus, ac propterea vterque sit æqualiter æqualis æqualiter: ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

Sic etiam si fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum: Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub aliis denominationibus, qua

quæ in Algebra solent explicari: Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

Neque vero dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis cõtinue proportionalib. inuentis arte in hac propos tradita, non autem in quibusvis tribus, quatuorve numeris minimis continue proportionalib. vtcunq; propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continue proportionales æquales prorsus sunt iis, quæper hanc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuentis, non essent inuenti, minimi, quod est cõtra hanc propos. Si enim dati maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi quod est contra hypothesim. Quod clarissime ita fiet perspicuũ Dati sint tres numeri A, B, C, minimi cõtinue proportionales: sumptisq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex schol. o propos. 35. lib. 7 inueniantur per hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos a tribus inuentis F, G, H, non differre Nam necessario A, ipsi F, æqualis erit; atq; ita, cum sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B ipsi G, æqualis: Eademq; ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erunt. Eademque ratio est de quatuor, aut plus ibus. Quod si A, dicatur minor quam F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt, quod est absurdum, & contra hanc propos. Si vero A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non sunt, quod est contra hypothesim. Cũ ergo A, minor non sit, aut maior, quam F, æqualis omnino erit, ideoq; vt ostensum est, & B, C, ipsis C, H, æquales erunt. Quod est propositum.

A---B---C------
D,2. E,3.
F,4, G,6. H,9.

COROLLARIVM II.

Perspicuum quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

Constat etiam duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione: quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medii ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex B, in F,

B, in F,G,H, vt ex demonstratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM. II.

Quoniam vero tam numeri A,C,F,K, quam B,E,I,O, ex constructione, continue proportionales sunt, ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero à B, denominentur, vt clarius demõstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris data rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum cõtinue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrẽ si quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe qua ab vnitate incipias) cõtinue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorũ, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum qui si per denominatorẽ data proportionis multiplicetur, habebitur secundus. & si hic rursũ per denominatorem eundẽ multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumẽdi erunt octo numeri ab vnitate cõtinue proportionales in proportione dupla, qua denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128 erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hi patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eadem de reliquis est ratio.

Boetius autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos 5. lib. in tractatione proportionum dictum diximus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderãtur 8. numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt primus, qui nimirum

denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, à 2. Quod si oportuerit quinq; numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quinquupli; vt hic 1.5.25.125.626. Nam 625. est primus quinq; numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet 625.750.900.1080.1296 Atq; ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neq; enim posit 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam, sicut neq; in priori exemplo post 1287. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demõstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. . demonstrabitur.

iij.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentiũ; illorum extremi sunt inter se primi.

Sint numeri A,B,C,D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G. H. I, in eadem ratione, nec non quatuor K,L,M,N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A. B, C, D. minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometrice demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K. 8. L, 12. M, 18 N, 27.

SCHOLIVM.

Hæc propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri

neniri non possent, ex precedenti problemate, K, L, M, N, totius minimi in eadem proportione. Imo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, cõtinuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6.10.13.18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaq; hoc theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim numeri extremi quotcunq; minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, veluti hic demonstratum est. At vero primũ theorema, prout spectat ad numeros non cõtinue proportionales, conuerti nequit. Nã licet numeri quotcunq; non cõtinue proportionales, quorũ extremi sunt inter se primi, minimi sint in cõtinuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunq; minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6.10.13.18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. iv.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primùm datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis porportionibus. *a* Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, meritur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in porportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, *b* A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E, *c* Quare erit, vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus; sint, si fieri potest, F, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua

A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.
H. 4. F. 24. E. 20. G. 15.
I ------ K ----- L -----

a 36. sept.

b 9. pro. nun.

c 18. sept.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4, F, 24. E, 20. G, 15.
I ----- K ----- L -----

proportione: a ipsi æque metientur I & K, in eadem proportione existentes, nimirum B ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non erunt igitur alij numeri minores ipsis F E G in rationibus A, ad B, & C, ad D; A. propterea ipsi, F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

b 37. sep.

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendi; sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. c Inuento rursum numero G minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B ipsum G, metitur, toties metiatur A ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K.

c 36. sep.

A, 6, B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L ---- M ------ N ---- O -----

Dico H, G I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, cõstat. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H G I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; d ipsi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

d 21. septim.

e 37. sep.

Sed iam E, non metiatur ipsum I. f Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K,

f 36. sep.

æque

æque metiantur; erit vt supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K. Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipsos H, G & C, D, ipsos G, I, metiantur æque.

Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita K, ad K. Atque vt E ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur.

A, 9. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20, I, 15.
M, 48. L 40. K, 30. N, 105.
O----- P---- Q--- R-----

Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namq; non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P Q R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt, a ipsi sique metiuntur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, b metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B & C, eundem P. Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q, erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q. Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q, c quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q, d metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maiorem minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipsi M, L, K, N minimi sunt.

a 21. sept.

b 37. septim.

c 12. septim.

d 37. septim.

Quod si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipientus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, E, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipsum N, non metiatur, e sumem-

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O, 144. Q 120. P, 90. O, 315. V, 70.

e 36. sept.

A,8 B,5. C,4. D,3. E,2. F,7 S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

O, quem S, & N, minimum metiantur. E quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P, & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S eundem O, metitur, toties T ipsum, V, metiatur, His enim peractis, erunt R Q P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis, numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequã ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet inter medius sit & antecedens & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

Porro inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs quæ ad propos. 18. lib. 7 demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; a erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F.

A,24. B,48. G,18. C,4. D,6. E,3 F,16.

a 17. septim.

Qua-

Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, *a* Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur. *a* 27. 8. fin.

Eodem argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A & G, *b* erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. A proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. *c* cum ergo proportio A, ad B componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F, 16. E, 3. *b* 17. septim. *c* 27. 8. fin.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam vllum metietur.

Sint continue proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; A, vero ipsum B, non metiatur, neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. *d* Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. *e* Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium à se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neque

A, 16. B 24. C, 36. D, 54. E, 81. F, 4. G, 6. H, 9. *d* 21. octa. *e* 3. octa.

A quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque aliorum quemquam illorum vllius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequentium multiplex sit, constat. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B ad C, C, ad D: & D, ad E. non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C ipsius D, neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque aliorum quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum D per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniã igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E D, C B, A; (Nam cum sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C, & A, ad B, erit conuertendo E, ad D vt D ad C; C, ad B; & B, ad A) Et E, primus secundum D, non metitur; a neque alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è cõtrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum vllius erit multiplex per ea, quæ in defin. 5. lib. 7 scripsimus.

a 6. 0 fi.

Sed & ex his sequens theorema demonstrabimus.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.	

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundem metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuius libet sequentium multiplex erit.

Sint deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime in sequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur,

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.	

metiatur, nempe B ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, a metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, b metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.

a 11. pro nun.
b 11. pro nun.

Sed iam primus A, multiplex sit B secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximе insequentis multiplex est, A, 48. B, 24. C, 12. D, 6, E, 3. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex, metietur è contrario E ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est. Ac propterea è contrario si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6, E, 3.

Conuertemus etiam hanc propositionem sextam, & theorema quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundum metietur: Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex; neq; primus secundi multiplex erit.

Sint deinceps proportionales A, B, C D, E, & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54 E, 81

Iam vero A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neq; alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

vij. THEOR. 5 PROPOS. 7

Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

Sint deinceps proportionales A,B,C,D,E, & A,primus extremum B,metiatur. Dico & A, primum metiri B,secundum. Si enim A,ipsum B,non dicatur metiri: a neque alius quisquam vllum metietur. Quare nec A,ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E, Igitur A, primus B, secundum metietur; Atq; idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 6. def. 8. A,3.B,6.C,12.D,24.E,48.

SCHOLIVM.

Vt theorema, quod secundo loco in scholio precedentis propos. demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc prop. hoc modo.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cuiuslibet à secundo sit multiplex, primus quoq; secundi multiplex erit.

Quod eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex, neq; alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholij precedentis. Quod est contra hypothesin.

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C,D; sitq; vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo vt A, ad B, atque adeo vt E, ad F, ita G, ad K. Quare cum G, & K,

A,24.C,36.D,54.B,81. G,8.H,12.I,18.K,27. E,32.L,48.M,72.F,108.

& K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorum numerorũ; *a* ac propterea in ſua proportione minimi; *b* æque metientur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos *c* Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiũtur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F producunt; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propoſ. 18. lib 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B, tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Igitur inter duos numeros medij continuã proportione cecidêrint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1. *a* 23 *ſep.*
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1. *b* 21. *ſep.*

A, 17. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1. *c* 9. *prop. nun.*
E, 108. L, 36. M, 12 F, 4.

SCHOLIVM.

Non ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F. qua eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K. Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

Eadem hac propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas exiſtentibus E, & F, numerus, vt in exemplis apparet.

Conſtat etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, nõ poſſe cadere numerum medium proportionalem: cum enim duplæ proportio in minimis numeris reperiatur inter binariũ, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter nũeros, ſola vnitate differentes; ſuperbipartientes denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius ſi inter duos numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoq; per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binariũ, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes vel etiam binario, nimirũ inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent, quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neq; inter binariũ & vnitatem, neque inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtãtes intercitur ſolũ numerus, qui ab vtro-

que

que vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri *A B*, C D, (*siue* C D, *vnitas sit*, & *A B*, *ternarius siue zon*,) *binario, inter quos cadat numerus* E F, *minor vnitate quã A B, maior vero quam* C D, *vnitate quoque.*

A . G . B	*A . . . . . G . B*
E . H . F	*E . . . . . H . F*
C . D	C . . . . D

Dico E F, *non esse medium proportionalem inter A B*, C D. *Si enim dicatur esse* A B, *ad* E F, *vt* E F, *ad* C D : *ablato ex A B, numero A G, ipsi* E F *aequali, vt reliqua sit vnitas* G B; & *ex* E F, *numero* E H, *ipsi* C D, *aequali, vt relinquatur etiam vnitas* H F; *erit quoque vt A B, totus ad* E F, *totum, ita* A G, *ablatus ad* E H, *ablatum; cum A G.* E H, *ipsis* E F, C D, *aequales sint, ex constructione. Igitur erit quoq; reliquus* G B, *ad reliquum* H F *hoc est vnitas ad vnitatem, Vt totum A B, ad totum* E F, *maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo* E F, *medius proportionalis est inter A B*, & G D.

Itaque inter numeros tripla proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1 *minimos numeros proportionis tripla, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proxime demonstrauimus.*

Pari ratione inter numeros quintupla proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. *minimos numeros proportionis quintupla, quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium A B*, & *vnitatem* C, *medius proportionalis binarius, vel ternarius* D : *ita vt sit A B, ad* D, *vt* D, *ad* C : *Et conuertendo* C, *ad* D, *vt* D, *ad* A B. *Et quoniam vnitas* C, *metitur* D; *metietur quoque* D, *ipsum A B. At binarius, vel ternarius* D, *metitur quoque senarium A E. Igitur* D, *metitur totum A E*, & *ablatum A E.* a *ac proinde* & D, *numerum metietur reliquam vnitatem* B E. *Quod est absurdum*

a II. *pro* *num.*

A . . . . E . B	*Cadat deinde, si fieri potest, inter quinarium A B*, & *vnitatem* C, *medius proportionalis quaternarius* D. *Ostendemus ergo, vt prius*, D, *metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius* D, *quaternarium etiam A E. Igitur*
D	D, *metitur totum A B*, & *ablatum A E.* b *ac proinde* & D, *numerus reliquam vnitatem* E B, *metietur. Quod est absurdum.*
C .	

b II. *pro* *num.*

Ex quibus fit, neque illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, octaua neq; illud, quod in se, sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est

Tonus

Tonus, seu vulgo, secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam) quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem, perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquitertia, hoc vero in sequitertia cōsistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportiones sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

Rursum ex his demōstrari potest, proportionem diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea quæ ad propos. 47. lib. 1. demōstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; fit vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratū lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, quæ de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

Si duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidē & inter vtrumq; eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

Cadant inter numeros A B, inter se primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, a sumantur in eadem proportio- a 2. *oct.* ne res minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec

A,8. C,12. D,18. B,27.
Vnitas.
1.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; *a* erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipsum G, fecit K, *b* metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: *c* Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Æque igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. *d* Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri, E, G, K, Simili ratione, cum manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans vero ipsum I, faciat N; *e* metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: *f* Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Æque igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. *g* Proportionales ergo sunt continue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vna cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continue proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

a 1. *oct.*
b 7. *pronun.*
c 5. *pronun.*
d 20. *def.*
e 7. *pronun.*
f 5. *pron.*
g 20. *def.*

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est, numeros quotlibet continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atq; vnitatē habere proportiones denominatas à minimo numero proportionis A, ea C, hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

Constat etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab vnitate.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

Cadant inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales: inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, & B, & vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D, D, ad E, & E, ad A; æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: *a* Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. *b* Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; *c* erit vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; *d* erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; *e* erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex iis, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7 A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, *f* erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proin-

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

a 5. *prop. num.*
b 9. *prop. num.*
c 17. *sep.*
d 17. *sep.*
e 18. *sep.*
f 18. *sep.*

proinde tot medij proportionales cadant inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, cõtinue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Ex his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

Patet etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate cõtinue proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sit deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.

I.

Si sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

Sint numeri A, B, C, D, continuo ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionẽ B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumq; numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter B, quidem & vnitatem, numerus A: At inter F, & vnitatem numerus E: a cadet quoque inter B, & F, vnus medius proportionalis: atque adeo per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot numerum cadunt inter vtrumq; C, G, & vnitatem. Nec non inter D H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

a 10 8.

tione A, ad E proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I, est autem vt B, ad I, ita, A, ad E; Habebit quoque I, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E, quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E, Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

Hoc idem demonstrabimus si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vtde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quã habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

[Sint ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodẽ totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I quadruplicatam. Et A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P, Postremo ex F, quoque in se fiat Q, & ex F in Q, fiat R, & ex F, in R fiat C. Quibus peractis erunt A, K, L, M continue proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 9. huius lib. Et deinceps ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales, nec non & F Q R S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholii: Est autem ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q duplicata rationis A, ad F, & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholii, quod tam B, N, quam F Q, sint ab vnitate continue proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, dupli-

E, 162. I, 512.
D, 54. *Vnitas.* H, 128.
C, 18. L, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36, K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E,81. I,1.
D,4. Vnitas. H,2
C,16. 1. G,4.
B,24. F,8.
A,16.
N,176. K,256. Q,64.
O,1384 L,4096. R,512.
P,33176 M,65536. S,4096

duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis etiã ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad E; quod tam B, N, O, quam A, K, L, sint ab vnitate cõtinuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. & eiusdẽ triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodẽq; modo est A, ad H, vt L, ad R: quod vtraq; proportio triplicata proportionis A, ad F: proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, propterea quod tam A, K, L, quam F, Q, R continue proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex aequo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. eo quòd tam B, N, O, quam F, Q, R, sunt continue proportionales ab vnitate ex scholio propos 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatem, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

Caterum theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14 propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quod inter vtrumque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

Cadant inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales, inter A, quidem & C, numeri D, E, F, inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E & C, & inter

inter H & C. Sumptu enim tribus K, L, M, minimis in ratione D. ad G. erit ex defin. ratio K. ad M. duplicata rationis K, ad L, hoc est D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L: a cadet quoq; vnus medius, nimirum N. inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D. ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadē ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eade proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

A.16: Q.216, R.288, S.384. B.512. F.54. O.72 P.96. I.128. E.18. N.24. H.32, D.6, G.8. C.2. K.9. L.12. M.16

a 8. octa.

Hoc etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, cadunt q; tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt & c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B nec non inter F, & I atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

A.1048576 Q.32768. R.1024 S.32. B.1. F.65536. O.2048. P.64. I.2. E.4096 N.128 H.4. D.256. G.8. C.16. K.1024. L.32. M.1.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

Duorum quadratorum numerorū vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. xj.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipsum D, multiplicans fecit E,

A.9. E.21. B.49. C.3. D.7.

a 17 *sep.* A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. ex constructione: *a* erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione: & multiplicans se-

b 17. *septim.* ipsum, ex defin. quadrati, fecit *B*, quadratum: *b* erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Perspicuum est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione laterus ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C ad latus D, vt demonstratum est.

Per rationem liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. C enim A, E, B, proportionalem sint ostensi in ratione C, ad

A 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. *D hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem si de proportionibus E, ad B, & C, ad D loquamur; metietur & C ipsum E, antecedens antecedentem, quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; quæ a eo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.*

xi. ## THEOR. 10. PROPOS. 12.

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales ca-

de re

dere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E: & D, seipsum multiplicans faciat F. At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G. Multiplicantes vero G, faciant H & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G, *a* erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F: *b* erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea quæ E G F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G fecit H: *c* erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans vero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; *d* erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B; *e* Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H I B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D: Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quum igitur duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

a 17. *sep.*
b 17. *sep.*
c 17. *sep.*
d 17. *sep.*
e 18. *sep.*

SCHOLIVM.

Hic quoq; manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in cõtinua propotione lateru ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

Eodem modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoq; C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atq; adeo inter se compositi sunt.

similiter cum sit A, ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoq; D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B: immo & ipsum I, quod I factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A, posteriorum vero trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

xij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisq; seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoq; proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

Sint continue proportionales A. B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E F multiplicantes autem ipsos D. E F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G H I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoq; D E, F, & G, H I, & K, L, M, continue esse proportionales. Multiplicantes enim A, & B, se mutuo faciant N; & B, C, se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, facia P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I 512.
K, 16. T, 32 V, 64. X, 128, L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M. 4096.

R, S. Simili modo A, multiplicans P, Q H faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, N, a erit vt A, ad B. ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum fecit N, & E; erit etiam vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum G, multiplicans fecit E, & O; b erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea q; & E O, F, continue proportionales sunt in ratione B, ad C seu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua E, O, F, erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeo D, E, F, continue proportionales sunt.

a 17 *sep.*

b 17 *sep.*

Deinde

Deinde, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q, erunt ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q & H; a erit quoque, vt A, ad B, ita Q ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18 lib. 7 H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt B ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; b erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; propterea quæ & H, R, S, I proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I, erit ex æquo G, ad H vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales. a 18. ſep. b 18 ſep.

No 1 diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Sunt autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A ad B, &c.

Iam quoq; numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B. Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et ſic deinceps ſemper vno amplius.

Breuius propoſitionem totã demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F, & in hos ex eiſdem numeru G H I; & rurſum ex eiſde n in hos numeri K, L, M. Dico D E F, & G H I; & K, L, M, eſſe quoq; continue proportionales. Namex ſcho io propoſ. 9. huius lib tam A, D, G, K, quam B, E H L; & C F, I, M, cõtinue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theorema. ſcholij propoſ. 10 huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C; ſed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I, eſſe proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.

A, 2.	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

Ex qua rurſum demõſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorũ; ſecundo vero loco

procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

Quamuis autem in vtraq; demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint; quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B C, D, continue proportionales qui seipsos multiplicantes faciant E, F, G H postea vero multiplicantes ipsos E F, G, H faciant I, K, L, M, & sic deinceps Quoniam igitur E F G. ex demonstratis proportionales sunt. Item F G H, cum illi producti sint ex A, B C, proportionalibus in seipsos: ut vero ex B C, D, proportionalibus quoq; in seipsos. Erunt E F, G H continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L M & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. F, 16. G, 64 H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

a 13. 8.

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Metiatur quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremũ B, b metietur quoq; A, primus secundum E. Quare cum sit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus lati D, metietur.

b 7. 8.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

Metiatur iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoq; A, primus E, secundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur & cubus cubum metietur.

Metiatur cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D.

Dico

Dico & latus C, metiri latus D. Vterq; enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E G F, quam A H I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, a metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4 G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.
a 7. oct.

Metiatur iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I B, continue proportionales sunt in ratione. C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaq; si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. xv.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, b metietur & quadratus A; quadratum B. Quod est absurdum, Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.
b 14. oct.

Sed iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namq; A, metiri dicatur ipsum B; c metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

c 14. oct.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xv.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neq; latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

a 15. 8. A, 8. B, 27. C, 2, D, 3.

Sed iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. 8.

SCHOLIVM.

Proxime antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

Nam si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B. cubum A.

c 14. & 15. 8. c *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

Quod si latus C, lateris D, multiplex sit: metietur latus D, latus C. d *Igitur & B, ipsum A, quadratum quadratum, & cubus cubum metietur Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.*

d 14. & 15. 8.

A 36. B, 9. C, 6. D 3.

At vero si A, ipsius B quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. e *Igitur neque latus D, latus C, metietur.*

e 16. & 17. 8.

A, 64. B, 8. C, 4. D. 2.

A, 49, B, 9. C, 7. D, 3.

Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

Similiter si C, latus lateris D, non sit multiplex, non metietur D, latus latus C. f *Igitur, nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atq; adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

f 16. & 17. 8.

A, 125. B, 8. C, 5. D, 2.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

Duorum ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, huius vero illis proportionalia E F: ita vt C, D, ſe mutuo multiplicantes faciant A, & E F, mutuo ſe multiplicantes faciant B, ſitque vt C, ad D, ita E ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuo D, E faciant G. Quoniam igitur

eſt C ad D, vt E ad F, erit permutando A, 12. G, 18. B, 27.
C, ad E, vt D, ad F. E quia D, multiplicans C, & E; fecit A, & G, a erit A, ad G, vt C, ad E hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E multiplicans D, & F, fecit G, & B, b erit quoq; G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G. C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

a 17. ſexti

b 17. ſexti

Quia vero, cum A, G, B, ſint continue proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E. vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Quia oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum G, E, vel D, F, aſſumptorum.

Conſtat etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe comoeſitos. Cum enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera conſequentes cõſequentem, ſi de proportionib. C, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoq; C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram cõmunem habent tam C, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit A, ad

A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes antecedente; metiantur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare cum & E, F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G B, communem mensuram F, quam F; ideoque erunt inter se compositi.

Ex qua demonstratione etiam manifestum relinquitur, si duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuram communes esse E F, latera plani posterioris B.

xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

Duorum similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

Sint solidi numeri similes A B, & latera illius sint C, D, E huius vero illis proportionalia F, G H. ita vt sit C, ad D, quemadmodum F ad G, & D, ad E, sicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, esse triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E H.

A, 30. M. 60. N. 120. B, 240. I. 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

Multiplicantes enim se mutuo C, D faciant I; & F G, se mutuo multiplicantes faciant K Item D, F, se mutuo multiplicantes faciant L. Postremo E H, ipsum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipsis F, G, H, proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; *a* erit vt C, ad F, ita I ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; *b* erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, solidus factus est ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I & L, fecerit A, & M, *c* erit A, ad M, vt I, ad L, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; *d* erit N, ad B, vt L, ad K, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. *e* Est autem & M, ad N, vt E, ad H; quod F, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in

a 17. sep. b 17. sep. c 17. sep. d 17. sep. e 18. sep.

es in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

Quoniam vero, cum A, M, N, B, sint proportionales continue; proportio A, B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca; Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

Cum demonstratum sit A, M, N, B proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. liquet inter duos similes solides A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F vel D, G, vel E H, assumptorum.

Ex iis quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M N & vtrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M N B, ostensi sint proportionales in ratione C ad F, vel D ad G vel E, ad H. hoc est, esse A, ad M, & M, ad N & N, ad B vt C, ad F, vel D, ad G vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera sua solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N ad B, & C ad F, vel D ad G, vel E, ad H, loquamur: metietur quoq; C, D, E, ipsum N antecedentes antecedentem. quod sit N ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E ad H. Atque & C, D, E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L metietur E, ipsum M. Deinde quia M N B, proportionales sunt ipsis I, L, K, metitur autem K ipsum B, quod B factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M. Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I, a lgitur & C, D, metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. a 11. pro nun. *Ergo A, M N, habent communem mensuram tam C, quam D, & quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum A, antecedentes*

antecedentem; metientur quæ- A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
que F, G, H, ipsum M, conse- I, 6. L, 12. K, 24.
quentes consequentem Metium- C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.
tur vero & F, G, H, ipsum N. (Cum enim factus sit ex H, in L, per constructionem; metietur H ipsum N. Deinde quia A M, N ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K, metientur quoque F G, ipsum N, atque adeo, F, G, H, ipsum N. metientur.) Necnon & ipsum B nimirum la-

A,30 M,60 N,120 B,240.
I,6. L,12, K, 24,
C,2 D,3 E,5 F,4 G,6 H,10.

rum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram terminum F, quam G, & quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A: At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, B.

Quia vero solidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonstremus hoc loco, eundem numerum solidum procreari, sive primum latus ducatur in secundum, & numerus procreatus in tertium: sive primum in tertium, & numerus genitus in secundum: sive denique secundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam, proposito quotuis numeris eundem per numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordine inter se permutent. Quæ quidem res magnum usum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema.

Datis quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

Sint primum tres numeri dati A,B,C & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur.

a 15. de fin. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, a erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem. Sed ut C, ad unitatem, b ita quoque est F, ad A; quod A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A. Ut autem D, ad B, c ita est A, ad unitatem propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, ut E ad B, ita

b 15. de fin. c 15. de fin. d 19. septim.

E,	F,	E, ad unitatem: d atque idcirco numerus ex E, in
D,	A	unitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, æqua-
B,	unitas.	lis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in G. Quemadmodum igitur numerus E, fit, ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B, Quod est primum.

e 15. de fin. f 15. def. g 15. de fin. h 19 septim.

Rursus quia ex C, in D, fit E; e erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem. Sed ut C, ad unitatem, f ita etiam est G, ad B, eo quod G, factus est ex B, in C. Igitur erit, ut E, ad D, ita G, ad B: Ut autem D, ad A, g ita est B, ad unitatem, propterea quod D, factus est ex A in B. Igitur ex æquo erit, ut E, ad A, ita G, ad unitatem: h hic proinde numerus factus ex E, in unitatem, id est, ipse

finet

met numerus E, aequalis erit numero genito ex A in G. productus ex B, in C. Quemadmodum igitur E gignitur ex A, in B & ex producto in C, ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A quod est secundum.

Sint deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D.

Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C, item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A. Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita ut praeter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersa producentes eundem semper numerum.

A, 2. B, 3. C, D, 5. E, 120.

Quoniam enim, ut in tribus ostensum est idem numerus sit, sive genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, sive prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod pro mo loco proponitur.

Deinde quia, ut in tribus est ostensum, idem numerus sit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A in C, & ex producto in B, perfit numerus est eundem numerum gignitum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

Tertio quoniam, ut in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, sive genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D sive prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. tum ex A, in C, & ex producto in D & ex producto in B. Cum ergo ille sit aequalis proxime ostensus primo producto, erit & hic aequalis eidem, quod est tertium.

Quarto quia, ut in tribus ostensum est, idem numerus sit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B, gignatur quoque idem numerus ex A in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco aequalis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

Quinto quoniam, ut demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C, producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, &

in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C & ex producto in B Cum ergo ille sit ostensus tertio loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem aqualis. Quod est quintum.

Sexto, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. quod est sextum.

Septimo quia vt in tribus ostendimus, idem numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in A; constat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proxime ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, Igitur & ille, quod est septimum.

Octauo quia vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A: gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C, Sed ille primo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic Quod est octauum.

Nono quia, vt demonstratum est in tribus, idem numerus fit ex B in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C, procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, &, ex producto in C, & ex producto in A Sed ille ostensus est septimo loco aqualis ei, qui fit ex A in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic Quod est nonum.

Decimo quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A, producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B Sed ille, vt tertio loco est ostensum, aqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

Postremo quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod est undecimum.

Eodem

Eodem argumentandi in do vtendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerum ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permittent, eundem semper gignent numerum: ac proinde iam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quē primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A. B C. D. E
A. B C. E. D
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

xvij.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter A, & B, medius proportionalis D: Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C, *a* metientur D, & E, ipsos A & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. *b*. Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C. *c* Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B, Quia ergo E, multiplicans F, & G fecit C, & B. *d* erit, vt C, ad B, ita F, ad G. Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus, cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex defin. A, B plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. *septim.*
b 9. *prænum.*
c 9. *prænum.*
d 17. *septim.*

A, 18. C 24. B 32.
D, 3. E, 4 F, 6. G, 8.

xix.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres, E, F, G,

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 3. K, 9. L, 3. M, 9. N, 27.

minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; *a* erunt E, & G, plani similes: sint ipsius E, latera H, I, ipsius vero G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, *b* æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis, metiantur per M: eodemque modo *c* quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N, *d* ita vt M, multiplicans E, F, G faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque ideo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicares F, faciunt C, & D, vt ostendimus; *e* erit C, ad D, vt M, ad N: *f* Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D. Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I. L. igitur erit quoq; H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, ad I vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera, H, I, M, lateribus K, L, M; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quamobrem si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. 6. Faut. b 21. 7. sequitur. c 21. sep. d 9. prop. huius.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. N, 78.

A, 8. G, 12. D, 3. L, N, 3
E, 4. E, 6, G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3

SCHOLIVM.

Duo exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, & I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatē à numeris planis excludamus, nō poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodē priori exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generatim proponat, eamque sine vlla exceptione demonstret.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri A, B, C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; a erunt A, & C, plani similes. Quare existente A quadrato, & C, erit similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales &c. Quod demonstrandum erat.

A, 9, B, 54, C, 324. a 20. 8. Euclid.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxi.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus sit cubus Dico &, quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C, b erunt A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam obrem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 27, B, 45, C, 75, D, 125. b 21. 8. Euclid.

SCHOLIVM.

Hæc est apud omnes interpretes Euclidu, quos ego vidi, vulgata demonstratio praciden ium duarũ propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet sane mancam esse & imperfectam. cum enim addefin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia, atera alterius proportionalia, dũmodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quadam alterius. Iure optimo quis inficiari poterit, si duorũ planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorũ vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubũ: quod tamẽ in demonstratione pro concesso, atq; omnib. perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeru planu 36. & 64. similibus satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4 & 16. proportionalia. Vnde etiã si prior sit quadratus, habẽs duo latera aqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, imo omnino negare, posteriorẽ habere alia duo latera hus proportionalia, hoc est inter se quoq; aqualia, atq; adeo esse quadratum: quemadmodũ e. iam manifestũ est, hisce lateribus prioris 4. & 9 vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportion-

tionalia. S igitur hu lateribus prioru numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedemus, hus lateribus prioris aqualitus 6. & 8. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se aqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

Sint tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A, erunt D & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales, eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant medij proportionales multitudine aquales nimirum vnus, cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter vnitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36. E, 6. B, 48. E, 8. C, 64.

vnitas.

Aliter. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C, metietur D, ipsum A, & F ipsum C, eadem, ex ijs, quae ostendimus ad propos. 1. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem A, quadratus ex hypothesi; a cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est ex aequo, vt A, ad C, ita D, ad F, & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F, cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F, metietur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; sita vt H, ad F, & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H ad F. Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex demonst. duplicata, quod conuertendo sint proportionales etiam C, H, F, erit L, ad F, vt C, ad H. Ac proinde L, & C, aquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

a 11. oct. b 8. oct. c 7. oct. d 11. oct. e 20. oct.

ALITER. Quoniam A & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A, at F, G, ipsius C, ita vt D, ad

sit D ad E sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A producitur ex D, in E, & ex H, in se, a erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatq; inter D, & E, medius proportionalis H, a 20. sep. *b cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; c idem numerus fiet ex F, in G qui ex I in seipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C fiet ex I, in seipsum: Atq; adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.*

A, 36.	B, 48.	C, 64.	
H, 6.		I, 8.	
D, 3.	E, 12.	F, 4.	G, 16.

b 8. oct.

A, 36.	B, 48.	C, 64.		c 20 septim.
H, 6.		I, 8.		
D, 6.	E, 6.	F, 8.	G, 8.	

Sint rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D quartum, cubum esse. Sampto enim E, latere cubi A: fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A: erunt ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaq; cum tam inter numerum D, quam vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine aquales, videlicet duo; cadent ex theorem 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaq; quia vnitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. à nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.	
F, 16.		H, 100.		
E, 4.		G, 10.		
vnitas.				

Aliter. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metiatur E, ipsum A, & H, ipsum D, aque, per eas, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi; d cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H, & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; e cadent quoq; inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, f metietur

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.	
K, 32.		M, 500.		
I, 16		L, 250.		
E, 8.	F, 20.	G, 50.	H, 125.	
P, 1000.	O, 10.	N, 5.		

d 12. oct. e 8. oct. f 8. oct.

tietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. a Itaq; cum ratio P, ad H cubi ad cubum, triplicata

a12.oct. *sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L H: erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus sit ex constructione, cubus quoque erit D.*

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitq; A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; b cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; c cadet quoq; inter A, & B, medius vnus, qui sit F. Qua igitur tres numeri sunt cõtinue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & d B, tertius quadratus. d Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

b11.oct. A, 36. F, 48 B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.
c 8.oct.
d22.oct.

COROLLARIVM.

Liquet ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, e essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibita, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim f existente quadrato, f esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & o. quod g est absurdum. g Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cũ tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratũ sit, inter numeros duplę proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.

e24.oct.
f24.oct
g11.oct.

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum: Si enim haberent; h caderet inter eos medius proportionalis. i Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri nõ posse, demonstratum à nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

h11.oct.
i8.oct.

xxiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus nu-

bus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum, sitq; A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, a cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E F: b cadent quoq; inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A G H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus: c erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. octa.
b 8. octa.
c 23. octa.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

COROLLARIVM.

Patet etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, d essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperte, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

d 25. octa.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

Similes plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; e cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex corol. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F, Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

e 18. octa.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.
A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrabimus conuersum huius; videlicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

Habeant numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, d. Dico A, B, esse planos similes. f *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit.*

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.

f 21. 2.

D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt

a 8. oct. *A*, 8. *B*, 18. *C, ad D, ita A, ad B;* a *cadet quoque medius pro-*
b 20. oct. *C*, 16. *D*, 36. *portionalis inter A, & B,* b *Quare A, & B, plani similes sunt.*

Ex hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quã quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

THEOR. 25. PROPOS 27.

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi A, B. Dico esse, vt A ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt
c 19. oct. solidi similes; c cadent inter eos duo medij proportionales, qui sunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, in nimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extrem. E, H, ex corol. 2. prop. 2. huius lib. cubi. Quare cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 1240.	C, 360.	D, 540.	B 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLIVM.

Conuersum huius etiam demonstrabimus; scilicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

Numeri enim A, B, proportionem habeant inter se quam cubi
d 12. oct. *A*, 16. *B*, 54. *C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D;* d *cadant autem inter*
e 8. oct. *C*, 64. *D*, 216. *C, D cubos duo medij proportionales,* e *cadent*
f 21. oct. *quoque inter A, B, duo medij.* f *Sunt ergo A, & B, solidi similes.*

Ex hu omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionẽ, vel superparticularem, vel superbipartientẽ, esse
g 18. oct. *similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani,* g *caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, tam dudũ ostensum est in scholio propos. 8. huius li. Eadem ratione nõ erunt similes solidi, cum inter eos cadere nõ possint duo medij proportionales. Nã*
h 8. oct. h *alias caderet quoq; duo medij inter minimos eorundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantũ inter se different, vt in scholio praedicto traditum*

est, in-

est, inter quos certum est, non posse recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

Similiter, nec duo quinis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus qui sit numerus primus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, qua constat non esse proportionalia. Quinis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit latera tantum habet duas vnitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 25. & 47. latera habent 1. 1. 29 & 1. 1 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

Rursus neque duo quicunq; numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; a cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis mẽsura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erũt continue proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1 propos 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod absurdum est. Ponuntur enim non quadrati, neque cubi. a 18. & 19. oct.

Ex his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; b essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proxime ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes: quod absurdum est. & contra hypothesin. Verum hoc ostensiuè quoq; ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitq; A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur A, 3. B, 48. *plani similes, habebãt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi* C, 1. D, 3. E, 4. F, 12. *A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, aqualis, quod nullus alius numerus, praeter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, aequalem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, lateri C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur permutãdo C, ad D, vt E, ad F. c Igitur numerus factus ex C, primo in F, d quartũ, aequalis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit aũt ex C, vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. d Quare D ipsum F, metietur: e Metitur aũt F, ipsum E, quod B, gignatur ex E, in F. f Igitur & D, id est, A, illis aequalis, eundem B, metietur, quod est propositum.* b 31. sep. c 19. sep. d 4. proquart. e 4. prenun. f 1. prenun.

Hinc perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Sint deinde duo ſolidi ſimiles A, B, ſitq; A minor primus. Dico A, ipſum C, metiri. Nam cum A, & B. ſint ſolidi ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B, C, vnitates, & numerus D, ipſi A, aqualis, quod nullus a. uus numerus, prater vnitatem & numerum D ipſi A aqualem, metiatur numeru primum A: ſint E F G, latera numeri B, late ibus b C D, proto tionalia, ita vt ſit B. ad E. vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur eſt C, ad F, vt D, ad G, erit permutando C, ad D, vt F, ad G. Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum aqualis erit i, qui ſit ex D, ſecundo in F, tertium. Fit autem ex C, vnitate in G, ipſemet numerus G. Idē ergo numerus G fiet ex D, in F. Quare D ipſum G, metietur. Metitur autem G ipſum B, quod G, latus ſit ipſius B. Igitur & D, hoc eſt A, illi aqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

	A, 3.	B, 24.	
	B, 1.	C, 1.	D, 3. E, 2 F, 2. G, 6.

a 19 ſep

b 4 pronum.

c 4. pronun.

Atq; ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, nō eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

d 11. pronun.

Itaq; facilis admodum eſt inuentio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem in duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani vel ſolidi non ſimiles.

Rurſus quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit alter vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles, quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles; c haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, f eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.

e 26. 8.

f 24. oct.

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, vt 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, g haberent proportionem quā cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, h eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum: ponitur enim non cubus.

g 27. oct.

h 25. oct.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

Si duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, *b* vnus medius cadit proportionalis. *c* Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continue proportionales D, E, C. Itaq; cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; *d* erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

a 17. *sept.*
b 18. *oct.*
c 8. *oct.*
d 22. *oct.*

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; *e* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *f* At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. *g* Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; *h* Ac propterea

A, 6, B, 54.
D, 36. C, 324.

e 17. *sept.*
f 11. *oct.*
g 8. *oct.*
h 10. *oct.*

pterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

Duo quadrati A B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint simil s plani, nimirum quadrati;
A, 4, B, 25. C, 100.
a 1. huius. *a er t C, ex eis productus, quadratus.*

II.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus: Et reliquus quadratus erit.

Duo numeri A B, se mutuo multiplicantes faciant C quadratum; sitq; A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum:
A, 9, D, 12, B, 16. C, 144.
b 2. huius. c 18 oct. d 22 oct. *b erunt A, & B, similes plani: c atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis; videlicet D. d Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

III.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C non quadratum; sitque A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1 huius. Scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur quadratus est B, numerus.
A, 4. B, 20. C, 80.

IV.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multi-

multipli antes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si sit, sit quadratus, cū producatur ex A, in B, fit quadratus, esset & B, ex theor. huius. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit. A,9. B,20. G, 1,80.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim G, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: *a* metietur C, ipsum D, per C: *b* Metietur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C ipsius D, nimirum denominata à C. A: proinde *c* vt vnitas ad C, ita C, ad D: Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; *d* metietur D, ipsum A per C, Metietur autem & C ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A. *e* Ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. *f* At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A seipsum multiplicans fecerit B; *g* metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; *h* Ac proptereà erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D, *i* cadent totidem inter A, & B. Similiter E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, *k* erit quoque E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus seipsum multiplicans &c. Quod erat demonstrandum.

a 7 *pro. nun.*
b 5. *pro. nun.*
c 2. *def.*
d 7. *pro. nun.*
e 20. *def.*
f 7. *pro. nun.*
g 5. *pro. nun.*
h 10. *def.*
i 8. *oct.*
k 23. *oct.*

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse multiplicans enim A, seipsum faciat D; *l* eritque D, cubus. Quoniam vero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, *m* erit vt A, ad B, ita D, ad C, *n* Atinter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. Igitur & inter A,8. B,27. D,64. C,216

l 3. *noni.*
m 17. *septim.*
n 12. *oct.*
o 8. *oct.*

a 23. oct. inter D, & C, duo medij proportionales cadent; a Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerum cubum numerus multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

vj. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

Fiat ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse Multiplicans enim A, seipsum faciat D; b qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, c erit vt A, ad B, ita D, ad C; d At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent; f Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

b 12. noni. c 17. sep. d 12. oct. e 8. oct. f 12. oct.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

SCHOLIVM.

Ex his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I.

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

Fiat ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; g & multiplicatus B, cubus erit, quod nō ponitur.

A, 8. B, 20. C, 160.

g 5. non.

II.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

Fiat ex cubo A, in numerum B, non cubus C, Dico & B, non esse cubum Si namque B, sit cubus, h & factus cubus C, cubus erit quod est contra hypothesin.

A, 8. B, 17. C, 136.

h 4. noni

vij. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit. cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C,

A, 8. B, 64. C, 512.

erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum. a 5. nonj.

SCHOLIVM.

Aliam demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: b *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* c *Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad D quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* d *cadent quoq; inter A, & B, duo medij proportionales.* e *Atq; adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est.*

b 12. oct.
c 17. sept.
d 8. oct.
e 23. oct.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

Numerus compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A sit compositus, f metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito g multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2 E, 3.

f 13. def. 7.
g 9 prænan.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus, simul, & quadratus, & quinq; intermittentes oēs.

Sint ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M, septimum vero F, cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum

Vnitas. A, 3. B, 9 C, 27. D, 81. E 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L 177147. M, 531441.

rum M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B, æque metie-
a 5. pro- tur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: a Metitur
mum. autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, me-
b 9. pro- tietur; b Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Qua-
mum. re B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt
c 11. def. B, C, D, & est B, quadratus; c erit & D, quadratus. Eadem ratione
assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit
d 22. def quadratus, d & F, quadratus erit. Nec non & omnes vnum inter-
mittentes.

Rursus quia est vnitas ad A, vt B, ad C, æque metietur vnitas
e 5. pro- numerum A, & numerus B, numerum C: e Metitur autem vnitas
mum. ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, f atque adeo
f 9. pro- B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum
mum. A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt
est ostensum, erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps propor-
g 23 def. tionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, g erit & F, cubus. Eodem
argumento assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H,
h 23. def I, cum F, sit cubus, h & I, cubus erit, atq; omnes semper duos inter-
mittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.

Si sint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proximè numero positos in locis tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes vero qui proximè sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimo octauo, vigesimo quarto, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus tertius decimus, decimus nonus, vigesimus quintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

Primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate. At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate: Numeri denique tertij ordinis quinq; semper interponūt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt. ix.

Sint ab vnitate continue proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus vnitati quadratus.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, *a* iam demonstratum est. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cum tres con- *a* 8. *nonæ*

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

tinue proportionales sint A, B, C; sique A, quadratus; *b* erit & C, quadratus E idemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; *c* & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C; D, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales. *b* 22. *oct.* *c* 22. *oct.*

Sit iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes,

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, *d* iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: *e* Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur & A, ipsum B, per seipsum metietur; *f* Atque adeo cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit; *g* Quare B, cubus est. Quoniam vero quatuor continue proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, *h* & D, cubus erit. Eademque ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit; *i* & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt: Non secus demonstrabimus, omnes cubos *d* 8. *nonæ.* *e* 5. *pronun.* *f* 9. *pron.* *g* 3. *nonæ.* *h* 23. *oct.* *i* 23. *oct.*

esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat

SCHOLIVM.

Non demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliques omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demostratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus; quae parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

Verum tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam, n. ex scholio propos. 10. lib. 8 A seipsum multiplicans facit B; erit vt defin. B, quadratus. Item qu a ex eodem scholio A, multipli ans B, facit C, sunt q; A, B, quadrati; erit & C, quadratus;

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodē scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicās C, facit D sunt q; A C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: At q; ita deinceps: cum ax illo scholio propos. 10. lib. A, multiplicans D producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

Sit deinde A proximus vnitati cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multiplicans

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096 E, 32768. F, 262144.

a 3. noni. b 4. noni. c 4. noni x. *facit B; a erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C, sunt q; A, B, cubi, b erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio A, multiplicans C, facit D, sunt q; A, C, cubi; c erit quoq; D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex scholio, A, multiplicans D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neq; alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

Sint

Sint ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E F, G, H I, &c. & primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratum, præter tertium a vnitate, & vnum intermittentes omnes, hoc est, præter B, L, F, H, &c. Si enim præter hos alius est quadratus, sit quadratus E.

Vnitas, A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 1048. M, 4096.

a Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo, vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: b sed B, tertius ab vnitate est quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse. a 8. noni b 8. noni. c 24. oct.

Sed iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. d Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D. e Sed C, est cubus, cum sit quartus ab vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit, quod est contra hypothesin. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; g cum & C, cubus sit, sitq; ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, h erit, & A, cubus, quod nō ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C. & F, cubos non esse, ita quoq; eadem ratione ostendemus neque G. & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat. d 8. noni e 8. noni f 25. oct. g 8. noni. h 25. oct.

SCHOLIVM.

Non est autem necesse, si numerus, qui potest vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul & quadrato.

Si enim primum A, qui potest vnitatem, cubus quidem non au-

tem simul & quadratus. Dico B tertium esse cubum simul, & quadratum; cubum quidem, a quod primo existente cubo, omnes cubi sint, b quadratū vero, quod tertius sit ab vnitate.

a 9. noni.

b 8. noni

Vnitas. B, 8. B, 64.

Sit deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum; c Cubum quidem quod quartus sit ab vnitate: quadratum vero, d quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

c 8 noni

d 9. noni

Sit postremo A, post vnitatem neq; cubus neq; quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, prater septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non existente

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

quadrato, e nullus alius quadratus sit, prater tertium ab vnitate, vt vnum intermittētes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8 huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, f nullus alius sit cubus, prater quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus tertius decimus, decimussextus, decimusnonus, &c. Perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum quidem omnes quinq; intermittunt, quadratis esse simul & cubos, & sic de cæteru. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

e 10. noni.

f 10. noni.

xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G eandem habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

g 20. def. 7. g æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum

rum G: a Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur: Eadem ratione, metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo vt A ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. a 5. prænun.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt ex his quantum ab eſt maior numerus à minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, qua vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, me-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

tietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter B, & F, quam inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter G, & F, quam inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

Hinc rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantùm ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate. Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à maiore diſtat, quantum minor ab vnitate, propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet tum; per quem metitur, b producitur ille, quem metitur. Ergo C, ſeipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoq; B, multiplicans, D, faciet eundem F: quod D, ipſum F, metiatur per B, & e, & ſic de reliquis b 9. prænun.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

Sint ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; non metitur ipſum A: c erit E, cum primus ſit, ad A, primus; hoc eſt, c 13. ſep

A, & E, inter se primi erunt. Metiatur E, ipsum D, per F, *a* atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedentis propos. ostendimus; produceretur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. *b* Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; *c* ac proinde in sua proportione minimi; *d* metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, *e* atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B, *f* atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium.

Vnitas A, 10, B, 100. C, 1000. D, 10000.
E, 5. H, 20. G, 200. F 2000.

g Erit igitur vt A, primus ad E, secundum, ita G tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, sint inter se primi; *h* ac propterea in sua proportione minimi; *i* Metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B per H; *k* ita vt E multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A ac ideirco A, seipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in seipsum, *l* Quare erit vt E, primus ad A, tertium, ita A, secundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter se primi sint; *m* ac proinde in sua proportione minimi; *n* æque metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesin. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metietur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostenderemus quotcumque alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoque ipsum A; Eademq; erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

ALITER Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; *o* erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicans facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat, *p* erit B, ad E, primus.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296
E, 5.

Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A in B, per idem scholium præcedentis propos. *q* erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præcedentis propos. *r* erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesin. Metitur ergo E, ipsum A, Si igitur

a 9. *propun.*
b 19. *sept.*
c 23. *sept.*
d 21. *sept.*
e 9. *propun.*
f 9 *propun.*
g 19. *sept.*
h 23. *sept.*
i 21 *sept.*
k 6. *propun.*
l 20. *def.*
m 23. *sept. ptim.*
n 22 *sept. ptim.*
o 27. *sept. ptim.*
p 27. *sept. ptim.*
q 26. *sept. ptim.*
r 26. *sept. ptim.*

tur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est, quod non ponitur.

SCHOLIVM.

Est autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse albū ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quas sequuntur Cardanus quoq; simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5 de propor. propos. 20. 1. gloriaturq; se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim huius demōstrationis expendisset, vel certe si expendit, eam in memoriam reuocasset, quandoquidem ipso longe prior Euclides vsus est hoc etiā demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 11. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est a 12. noni. *Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus.*

Caterum ex demonstratis perspicuum est, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. a *Cum enim metiatur proximū vnitati; hic autem omnes subsequentes;* b *quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris;* c *manifestum est quod & ille omnes metiatur.*

b 11. noni.

c 11. prænun.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum aūt est, E, nō esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; d metietur quoque ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est sed cum positus; e atque adeo eum aliquis numerus primus metie

Vnitat. A, 5. B, 25. C, 125, D, 624.
E---- H---- G---- F----

d 12. noni.

e 33. sept.

tur, quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; a metietur quoq; ille alius primus eundem D; b atq; adeo & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; c & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per E, d Cum ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B C, quod est contra hypothesin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam vero E, metitur D, per F, e metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non est autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum; f metietur & A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; g atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quę rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F, cum F, metiatur D, extremum; h metietur quoque ille alius primus eundem D; i atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur, Iam vero quoniam E, metitur D, per F; k fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; l Ac proinde erit vt A primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab, A B, & non primum, sed compositum quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A B C, metiebatur D, vltimum.

Vnitas A, 5 B, 25 C 125 D, 625,
E---- H---- G---- F----

Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G, metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; m & vicissim aliquis ipsorum A B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F n Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. Ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G,

a 11. *prænun.* b 12. *noni.* c 8 *prænun.* d 11. *noni.* e 8. *prænun.* f 12. *noni.* g 33. *sept.* h 11. *prænun.* i 12. *noni* k 9 *prænun.* l 19. *septim.* m 8. *prænun.* n 11. *noni.*

go G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; *a* metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C, *b* metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum, quod est absurdum. Non ergo G primus est, sed compositus, *c* ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum, *d* metietur quoque illi alius primus eundem C, *e* atque adeo ipsum A, vnitati proximum qui primus est, quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metietur. *f* Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. *g* Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H, diuersum esse ab A, quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

a 8. *pronun.*
b 12. *nonum.*
c 33 *def.* 7.
d 11. *pronun.*
e 12. *nonum.*
f 9. *pronun.*
g 19. *septim.*

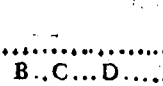
Nam si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A; *h* Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. *i* Iam vero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H primo in G, tertium, & ex A, medio in se ipsum *k* Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum *D*, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

h 8 *pronun.*
i 9. *pronun.*
k 20. *septim.*

THEOR. 14 PROPOS. 14. xiv.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

Sit numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus numerus E, diuersus



a 9. pro-nun.

b 32. sep-tim.

sus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipsum F, faciet A, b Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Addit hoc loco Camanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

Sint quotcunque numeri continue proportionales A B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, c 2. oct. *metiri quoque vel F vel G, certe ad alterum eorum compositū esse. Sit enim H, non primus sed compositus: c sumantur in eadē proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A, B C D E.*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18 P, 27.
I, 4 K, 6 L, 9.
H ----- F, 2. G, 3.

Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2 propos. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metitur autem H, ipsum A, erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum, si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8 erit ex scholio eiusdem propos. 32 lib 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

Deinde metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt primus H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum, si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem modo

modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum, si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

Rursus metiatur H, non primus tertium C, qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F habetur propositum, si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se, compositus quoq; erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probauimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7 eum metiri ipsum G.

Praterea A, metiatur H, non primus quartum D, qui cum fiat ex F in P erit H cõpositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si vero ad P qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad H, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si vero ad L cum L producatur ex G in se; erit quoque H, ad G, compositus Quod si H, primus sit ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G

Eodem modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H compositum esse ad H. Si vero H, primus sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

Itaque si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si vero H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum E, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVoniam ad theorema sequens demonstrãdum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis est eruditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, secetur que ipsorum alter in quot

quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

Sint duo numeri A B, & C, quorum A, B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B; Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numero G H, H I I K, hoc est toti numero G K, ex G H H I IK, composito. Quoniam enim C multiplicans A B, fecit F; a metietur A B, ipsum F, per C hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K pars erit à C, denominata, eadem nimirum qua A B, ipsius F. Quia verò per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7 demonstrauimus, totus A B totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; b & proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.

A...D..E.B C..
F.....
G....H.. I..K

a 2. pronun.

b 4. pronun.

II.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim A B, diuidatur in A C, C B Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numero, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B, quod est propositum.

D.....
A....C..B

Idem demonstrabitur, si A B, plures partes, quam in duas secetur, vt, ex appositâ secundâ figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E.....
A...C..D.B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui

illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

Sit numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, aqualem esse & ei, qui sub partibus AC, CB continetur & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, æqualis numero facto ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IV.

Si numerus in duas partes diuidatur. Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numero, qui fiunt ex AB, in AC & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC per 3. theoremá, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoq; numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB: Quod est propositum.

A . . . . . C . . . . B

V.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus, enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CC, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius C B, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, una cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B, numero vero comprehenso semel sub C D, D B, una cum quadrato ipsius D B, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, vt si hic numerus factus ex C B, in D B, sumatur pro quadrato ipsius D B, una cum numero facto ex C D, in D B; numerus quadratus ipsius C B, æqualis etiã sit reliquo quadrato ipsius C D una cum reliquo numero facto ex C D, in D B, semel, & numero ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeri, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numerus, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius C D, una cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc est, numerus factus ex A D, in D B, una cum quadrato ipsius C D, æqualis erit quadrato ipsius C B. Quod est propositum.

A . . . . C . . . D . . B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

Numerus enim A B, secetur in partes æquales A C, C B, eique adiiciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D, in adiectum B D, una cum quadrato dimidij numeri C B, æqualem esse quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno hoc est, quadrato ipsius C D. Cum enim quadratus ipsius C D, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C B, B D, una cum numero bis comprehenso sub C B B D, hoc est, quadratis partium C B, B D, una cum numero sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis; numeris autem contentis sub C B, B D, & sub A C, B D, & sub B C, B D, hoc est, quadrato ipsius B D, æqualis sit ex 1. theorem, numerus factus ex A D, in B D; fit vt si hic numerus factus ex A D, in B D, sumatur pro quadrato partis B D, vna cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratus ipsius C D, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius C B, vna cum numero facto ex A D, in B D; hoc est, numerus factus ex A D in B D, vna cum quadrato ipsius C B, æqualis sit quadrato ipsius C D. Quod est propositum.

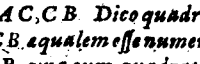
A . . . . C . . . . B . . D

Si nume-

VII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

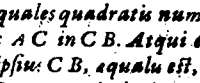
Diuidatur numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB, si quadratis ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerum AC, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.



VIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

Secetur numerus AB in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æquale esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compositi ex AB, & BD, siue dictæ parte CB, sit æqualis per 4. theorem. quadratis numerorum AB BD, vna cum numero qui fit ex AB in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum AB, CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC, fit, vt si pro quadratis numerorum AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cũ quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.



Sinume-

IX.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Diuisus sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos esse quadratorum, qui ex AC dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD DB,) efficiuntur Cum enim

A . . . . C . . . D . . B

quadratus numeri AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratu numerorum AC, CD, vna cũ numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. At qui quadrato ipsius DB, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC, & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, vna cum eo, qui fit bis ex CB in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero composito ex dimidio, & adiecto.

Sit numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratũ adiecti numeri BD, vtrosque simul, duplos esse quadratorũ, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, composito ex CB, dimidio, & adiecto BD.

A . . . C . . . . B . . D

Cum enim quadratus ipsius AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD, si communis addatur quadratus partis BD, erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, vna

una cum numero bis, qui fit ex CB in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, aequales sunt quadrati numerorum CB CD; & quadrato ipsius CB, aequalis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, una cum numero, qui fit bis ex CB in CD, sumantur quadrati numerorum CB CD, hoc est, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, aequales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD efficiuntur. Quod est propositum.

Iam vero theorema 11. lib 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnũ partium fit, aequalis sit quadrato reliquae partis; vt ibi monuimus, ita demõstrabimus.

Diuidatur si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, aequalis est quadrato numeri medij AC; a *erit vt AB ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC, ita AC igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB sit aequalis, erit quoq; vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB detractus ad CD ex toto AC detractum;* b *erit quoq; vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD ipsi CB aequalis ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC maior quam CD erit quoq; CD, maior quam AD Ablato ergo DE, qui ipsi AD sit aequalis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD ad DE Itaq; quia est, vt totus AC, ad totum CD ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum erit; quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum* c *DE, ita AD, ex AC, residuum, hoc est DE ipsi AD, aequalis ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE maior, quam EC: Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, aequalis; & sic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, aequalis sit quadrato reliquae partis. Quod est propositum.*

A D E C B

a 20. sept.

b 11. sept.

c 11. sept.

Aliter. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB in CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC: erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, vna

A C B

cum quadrato ipsius AC quintuplus erit quadrati partis AC. Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, una cum quadrato ipsius AC, quadratus, quippe cum aqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8 theorem. Igitur duo numeri quadrati (nimirum us, qui quater cõtinetur sub AB CB, una cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex AB, in CB, aqualis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.

Verum hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 19. huius lib.

xvj. ## THEOR. 15. PROPOS. 15.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A B, C, minimi omnium eandem cum his proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C; & B C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicantem facere C. *a* Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; *b* erit & vterq; D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaq; cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; *c* erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquam vno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquã vno, in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; *d* Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

A, 9.	B, 12.	
	C, 16.	
D, 3.	E, 4.	

a 24. *sep.* b 30. *sep.* c 26. *sep.* d 27. *sep.*

Deinde quia, vt prius, *e* vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E; efficitur, (cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) *f* numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam in E, æqualis est per 3. theorem. scholij antecedẽtis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt,

B, 12.	C, 16.	
	A, 9.	
D, 3.	E, 4.	

e 30. *sep.* f 26. *sep.*

sunt, *a* atque adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B & C, simul compositi. a 27. sep.

Postremo quia, vt prius, *b* vterque D, & E simul ad quemlibet ipsorum primus est: atque adeo è contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E, *c* erit quoque qui fit ex D, ad cõpositum ex D, E, primus; *d* Ac proinde & idem fit qui ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in se primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem. antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt ostensum est. *e* Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, inter se primi: Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt: vt ostensum est; *f* erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, in E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quamobrem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

b 30. sep.
c 26. sep.
d 27. sep. prim.
e 20. sep. prim.
f 30. sep. prim.

SCHOLIVM.

Campanus hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunq; numerus continue proportionalibus minimis hoc modo ipsum proponens.

Si quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

Sint continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos esse primos; Videlicet A B C, simul ad D; & A, B D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; A, 8 B, 12. C, 18. D, 27. z

E -- F, 2. G, 3. H --- *atque adeo eos a quibus numerus com-*

munis mẽſura metietur Metiatur eos numerus E ſi fieri poteſt ſumanturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A B, C D con inue proportionales ſunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipſorum F, G, v. l certe compoſitus erit ad alterum ipſorum F G, ex ſcholio propoſ. 14. huius lib Atque idcirco ipſum E, & alterum ipſorũ F, G aliquis numerus metietur: Metiatur eos H taq; cum H metiatur E; &

A, 8. B, 12. C, 18 D. 27.
E ---- F, 2, G, 3. H ----

a 11. pronun. *E, ponatur metiri compoſitum ex A, B C, & ipſum D; a metietur quoq; H, eundem compoſitum ex A B C, & ipſum D. Quia vero H, metitur quoq; alterum ipſorum F, G, & tam F, quam G, med os numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propoſ. 1. lib. 8 b metietur quoq; H, med os B, C; c ac propterea & compoſitum ex B, C. Itaq; cum H, metiatur totum compoſitum ex A, B, C, & detractum compoſitum ex B C, vt demonſtrauimus: d metietur quoq; idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipſum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter ſe compoſiti. e Sed & primi inter ſe ſunt. Quod*

b 11. pronun.
c 10. pronun.
d 12. pronun.
e 3. oct.

fieri non poteſt. Non igitur compoſiti inter ſe ſunt compoſitus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter ſe primi

Rurſus, ſi A, B, D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad C metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rurſum ex ſcholio propoſ. 14. huius lib vel metietur alterum ipſorum F, G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F G Metiatur ergo H ipſum E, & alterum ipſorum F, G. Itaq; cum H, metiatur E, & E, compoſitum ex A, B, D: f metietur etiam H, eundem compoſitum ex A, B, D. Quia vero H metitur alterum ipſorum F G, qui metiũtur, per coroll. 3 propoſ. 1. lib. 8 medios B, C, g metietur quoq; H, ipſos B, C Itaque cum H, metiatur totum compoſitum ex A, B, D, & detractum B, h metietur quoq; H, compoſitum ex A D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F G, quorum F, ipſum A & G ipſum D, metitur, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. i metietur etiam H, alterum ipſorum A D k Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter ſe compoſiti. l Sed & primi inter ſe ſunt Quod fieri non poteſt. Non igitur A, B D ſimul compoſiti, ad C, compoſiti ſunt. Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

f 11. pronun.
g 11. pronun.
h 12. pronun.
i 11. pronun.
k 12. pronun.
l 3. oct.

Non aliter oſtendemus & A C D, compoſitos, eſſe ad B, primos: Nec non & B, C D, ſimul ad A Eadem q; ratio eſt de quotlibet numeris continue proportionalibus.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

xvij.

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

Sint

Sint primi inter se A, & B, Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, *a* atque adeo in sua proportione minimi; *b* ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se. Quod est absurdum, Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum, C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c, Quod demonstrandum erat.

A.....
B.....
C---------

a 23. *septim.*
b 21. *septim.*

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

Sint continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi *c* minimi in sua proportione. *d* Igitur æque metientur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; *e* atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D Quare A, metiens ipsum C, *f* metietur quoque ipsum D. Metitur vero & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E, eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A,8.B,12.C,18.D,27.E----

c 23. *septim.*
d 21. *septim.*
e 11. *prænum.*
f 11. *prænum.*

PROBL. 1. PROPOS 18. xix.

Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B, Aut igitur A, B, primi inter

a16. no. se sunt, aut non. Si sunt inter se primi, a perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero nō sunt A, & B, inter se primi: multiplicans B, se ipsum faciat C, Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C, per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, imo ipsum D, esse tertium proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D, b fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum: Igitur, qui continetur sub extremis A D, æqualis est ei, qui ex medio B, describitur; c A c proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

A, 4. B, 7.

b9. pronun.

c20. septim.

A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.

Sed non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita B, ad D, d erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; e metietur A, ipsum C, per D; sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

d20. septim.

A, 6. B, 4. D---- C 16.

c7. pronun.

xx. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

Sint dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales siue non, oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, imo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, f fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo & tertio continetur; g A c propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.

A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

f9. pronun.

g19. septim.

Sed

Sed iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A B, C, E, proportionales sunt, *a* erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D fiat ex A, in E; *b* metietur A ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

A 4 B 6 C 9 E ---- D 54.
A 3 B 4 C 12 E ---- D 40.

a 19. septim.

b 7. pronun.

SCHOLIVM.

Hæc quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16 17. 18. & 19. *demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duob. numeris datis 3. 8, si quadratus numerus secundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 $\frac{1}{3}$, hoc modo. 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$ Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus 21 $\frac{1}{3}$ producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione. Quotientes 21 $\frac{1}{3}$ per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7 tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se, erunt 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$ continue proportionales.*

Datis autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 10. si numerus 120. ex secundo in tertium, genitus diuidatur, in primū 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$, hoc modo 9. 6. 10. 13 $\frac{1}{3}$ Cum enim diuisis 120. per 9 fiat 13. $\frac{1}{3}$ producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione. Quotientes 13. $\frac{1}{3}$ per diuisorem 9 ex ijs quæ in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. d. Igitur quatuor numeri 9. 6. 10 13 $\frac{1}{3}$ proportionales sunt.

c 20. septim.

d 19. septim.

Ex his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Com-

cuiCommandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi. Aut non deinceps quidem proportionales sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidē proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorū extremi inter se primi. Vel mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidē demonstrationibus vigilantissimi, in secundo memoratu huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes in errorem eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non esse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quod enim non videt esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique eadem proportio sit subdupla? Idē videri potest in exemplis aliis infinitis vt hic 2. 4. 1. Item 3. 9. 1. Item 2. 10. 5. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, ipsis dari non posse quartum proportionalē. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare conantur, perspicuum fiet si demonstratorem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

Sint trium numerorum A, B, C non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & vt B ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex aequo, vt A, ad C, ita C, ad E. Sed sunt A, C, inter se primi, a *& ob id minimi.* b *Igitur metientur aequo ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At vero & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primus inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E---

a 23. septim.
b 21. septim.

Haec est eorum demonstratio in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt. Imo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D,

B, C, D, *quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C, cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiã, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius ad quem ita se habeat quartus sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo i si vtuntur.*

Sint enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintq; A & C primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, v sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Si enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex aquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atq; adeo

vt ipsi ostenderunt, metietur A A.4. B,12. C,3 D,9. E----

duos A, & C, primos inter se.

Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime; alsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

Primum vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; manifestum est, ex demonstratis non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus. a 17. nostri. xxj.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. b

Sumpto enim numero D, E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF. Aut ergo totus DF, primus est, aut non primus. sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & DF, plures proposita multitudine A, B, C.

b 38. sept.

A, 2. B, 3. C, 5.
30. 1
D---------E . F

SED iam non sit primus DF. c Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico, G primum nulli ipsorum

c 33. sept.

A,3.B,5.C,7. 105. 1. D---------E.F 53. G------

A,B,C, eundem esse. Si namque, G, sit idem, qui vnus ipsorum A, B, C, metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, a metietur quoque E F, reliquum, nu-

a 11 *pro* *mun.*

metus vnitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A B C. A proinde inuenti sunt primi numeri A B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Potest idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propositis, inueniri alium primum numerum ab illis diuersum.

Nam si primi quotcunq; propositi sint A, B, C, inuenietur eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est, vel certe G qui ipsum D F, metitur. Atq; eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinq; primis alium sextum inueniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

xxij. THEOR. 19. PROPOS. 21.

Si pares numeri quotcunque componantur: totus par erit,

Componantur quotcunque pares numeri AB, BC, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione S. Ergo E, dimidia pars ipsius A, B, & F, ipsius B C; & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper sit proportio dupla) b erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem A, B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit: Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....B ...C.....D E....F..G....

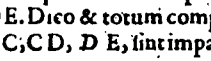
b 12. *sep.*

xxiij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit,

Com-

COMPONANTVR quotcunque numeri impares quorum multitudo par A,B,BC,CD,DE. Dico & totum compositum *A* E, parem esse. Cum enim *A* B, B C, C D, *D* E, sint impares: differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit *a*. Quare, & compositus ex ipsis, par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. *b* Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

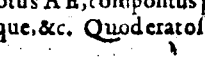


a 21. noni.
b 12. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

Si impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

Quotcunque numeri impares, quorum multitudo impar est, *A* B, B C, C *D*, componantur. Dico & totum, *A D*, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate a pari ex definitione, ablata vnitate E *D*, ab impari C *D*, erit reliquus C E, par. *c* Est autem & *A* C, compositus ex imparibus *A* B, B C, multitudine paribus, par, *d* Igitur & *A* E, compositus ex paribus *A* C, C E, par erit. Quare addita vnitate E *D*, totus *A D*, impar erit, cum impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.



c 12. noni.
d 21. noni.

SCHOLIVM.

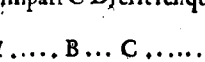
Pari ratione. Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cũ ex definitione. Impar à pari differat vnitate. e Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergò rursus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.

e 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS 24. xxv.

Si à pari numero par detrahatur. Et reliquus par erit.

Ex pari numero *A*, B, detrahatur par C B. Dico & reliquum *A* C, parem esse, *A*ut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius *A* B, aut maior quam dimidia pars, vel minor.



Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit *A* C, reliquâ pars dimidia, erit & *A* C, numerus par.

Sed iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius. Quoniam igitur *A* B, C B, pares numeri, dimidias

dias partes habent. ex definitione, sit D B. demidia pars ipsius A B, & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando vt A B, ad C B, ita D, B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad C B, ita D E, ad E B. Rursusque permutando, vt A C, ad D E, ita C, B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B duplus est. Igitur & A C, ipsius D E. duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A.....C..D. .E.... B
A.... ..D..C.. E..B

SCHOLIVM.

Facilius demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile, hoc modo. Si A C, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate A D, erit reliquus D C, par. a Igitur cõpositus a 23. no mi.

A..D.... C..... B

D B par quoque erit: ac proinde, addita vnitate A D, totus A B, impar fiet, quod est absurdum, cum par ponatur.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

xxvj.

Si à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; b erit & reliquus A D; par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 24. no mi.

A.....C. D....B

THEOR. 24. PROPOS. 26.

xxvij.

Si ab impari numero impar detrahatur; Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A, D, par aufertur C D; c erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

c 24. no mi.

A.... C .....D.B

THEOR. 25. PROPOS. 27.

xxviij.

Si ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex

Ex impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cum detrahatur CB, par; a reliquis DC, par quoque erit: Ac proinde addita vnitate AD, ret AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A . D . . . . C . . . . . B

a 24. nouni.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Fiat ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cum B, sit par, componetur C, ex tot partibus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; b Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . . . .
C . . . . . .

b 21. nouni.

SCHOLIVM.

Eadem demonstratione ostendemus & hoc.

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

Nam rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

Constat quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; Factus impar erit.

Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar: componetur C, ex imparibus ipsi B, æqualib. quorũ multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. c Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . .
C . . . . . .

c 23. nouni.

COROL.

COROLLARIVM.

A... B... C..... Hinc sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

a 29. noni. A .... C .... B ..... *Metiatur impar A, parem B, per C. Dico C parem esse. Nam si impar sit; a erit B factus ex A impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.*

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

b 28. noni. A .... C ..... B ..... *Metiatur impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; b erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.*

SCHOLIVM.

Ex his clarissime quoq; demonstrabimus theorem. 11. lib. 2. numeris non posse accommmodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimus q; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus AB, in partes AC, CB, ita vt numerus ex AB, in CB factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur vtraq; pars AC CB, impar est; aut maior AC impar, & minor CB, par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar: aut denique vtraq; pars AC, CB,

A --- C --- B
D --- E --

c 22. noni. d 28. noni. *par. Sit primum vtraq; pars AC, CB, impar, c ideoq; totus numerus AB, par. d Igitur qui fit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex AC, in se; erit par numerus impari æqualis, quod fieri non potest.*

Deinde sit AC, impar, & CB, par, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar. e 28. noni. *e Quia ergo numerus ex A, B, impare in parem CB, factus par est: & numerus ex impare AC, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis: quod est absurdum.*

Tertio sit AC, par, & CB, impar, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB impar. f 29. noni. *f Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB factus, impar est: & numerus ex pare AC, in se genitus, par, ex coroll propos. 28. huius lib. erit rursus ille par huic impari æqualis: quod est absurdum.*

Quarto

Quarto sit vtraq; pars AC CB, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35 lib. 7 duobus numeris minimis D E, proportione AC, ad CB; a erunt D E inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterq; impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt AC, ad CB, ita D, ad E, b erit conuertendo, vt CB ad AC, ita F, ad D. Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D. c Est autem, vt AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod numerus factus ex AB, in CB, aequalis ponatur quadrato medij AC Igitur erit quoq; vt totus DE ad D, ita D, ad E, d ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, in E, aequalis erit quadrato ipsius D. Totius ergo numerus DE, sectus est in partes D E, quarum vel vtroq; impar est, vel vna impar, & altera par, ita vt numerus factus ex toto DE in partem E, aequalis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse tam demonstratum est in numero AB, quando vtraq; pars AC CB vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.

a 24 *sep.* b 26 *sep.* c 20 *sep.* d 10 *sep.*

THEOR. 20. PROPOS. 30. xxxij.

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

Metiatur impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo ex iis, quae ex antecedente propos. ex C impano demonstrauimus, numerus C, par, A: quae adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A, metiatur B, per C, e metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam vero est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsis C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. f Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . C . . . .
B . . . . . .

e 8. *pronum.* f 40. *sep.*

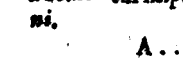
THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiij.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

Impar numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primum esse. Si n. A C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D, qui necessario impar erat. Nam si sit par, cum metiatur

A . . . . B . . . . . .
C . . . . . D . . . .

a 28. nomi. tur imparem A: a erit A, factus ex D, pari in eum numerum; per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A; impar.



Quare D, impar parem C, metiēs, (est enim C, par, cum dimidium habeat B) b metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur Quod est absurdum Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

b 30. nomi.

COROLLARIVM.

Sequitur hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, c primus quoq; erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

c 31. nomi.

xxxv. THEOR. 30. PROPOS. 32.

Numerorum à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantum.

Numeri à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E: Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum: Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam

Vnitas. A, 1. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

exposita vnitate, cum A, sit binarius, & B, C D, E; à binario dupli; erunt A B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales nimirum in proportione dupla. d Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequētem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E: qui cum omnes sint pares, vtpote dupli à binario: metietur quemlibet ipsorum B C, D, E, par numerus per numerum parem: A propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

d 11. nomi.

Quod autem iidem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continue proportionales, sitque A proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius: e nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E: qui cum sint omnes pares, metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

e 13. nomi.

SCHOLIVM.

Hinc cum Arithmeticu colligemus artem, quā omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint n. A, B, C, D E F.

à bina-

à binario dupli; qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atq; adeo si ordo numerorum à binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri; nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extrà ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par, (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G pars dimidia; metietur binarius numerus par, ipsum G per H, numerum imparem; Atq; adeo G pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur nanq; pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nã si dicatur impar, cum sit ipsius G. pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem: Atque ob id G, pariter impar erit: Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atq; ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad unitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita ut sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli. Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod est absurdum: Nullus ergo alius pariter par est tantum, præter eos qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I---- H---- G----

THEOR. 31. PROPOS. 33. xxxiij.

Si numerus dimidium habeat imparem: Paritèr impar est tantum.

Habeat numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par: Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. *a* Igitur sit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium. *b* Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo

a 19. primi

A . . . . . .
B . . . . . C . .
D---- E---- B

b 19. sexti

pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat impar, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Itaq; si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neq; dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, praeter duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium praeter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem, & pariter imparem.

Impares 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.

Pariter impares tantũ. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

xxxvij. **Si par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.**

Par numerus A, neque sit á binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

A . . . . . .

Quod autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariã, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps: tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A. à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, & cum impar imparem multiplicãs faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdũ. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque á binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

a 19. noni.

SCHO-

SCHOLIVM.

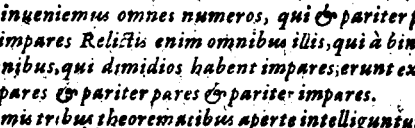
Facile ex hu inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sunt, & pariter impares Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares & pariter pares & pariter impares.

Porro ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9 lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxviii

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur, G C, F H, primo, *A*, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad *A B C*, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G, erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt *A*, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita *D*, ad B C, & *B C*, ad A; atque est E F, ipsi D, & I F, ipsi B C; &



H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; *a* Ac proinde ita etiam erunt omnes F K, K I, I H, omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt *B* G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat. *a* 12. 5. *ptim.*

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam ſumma quotcunque numerorum continue proportionalium, ſi modo primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim ſit vt exceſſus ſecundi ad primũ, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes, ſi primus à ſecundo, & vltimo dematur, fiatq; vt reliquus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium. Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota ſumma. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecũdi; vt liquet ex ſcholio propoſ. 19. huius lib. quandoquidẽ tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus eſt, ſunt exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus vltimi: Vt in exemplo appoſito ſi primus numerus, nimirum vnitas detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo: erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 1. ita 2186. ad ſummam omnium, excepto vltimo, ſi ſecundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui ſi diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187 qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1093 procreabitur ſumma omnium 3280.

1.3.9.27.81.243.729.2187.

xxxix. **PROBL. 34. PROPOS. 36.**

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

Sint ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. *Dico* F, eſſe numerum perfectum. Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; *a* Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſecundo in E, tertium: Factus eſt autem F ex D, in E. igitur idem F, fiet ex A, in I; *b* ideoque I, ipſum P, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipſius

Vnitas. A, 1. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G- --- 262. H, 124. I, 248 F------ 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 485.
O-----P.

219. *ſeptim.*

b 7 *prop. 20.*

E, ipſius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, ſintque reliqui exceſſus M, N. *a* Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E; (Cum enim G, duplus ſit ipſius E, ablatuſq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E G, H, I, ſimul. *A* Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A. B, C, D, numeris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, ſimul. Quare cum vnitas, & omnes

a 35. octa-ui

Vnitas. A, 1. B, 4 C, 8. D, 16.
E, 31. G---- 62, G, 124 I, 248. F---- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O----. P----

numeri, A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipſum F; (Cum enim F factus ſit ex E, in D; *b* metietur D, ipſum F; *c* atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, *d* qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cum I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, *e* metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, *f* qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, matiatur, vt mox oſtendemus: Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E G, H I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

b 7. pronun. c 11. pronun. d 11. pronun. e 11. pronun. f 11. noni.

Quod autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; *g* atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quarum, & ex P, ſecundo in O, tertium: *h* ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cum A, B, C, D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, *i* vltimum D, nullus alius præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipſum P, metietur Cum ergo E, primus ſit, *k* erunt E, & P, inter ſe primi; *l* ideoque in ſua proportione minimi: *m* Ac proinde æque metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. *n* Nullus vero alius præter A, B, C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B, C, D, tot ab E, ſumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita F, ad H; *o* Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis

g 9. pronun. h 19. ſeptim. i 13. octa. k 31. ſeptim. l 23. ſep. m 21. ſeptim. n 23. octa. o 19 ſeptim.

fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B. Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I, Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

19. septim.

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earũ partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cũ ipsa vnitate omnes partes aliquotas, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28 factus ex 1. in 4. est perfectus habẽs has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

Denique quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

Lubet hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, quam titur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

Quolibet numero per duos quosuis numeros diuiso erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat Quotientes D, E. A. 48. B. 8. C. 3. D. 6. E. 16. *Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A per B fit Quotiens D; fiet A, ex B in D, vt ad def. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiat*

A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: a *erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.* a 19. sep.

II.

Quolibet numero per quotuis numeres diuiso, erũt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

Diuiso enim numero A, per B, C D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse vt B, ad C, ita G, ad F. Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate primo, proxime demonstrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G, erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

	A, 48.
B, 3.	*C*, 4. *D*, 8. *E*, 6.
F, 16.	*G*, 12. *H*, 6. *I*, 8.

III.

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso, erunt quotientes conuerso ordine in eadem proportione continue proportionales.

Diuiso enim numero A, per B, C, D, E, continue proportionales sint Quotientes F, G, H, I. Dico I H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continue proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

	A, 15.
B, 1.	*C*, 2. *D*, 4. *E*, 8.
F, 15.	*G*, $7\frac{1}{2}$. *H*, $3\frac{3}{4}$. *I*, $1\frac{7}{8}$.

IV.

Si sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

Sint quotuis numeri A, B, C, quorum summa D. Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitq; vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, sigillatim, ita H, ad E, F, G, sigillatim.

A, 3. B, 6. C, 20. D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40. H, 58.

Cum enim sit, vt A, ad B, ita E, ad F, erit componendo, vt A, B, simul ad B, ita E, F, simul ad F: Vt autem B, ad C, ita est F, ad G, Igitur vt ex aquo A, B, simul, ad C, ita erit E, F, simul ad G: Et componendo, vt A, B, C, simul, hoc est, vt D, ad C, ita E, F, G, simul, hoc est, H, ad G.

Quia igitur, vt D, ad C, ita H, ad F: Et conuertendo, vt C, ad D, ita G, ad F; erit ex aquo, vt D, ad B, ita H, ad F.

Denique quia est, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex aquo, vt D, ad A, ita H, ad E, quod est propositum. Eademq; ratio est de pluribus.

V.

Si sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus, summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

Nam vt in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summæ priorum ad primum, quæ summæ posteriorū ad primum, ac proinde vtriusq; proportionis idē denominator erit. Cum ergo ex diuisione antecedentium terminiper consequentem gignatur denominator proportionis, idem Quotiens omnino procreabitur, si vtraq; summa seorsum per primos numeros, quaq; per suum, diuidatur. Eademque ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. diuisio fiat. Constat ergo propositum.

VI.

Si summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur; Et Quotientum summa per ipsos Quotientes; Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & hic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis semper iidem Quotientes ordine conuerso.

Sint continue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorum summa E, per ipsos diuisa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum summa K, per eos diuisa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine conuerso, hoc est, F, & O, eosdem esse; Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandem continuam proportionem habent conuerso ordine, quam numeri A B C, D. Et quotientes L, M, N, O, conuerso ordine eandem, quam Quotientes E, F, G, H, I, hoc est, eandem eodem ordine, quam numeri A B, C, D: erit per 4. theoremα, E, ad A, vt K, ad 1. Quare cum ex diuisione antecedētis termini per consequentem producatur denominator proportionis, fiet idē Quotiens ex diuisione E, per A, qui ex diuisione K, per 1. Cum ergo Quotientes sint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c, quodest propositum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 15.

F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$. K, $28\frac{1}{8}$.

L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $\frac{1}{2}$. O, 15.

VII.

Si summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, vel denique (si Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.

Sint primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum summa G, per ipsos sigillatim diuisa faciat

A, 1 B, 2, C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.

Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summa O, æqualem esse numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor, Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt cōtinue proportionales conuerso ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vt I, ad H, a Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qua ex M, in I, hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, produxit eosdem Quotientes conuerso ordine, hoc est, summa O, diuisa per H facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

H, $63\frac{1}{2}$. I, $31\frac{1}{4}$. K, $15\frac{3}{4}$. L, $7\frac{7}{8}$. M, $3\frac{15}{16}$. N, $1\frac{31}{32}$. O, $114\frac{1}{2}$.

a 19. sexti.

Sint deinde quotuis numeri multitudine impares continue pro-

portionales A, B, C, D, E, quorum summa F, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M. Dico summam M æqualem esse numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonstrabimus, vt prius. Deinde vero

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E E, 16.
F, 31.
G, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{15}{16}$.
M, 60. $\frac{15}{8}$.

-20. septim. quia tres numeri H, I, K, continue proportionales sunt, a erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum.

Hinc fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientem esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

Itaq; si inuenienda sint quotcunq; numeri continue proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimũ gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunq; continue proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desideretur quotus numeri multitudine impares, quorũ summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidẽ numeri cõtinue proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eod. hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sane est, posse reperiri quotcunq; numeros continue proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum: & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in se ipsum multiplicato.

Sic etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorum summa 11. per vtrumque diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $1\frac{1}{5}$. sunt numeri quæsiti. Habent enim

proport-

proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

Sint duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem & numeratorem C, ſit vnitas. Dico ita eſſe minutiam A B ad minutiam C B, vt eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B in minutia A B, includitur; propterea quod minutia A B, diuiditur in tot minutias minutia C B, æquales, quot vnitates ſunt in A. ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11

a Igitur eadẽ pars eſt vnitas C numeri A, quæ minutia C B, minutia A B; ac proinde eſt, vt vnitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A, B: Et conuertendo, ita A, ad C numerator ad numeratorem; vt minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum. a 19. 7. fin.

Quoniam vero minutiæ ſunt fractiones ſiue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuſpiam numeri. Neque enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant eas reſpectu ſolius vnitatis eſſe accipiendas propterea quod falſo putant, eam demonſtrationes nõ poſſe omnes explicari in numeris integris, ſed ſolũ in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſus etiã numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarũ demonſtrationes numeris integris explicare vt exemplis etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes quas aſſerimus.

Sint ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$ *&* $\frac{1}{11}$ *particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia cuius* $\frac{1}{11}$ *eſt 4. &* $\frac{6}{11}$ *ſunt 24. perſpicuum eſt, ita eſſe 4. ad 24. vt eſt numerator 1 ad numeratorem 6 Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.*

Hanc porro propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. in vniuerſum de quibuſcunque duabus minutiis eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denomina-

torem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

Sit minutia quæcunque A, B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem, B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquialet, quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat.

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5 B, 5

a 1. huius *a Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.*

Alter. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. b *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod est propositum.*

A, 1. D, 1.
B, 5. C, 30.

b 20. def. fin.

DEINDE non sit Vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ A C. c Et quia est vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod est propositum.

A, 3. D, 1. C, 1.
B, 5. B, 5. C, 30.

c 1. huius

Itaque si data minutia $\frac{2}{5}$ sit cuiusuis numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$ numerus 6. ac proinde $\frac{2}{5}$ numerus 12, vbi vides ita esse 12. ad 10. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

Minutia quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

Sit qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. d *Quoniam enim est, vt A, ad*

d 2. huius.

B, nume,

*B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad ſuum integrum C, erit permutando vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. C*ſ *ergo integrum C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt integri toties ac cepti quoties vnitas eſt in denominatore B.) ab ipſo denominatore B, denominata (Cum enim aqua metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrũ toties acceptum, quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoq; integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore) erit quoq; minutia A B, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties eſt vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

Ponatur minutia $\frac{3}{5}$ *eſſe huius integri* 30 *cuius* $\frac{3}{5}$ *ſunt* 18. *Et quia numerator* 3 *numerat tria integra, hoc eſt, valet* 90. *& denominator valet* 150. *(quemadmodum, cum eadem minutia* $\frac{3}{5}$ *ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinq;) liquido conſtat;* 18. *eſſe quintã partem numeratoris, hoc eſt triũ vnitatum, quarum qualibet numerũ integrum* 30. *ſignificat, qua tres vnitates faciunt* 90. *partem, inquã, à denominatore* 5. *denominatã; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt quinque, vnitatum, quarum qualibet numerum integrum* 30. *ſignificat, qua quinque vnitates conficiunt* 150. *pars, inquam, à denominatore* 5 *denominata.*

IV.

Datæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

Quod prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutiis, quarum altera numerator habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. a Quia enim eſt, vt A, ad B ita minutia A B, ad ſuum integrum: & vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam b cum ſit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B ad C, ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem ita minutia A B, ad minutiam C B, quod eſt propoſitum.

A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

a 2. huius.
b 2. huius.

DATÆ *minutiæ* $\frac{63}{77}$ *ſint huius integri* 28. *cuius* $\frac{63}{77}$ *ſunt* 24.

& $\frac{3}{77}$ *ſunt*

& $\frac{4}{5}$ sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

Sint duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, vt est F, ad H.

F, 10. G, 12.
A, 2. C 4.
B, 3. D, 5.
H, 15.

a 18. septim. b 2. huius.

Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H Vt autem A, ad B, b ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H Rursus quia C D, multiplicantes B, faciunt G H; c erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam C D, (Nam d cum sit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit conuertendo vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam C D. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D. quod est propositum.

c 18. septim. d 2. huius.

F. A B, integrum.
H. Integrum.
G. C D.

Si duæ minutiæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ sint particulæ numeri 30 erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10 ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

Itaque si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor Et si maior, maior; propter eandem proportionem F ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

Integrum ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus, ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

Sint

Sint duæ minutiæ AB CD. Et ex B in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C in B fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum AB, CD, vt est H, ad summam numerorum F, G. a *Quoniam enim est, vt minutia AB ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita est G, ad H, nam* b *vt minutia CD, ad integrum, ita est C, ad D.* c *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quod G D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, in H. Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H. Et conuertendo, vt integrum ad summam minutiarum AB, CD, ita H, ad summam numerorum E, C, quod est propositum.*

F, 10.	G, 12.		a 5. huius.
A, 2.	C, 4.		
B, 3.	D, 5.	H, 15.	
AB,	CD,	F, G.	b 2. huius.
	CD.	G.	c 18. sept.
Integrum.		H.	

Sint rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiusdem 24, ac proinde summa minutiarū 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15 ex denominatoribus productus ad summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

Habeant duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B fecit D, E; d erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, e ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod est propositum.

D, 105.	E, 35.		d 17. sept.
A, 5.	A, 5.		e 5. huius.
B, 7.	C, 12.		

Duæ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{12}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 30. & $\frac{5}{12}$. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 12. ad priorem 7.

VIII.

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores

eandem

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

Sint duæ minutiæ AB, CD, sitq; eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. a *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia* 22. huius. 1. ad

$$\frac{A,3.}{B,4.}\quad\frac{C,9.}{D,12.}$$

AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD ad idem integrum: vt autem A, ad B ita ponitur C, ad D; erit quoq; minutia AB, ad integrũ, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.

Sed sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum: b *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B, Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D: quod est propositum.* b 2. huius.

Deinde sit maior proprtio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem esse minutiam AB, quam CD. c *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoq; maior proportio minutiæ AB, ad integrum quam minutia CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quam minutia CD, quod est propositum.* c 2. huius.

$$\frac{A,3.}{B,4.}\quad\frac{C,2.}{D,3.}$$

Verum sit iam minutia AB, maior, quã minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quã C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrũ, quam minutiæ CD, minoris ad idem integrum. d *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B: & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D: quod est propositum.* d 2. huius.

Minutiarum $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$ *integer numerus sit* 24. *cuius tam* $\frac{3}{4}$. *quam* $\frac{9}{12}$. *sunt* 18. *ac proinde æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. *At* $\frac{2}{3}$. *eiusdem numeri* 24. *sunt* 16. *vbi manifestum est, numerum* 18. *maiorem esse numero* 16. *ideoq; minutiam* $\frac{3}{4}$. *maiorem esse minutia* $\frac{2}{3}$.

IX.

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem

tem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B ad D Dico minutias ipsas æquales esse.

Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: A, 6. C, 2. B, 9. D, 3.
ac pr. inde minutiæ æquales erunt. quod est propositum. a 8. huius.

SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D Dico ita esse, A, ad C, vt B, ad D b *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D Igitur permutando, vt A, ad C ita B ad D quod est propositum.* b 8. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad A, 6. C, 3. B, 9. D, 5.
B, quam C. ad D, c. ac propterea maior erit minutia A B, quam C D. quod est propositum. c 8. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quam C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quam B ad D. d. Erit enim maior proportio A, ad B, quam C ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum: d 8. huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{3}{5}$ partes integri numeri 90. vbi videt minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{3}{5}$. id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorem esse minutia $\frac{3}{5}$: hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B. C D, habeant dissimiles denominatores B, D Fiat E, ex A, in D; & F. ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratoris E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B. C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D faciunt. E, 10. F, 9. A, 2. C, 3. B, 3 × D, 5. G, 15.
E, G; e erit vt A, ad B, ita E. ad G f Quare minutia A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, g erit vt C, ad D, ita F, ad G h Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum. e 18. sept. f 8. huius. g 18. septim. h 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum reducendum ad minutiam cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, aequalis. Dico minutiam BC unitati A, aequalem esse. Quia enim sit, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, aequalis. Igitur & minutia BC, integro A, id est, unitati, erit aequalis. quod est propositum.

B, 6. — C, 6. A, 1. — a 2. huius.

DEINDE sit integer numerus A revocandus ad minutiam, cuius denominator C. Et A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A aequalem esse. Supponatur enim integro A, unitas D. vt fiat minutia AD, tot unitatis aequalis, quotis unitas est in A. Quia igitur ex A in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C vt A ad D unitatem. Cum ergo minutiarū AD, BC numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, b ipsa inter se aequales erūt. Quare cum minutia AD, sit integro A, aequalis, ob denominatorem, qui est unitas; erit quoq; minutia BC, eidem integro A, aequalis est propositum.

A, 7 — D, 1. B, 42. — C, 6. b 8. huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. D covtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiae AB. Cum enim minutia AB, c B, eandem habeant denominatorem; c erit vt C ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiae AB, dupla erit quod est propositum.

A, 3. — B, 8. C, 6. — B, 8. A, 3. — D, 4. c 4. huius.

RVRSVS quia minutiae AB, AD eandem habent numeratorem; d erit vt B, ad D denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiae AB, dupla erit. quod est propositum.

d 7 huius.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A. Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam AC, DB, dimidium esse minutiae AB. Cum enim minutia AB; AC, eundem habeant numeratorem; e erit vt B, ad C, denominator ad denominatorē, ita AC, ad AB, minutia ad mi-

A, 6. — B, 12. A, 6. — C, 12. D 3. — B, 11. e 7. huius.

ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium erit & minutia A C minutiæ A B, dimidium quod est propositum.

RVRSVS cum minutiæ A B D B, habeant eundem denominatorem; erit vt D, ad A, numerator ad numeratorē, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium, quod est propositum. a 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si eius numerator tripliceur, quadruplicetur, &c. eodē manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c manente eodē numeratore; vel (quādo fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E & valorē huius minutiæ minutia exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A in C & G, ex B in D. Dico ita minutiam minutiam æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cui videlicet numeratori F & denominator G. Fiat enim, rursus H, ex C in B. Et quoniam est vt A, ad B, ita minutia A B, ad suū integrum, primirum ad minutiā C D cuius integrum est E: erit vt A, ad B ita F, ad H quod A B, B, ipsum C, multipli antes faciant F, H. Erit quoq; vt minutia A B, ad minutiam C D ita F, ad H. Rursus quia est, vt C, ad D, ita minutia C D ad suum integr. E: erit vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C D, multiplicans fecerit H G. Erit quoq; vt C D, minutia ad suū integrum E ita H, ad G. Quare igitur est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F ad H; Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit data minutia A B, minutiæ C D, vtrum videlicet respectu integri E,

F, 6.	H, 9.	
A, 2.	C 3.	E, 1.
B, 3.	D, 4.	E, 24.
G, 12.	K, 1/2.	

b 2. huius.

c 18. septim.

d 2. huius.

e 17. septim.

exprimat. Igitur erit quoq; vt F. ad G. ita minutia simplex K. ad
a 2. huius. *integrum E. a Cum ergo quoq; sit, vt F ad G, ita minutia F G, ad idem summ integrum E, æquales erunt minutiæ simplices K, & F G: ac proinde cum minutia K. æqualis sit datæ minutiæ erit quoque simplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cuius integrum E quod est propositum*

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiæ $\frac{3}{4}$ respectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est si eam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æqualeat, qualis n. minutiarum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

b 13. huius.

E, 6.			
A, 2.	C, 3.		
B, 3.	D, 4.		
F, 12.			

SIT primum A B minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat F, & ex B, in D fiat F. b Et quoniam minutia E F exprimit valorem minutiæ A B respectu minutiæ C D, reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F. quod est propositum.

DEINDE sit A B. minutia minutiarum C D E F ita vt G D, sit minutia minutiæ E F & A B minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D Item I. ex G. in E & K ex H, in F Atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentes minutiæ dabuntur Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse.

G, 6.		I, 6.		
A, 2.	C, 1.		E, 1.	
B, 3.	D, 4.		F, 2.	
H, 12.		K. 24.		

c 13. huius. d 13. huius.

Nam minutia G H æqualis est minutiæ A B, minutiæ C D respectu minutiæ E F, tanquam integri cuiusdam. d Item minutia I K æqualis est minutiæ G H, hoc est, minutiæ A B, minutiæ C D) minutiæ E F respectu integri cuius E F, est minutia, & sic deinceps si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 9. Huius demq; $\frac{2}{3}$ sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si eam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. procreari minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis minutiarum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

DATIS

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentę numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B C D quarum A B ad aliam æqualem reducende sint numeratorem numerator C, metiatur per numerũ ex A in D productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C in B productum. Fiat F ex C in D, & ex F in A B, fiant G H. Item ex A in B fiat k, & L, ex C in B denominatam G H minutia A B æqualem esse, & C, metiri per K, ex A in D productum, & D metiri H per L, ex C in B productum. Quoniam enim F multiplicans A B facit G H, erit vt A, ad B, ita G ad H. Ac proinde minutia A B, G H æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D facit F, metietur C, ipsum F per D. Metietur autem & vnitas ipsum D per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D pars à D, denominata, erit quoq; C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G pars ab A denominata: propterea quod G, sit ex F, in numerum A. Qui igitur C, minutia est minutia F, respectu integri G, sunt & numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; ecostituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores signant vnitatẽ, & denominatores numerum K, (quod numeratores sint vnitates, denominatores autẽ numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorũ multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutia F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus k, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri C, pars erit ipsius integri C, à numero k, denominata. Quocirca numerus G, ipsum G, metietur per K, toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in k, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.

G, 24. K, 8.
A, 2. C, 3.
B, 3. F, 12. D, 4.
H, 36. L, 9.
C, 1/4 F, 1/2. M, 1/8.

a 17. *sexti.*
b 8. *huius.*
c 7. *propter unitatis.*
d 5 *praeterea.*
e 13. *huius.*

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit illa maior est. Et minoris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D & ex A, in D fiat E; atq; ex C, in B, fiat F; sintq; primum numeri E F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E factus ex A primo in D quartum æquales est numero F facto

a 19. septim. E, 24. A, 2. B, 3. F, 24. C, 8. D, 12. *ex C secundo in B tertium, erit vt A primus ad C secundum numerat ad numeratorem, ita B, tertius ad D quartum, denominator ad denominatorem.* b *Quare minutiæ A B, C D, æquales, unt.* VEL *sic* c *Quoniam est vt E ad F ita minutia A B, ad minutiam C D; Est aut m E ipsi F æqualis; erit quo minutia A B, minutiæ C D æqualis quod est propositum.*

b 9. huius. c 5. huius.

SED sit iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum erit vt A, ad C numerator ad numeratorem, ita B ad D, denominator ad denominatorem. c *Quapropter idem numerus fiet ex A primo in D quartū, qui ex C secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F numeri* VEL *sic* f *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; puntur autem minutiæ æquales; erunt quoq; numeri E F æquales, quod est propositum.*

d 9. huius. e 19. septim. f 5. huius.

DEINDE sit E numerus maior numero F. Dico minutiam quoque A B, maiorem esse minutia C D. Cum enim E, ad A, in D, fiat numerus E, maior quam F; signetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G primo in D, quartum, & ex G, secundo in B, tertium, g erit vt

E, 24. A, 2. G, 1¾. B, 3. F, 21. C, 7. D, 12.

G primus ad C secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autē maior proportio A ad C, quam G, ad C, quod A, maior sit quam G, h *Igitur maior quoq; erit proportio A, ad C, quam B ad D; ac proinde minutia A B, maior erit, quam minutia C D.* i EL *sic* i *Quoniam est, vt E, ad F ita minutia A B, ad minutiam C D, Est autem E, maior quam F; erit quoq; minutia A B, maior quam minutia C D. Quod est propositum.*

g 19. septim. h 9. huius. i 5. huius.

VERVM

VERVM sit iam minutia AB, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB quam minutia CD, a erit maior proportio A, ad C, quam B ad D. Minor ergo numerus, quam A habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D qui sit G. b Idem ergo numerus sit e G, primo in D, quantum qui ex C secundo in B tertium. Cum ergo ex A in D maior fiat, quam ex C, in D propterea quod A, maior est quam G, erit quoque E facto ex A in D maior quam F, ex C, in B genitus. VEL ita. Quoniam est, vt minutia AB ad minutiam CD, ita E ad F, erit autem AB minutia maior quam minutia CD, erit quoque E maior quam F quod est propositum. a 9. huius. b 19. septim. c 5. huius.

AT QVE haec est quoque demonstratio eius regulae, quam in Arithmeticis praescripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos revocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos revocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reuocatur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita ut minutia CD, minutia AB, sit aequalis. d Quoniam igitur est, vt A ad B, ita C, ad C, sunt quoque C D numeri minores numeris AB, proportionem habentes. e Sunt autem & minimi, cum primi inter se sint, quod est absurdum.

A, 15. C, 5.
B, 12. D, 4.

d 8 huius. e 13. sept.

SI vero A, B, non sint inter se primi, f sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A per D; & B per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D & denominator E, aequalem esse datae minutiae AB & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; g producentur A B ex C, in D E. h Quare erit, vt A, ad B, ita D ad E, ac propterea minutia AB, DE, aequales erunt. Dsinde quia C, maxima mensurans numerorum A B, metitur per D, E; erunt ex coroll. i 8. huius. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.

A, 36. D, 3.
B, 48. E, 4.
C, 1.

f 2. sept. g 8 prohu. h 7 sept.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam aequalem datae denominationis, quando fieri potest, revocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad aequalem aliam, cuius denominator datus sit C. Et A, numeratore in denominatorem datum C, fiat

C, fiat D, quem metiatur B, denominator data minutia per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datas, aqualem esse minutiæ AB, datæ. Qui enim B metitur D, per E, a fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. b. Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum ita E, tertius ad C, quartum; c ideoq; minutia AB EC, aquales erunt. quod est propositum.

A,3. E,9. B,4. C,12. D,36.

a 9. pronum.
b 19. septim.
c 8. huius.

QVOD si B, non metiatur D ex A in C, procreatum, poterit data minutia AB reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam EC. Quia ergo minutia AB EC aqualis sunt; erit vt A, ad B, ita E, ad C. e Idemq; igitur numerus fiet ex A, primo in C quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. f Igitur B, metietur D per E quod est absurdum. Ponitur enim ipsum D, non metiri.

A,3. E,— B,4. C,10. D,30.

d 8. huius.
e 19. septim.
f 7 pronum.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem dividitur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor divisus, denominator vero maior numerus dividens.

SIT minor numerus A, dividendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam AB, cuius numerator A, & denominator B. g Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus dividendus ad dividentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem ita minutia AB, ad integrum, hoc est, ad unitatem; erit ex defin. Divisionis minutia AB, Quotiens dividendi numeri A per numerum B quod est propositum.

A,6. B,11. A,6. B,11.

g 8 huius.

HINC fit, si diviso numero integr maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex divisione reliquus; denominator vero, numerus dividens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero dividente, dividendus adhuc est per eundem numerum dividentem, qui maior est. Verbi gratia Divisio numero 23 per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc dividenda per 4. h. Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$ ita ut totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

h 19 huius.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ AB, CB, eiusdem denominationis.

nationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex additione minutiarum AB, CB collectam. Quoniam enim minutia eundem habent denominationem; a erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB. Et componendo, vt A C, simul ad C, ita minutia AB, CB, simul ad minutiam CB. b Vt autem C ad D, ita quoque est minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex aequo erit, vt AC, simul ad D, ita minutia AB, CB, simul ad minutiam DB. Cum ergo A, & C, simul aequales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutia AB, CB, simul aequales minutiae DB quod est propositum.

a 4. huius.

b 4 huius.

A, 3 C, 4 D, 7
B, 10. B, 10. B, 10.

DEINDE sint addenda duae minutiae AB, CD, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris, & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaque sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam EF, esse summam ex datis duabus minutiis AB, CD, collectam, c Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita E, ad F: d Vt autem E, ad F, ita quoque est minuti EF ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minuti EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum AB, CD, aequalis erit minutiae EF, ac proinde minutia EF, summa erit ex minutijs AB, CD, collecta quod est propositum.

A, 2 C, 3 E, 17.
B, 2. D, 4 F, 12.

c 6. huius.

d 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duae minutiae eiusdem denominationis, minutiis AB, CD, aequales, vt ex demonstratione propp. 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, summa minutiarum AB, CD, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas AB, CD, reductae sunt, vt initio huius propositionis demonstratum.

IAM vero datis pluribus minutijs; addenda primum erunt duo prima: deinde haec summa cum tertia coniungenda, atque haec summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiae seorsum.

SINT verbigratia, $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 40 & $\frac{3}{4}$ sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25 partes, quæ faciunt $\frac{5}{12}$ integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}\frac{4}{9}$ est $2\frac{1}{7}$ hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$ ipsius 12 at $\frac{4}{9}$ eiusdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. consici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX *maiore minutia AB detrahenda sit minor CB, sintque primùm ha minutiæ eiusdem denominationis Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, reliquam esse post detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex C & D, Minutia ergo AB, cuius numerator A ex numeratoribus C D collectus est, summa est duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis propositum est Quare detracta minutia CB ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB. quod est propositum.*

A, 7 / B 10. — C, 3 / B, 10. — D, 4 / B, 10.

DEINDE *minutiæ AB, CD, habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor CD, ex maiore AB. Ex C numeratore minoris in B denominatorem maioris fiat E, & ex A, numerator maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat C, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, esse reliquam post detractionem minutiæ CD ex minutia AB Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit E, H, a erit vt A ad B, ita F, ad H: b vt autem A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum Igitur erit quoque vt F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicat C, D, facit E, H, c erit vt C, ad D, ita E, ad H. d Vt autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque vt E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est vt E primus ad H secundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: e Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia GH, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 1. theor scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutia CD GH, tertius*

F, 15. — E, 8. — A, 3 / B, 4. — C, 2 / D, 5 — C, 7. / F, 20.

a 17. septim.
b 2. huius.
c 17. sept.
d 2. huius.
e 2. huius.

tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, aequalis, (Nam E, ex F, detractus reliquis G, ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minuti. C D, G H simul ad integrũ. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H ita esse minutia A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrũ, ita minutia C D, G H simul ad idem integrũ: ac proptereà aequales erunt minutia A B & minutia C D G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H, quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignũtur duo minutia eiusdem denominationis minutiis datis aequales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G supponatur communis denominator H ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, vel qua post detractionem minutia C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

I A M verò si dentur integra una cum minutiis, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutiis. Quod si minutia detrahenda, maior sit quam ea, à qua fieri debet subtractio, a reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutia adhaerentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$ ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$ ex $\frac{3}{4}$ superest minutia $\frac{7}{20}$ Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$ ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quae cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{7}$ remanebuntque 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. 211. huius.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$. minutiae huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$ hoc est, ex 30. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam G D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C, inter se fiat E, cui supponatur F ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, & Rursus, vt minutia E F, ad minutiam C D, H, 60. C, 40. A, 2. C, 4. E. B, 3. D, 5. F, 15. b 15. huius.

ita C, ad H. Quia verò C, multiplicans A F, facit E H; erit vt A, ad F, ita E, ad H. Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit C, & F, c 17. 6. *erit*

a17. sup. A. G. erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex aequalitate
E. F. perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G.
B. H. ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: b Et vt A, ad B, ita

b 2. huius. est minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutia A B, in minutiam C D, quod est propositum.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositae minutiae per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ipsa vnitas eidem minutiae propositae denominatori, propterea quod vnitas integro numero supposita in denominatore datae minutiae ducta in eundem denominatorem datae minutiae non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5 fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}$ Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

c 11. huius. SI vero integris minutia adhaerent, reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhaerente, atque ex numeratore huius minutiae, & numeratore minutiae adhaerentis vnus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$ per $4\frac{1}{2}$. fient hae duae minutiae multiplicandae, $\frac{23}{3}\cdot\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factum est, sed cum quadrato numeri integri assumpti; quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$. minutiae huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc est quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita vt

A, 12. C, 3. E, 4.
B, 16. D, 8. F, 2.

diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam B F, esse Quotientem diuisionis minutiae A B,

A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A per E; & D metitur B per F, a gignetur *A, ex C, in E & E, ex D, in F, b Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D;* ac proinde ex desin. multiplicati nueris, *vt minutia A B, ad minutiam C D ita minutia E F, ad 1. Quocirca cum sit, vt A B minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, sta minutia E F ad 1. per textum defin. Diuisionis minutiæ E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D oriundus est propositum.*

A, 6.	C, 3.	E, 2.		a 9. præcedentis.
B, 8.	D, 8.	F, 1.		b 22. huius.
A, 1.	C, 1.	E, 1.		
B, 0.	D, 4.	F, 2.		

DEINDE numeri C D minutiæ C D, non metiantur numeros A B minutiæ A B. Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C D, minutiæ C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, producles: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E F, velut i propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E F per G H, erit minutia G H, Quotiens diuisionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, vt initio huius propos. demonstratum est, quod est propositum.

E, 24.	A, 2.	K, 12.	C, 3.	G, 8.		c 15. huius.
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.		
E, 20.	A, 6.	K, 15.	C, 3.	G, 30.		
F, 135.	B, 9.		D, 5.	H, 27.		

QVIA vero G H numeri minutiæ Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiuslibet minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ dividendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atq; hoc verum est in omnibus minutiis, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ dividendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ dividendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ dividendæ metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia dividenda secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos demonstratione liquet atq; in hoc appositio exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeri A B, metiuntur per G H & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex G, in D, itidem numeri C, D, metiuntur per L, M, atq; adeo tam mi-

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4.	L, 24.	
P, 54.	B, 9.		D, 3.	H, 3.	M, 18.	

minutia GH, quam LM, Quotiens est minutia AB, per minutiam CD. diuisa.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda supponenda est ei unitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in apposito priori exemplo perspicuum est. Si autē minutia $\frac{1}{2}$ diuidenda sit per integrum numerū 8 fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo appareat.

8	1	16
1.	2.	1.

1	8	1
2.	1.	16.

QVOD si munitia adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cū minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis proposi. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutia diuidenda in denominatorē minutia diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutia, denominatorem autē ex numeratore minutia diuidentis in denominatorem minutia diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutia diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri munitiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{7}{8}$. vt hic vides. Nam

3	7	21
4.	2.	8.

hac ratione numerator minutia diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutia diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est, minutiam $\frac{21}{8}$ quæ proxime inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8 per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inferenda, sitq; primum sensus, addendam esse minutiam AB, vnius particulæ munitia CD, ad minutiam CD: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$. vnius septimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutia in B, denominatorem prioris minutia fiat F, cui addatur A, numerator prioris &

F, 24.

A, 1. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

rus, & compositio numero G supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B D procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam GH, æqualem esse minutiæ A B, respectu unius particulæ minutiæ CD addita ad minutiam CD. Quoniam enim A B, minutia unius particulæ minutiæ CD, a reducitur ad a 14 huius. *simplicem minutiam AH cuius numerator idem est, qui A productus nimirum ex unitate in A, denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D procreatus, vt in apposito exemplo appareret Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis est habens eundem denominatore H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C D, faciat F H; b erit vt C, ad D, ita F, ad H; c ac propterea minutiæ* b 17. septimi. *BD FH æquales erunt.) efficitur, minutiam GH, cuius numerator G, ex numeratoribus F A, minutiarum FH, AH componitur,* c 8. huius. *[nimirum ex numero ex C, in B producto, & ex A denominatore autem H idem qui earundem minutiarum FH, AH; efficitur, inquã, minutiam G H summam esse minutiarum FH, AH, vt initio propos. 29 ostensum est, hoc est, summam ex minutia A B, respectu unius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia CD quæ ostensa est æqualis minutiæ FH, collectam. Minutia igitur GH, procreatur ex insinuatione minutiæ A B, in minutiam CD; id est, æqualis est minutiæ A B, unius particulæ minutiæ CD, & minutiæ CD simul, quod est propositum.*

IAM verò si plures minutiæ A B, CD EF GH, sint inserendæ, hoc est, si minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF vnius particulæ minutiæ GH & minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ CF, vnius particulæ minutiæ GH: & minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH addi debeant ad minutiam GH, sta agendum erit. Ex C, numeratore postremæ minutiæ GH, in F, denominatore penultimæ minutiæ EF, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdẽ penultimæ minutiæ EF, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in C, denominatorem antepenultimæ minutiæ CD, addatur C, numerator eiusdem minutiæ CD, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ AB, adijciatur A, numerator eiusdẽ minutiæ AB, vt fiat P: Atq; ita deinceps dicatur semper vltimus numerus cõflatus in denominatorẽ proxi-

P, 119.	M, 59.	K, 14.	
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.
—	—	—	—
A, 1.	B, 2.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

$$A, \frac{1}{B,4}. \quad \frac{1}{D,7}. \quad A, \frac{5}{H,28}.$$

proxime antecedentis minutiæ, productoq; numerator eiusdem proxime antecedẽtis minutiæ adiiciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autẽ P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primũ H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, postea N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus minutiis ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, in minutiam G H, hoc est, æqualis est summa ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collecta. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, a facit minutiã simplicem, cuius numerator C, productus nimirũ ex C, in vnitatẽ bis posita hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N: ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F D, procreatus: Minutia quoq;, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, producti, b æqualis est minutia K L; c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrabimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conſtatur, æqualis sit ſumma collecta ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atq; ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoq; erit eadem minutiæ M N, ſumma collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atq; ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, d facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q ex B, in N, id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F. D. B, productus. Minutia quoq;, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus, a denominator vero idem numerus Q ex B, in N, productus, e æqualis eſt minutiæ M N. f quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſumma collecta ex minutia, cuius numerator A, &, denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, a denominator vero Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum eſt, æqualis quoq; erit eadem minutiæ P Q, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia A B:

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. ſep.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. ſep.

vtrique

unius particulæ minutiæ CD, unius particulæ minutiæ EF, unius particulæ minutiæ GH, quod est propositum. Eadem quæ ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, constatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G, H, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutiæ CD, & ex minutiæ AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, a reducitur ad minutiam simplicem EH, cujus numerator est E, ex numeratoribus AC, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus, B, D, productus, ut exemplum appositum demonstrat: b Minutia quoq; FH, æqualis est minutiæ CD; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quæ ex iis, quæ ad initium propos. 20 ostendimus æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu. Quod est propositum.

	E, 18.	F, 24.	
A, 3	C, 6	G, 42	
B, 4.	D, 7.	H, 28.	

a 14. huius.

A, 3	C, 6	E, 18
B, 4.	D, 7.	H, 28.

b 8. huius.

c 17. septimi

QUOD si plures sint minutiæ inserenda AB, CD, EF, GH; hoc est, minutiæ AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; addenda sint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus; ut fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adjiciatur numerus ex C, E, G, factus, ut fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, ut fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus ultimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adjiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum usque locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui ultimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus; ut

P, 232.	M, 104.	K, 20.					
A, 1	C, 3	E, 2	G, 4				
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.				
Q, 120.	N, 60.	L, 15.					

in priori sensu. Dico minutiam P Q, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, vt dictum est. Nam vt in duabus minutiis demonstratum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiarum E F, G H, id est, aqualis est summa collecta ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, a facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus: b aqualis est minutia K L: c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, aqualis sit per ea, quæ initio propos. 20 ostensa sunt, summa collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò est idem N; aqualis erit etiam eadem minutia M N, summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutia G H. Rursus minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, d facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, sive ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq;, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem est idem Q, ex B, in N, procreatus, e aqualis est minutiæ M N: f quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum aqualis sit, ex ijs, quæ initio propos. 20 demonstrata sunt, summa collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem est Q, atq; ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q, aqualis quoq; erit summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutia G H, & ex minutia C D, minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia G H, quod est propositum. Eadem q; de pluribus est ratio.

a 14. huius.

b 8. huius.

c 17. septimi.

d 14. huius.

e 8 huius.

f 17. septimi

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4

B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L, 15.

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum ex literemus: Id quod ad defin. 10. libr. 5. & ad defin. 5. libr. 6. & ad propos. 23 libr. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. libr. 5. & defin. 5. libr. 6. in iis propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse vero additionem proportionum; ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit dupla, aut tripla maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatiue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit vere totum quippiam, cuius partes sint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest: quod pars esset vel aqualis, vel maior toto. Nam cum hac compositio intelligenda sit, siue maior quantitas cum minore, siue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. libr. 5. ostendimus, si positis his tribus terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10 vt vult. defin. 10. libr. 5. sed vere esset duplo maior, ita vt concreata foret ex duabus proportionib. 1. ad 10. & 10. ad 100. aqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. qua vna pars est, maiorem esse proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem aqualem esse toti? Sic etiam, si, positis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere concrearetur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, esset quoq; pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2 maior sit proportione subdupla 4. ad 8 Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret aqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8 Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posteriores verò 3 & 16.

Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportionem 24. ad 48. compositam esse ex proportionibus laterum, hoc est, ex proportione 12 ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (si hæc compositio est vera additio) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. vere totum est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harum ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

24.	48.
12. 2.	3. 16.

subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione sub octupla 1. ad 16. ex proportione subdupla 24 ad 48. reliquaerit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta est subtractio. Quod si posteriores numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4 erit una partium componentium nimirum proportio 2. ad 4 aequalis totiproportioni videlicet 24. ad 48. Et subtracta proportione 2. ad 4 ex proportione aequali 24 ad 48. superesset adhuc proportio aequalitatis 12. ad 12.

24.	48.	
12. 2.	12. 4.	

qua maior est quam totum, hoc est; quam proportio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totum non augeri, etiamsi ei infinitae partes adderentur. Positis enim hu quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt ha proportiones simul sumpta proportioni 12. ad 1 sint aequales: si cum illis terminis continuantur adhuc alij tres termini hoc modo, 12, 4. 2. 1. 6 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres sunt eadem illis, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. addita tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Haec autem omnia absurda sunt; & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod secundum communem hominum sensum dua proportiones tripla constituant proportionem sextuplam, non autem nonuplam, vt praedicti auctores volunt; quamquam nonupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in hisce numeris apparet; 9. 3 1. Nam quis non videat. si agens aliquod sit; vt 3. illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5 moueant simul sumpta, vt 8. non autem ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis haec ex illis per continuationem composita esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non posse dimidiari; eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non posset habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numeris: quis autem non statim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quam agens vt 6?

LIQVET ergo huiusmodi compositionem proportionum non esse additionem, sed proportionum continuationem, quae per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. libr. 6. demonstrauimus, vbi etiam expo uimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus composita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur positis tribus, quatuor aut pluribus terminis continue proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius

propor-

proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex iis, quæ iam iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE *omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt libr. 5 decimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionum denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunq;, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.*

PRIMVM *enim sint in vnam summam colligenda duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coacernabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, suppositâ primùm vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4 & 40. 8. inter quos data proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraq; octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadripartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt* $2\frac{4}{7}$. *&* $1\frac{1}{2}$. *quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi primùm sunt denominatores ad vnitates fractionum, vt hic factum est. Nam* $2\frac{4}{7}$ *reuocauimus ad* $\frac{18}{7}$ *&* $1\frac{1}{2}$. *ad* $\frac{3}{2}$. *Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.*

3	×	5	12	×	40
1		5	4		8
8			256		
1			32		
18	×	3	54	×	6
7		2	21		4
57			342		
14			84		

DEINDE *si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintuplæ & duplæ superquadrupartientes septimas, vt hic perspicuum est.*

8	×	3	256	×	12	57	×	3	342	×	4
1	×	1	32	×	4	14	×	2	84	×	4
5			40			72			864		
1.			128.			28			336		

TERTIO *si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est per proportionem duplam: Item proportio sesquialtera per superpartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur & ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.*

3	—	2	6	12	—	10	120	3	—	8	24	9	—	16	144
1	—	1	1	4	—	5.	20.	2	—	5.	10	6	—	10	60

QVARTO & *vltima si proportio sextupla dividenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si divisoru termini permutentur, vt in divisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.*

6	—	1	6	110	—	4	480	24	—	2	48	144	—	6.	864
1	—	3.	3.	20	—	12.	240	10	—	5.	30.	60	—	9.	540

VIDES *ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.*

IAM *vero multiplicationem proportionum à nobis præscriptam, quam auctores additionem falso nuncupant, eum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10 lib. 5 & defin 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeo compositionem illam Euclidis vere esse multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales, ducatur & A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex consequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur,*

A, 6.	C, 12.	A, 3	C, 6
B, 2.	D, 4.	B, 2.	D, 5.
E, 72,	F, 8.	E, 18	F, 10.
G, 24.		G, 12.	

esse compositam ex proportionib. duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt si proportiones ha A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin 10. lib 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C,

B, in C, sunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt, G, & F, b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex definitione. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum ha eadem sint, qua E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

a 18. septim.
b 17. septim.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam iidem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, qua ex diuisione proportionis, A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, qua relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (qua eadem est, qua G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit?

A, 9.	C, 3.		A, 4.	C, 6.	
B, 1.	D, 1.		B, 2.	D, 3.	
E, 9,	F, 3.		D, 8.	F, 12.	
G, 27.			G, 24.		

c 1. septimi.
d 17. sept.

Atq; hac de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT *Euclides in antecedentibus tribus libris ea, qua ad numeros spectant, quantũ satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solida, tum plana, neque perfecte intelligi possunt, neque cum res tuleris, in opus atque usum conferri; propterea quod plerunque laterum earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia saepenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disseritur, obscuritatem; omnes neruos industria mea in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmeticæ, qua de radicibus numerorum, tam rationalibus quam irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Imo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmeticæ pendere ex hoc 10. lib. tantum abest,*

abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum perspecturum, quam qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de causa & nos prima decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studioso caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exemplis numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & cõmodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius effusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentariis affarre laboramus, plus caperent incommodi, minimè demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facile negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possint per seipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum nõ multò ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, *vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura, C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, lineæ 20. palmorum & lineæ 13. palmorum: quia eas lineas tam vnius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.*

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES *magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem quoniam nullam habent mensuram communem, vt propositio-*

positione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurima alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua cõmunis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq;, quadam ratione inueniri possint. Rursus superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTÆ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM *rectarum quadam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; eiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1 commensurabiles simpliciter diximus: quadam vero longitudine incõmensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, alia sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; alia vero ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Linea ergo illa longitudine incommensurabiles, quarũ quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusq; linea quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.*

QVOD *si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superque esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cum huiusmodi lineæ vna communi mensura metiatur, vt dictum est: At vero quoniam lineæ potentia commensurabiles nulla communi mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.*

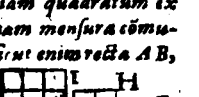
IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit cõmunis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS, *reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.*

HABENT *autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt li-*

vt linea longitudine cõmensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nulla linea dari possint commensurabiles longitudine, quam earũ quadrata commensurabilia quoq; sint, quoniam quadratum ex cõmuni earum mensura descriptum metitur tanquam mensura cõmunis earũ quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectam CD, EF, ita quoque quadratum AG, quadrata GH, EI, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incõmensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles; sint etiam incõmensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. huius libri.



V.

His positis, ostenditur, cuicunq; rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potẽtia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis erunt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles lõgitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

Linea *autem illa proposita, ratione cuius aliæ cõmensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur semper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunq; partes æquales possit diuidi.*

VI.

Et huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET *lineas alias illi, qua Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunq; appellari quoq; Rationales, non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparata reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.*

ITAQVE *ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis linea Rationali; (est enim tam numerus 20. quam 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.*

VII.

Huic vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM *antecedenti defin. Euclides lineas illas, qua longitudine & potentia, vel qua potentia tantum sunt commensurabiles proposita recta Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, qua proposita recta Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari irrationalem, cum non sit longitudine & potentia, sed longitudine tantum Rationali linea proposita incommensurabilis.*

VIII.

Et quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM *linea illa, qua certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Itaquoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius alia superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.*

IX.

Et huic commensurabilia quidem Rationalia.

OMNES *plana superficies quadrato Rationalis linea proposita commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum ea collata reperiuntur ei vel commensurabiles,*

vel

vel incommensurabiles: quemadmodum etiam linea, quæ Rationali linea quomodocunque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia, quadrato Rationalis lineæ, proposita, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac linea, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dicta.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales: quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia: si vero non fuerint quadrata, sed alia quacunque figura rectilinea, appellentur recta, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam linea, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possint spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles ac incommensurabiles: vix autem, & rarissime his: Rationales, & Irrationales: *Recta enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine*

dine & potentia, vel potentia tantum: Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero rectis Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt varie & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusq; fines locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri, perspicuum est, minorem totiès posse multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim vna magnitudines dicimus tum demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alterum excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONVNciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CÆTE-

CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus, vt docuimus ad initium primi libri: curauimus, vt duplex numerus in margine è regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtraret. Quod ſi vnus tantùm numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

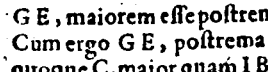
THEOR. 1. PROPOS. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quam dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITÆ ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit maior. Dico ſi ex AB auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit quam C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit quam AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quam AB. Diuiſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales,

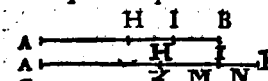
detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quã dimidiũ HI; atq; hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB, multitudine æquales ſint partibus ipſius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot ſunt ipſæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior eſt quam AB; At ex DE, ablatum eſt DF, minus quam dimidiũ, vel certe dimidiũ, ſi DE, ipſius ſit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cùm enim DE, maior ſit quam AB; ſi ex DE, dimidium auferretur, nec nõ & ex AB, dimidium, eſſet quoque reliquũ ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergò ex DE, auferatur minus quam dimidiũ, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rurſus quoniam FE, maior eſt quam HB, auferturque ex FE; dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, ſi FE, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex HB, maius quam dimidium HI: erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo oſtendemus tandem poſtremam partem, ipſius DE, qualis hic eſt GE, ma-

GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cum ex maiori DE, ablatum sit DB, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

ALITER Facta constructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH, maior est quam HB, vel certe illi æqualis sit, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, maior est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atque adeo tota AI, maior, quam tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cum sit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,) erit quoque C, maior quam IB. Ac proinde relicta est IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum.



a 14. 5. *inti.*

SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, dum quantitates inæquales proposítas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

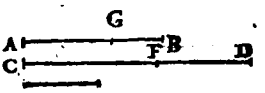
ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVA-

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarũ minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta aut FAB, ex C D, quoties potest, relinquat F D, se minorem, ita vt A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita vt F D, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. *a* Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipsius C D; alias si esset dimidia, vel minor quam dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodem modo erit AG, ablata ex A B, maior quam dimidia ipsis A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius, quam dimidium, *b* relinquetur tandem magnitudo quædam minor quam E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur C F; *c* metietur quoque E, ipsam CF. Metitur autem E, & totam C D. *d* Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G; *e* quare & E, ipsam AG, metietur. Metitur autem E, & totam A B: *f* ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.



a 1. *dec.*

b 1. *dec.*

c 2. *pronun.*

d 3. *pronun.*

e 2. *pronun.*

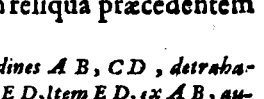
f 3. *pronun.*

SCHOLIVM.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines A B, CD, detrahaturque minor A B, ex C D, & reliqua sit E D, item E D, ex A B, auferatur, relinquaturque F B, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D: & E D, metitur A F: g metietur quoque F B, ipsam A F: Metitur autem



g 2. *pronun.*

a 1. pronun. autem & seipsam. a Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE. b Igitur & FB ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED: c Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autem & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, utramque AB, ED, metitur, quod est absurdum; ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.

b 2. pronun.

c 1. pronun.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; Metietur quædam reliqua præcedentem.

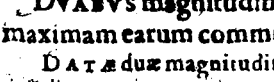
NAM si nunquam reliqua metietur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles; vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

ITAQVE facile ex his dignoscemus, an duæ quæ-cunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem: erunt magnitudines propositæ commensurabiles; cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositam; vt constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, ostensum est, eandem reliquam FB, metiri vtramque magnitudinem AB, CD. Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt; vt Euclides hoc loco demonstrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD, commensurabiles sunt, fit vt si minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties potest, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties potest, relinquat FB, & hoc semper fiat alterna quadam detractione, tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholii. Metiatur iam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, esse maximam mensuram communem magnitudinem AB, CD. Quod enim vtramque metiatur, ita osten-



ostendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur AF; a metietur quoque FB, ipsam AF: At metitur FB, & seipsam. b Igitur FB, totam AB, metietur; c atque adeo & ipsam CE, quam AB, metitur. Cum ergo & ipsam ED, metiatur; d metietur quoque FB, totam CD, Metitur ergo FB, vtramque AB; CD. Quare vtriusque AB, CD, communis mensura est FB.

a 1. *pronun.*
b 1. *pronun.*
c 2. *pronun.*
d 1. *pronun.*

Quod autem FB, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earū mensura, maior quam FB. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB; CD; metitur autem & AB, ipsam CE, e metietur quoque G, ipsam CE: At metitur quoque totam CD, f Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED; ipsam AF. g Ergo & G; ipsam AF, metietur. Quare cum G, totam etiam AB, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam FB, maior minorem. h Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis mensura est ipsarum AB, CD, Quare FB, maxima earum communis mensura est.

e 2. *pronun.*
f 3. *pronun.*
g 2. *pronun.*
h 5. *pronun.*

Quod si minor magnitudo AB, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis: cum & seipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.

A ——— B
C ——————— D

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines; metitur & maximam earum mensuram communem.

ELIGITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum AB, CD. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoq; maximam mensuram FB. Eadem, est ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

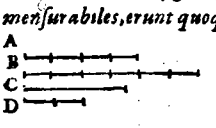
EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile conijcere, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B; commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres, A, B, C, esse incommensurabiles quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

A ———
B ———
C ———

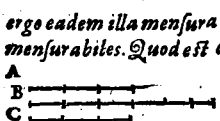
SI vero A, & B; fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D: quæ si metiatur quoq; magnitudinē C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C; commensurabiles esse; cum habeant communem mensuram D.

A ———
B ———
C ———
D ———

QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C: erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesin.



Si vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles a Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D: cum E, metiatur D: & D, ipsas A, & a 3. *dec.*



b 2. *pronun.* B: b *metietur quoq; E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoq; C: metietur E, tres magnitudines A, B, C, Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

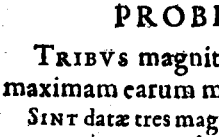
SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, necne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primum in tribus: si quinq;, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

iiij.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. c Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nã si maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lbr. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem, quod fieri non potest. Si vero D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commẽsurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. d Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; e metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarũ A, B, C, quemadmodum asseruimus.



c 3. *dec.*

d 3. *dec.*

e 2. *pronun.*

QVOD

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quam E, fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

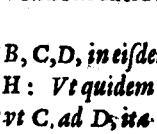
INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus cõmensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura cõmunis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

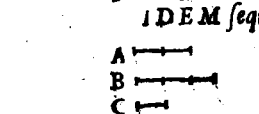
SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad finem 7. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, compo-



sunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H. æquales esse: hoc est, esse vt A, ad D, ita E ad H. Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo



apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

SCHOLIVM.

QVONIAM *precedens lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in precedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem generis; Io numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib facta, etiam ad hoc lemma transferri posset, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.*

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES *magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.*

SINT *magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum.* a *Sic enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D; Et quoties eadem C, repetita meritur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atq; numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent. &c. Quod erat demonstrandum.*

a 3. decimi.

SCHO-

SCHOLIVM.

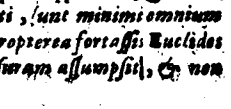
CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Ha enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atque adeo in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quã numerus ad numerum, quia commenſurabilia, atq; idcirco menſuram habent communem, ipſiſq; demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, communis menſura ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum cõmunis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac cõmunis magnitudinum cõmenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E

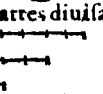
QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quamcunque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demonſtrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inuenientur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniam vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omnium eandem cum ipſis proportionẽ habentium; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam cõmunem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.



THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionẽ habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

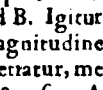
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico AB, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas cõtinetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarum partium, vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinẽ quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, *a* ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsum F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramq; A, & B, metitur: *b* Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant &c. Quod erat demonstrandum.



a *9. quinti.*

b *1. def.*

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æque metiantur; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D. Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo B, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem cõmunem mensuram E, *c* commensurabiles sunt Quod est propositum.



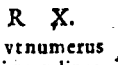
c *1. def.*

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; sumenda alia linea ∠, in tot æquales partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita

ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quam si se habeat A, vt C, ad D. [a] Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A. ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C, ad D, sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterq; descripta.



[a] 13. sexti.

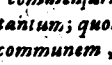
SCHOLIVM.

In hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicatur habere, quam numerus ad numerum: [b] erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.



[b] 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 6. viij.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse.

* 5. decimi. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles; erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

A ——
B ——

SCHOLIVM.

Quod si linea proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; imo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam. Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

A —— D, 49.
B —— E, 42.
C —— F, 36.

SINT continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; sive priores in eodem genere sint, in quo posteriores, sive non: sitq; vt A, ad C, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.

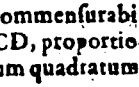
IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplica-

plicata, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

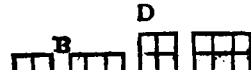
QVÆ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; *a* erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: *b* habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: *c* Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.



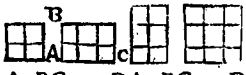
a 5. *decimi.*
b 20. *sexti.*
c 11. *octa.*

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum BD, subrectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11 lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scolio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad



a 1. *sexti.* AB, ad CD, vt E, ad F: *a* Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt F, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum, ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad

b 1. *sexti.* F, *b* Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum



ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine commensurabiles. Sin enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex BD,

c 20. *sexti.* vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: *c* Habet

d 11. *oct.* autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD. *d* Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ AB CD,

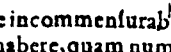
e 6. *decimi.* proportionem habeant, quam numeri E, F, *e* ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

f 1. *sexti.* ALITER. Reperatur constructio figuræ posterioris. *f* Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rursum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt supra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD. Sint autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt supra ostendimus; ponaturque quadratum ex AB ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc est, vt E,

g 6. *dec.* ad F; *g* ideoq; AB, CD, rectæ proportionem habentes quã numeri E F, commensurabiles sunt longitudine Quod est propositũ.

SINT

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratū. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratū ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.



QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod est absurdum. ponuntur enim non habere Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: *a* ipsa commensurabilia erunt; *b* Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. a *6. dec.* b *3. def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commensurabiles sunt, *d* cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis. c *3. def.* d *6. decimi.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse,

les esse, solum enim ex lineæ longitudine incommensurabiles, quarum
a 4. defin. quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a po-
b 8. decimi. tentiâ quoque incommensurabiles sunt, b cum earum quadrata incommensurabilia sint.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarii. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

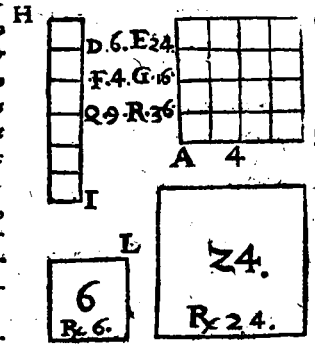
VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali propositæ comparentur: quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta A B, 2, & C D, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris effari, si cum Rationali linea propositæ conferantur: De his autem è contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illi, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus: cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor mensuras quadratas; & quadratum ex C D, nouem: quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles: At propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, ex, ressa numero 4. cuius quadratum A C, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, c vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus
c 26. octaui. *numerus F, ad quadratum numerum G; nempe 4. ad 16. Deinde sub-*

tendatur

matur rectangulum H I, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadratis A C, quot nimirum unitates in D, numero continentur: a quæ ipſi H I, quadratum æquale conſtituatur K L, cuius latus K M. Poſtremo per ea, quæ in corollar. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita ſe habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per conſtructionem: continet autem quadratum K L, 6. menſuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (conſtructum enim eſt quadratum K L, æquale rectangulo H I, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris) continebit quadratum N P, earundem menſurarum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6 & 24. non ſint numeri quadrati, erunt que linea Rationali A B, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex corollar. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O, ſit autem quadratorum proportio ſub quadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. b Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda ſunt ergo in hoc theoremate linea etiam illa longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quòd ſi conſiderentur eadem linea K M, N O, ſimpliciter, & abſolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant ſubduplam, ſi K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis A B, imò illi omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

a 14. ſecundi



b 6. decimi,

RVRSVS

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, *proportionem habentia, quam quadratus numerus* F, *ad quadratum numerum* G, *plures quadratas menſuras continent æquales illi, in quas* AC, *quadratum Rationalis lineæ* AB, *reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis* F, G: (*Nam* KL, *æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, &* NP, *continet* 24. *At numerus quadratus* F, *componitur ex quatuor vnitatibus, &* G, *ex* 16.) *Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumantur* Q, R, *pauciores tales menſuras complectuntur quadrata* KL, NP, *quam ſunt vnitates in numeris quadratis* Q, R, *cum alter ex* 9. *alter vero ex* 36. *vnitatibus conſtituatur; manifeſtum eſt, in hoc theoremate intelligenda quoque eſſe quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, qua pauciores quadratas menſuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadem quadrata* KL, NP, *conſiderentur abſolute, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati* AC, *ex Rationali linea* AB, *deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris* F, G, *vel* Q, R, *continentur. Nam ſtrecta* KM, *diuidatur in duas partes, &* NO, *in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum* KL, *quatuor menſuras quadratas, & quadratum* NP, *ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris* F, G. *Item ſi eadem linea ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas* 9. *&* 36. *quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis* Q, R, *&c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum* AC, *Rationalis linea* AB, *reſoluitur.*

IDEM *dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumque lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos: cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint* 12. *&* 3. *habentes proportionem, quam quadratus numerus* 16. *ad quadratum numerum* 4. *&c.*

ITAQVE *theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationalis linea incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus: Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpenumero numeri quadrati nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato*

Rationa-

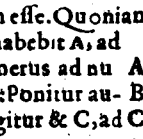
Rationalis linea, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi linea Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus: Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis: vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemq; quadrate, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. libr. 8. Quod tamen clarius ostendit Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT pröportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt, *a* habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. *b* Quare C, & D, cõmensurabiles inter se sunt. *a 5. decimi.* *b 6. decimi.*



SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, *c* non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. *d* Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. *c 7. decimi.* *d 8. decim.*

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia

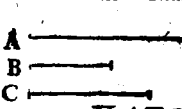
quarta longitudine commensurabilis. vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est potentia ipsi B, a erunt earum quadrata commensurabilia, b ac propterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum. c Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterque descriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad d numerum. d Quare commensurabilia erunt: e Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, sta manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus: Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

a 3. def.
b 5. decimi.
c 22. sexti.
d 6. decimi.
e 3. def.

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles: erunt ipsarum potentia commensurabiles: ac propterea ipsæ potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles: Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ superficies, vel solida: sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum ex iis, qua in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliqua duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, qua numeri ad numerum: f atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non, non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt



f 6. decimi.

tum; vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitud nium eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, qua numeri ad numerum. a Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum. a 8. dec.

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ; lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidave commensurabilia sint, b habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod erat propositum. b 5. decimi

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Num huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunq; numeros primos, A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus. A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium; qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad

quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus; adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expedient.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse; planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpenumero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Item, prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posteriorus 6. & 8 vt constat: quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, nō autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius. qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram verò etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autē proportio B ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerum quadratū.

A ——— B, 10.
E
D ——— C, 6.

Igitur

Igitur *a* rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. *a* 9. *dec.*
Quod autem tantum lõgitudine sint incommensurabiles; patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, *b* ipsa commensurabilia erunt. Sunt *b* 6. *decimi.*
ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. *c* Inueniatur recta E, inter *c* 13. *sexti.*
rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incõmensurabilem esse longitudine, & potẽtia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratũm ex E per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum: *d* erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, *d* 10. *dec.*
E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll propos. 9. huius libr. & omnino longitudine incõmensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incõmensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CÆTERVM *ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atq; adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemq; argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A. Est autẽ recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. e Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia. atq; adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*

A ⟷ B, 10.
E ⟷
D ⟷ C, 6. *e* 10. *dec.*

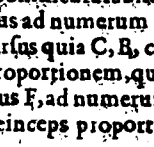
In codicibus vulgatis præponitur hæc undecima propositio Theoremæ propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.

xii. viii.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, *a* habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, *b* sumantur tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, *c* inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.



a 5. decimi.

b 4. oct.

c 6. decimi.

SCHOLIVM.

Quod si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles, potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, d *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G.* e *Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K.* f *Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt, atque*

d 5. dec.

e 4. oct.

f 6. dec.

atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraq; cuipiã alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inuenimus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT *enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.*

A ——————
C ——————
B ——————

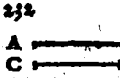
QVOD *si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, cõmensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraq; B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.*

THEOR. 10. PROPOS. 13. xlij.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensu-

rabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; e erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.



e 12. decimi.

SCHOLIVM.

Si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, b *extenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, sive tantum, sive etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoq; B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

b 12. dec.

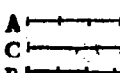
QVONIAM *vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, fit, ut post hanc in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à nunioribus, & peritioribus Geometriæ hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est assitum.*

xiij. viij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

Si sint autem magnitudines commensurabiles; altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; e erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.



c 12. decimi.

SCHOLIVM.

HIC *quoque, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, sive longitudine tantum, sive lon-*

ſint longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, a *eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, ipſi C, longitudine incommenſurabilis. Quod ſi A, & B, commenſurabiles ſint potentia tantum, & A, ipſi C, potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent commenſurabiles;* b *& A, C, potentia commenſurabiles eſſent. (cum hoc poſito, vtraque A, C, ipſi B, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur.*

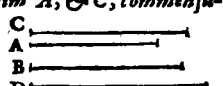
a 12. decimi

b 12. dec.

COLLIGVNT *porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.*

QVÆ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles, & inter ſe incommenſurabiles erunt.

SINT *duæ magnitudines incommenſurabiles A, B, quibus commenſurabiles ſint C, & D, nempe C, ipſi A, & D, ipſi B. Dico C, & D, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam enim A, & C, commenſurabiles ponuntur, & eſt A, ipſi B, incommenſurabilis;* c *erit quoq; reliqua C, eidem B, incommenſurabilis. Rurſus quia D, & B, commenſurabiles ponuntur, & eſt B, oſtenſa ipſi C, incommenſurabilis;* d *erit & reliqua eidem C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.*



c 14. dec.

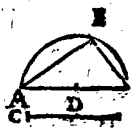
d 14. dec.

SI *autem magnitudines A, B, C, D, ſint linea, & A, B, vel longitudine tantum incommenſurabiles, vel longitudine & potentia, ſint autem C, D, ipſis A, B, longitudine incommenſurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommenſurabiles. Si vero A, & B, incommenſurabiles ſint potentia, & ipſis potentia tantum commenſurabiles C, & D; oſtendemus ſimiliter C, & D, potentia eſſe incommenſurabiles; vt perſpicuum eſt.*

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor.

QVAMVIS *id, quod lemma hoc proponit, oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo data duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatq; inue-*



a 1. quarti.

nire, quo AB, plus possit quam C. Diuisa AB bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipsi C, aequalis, iungaturq; recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectae

b 31. tertii. c 47. primi.

EB. b *Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* c *erit quadratum ex AB, aequale quadratis ex AE, EB; atq; idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato rectae EB. Quod est propositum. Similiter*

DVABVS datis rectis lineis siue aequalibus, siue inaequalibus, inuenire rectam, quae illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura data duae rectae AE, EB, quae si coniungantur ad angulum

d 47. primi.

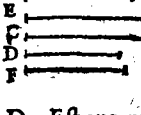
rectum E, poterit eas recta ducta AB, d *quippe cum quadratum ex AB, aequale sit quadratis ex AE, EB.*

XIV. XIJ.

THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectae lineae proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quam B, secunda quadrato rectae E, & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectae F. Dico, si B, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C. Si vero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D;



e 22. sexti.

e erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, aequale quadratis ex B, E, per hypothe-

petheſin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; a Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoq; vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoq; ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. a 22. *ſexti.*

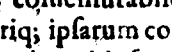
SCHOLIVM.

EODEM *argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantum commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.*

THEOR 13. PROPOS. 16. XV. IX.

SI duæ magnitudines cõmenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines cõmenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipſarum AB, BC, cõmenſurabilem eſſe. b Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, c metietur quoque D, totam AC, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur AC, & A; erunt AC, AB, commenſurabiles: Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, AC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.



b 3. *decimi.* c 1. *pronum.*

SED iam tota AC, ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi AB. Dico & AB, BC, inter ſe commenſurabiles eſſe. d Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; e metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commenſurabiles erunt AB, BC, inter ſe. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

d 3. *dec.* e 9. *pronum.*

COROL-

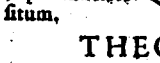
COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cum mentiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 5. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

xvj. ix. THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri po-



a 3. *decimi.* test, nempe ipsi AB, *a* sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB;

b 3. *pronun.* *b* metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramq; AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB: Eademq; ratione neq; ipsi BC, commensurabilis erit. Quare vtriq; ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit vnni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles,

c 16. *dec.* *c* erit quoque tota AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarū, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incōmensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoque AC, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ AB, commen-

commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumq; corollariis, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtrumq; propositionis demonstrationem communis mensura D, *&c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habēt, vt ex defin. apparet.*

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammū applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

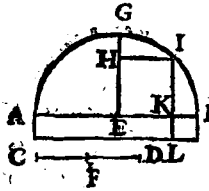
HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. libr. 6. quod quarta pars quadrati ex minore lineā descripti minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteque figura quadrata, vt vult propos. illa 28. libr. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. libr. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitque figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. libr. 6. licet tamen idipsum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur data rectæ inæquales AC, CD, quarum AB, maior sit [illegible] atque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata: quod quidem parallelogram-

mum



mum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta CD, descripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & intervallo EA, vel EB, semicirculus AGB: & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est, EG, ipsi AE, æqualis, maior quam CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpendicularis, & sit KL, ipsi kB, æqualis; ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim kI, media proportionalis est inter Ak, kB, vt

a 17. sexti. in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus; a erit rectangulum sub Ak, KB hoc est rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc est,

b 34. primi. quadrato ex EH: b (est enim KI, ipsi EH, æqualis, ob parallelogrammum EI,) hoc est, quadrato ex CF: Est autem quadratum ex CF, quartæ pars quadrati ex CD: quod quadratum ex CD, per scholium propos. 4 lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF: Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensque quadrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti: Quod est propositum.

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate absoluimus & hoc problema; quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus cõtentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum à dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque; cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. [redacted] ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, vt primi rectangulum sub partibus Ak, KB,

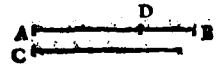
æquale

æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, itaque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum, quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quartæ pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata: Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; *& ad maiorem* AB, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, itaque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore* C, *descripti, ita vt* DB, *latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta* AD, DB, *inæqualia esse.*



Si enim AD, DB, *segmenta dicantur esse æqualia: tum ex* 1. *lemmate parallelogrammum applicatum ad* AB, *deficiensque figura quadrata ex* DB, *descripta, æquale fit rectangulo sub* AD, DB, *fit autem quod sub æqualibus* AD, DE, *quadratum: erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* AD, *dimidio ipsius* AB, *descriptum: atque adeo ex scholio propos.* 4. *libr.* 2. *quadratum ex* AB, *quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex* C, *per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quarti partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarum ex* AB, & C, *æqualia sunt, atque rectæ* AB, & C, *æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta* AD, DB. *Quod est propositum.*

HOC *facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem,* EH, *æqualis dimidiatæ parti ipsius* CD, *nempe ipsi* CF, *ductaque* HI, *parallela ipsi* AB, & *tandem demissa perpendicularis* IK, *vt partes factæ ex applicatione sint* AK, KB: *manifestum est* AK, KB, *segmenta esse inæqualia, cum* AB, *in* E, *secta*

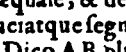
sit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij. xiij.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

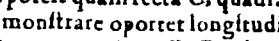
SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, D B, faciatque segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse quam C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propos. A D, maior est, quam D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cum totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D, a erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadratum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B. Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectãgulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D, (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cum F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B, (quod quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. libr. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B:



a 5. *secundi.*

ex AB: Ac proinde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles: a erit quoque tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis: (quod composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B,) Igitur cum vtraque AB, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B, b erunt quoque AB, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex coroll propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.



a 16. decimi

b 12. decimi.

Sed iam A B, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi F D; erit eadem A B, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum vtraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis compositæ ex A F, D B; c erunt quoque A B, D B, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeo cum tota A B composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine ipsi D B; d erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

c 12. decimi.

d 16. decim.

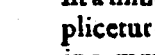
THEOR. 16. PROPOS. 19.

xviij. xiv.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrāmum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum

est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus



posse quam C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; *a* erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: *b* erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B, erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ E D, longitudine sibi incommensurabilis.

a 17. *decim.*

b 14. *decim.*

IAM vero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse quam C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per corollar. prop. 17. huius libr. & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine

inco.n-

incommensurabilis: Est autem composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex AF, DB, componitur, & DB, ipsa composita ex AF, DB longitudine incommensurabilis sit rectæ AB, *a* erit & reliqua DB, eidem AB, longitudine incommensurabilis: Ac proinde cum tota AB, composita ex AD, DB, incommensurabilis sit ipsi DB, longitudine; *b* erunt & ipsæ AD, DB, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. decimi.

b 17. decimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus: nunc ad Rationales & Mediας transit in sequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia vero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero exposita Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis: dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

EX PROCLO. *Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ linea, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles: atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales:*

commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et siquidem longitudine, dicuntur & ipsa Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse: Si vero potentia inter se solum sunt commensurabiles: dicuntur ipsa quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera aqualis est expositæ Rationali: ac proinde vtraque Rationali commensurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expositæ aqualis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis: Aut denique vtraque expositæ Rationali commensurabilis est solum potentia. Hac autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expositæ Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine aqualibus, quæ quidem magnitudine aquales sunt ipsi D; ipsæ aquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D, communem mensuram. Inuenta ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarum vna nempe E, aqualis est Rationali expositæ A.

A — 1.4.C.6.D — E — F

IAM vero D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G quorum neuter idem sit qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inaqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra aqualis est Rationali expositæ A.

A — B.4.D — C — E

a 11. dec. *POSIREMO expositæ Rationali A, a inueniatur recta B, longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quoscunque partes*

partes æquales, & sumatur C, composita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico eadem expositæ Rationali A, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia; a *Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis;* b *erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.*

a 12. decimi.

b 12. dec.

QVOD *si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo: Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.*

CÆTERVM *& omnes lineas Rationales, non solum expositæ Rationali, sed etiam in se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus.* c *Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum;* d *quæ autem eidem commensurabiles, inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunq; inter se commensurabiles esse.*

c 6. defin.

d 12. sexti.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, & rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT *duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex*

quantacunque enim linea recta CD, *abscindatur* CE, *ipsi* A, *æqualis, &* EF, *ipsi* B. *Deinde super* CE, *describatur quadratum* CG, *perficiaturq; rectangulum* GF, *contentum sub* CE, *&* EF, *hoc est, sub* A, *&* B. a *Quoniam igitur est vt* CE, *ad* EF, *hoc est, vt* A, *ad* B, *ita parallelogrammum* CG *hoc est, quadratum ex* A, *ad parallelogrammum* GF, *sub* A, *&* B, *comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

a 1. *sexti.*

EODEM modo erit, vt B, *ad* A, *ita rectangulum* FG, *ad quadratum* GC. *Quod est propositum.*

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali spacio commensurabile, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, *commensurabile Rationali spatio* B. *Dico &* A, *Rationale esse. Sit namque* C, *quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod ni-*

mirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam b *igitur* B, *Rationale est,* b *erit ipsum Rationali* C, *commensurabile: Est autem &* A, *ipsi* B, *commensurabile. Igitur* A, *&* C, *cum commensurabilia sint ipsi* B, c *inter se quoq; commensurabilia erunt; ac proinde spatium* A, *Rationali quadrato* C, *ex Rationali linea exposita descripta commensurabile,* d *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

b 9. *def.*

c 12. *dec.*

d 6. *def.*

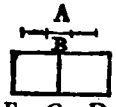
XIX. XV.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum BD, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorum, (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propos. explicuimus; ita vt vel altera ipsarum BC, CD, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico BD, re-

BD, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, commẽsurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum: *a* erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex A, cõmensurabile: *b* Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia, *c* Igitur & BE, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero BC, hoc est, EC, & CD, longitudine commensurabiles sunt, (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter se longitudine cõmensurabiles) *d* & est vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; *e* erunt quoq; EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedẽtis propos. BD, Rationali BE, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.



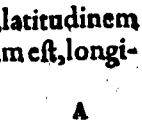
a 3. *defin.*
b 8. *defin.*
c 9. *def.*
d 1. *sexti.*
e 10. *dec.*

THEOR. 18. PROPOS. 21.

XX.
XVj.

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

Sit rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19 exposuimꝰ, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel lõgitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, *f* ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali expositæ A, descripto; *g* Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: *h* Est autem vt BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, commensurabilis longitudine; *i* sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstandum.



f 2. *def.*
g 12. *dec.*
h 1. *sexti.*
i 6. *def.*

LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſita Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, a inueniatur C, longitudine tantum incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum incommenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuenta ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

a 11. dec.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantum incommenſurabilis b inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles.

b 11. decimi.

Quod

Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſita Rationali A, ſit potentia commenſurabilis; a erunt B, C, Rationales. Inuenta ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles. a 6. defin.

SCHOLIVM.

QVOD ſi inuenienda ſint quotcunq; linea Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur in hac ratione.

SVMANTVR per ea, qua in ſcholio propoſ. 20 libr 9. docuimus, tot numeri primi, quot linea Rationales quaruntur, nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propoſ. 6. huius libr oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H. Rationales eſſe; & potentia tantum commenſurabiles inter ſe. Quod enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtructione; ſimiliterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D) b erunt ipſa inter ſe commenſurabilia; ac propterea & recta ipſa potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem libr. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. c Quare recta E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſa ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

A, 5. E
B, 7. F
C, 3. G
D, 2. H

b 6. decimi.

c 9. decimi.

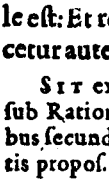
QVOD ſi propoſitis quotcunq; Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inueniendæ ſint huic alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propoſitæ duæ

A ——— C. 10. *Rationales potentia tantum commẽ-*
B —— D, 6. *surabiles A, B, quorum quadrata*
F ——— E, 7. *proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D, primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E,*
a 6. *decimi.* *a commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem libr. 8. ostendimus; (quod D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoq; plani non similes, ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem*
b 9. *decimi.* *non habeant, quam quadratus ad quadratum) b erunt rectæ E, F, lõgitudine incommensurabiles. Ergo potentia solum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia tantum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, vt idem demõstrauimus de numeris D, & E) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.*

xxj. xix. THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A. & rectangulum BD, contentum sub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorũ, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.) Dico rectangulum BD, esse Irrationale, & rectam, cuius quadratum ipsi BD, æquale est, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demon-



c 1. *sexti.* *strationepropos. 20. diximus. c Et quoniam est vt* EC, *hoc est*, BC, *ad* CD, *vt* BE, *ad* BD: *Est autem* BG, *ipsi* CD, *longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus,* BE, *ipsi* BD, *in-*

BD, incommensurabile, *a* Quare cum BE, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A, sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; *b* erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, *c* Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate proposantecedentis.

a 9. *def.* *b* 14. *dec.* *c* 10. *def.*

VOCATVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, *d* propterea quod media proportionalis est inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commẽsurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod monstrandum erat.

d 17. *sexti.*

SCHOLIVM.

ITAQVE *omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ inter se commensurabiles, Media vocabitur.* cCum *enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus: si dicamus eam esse lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hac linea Media hoc loco appellatur.*

c 17. *sexti.*

VT *autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres linea sint continuè proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, qua Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterq; descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum medium proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoq; Medium appellari potest.*

HOC *autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe*

Mediis

Medium longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus. At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuerse tamen omne spatium Medium æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

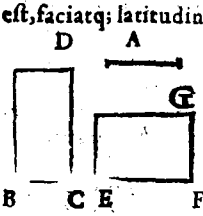
VNDE *Medium describi sic poterit, vt dicamus illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso æquale est, ita vt ipsum possit linea recta, quæ Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.*

xxij. xx.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicantum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, siue ea sit exposita, siue
a 45. primi. expositæ commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum *a* appliceturque ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi



BC, longitudine incommensurabilem. Quoniam enim A, Media est ipsa poterit rectangulum sub duab. rectis Rationalibus potentia tantum interse commensurabilibus cõtentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, sub Rationalibus EF, FG, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et
b 14 sexti. quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum BD, æqualia erunt BD, & EG, *b* lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos,

gulos, nempe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD; *a* Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratum ex BC, commensurabile est quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF, ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur *b* & quadratum ex FG, commensurabile erit quadrato ex CD: propterea que & rectæ FG, CD, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est expositæ Rationalis; erit quoque CD, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi BC. Quoniam enim EF, FG, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt EF, ad FG, ita quadratum ex EF, ad rectangulum EG, sub EF, FG, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. *c* erit quadratum ex EF, incommensurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex EF, commensurabile est quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commensurabile sit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato ex EF, incommensurabile; *d* incommensurabilia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad rectam BC. *e* Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali BC, longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 22. *sexti.*
b 10. *decimi.*
c 10. *decimi*
d 13. *decimi.*
e 10. *decimi*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A, sumatur tertia proportionalis pro latere CD: Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; f *erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.*

f 11. *sex.*
g 17. *sexti.*

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiusuis lineæ rectæ.

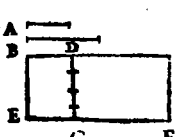
PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale,

tionale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunq; Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse Expositæ enim sit Rationalis C D, *a* ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; *b* erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem *c* applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. *d* Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. *e* Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles. Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. *f* Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commensurabiles, *g* Ac proinde recta B, potens rectangulum D E, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F; Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



a 45. *primi.*
b 23. *decimi.*
c 45. *primi.*
d 1. *sex.*
e 10. *decimi.*
f 14. *decimi.*
g 22. *decim.*

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium, nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius libr. tradidimus) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commen-

commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, cõmensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius libr. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si verò rectæ quadam lineæ Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, *cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles* B, C: *illa quidem longitudine, hæc verò potentia tantum: erit vtraque* B, C, *Media* A, *commensurabilis, Media. Cum ergo* A, B, *sint longitudine commensurabiles: &* A, C, *potentia tantum: erunt inuentæ* A, B, *Mediæ longitudine commensurabiles: &* A, C, *Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.*

A ——————— 224. decim.
B ————
C ————

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit: non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis: cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inuenienda sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles.

THEOR.

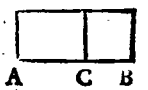
xxiv. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Mediis AC, CD, longitudine commensurabilibus. Dico AD, Medium esse. Describatur ex CD, Media quadratum BD, quod erit Medium. a Et quoniam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autem AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine cõmensurabiles; erunt AD, DB, commensurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. *sex.*



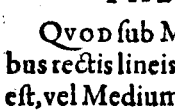
xxv. xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus, cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, *b* ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, descripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & deniq; ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, descripto: eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostẽsum. Quia vero AD, CE, Media sunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, (*c* est enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis) faciantque latitudines GH, KM, *d* erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipsi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo & ipsis æqualia rectangula FH, LM, commensurabilia: *e* Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad KM. *f* Igitur GH, KM, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH, KM, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commẽsurabiles, Rationali vero FG, solum commen-

b 45. *primi.*



c 34. *primi.*

d 23. *decimi.*

e 1. *sex.*

f 10. *decimi.*

mensurabiles potentia. cum ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; a Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Rationale est. Et quoniam est, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E, (quod D B, B C, ipsis A B, B E, sint æquales vtraque vtrique) b & vt D B, ad B C, ita A D, ad A C; & vt A B, ad B E, ita A C, ad C E; erit quoque vt A D, ad A C, ita A C, ad C E, atque adeo A D, A C, C E, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt: c Habent autem rectæ G H, H K, K M, easdem proportiones, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales sunt; d propterea quæ rectangulum sub G H, K M, quadrato ex H K, æquale est. Est autem rectangulum sub G H, K M, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex H K, Rationale est; ideoque & recta H K, Rationalis erit; e & ob hoc ipsi F G, Rationali expositæ, hoc est, ipsi H I, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel solum potentia. Et si quidem H K, ipsi H I, longitudine sit commensurabilis, f rectangulum H L, sub Rationalibus H I, H I, longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, A C, illi æquale, erit Rationale. Si vero H K, ipsi H I, potentia solum commensurabilis sit, g erit rectangulum H L, sub Rationalibus H I, H K, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, A C, illi æquale, Medium. Est ergo A C, rectangulum sub Mediis A B, B C, potentia tantum commensurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 26. *decimi.* b 1. *sex.* c 1. *sex.* d 17. *sexti.* e 6 *def.* f 20. *decimi.* g 22. *decimi.*

SCHOLIVM.

Facilius quam ex 45 propos. lib 1. applicabimus ad H I, rectangulum ipsi A C æquale, h si tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis sumatur pro latere H K. Nam rectangulum sub extremis H I, H K, æquale erit rectangulo sub mediis A B, B C. h 12. *sexti.*

Hac eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo i 16. *sexti.*

Quoniam vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propos. 18. quanam ratione inueniendæ sint duæ Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propos. vero 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium *contineant.*

Itaque habemus ex his k *rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationales;* l *Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellarique Mediū,* k 20. *decimi.* l 22. *decimi.*

& rectam, qua ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat, a 25. decimi. a rectangulum comprehensum sub duabus Mediis longitudine commensurabilibus esse Medium; b 26. decimi. Rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, vel medium.

Quod si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe aquale esse rectangulo quod cõtinetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media apellatur.

Sit enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus Mediis AB, BC longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectæ GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia (sunt enim & earum quadrata ADCE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FHLM incommensurabilia. c 1. sex. Vt autem FH, ad LM, ita est recta d 1. decimi. GH, ad rectam KM, e 22. decimi. Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH KM, ostensa Rationales sunt potentia tantum inter se commensurabiles, f 73. sexti. Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM Irrationale est, quod Media appellatur. & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media Potest autē rectangulum sub ipsis GH, KM recta HK; (Nam vt prius ostendemus, rectæ GH, HK, KM, esse proportionales) Igitur HK, Irrationalis est, & Media. Quare IK, Rationalem non est; si enim Rationale esset, g 21. decimi. faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum, ostensa enim est HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, medium est; h 23. decimi. si enim esset Medium, faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine incommensurabilem, quod est absurdum, ostensa est enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cum IK, neque Rationale sit, neque Medium, necessario neque AC, illi æquale Rationale erit neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe aquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Mediâ continetur, cum HI Rationalis sit, & HK, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur AB, BC, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod est propositum.

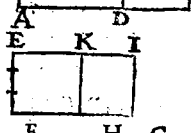
xxvj. xxij.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

Medium non superat Medium Rationali.

Supe-

Superet Medium AB, Medium AC, rectangulo DB, Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, *a* ad ipsum applicetur rectangulum FG, Medio *A* B, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI. Rationale DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata, *b* erunt rectæ FG, FH, Rationales & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK, (*c* est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) *d* erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; *e* erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabili. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. *f* Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH commensurabile est quadratum ex HG, (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) *g* atque adeo & duo quadrata ex FH, HG simul, quadrato ex EH, commensurabilia sunt. Et rectangulo sub FH HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH HG simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis *h* Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH HG. *i* At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius li. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex IH. Igitur cum huic composito, quod Rationale est incommensurabile sit quadratum ex FG, *k* erit quadratum ex FG, Irrationale, *l* ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdū, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium *A* B, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationale. Quod erat ostendendum.



a 45. primi.
b 23. decimi.
c 34. primi.
d 21. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.
h 71. decimi.
i 14. secundi.
k 10. def. 11. def.
l fin.

SCHOLIVM.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

Rationale superat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale. Quoniam enim AB, AC Rationalia sunt; a *erunt AB, AC, ommensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* b *atq; adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB compositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC, erit quoque idem AB, reliquo DB commensurabile, ex coroll propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale Igitur & DB. ex lemmate 4. propos. lib. Rationale est. Quod est propositum.*

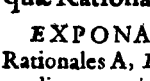
a 9 *defin.*
b 12. *decimi.*

xxvij. o.

THEOR. 4. PROPOS. 28.

Medias inueniri potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, *c* inter quas media proportionalis sumatur C, *d* fiatque vt A, ad B, ita C ad D. Dico C, D, esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; *e* erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur, atque adeo *f* cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, sunt q; A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoq; C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius libr. ostendimus *g*. Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis Mediæ. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoq; vt C, ad B, ita B, ad D, ideoq; B, media proportionalis inter C, & D. *h* poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.



c 13. *sexti.*
d 12. *sexti.*
e 22. *decimi.*
f 17. *sexti.*
g 24. *decimi.*
h 17. *sexti.*

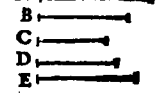
xxviij. o.

PROBL. 5. PROPOS. 29.

Media inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

Expo-

Exponantur per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demõstrauimus, tres rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, *a* & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. *b* Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E. Medias esse potentia tãtum commensurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim AB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles: erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, *c* quod illi æquale est, *d* Irrationabile, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E, sunt autem B, C, ra Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commẽsurabiles, vt in scholio propos 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D. Media sit, *e* erit & E, illi potentia solum commẽsurabilis, Media, A: propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E: & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A: erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. *f* Rectangulum igitur sub D E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus. *g* Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Mediũ est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.



a 13. *sext.* b 12. *sexti.* c 17. *sexti.* d 21. *decimi.* e 24. *decimi.* f 16. *sexti.* g 22. *decimi.*

SCHOLIVM.

In iis quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

Duos numeros planos similes inuenire.

Sumantur quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

Quoniam autem in lib. 9. h *ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, & si impar multiplicet imparem, perspicuum est, quonã modo inueniri possint plani similes, quorum vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horũ vero par: Similiter parus erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.*

h 28. 29. noni.

LEMMA I.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

Inueniantur per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. a 24. & 26. noni *Et quoniam, siue à pari par auferatur siue ab impari impar, reliquus par est, detracto BD, ex AB, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariam in E; Dico numerum factum ex AB, in BD,* b 1. noni *quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theorematis eorum, quæ ex propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.*

A.....E.....D.....B
C.....

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

Quod si numeri sumantur AB, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum BE, ED. quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, non est quadratus. Si enim quadratus esset, e numeri AB, BD, hoc est, AB, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

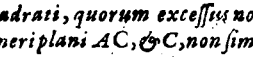
SCHOLIVM II.

Itaq; si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duos planos similes quorum vterq; par, vel impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex BE, ED, describi sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratum ex ED, numero qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus est. c 2. noni.

A.....E.....D.....B
C.....

Si vero

Si vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AC, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius.



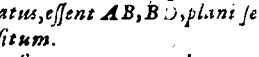
Nam similiter ostendemus quadratum ex BE, aequalem esse quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE ED, est numerus factus ex AB, in BD qui cum non sit quadratus, (Si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes quod non ponitur) constat propositum.

Hoc posterius facilius absoluemus, si quemcunq; quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36 diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16 numero 20. non quadratum. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25 & non quadratum 11 superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadratum 11. & sic de cæteris.

LEMMA II.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

Sint duo numeri plani similes AB, & C, pares, vel impares, vt in lemmate praecedenti, fiatque eadem constructio, ita



vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, aequalis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipsius maius latere BF. Erit

ergo latus ipſius vel æquale numero BE, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur: Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam BF, minus vero quam BE) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex BE, æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex AB, in BD, & ex quadrato numeri DF; cum eidem quadrato ex BE ſit oſtenſus ex præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE; erit, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo ſcil cet, qui fit ex AB, in BD: erit reliquus quadratus ex DF, æqualis reliquo quadrato ex DE: Idcoque & latus DF, lateri DE, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit, æquale eſt numero BE. Sed neque maius. Sit enim ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero BI, qui maior ſit, quam BE, ita vt quadrato ex BI, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex BI, latere maiore, maior eſt quadrato ex BE, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit, (cum hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex BI,) maior quadrato ex BE. Eſt autem quadrato ex BE, oſtenſus in lemmate præcedentis æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex AB, in BD; erat reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex DE, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti in quadratis, quorum alter fit ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe, maius eſt latere BE. Sed neque æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex BF.

A..H..I.E.F.G...D.....B
C.....

Sit

Sit iam, si fieri potest, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cũ quadrato ex D F, aequalis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus est, (diuisus enim est A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatae vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex iis quae ad propo. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quae ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus, qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, aequalis quadrato ex B F. Sed eidem quadrato ex B F, aequalis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, aequalis est ei, qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex D F, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex A B, in B D, aequalis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eandem B D, producant aequales numeros; a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipsi A B aequalis pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex B F, aequalis. a 18. sept.

Sit tandem, si potest fieri, numerus qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod sit B G, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, aequalis sit quadrato ex B G. Sumatur autem ipsius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus est, & ablatus A I, ablati E G; erit rursus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea I D, in G, diuiditur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quae ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, aequalis quadrato ex B G: Ponitur autem eidem quadrato ex B G, aequalis, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, aequalis est ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor est, remanebit qui ex

IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neq; maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

A..H..I. E .F.G... D ,.....B
C.....

SCHOLIVM III.

Ex hoc facile inuenietur duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quã quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus, habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

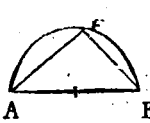
Idem obtinemus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partitifuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum

xxix. xvij.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

Inuenire duas Rationales potentia tãtum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato, rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

Exponatur linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in scholio 1. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodeturque AF, in semicirculo ADB, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB. *a* Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo: *b* erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB: hoc est, recta AB, plus poterit quam AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, *c* erunt quadrata ex AB, AF, commensurabilia; atque adeo cum quadratum ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB: descriptum, erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea que & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF, atque adeo commensurabiles saltem potentia.



a 13 ter. xij.
b 47. primi.
c 6. dec.

Quia vero quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; alias & DE, quadratus esset, *a* vt in Arithmeticis est demonstratum, quod non ponitur) *b* erunt rectæ AB, AF, longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur AB, AF, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

a 74. oct.
b 9. decimi.

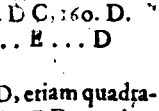
Iam vero quoniam est vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus CD ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB (sicut enim CD superat DE, quadrato CE, ita etiam quadratum ex AB superat quadratum ex AF, quadrato ex FB.) *c* Quare rectæ AB FB, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

c 9. dec.

PROBL. 7. PROPOS 31. xxx. xviij.

Inuenire duas Rationes potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compositus CD, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros nō quadratos CE, ED: Verum uis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipsorum CE ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias secundum priorem modum, esset totus CD, etiam quadratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, *d* vt in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturque AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles. Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos.



C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C . . . . . E . . . D

d 14. oct.

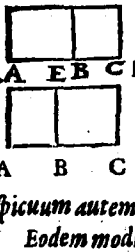
propoſ. Quoniam vero rurſus, vt prius, eſt per cõuerſionem rationis, vt C D, ad C E, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB; Non habet autem C D, ad CE, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoq; quadratum ex AB, ad quadratũ ex F B, proportionem, Quam quadratus numerus ad numerum Quadratum. *a* Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſſit quam minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine incommenſurabilis Quod erat faciendum.

C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C..... E ... D

a 29. *decimi.*

L E M M A.

Si ſint duæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



Sint duæ recta inæquales A B, B C, in rectũ conſt. tuta quarum A B, maior ſit. Dico eſſe, vt A B, ad B C, ita rectangulum ſub A B, B C, ad quadratum ex B C. Deſcribatur enim ex B C, quadratum B D, compleaturq; rectangulum A D; eritq; rectangulum A F, ſub A B, B C, contentum; quod B E, ipſi B C, ſit æqualis; b *perſpicuum autem eſt, eſſe vt A B, ad B C, ita A E, ad B D.*

b 1. *ſext.*

Eodem modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua A B, minor eſt, quam B C.

xxxj. xxiv. xxv.

PROBL. 8. PROPOS 32.

Inuenire duas medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale cõtineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

c 30. *decimi.*

c Repertæ ſint duæ Rationales, A, B, potentia tantum commenſurabiles: ita vt A, maior plus poſſit quam B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B: & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolum commenſurabi-

les

les, *a* erit rectangulum sub A B. Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media, Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, vt in scholio propos. 10 huius libri ostendimus *b* Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; *c* Ac propterea rectangulum sub C &, D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, ill æquale Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam vero est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; *d* poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medeas, C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

A ——— a 22. decimi.
B ———
C ———
D ———

b 24. decimi.

c 17. sexti.

d 15. decimi.

Quod si reperte sint A, B, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior, C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

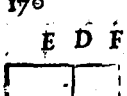
SCHOLIVM.

Alij hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius libri.

LEMMA.

Si sint tres lineæ rectæ; erit vt prima ad tertium, ita rectangulum sub prima & secunda contentũ, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

Sint tres rectæ A B, B C, C D, *in rectum constitutæ, Dico esse vt* A B, *ad* C D, *ita rectangulum sub* A B, B C, *ad rectangulum*



lum sub B C, C D. Describatur enim ex B C, quadratum B C D E, perficiaturq; rectangulum A F; Eritq; A E, contentum sub A B, B C; & C F, sub B C, C D; quod B E, C D, id est B C, æquales sint. a Perspicuum autem est esse A B, ad C D, vt A E, ad C F. Quod est propositum.

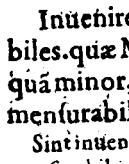
a 1. sexti.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

xxxij. xxvj.

Inuenire duas Medias potentia solum commensurabiles. quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quã minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Sint inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quę in scholio propos. 21. huius lib demonstrauimus. c Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C; e Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D, f & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E. quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E. Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 19. huius lib. ostendimus. g Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; h erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, i quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles) æquale esse rectangulum sub D, E. erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; k poterit et-



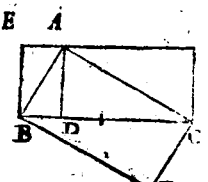
b 30. decimi.
c 13. sexti.
d 12. sexti.
e 17. sexti.
f 16. sexti.
g 22. decimi.
h 24. decimi.
i 22. decimi.
k 15. decimi.

iam D, plus quam E. quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.

Quod ſi repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, vt prius, demonſtrabimus ſimiliter, inuentas eſſe duas Medias D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſſit quàm minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facile apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

LEMMA I.

Sit triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum ſub C B, B D, æquale eſſe quadrato ex A B: contentum autem ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C, & contentum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum deniq; ſub B C, A D, æquale contento ſub A B, A C.



Quoniam ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis eſt inter C D, B D; erit rectangulum ſub C B, B D, quadrato ex A B, æquale. a 17. ſexti.

Eadem ratione erit rectangulum ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C media proportionalis eſt inter B C, C D.

Rurſus quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectangulum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

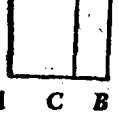
POSTREMO, b *quia triangula A B C, A B D, ſimilia ſunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* c *Quare rectangulum ſub B C, A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, A C. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum ſub B C, A D: Item rectangulum A F, ſub A B A C, contentum.* d *Quoniam igitur rectangulum C E, dupli eſt trianguli A B C, non enim & rectangulum* b 8 ſexti. c 16. ſexti. d 41. primi.

gulum

gulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se aequalia rectangula CE, AF. quod est propositum.

LEMMA II.

Si recta linea secetur in duas partes inæquales; erit vt maior pars ad minorem; ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.



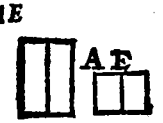
Secetur recta AB, non bifariam in C. sitq; maior pars AC, Dico esse vt AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum AB; DE, ducaturque CF, ipsi AE, parallela; eritque AF, contentum sub AB, AC & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, aequales sint. a *Quoniam igitur est vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.*

a 1. sext.

Eadem ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.



Sint duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum constituentes ABC, secetur q; minor BC, b fariam in D, Dico rectangulum sub AB, BC, duplum esse rectanguli sub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, sub AB, BC; ducaturq; DE, ipsi AB, parallela, eritq; BE, contentum sub AB, & BD, dimidia minoris. b *Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quod & basis BC, dupla sit basis BD, constat propositum.*

b 2. sexti

EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub

sub A B, B C, continetur, duplum eius, quod continetur sub A B, minore, & B D, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

PROBL. 10 PROPOS. 34. xxxiij. xxvij.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a Reperiantur duæ Rationales A B, C D, potentia solum commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; seceturque C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C E, hoc est quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quoq; sub A F, F B, continetur. Postremo descripto semicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad A B, perpendicularis, connectanturque rectæ A G, G B. Quoniam igitur A B, plus potest, quam C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad A B, rectangulum sub A F, F B, æquale quartæ parti quadrati ex C D, deficiens figura quadrata; *b* erit A F, ipsi F B, longitudine incommensurabilis. Est autem vt A F, ad F B, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub A B, A F, ad rectangulum sub A B, F B; Rectangulum vero sub A B, A F, quadrato ex A G, & rectangulum sub A B, F B, quadrato ex G B, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis *c*; quod angulus A G B, rectus sit in semicirculo A G B. Igitur quoque erit vt A F, ad F B, ita quadratum ex A G, ad quadratum ex G B, ac propterea cum A F, F B, longitudine sint incommensurabiles; *d* erunt quadrata ex A G, G B, incommensurabilia. *e* Igitur rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali A B, Rationale est, *f* æqualeque quadratis ex A G, G B; erit etiam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub A F, F B, quod quadrato ex C E, æquale est factum, *g* æquale est quadrato ex F G, (propterea quod angulus A G B, rectus est & F G, ad A B, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, C E, æqualia; ac proinde & rectæ F G, C E, æquales. Quare C D, dupla existens ipsius C E, dupla etiam erit ipsius F G. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub A B, C D, du-

a 31. decimi.
b 19. decim.
c 31. tertij.
d 10. decimi.
e 4. def.
f 47. primi.
g 17. sexti.

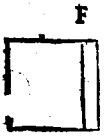
CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia sit minoris GD.) a Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedētis æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoq; est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Iuuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

a 22. decimi.

SCHOLIVM.

Demonstrātur hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

Exponatur Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE: & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est, vt C, ad D ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autem C, ad D, proportionem, quam quadratus ad quadratum; b erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem nō habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia. Ac propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll propos. 17. huius lib. c Vt autem AB, ad AF, ita quadratum ex AB, ad AF Igitur cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, d erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB Rationalis ponatur; erit AE, dicto quadrato incommensurabilis Irrationales Eodemq; argumento ostendemus BF, Irrationale esse Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.



b 9. decimi.

C, 6. D, 4

c 1. sext.

d 10. decimi.

At vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse Cum enim vtrumq; AF FB Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia. e Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtriq; eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtriq; Rationali AF, FB, f Rationale quoq; est. Quod est propositum.

e 16. decimi.

f 9. defi.

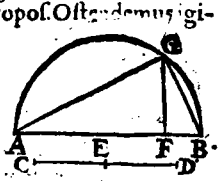
PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

xxxiv xxxviij

Innenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

a Reperiantur duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum cõmensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas A G, G B, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, b æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Mediũ est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commẽsurabile. Quare cum rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub A B, F G, illi incommensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 34. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub A G, GB, Rationale est. Ostẽsum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ A G, G B, quæ ostensæ sunt potentia incõmensurabiles, faciunt cõpositum ex earum quadratis Medium, & rectangulũ sub eisdem cõprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. decimi.

b 47. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

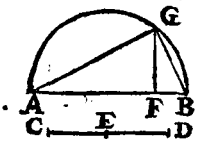
xxxv xxix.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quę faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

c Reperiantur duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse

c 33. decimi.

a 47. pri les esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est, *a* & quadrati rectarum A G, G B, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub A B C D, duplum esse rectanguli sub *A* B, F G; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub A B, C D, Medium sit; erit quoque rectangulum sub *A* B. F G, hoc est, sub A G, G B, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero *A* B, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi C D: Est autem eidem C D, ipsa C E, longitudine commensurabilis; quod illa huius sit dupla; *b* erunt A B, C E, longitudine incommensurabiles. Sed vt *A* B, ad C E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex *A* B, ad rectangulum sub *A* B, C E, hoc est, ad rectangulum sub *A* B, F G, hoc est, sub *A* G, G B. (sunt enim rectangulum sub *A* B. F G, & sub *A* G, G B, per 1. lemma propos. 1 3. huius lib. æqualia.) *c* Igitur quadratum ex A B, incommensurabile est rectangulo sub *A* G, G B. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ *A* G. G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabile; compositi ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.



b 31. decimi.

c 10. decimi.

SCHOLIVM.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24 huius lib. nos demonstraturos recepimus. nimirum.

Inuenire duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

Quoniam ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, quam rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, *& hoc rectangulum* Medium, *Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata hoc est, compositum ex quadratis rectarum A G, G B, & rectangulum sub A G, G B, commensurabilia. quod non ponitur. Quocirca si sumatur A B, potens compositum ex quadratis rectarum A G, G B, & alia recta potens rectangulum sub A G, G B, id est, media proportionalis inter A G, G B, inuentæ erunt duæ* Mediæ *& longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.*

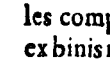
Prin-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj. xxx.

Si duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur duæ Rationales AB, BC, potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lemma propos 21 huius lib. Dico totam AC Irrationalem esse. Quoniam enim AB, longitudine incommensurabilis est ipsi BC, & vt AB, ad BC, ita est rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propos 21. huius lib.



a erit rectangulum sub AB, BC, quadrato ex BC, incommensuabile. Sed rectangulo sub AB BC, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB BC, continetur, & quadrato ex BC, commensurabile est quadratum rectæ AB; (omnia enim sunt Rationalia) *b* atque adeo & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, in scholio. propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub AB, BC, & ex composito quadratorum rectarum AB, BC, hoc est, quadratum ex tota AC, (*c* Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB. BC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis) composito ex quadratis rectarum AB, BC, *d* incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quod commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rationali. Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommensurabile, *e* Irrationale est; atque adeo & recta ipsa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia solum commensurabilibus cõponitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. *decimi.*

b 16. *decimi.*

c 4. *secundi.*

d 17. *decimi.*

e 10. *fin.*

SCHOLIVM.

Itaq; ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, f *Irrationalis est, quæ media vocatur. At vero composita ex ipsis,* g *Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.*

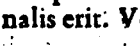
f 22. *decimi.*

g 37. *decimi.*

THEOR. 26. PROPOS. 38.

xxxvij. xxxj. **Si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis mediis prima.**

a 28. decimi. Componantur duæ Mediæ *a* superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia enim AB, est ad BC, vt rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propos 31. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; *b* erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt; per ea quę in scholio propos: 21. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, *d* quod huic composito æquale est, *e* incommensurabile quoq; est rectangulo sub AB BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, commensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cum hoc sit illius dimidium. *f* Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB BC: Ponitur autem rectangulum sub AB BC, Rationale. *g* Irrationale ergo est quadratum ex AC, *h* & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.



b 10. decimi.

c 16. decimi.

d 4. secundi.

e 17. decimi.

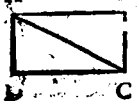
f 13. decimi.

i 10. defin.

k 11. defin.

LEMMA.

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.



i 21. decimi.

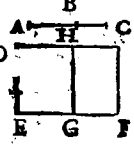
Continetur rectangulum ABCD, sub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, i faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est absurdū. ponitur

mitur enim BC, Irrationalis. Non ergo AC, Rationale est, igitur Irrationale. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

Si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur ex binis Mediis secunda.

Componantur duæ Mediæ *a* superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, *b* ad quam explicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & composito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, *c* æquale est duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. Quoniam vero ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, HF, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; *d* erit & compositum ex ipsis nimirum rectangulum DC, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorum ex Mediis AB, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; (*e* est enim GH, Rationali DE, æqualis) *f* erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt AE, ad BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, BC, ita quadratum ex AB. ad rectangulum AB, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommensurabile rectangulo sub AB, BC, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex AB, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum AB, BC; & rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod continetur bis sub AB, BC, cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, rectangulo HF, *g* Cum ergo sit vt DH, ad GF, ita EG, ad GF; *h* erit EG, ipsi GF, longitudine incommensurabilis: Ostensum autem iam fuit EG, GF, esse Rationales. Rationales igitur sunt EG, GF, potentia tantum commensurabiles,



a 29. *decimi.*
b 45. *primi.*
c 4. *secundi.*
d 10. *decimi.*
e 34. *primi.*
f 23. *decimi.*
g 1 *sexti.*
h 10. *decimi.*

a 37. decimi. ac propterea & tota E F, composita, I rationalis est. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex A C, ipsi D E, æquale, Irrationale est. Quare & recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Medijs secunda, seu vt aliis placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potẽtia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

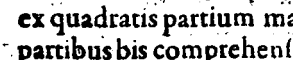
SCHOLIVM.

Vocauit Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus mediis potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale cõtineant, ex binis Mediis primam. Hic vero lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantum commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis secundam quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est medio, quod Irrationale est, ex propos. 12. huius lib.

LEMMA.

Si recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

Secetur recta AD, in B, non bifariam, sitq; maior pars AB; in qua sumatur BC, minori BD, æqualis, vt sit AC, excessus, quo AB, superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, simul maiora esse rectangulo bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC.



b 7. secundi. *Quoniam enim quadrata ex AB, BC, b æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC est q; BC, ipsi BD, æqualis: erunt quoque quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis sub AB, BD, vna cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora sunt, quam rectangulum bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC: quod est propositum.*

COROLLARIVM.

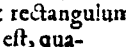
Ex hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiii. THEOR. 28. PROPOS. 40.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur,

tinetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

Componantur duæ rectæ *a* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Dico totam A C, esse Irrationalem. Quoniam enim rectangulum sub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub A B. BC, illi commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. *b* Incommensurabile ergo est rectangulum bis A B, BC, composito ex quadratis rectarum A B, B C. *c* Igitur & rectangulum bis sub A B, B C, vna cum qudratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale: *d* erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale. *e* Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia *f* cum possit duo quadrata ex AB, BC; & rectangulum bis sub AB, BC; compositum ex quadratis rectarum A B. BC, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub AB, B C. Quare cum compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB, BC, Medium: recte vocabitur A C, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

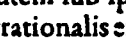


a 10. *decimi.*
b 10. *defin.*
c 17. *decimi.*
d 10. *defin.*
e 11. *defin.*
f 4. *secundi.*

THEOR. 29. PROPOS. 41. xl.

Si duæ rectæ lineæ potentia incõmensurabiles componantur, quę faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens. xxxiv.

Componantur duæ rectæ *g* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, BC, Medium est; quod vero continetur bis sub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub A B, BC, semel continetur, Rationale ponatur, *h* erit compositum ex quadratis rectarum A B, B C, in



g 35. *decimi.*
h 10. *defin.*

a 17. decimi, commensurabile rectangulo bis sub AB, BC. a Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; b erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; c Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

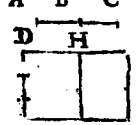
b 10. def. fin.

c 11. def. fin.

xlj. xxxv. THEOR. 30. PROPOS. 42.

Si duæ rectæ lineæ potentia commensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. decimi. Componantur duæ rectæ d superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE. e ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, f æquale est composito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, quam rectangulum sub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis sub AB, BC, nempe ipsum HF, (cum illi sit commensurabile.) Medium ponitur, g facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine Incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB, BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB, BC: Eidem autem rectangulo sub AB, BC, commensurabile est ipsius duplum, nempe



e 45. primi.

f 4. secundi.

g 23. decimi.

quod

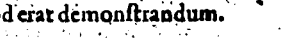
quod bis continetur sub AB, BC, hoc est, ipsum HF; a erunt & DG, HF, incommensurabila. Quare b cum sit vt DG, ad HF, ita EG, ad CF; c erunt EG, GF, longitudine incommensurabiles; Atqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; d Ac propterea tota EF, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est: Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; e ideoq; & recta ipsa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, ninimum & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 15. decimi.
b 1. sexti.
c 10. decimi.
d 37. decimi.
e 11. defin.

LEMMA.

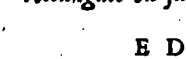
Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

Secetur recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintq; priores partes AC, CB, magis inæquales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, F. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, e æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniam vero quadratum ex AB, g æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, quam rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB, erit rectangulum



f 5. secundi.
g 4. sec.

gulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB.



Quare cum rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AB, DB. Quod eſt propoſitum.

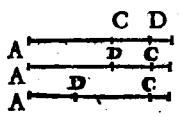
Sed cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor eſt poſteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor eſt) ac proinde cum AE, EB, æquales ſint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaq; quia rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, a æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale eſt quadrato ex AE, hoc eſt, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AB, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonſtrabimus quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.

a 5 ſecundi.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

xxxij. xxxvj. Quæ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Rationales potentia tantum commenſurabilia, vt vult propoſ. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina ad D. Conſtat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam ſi bifariam diuideretur, eſſent AC, CB, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim Rationales potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam ſecabitur AB, cum & AD, DB, Rationales ſint potentia tantum commenſurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales ſunt, quam partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens quadrata ex AC, CB, vel minora



ſunt

sunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunque punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraq; vtique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur AB secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cum rectangulo bis sub AD, DB, a quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex AB; a 4. *secundi.* fit vt qui excessus fuerit ablati cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus; eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27 huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est. b Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, Medium est, erit & quod bis sub AC, CB, illi comensurabile, ex coroll. propo. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub AD, DB, Medium erit. c Quare cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

b 22. *decimi.*

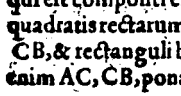
c 27. *decimi.*

THEOR. 32. PROPOS 44. xliij. xxxvij.

Quæ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis Mediis prima AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet

ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei quod continetur ſemel ſub AC, CB, commenſuribile, Rationale. Eodemq; modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cū Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 17. huius lib. oſtendimus: perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earū quadrata Media quoq;, & commenſurabilia. *a* Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis per coroll. propoſ. 14. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarū AD, DB. *b* Cum ergo Medium, non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quamobrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.



a 16. decimi.

b 27. decimi.

xliv. xxviij.

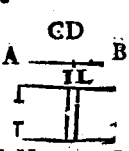
THEOR. 33. PROPOS. 45.

Quæ ex binis Mediis ſecunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis Mediis ſecunda AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint et am lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuiditur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex AC, CB, maiora eſſe

esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis EF, a ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, b æquale est quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB, erit & EH, maius quam IG, ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipsius FH. Eadem ratione ostendemus FK, maiorem esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensuabile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH, per corol. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. d Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC, CB, ponatur Medium, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IC, illi commensurabile, Medium ex corol. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, e erit HG, Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL; longitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine, sunt incommensurabiles, & est vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, f erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB, (Cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; g erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex AC, commensurabile) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 16. huius libri,

a 45. pri mi.
b 4. secundi.
c 16. decimi.
d 23. decimi.
e 23. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.



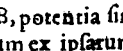
libri, rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt ipſi I G, a 1. ſex. Quocirca *a* cum ſit, vt E H, ad I G, ita F H ad H b 10. decimi. G, *b* erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolum commenſurabiles. c 37. decimi. *c* Igitur F G, tota Irrationalis eſt quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum G. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non d 43. decimi. poteſt, *d* vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quam ad G. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

xlv. xxxix.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit Maior A C, diuiſa in ſua nomina ad punctum D, ita vt A C, G B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulum vero ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius lib. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoq; ſint potentia facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale & rectangulum ſub ipſis Medium. Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, vt in propoſitione 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cum vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoq; eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis c 27. decimi. ſub A D, D B. *c* Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale; Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad



vnum

vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47. xlvj. xl.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia; facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri

potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarū AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: & Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctū diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat. a 27. decimi

THEOR. 36. PROPOS. 48. xlvij. xlj.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex earū quadratis, vt vult propos. 42 huius libri.

Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina quæ videliset sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum

sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunq; hoc punctum D, existat. Cōstructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque vt ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi cōmensurabile est. Igitur Media E H, I H, applicata ad Rationalem E F, (est n. I H, ipsi E F, æqualis) *a* faciunt latitudines F H, H G, Rationales longitudine ipsi E F, incommensurabiles. Eadem quoq; ratione probabimus, & rectas lineas F K, K G, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi E F. Quia vero compositum ex quadratis rectarum A C, C B, descriptis, hoc est, rectangulum E H, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub A C. C B, nempe rectangulo I G: *b* estque vt E H, ad I G, ita F H, ad H G: erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Sed ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, *c* iam ante demonstratū est. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat puncti diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

a 23. *decimi.*

b 1. *sext.*

c 43. *decim.*

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitudine

dine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabiles eſſe longitudine: (alias enim nomina ipſa eſſent quoque lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus: vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt: (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta. vt ex definitionib. hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

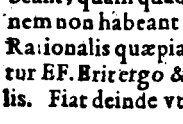
RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali: & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali linea expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur: tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine, est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans: secundam, quintam: & tertiam, sextam.

xlviij. xlij.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ex iis quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad A C, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico F G, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex E f, F G, cum proportionem habeant, quam numeri A B, A C,



a 6. *decimi.* a commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, F G, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est E F, Rationalis. Igitur & F G, Rationalis est. Quia vero AB ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, sit autem A B, maior, quam A C, erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propo-

b 9. *decimi.*

c 37. *decim.*

poſ. 14 huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac proinde rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionẽ, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominib. primam. Quod faciendum erat. a 9. decimi.

PROBL. 14. PROPOS. 50. XLIX. XLIIJ.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

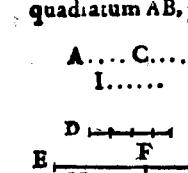
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propoſitione, expoſitaq; Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis FG. Erit ergo & FG. Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC ad numerum AB, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex FC, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, *b* commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ FG, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis eſt. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *d* Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicit. Dico & ſecundam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propoſ 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque minus nomen FG, expoſitæ Rationali D, commenſu- b 6. decimi. c 9. decimi. d 37. dec.

rabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam, Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum.



Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem, quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si AC, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10 differens ab 8 binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. libr. 8, ostendimus, nõ cadet inter I, ad AC, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. *a* Erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, EF commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *b* erunt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG. *c* Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *d* erunt EF, FG, longitudine incõmensurabiles. Sunt ergo EF, FG, Rationa-

I. XLIX.

I. XVIJ.

a 6. dec.

b 9. dec.

c 6. dec.

d 9. dec.

tionales potentia tantum commensurabiles; a Atq; idcirco tota EG, Irrationalis ex binis nominibus appellata Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autem I, ad AC, proportionem, quā numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; b ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sic ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus EG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine cōmensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

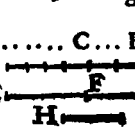
a 37. dec.

b 9. dec.

PROBL. 16. PROPOS. 52.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cum Rationali D, cōmensurabilis sit. Quod si reliqua cōstruantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, tota EG, ex binis nominib. esse. Dico & quartā esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quā quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionē rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neque quadratum ex EF, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratū. c Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ EF, & H. Itaq; cum maius nomen EF, plus possit, quā minus FG, quadrato



c 9. dec.

drato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

lij. xvj.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duabus numeris AC, CB, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 40. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG: Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est perconuersionem rationis est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas, EF, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen FG, longitudine cõmensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

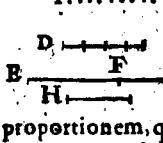
liij. xlvij.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demõstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunq; I; qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quinis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. & reli-

a 30. *septim.*

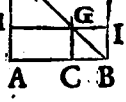


& reliqua fiant, vt in propoſ. 51. oſtendemuſque vt ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam EG, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & FG, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49 per conuerſionem rationis, eſſe vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum maius nomen EF, plus poſſit, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine ſit commenſurabilis, & netrum ipſorum nominum EF, FG, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat. a 9. dec.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunq; : erit rectangulum ſub partibus contentũ, medium proportionale inter earum quadrata : Item rectangulum cõtentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA *ſit recta AB, vtcunq; in C. Deſcribatur ex AB, quadratum ABDE, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipſi BD, parallela, qua diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. libr. 2. FH, CI, quadrata partium AG, CB; vtrumq; autem rectangulorum DG, GA, comprehenſum eiſdem partibus: At vero rectangula CD, AI, ſub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, medium proportionale eſſe inter quadrata FH, CI: At CD, medium eſſe proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim* b *vt HG, ad GI, ita eſt tam FH, ad DG, quam AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* c *Eſt autem AG, ipſi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita ita DG, ad CI: Atque adeo DG, medium proportionale eſt inter quadrata FH, CI.*



b 1. ſexti.

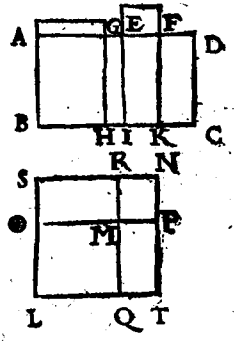
c 43. primi.

a 1. *sexti.* *RVRSVS quia est, a vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quam AI, ad CI; erit vt AD CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit vt AD. ad CD ita quoq; CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.*

THEOR. 37. PROPOS. 55.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis; & denique AB, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ si longitudine cõmensurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum sub AG, GE, contentum, per 1. lemma propos 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; b in partes longitudine commensurabiles ipsum diuidet. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, ipsis AB, BC, parallelæ GH, EI, FK. c Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, coniunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulũ M, vt latera MO, MP, vnam rectã lineam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnam rectã QR, vt demonstratum est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea q anguli OMQ, PMR, ad verticẽ M, sunt æquales, nempe recti. Completo aũt rectangulo LN, cum rectæ OM MP, rectis QM, MR, æquales sint; ideoq; & tota OP, toti QR, d sit autem OP, ipsis SN, LT, & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoq; quadratum.



b 18. *dec.*

c 14. *secundi.*

d 34. *primi.*

Quo-

QVONIAM vero rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF, *a* erit vt AG, ad EF. ita EF, ad GE. *b* Ac properea & vt AH, EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur est TM, ipsi EK. *c* Cum ergo ipsi TM, æquale sit MS, *d* & ipsi EK, æquale sit FC, erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atq; adeo recta OP, potest spatium AC, contentum sub AB Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur. a 17. *sexti.* b 1. *sexti.* c 43. *primi.* d 36. *primi.*

QVONIAM enim AG. GE, ostensæ sunt longitudine commensurabiles, *e* erit & tota AE, vtrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem AE, cum sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine cõmensurabiles sunt; Atq; adeo cum AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula AH, GI sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erũt. e 16. *dec.* f 20. *dec.*

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa cõmensurabilis AG, & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, *g* eandem proportionem habentia, quam AG, EF, *h* incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. *i* Igitur rectæ OM. MP, longitudine sunt incommensurabiles, *k* cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ Igitur OM. MP, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. *l* Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima &c. Quod demonstrandum erat. g 1. *sexti.* h 10. *dec.* i 10. *dec.* k 1. *sexti.* l 37. *sexti.*

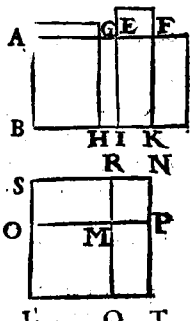
THEOR. 38. PROPOS. 56. LIX. XLIX.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

CONTINEATVR spatiũ AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium

tium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit enim ipsius AD, mainus nomẽ AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua construantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine cõmensurabilis est Rationali AB; a 13.dec. a erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles; b 16.dec. b erit quoq; tota AE, vtrique ipsarum cõmensurabilis. Quare cum AE, maius nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cum ergo vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at vero AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; c 14. dec. c erit vtraq; AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur d 22. dec. d rectangula AH, GI, Media sunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.



QVIA vero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; e 10.dec. e erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt: Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi vero AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles: Ac proinde f 10.dec. AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, f incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, g 10.dec. incommensurabilia sunt; g Ideoque & rectæ OM, MP, longitudi-

tudine sunt incommensurabiles, *a* cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo ostensum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles, erunt O M, M P, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quoniam denique E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoq; longitudine commensurabilis; *b* erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. *c* Quare E K, rectangulum, Rationale est; Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleque continentes; *d* atque adeo O P, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

a 1. *sext.*

b 12. *decim.*

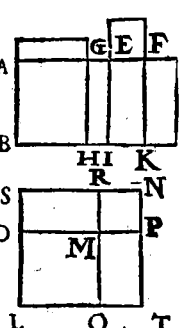
c 20. *decim.*

d 38. *decim.*

THEOR. 39. PROPOS. 57. LVJ.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. L.

Continetur spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Mediis secunda. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex definitione, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum A E, E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 5. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam O P, posse spatiũ A C: Et vt in antecedenti propos. 55. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantum commensurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipsi A B, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam vero E D, E F, sunt commẽsurabiles longitudine; est q; E D, ipsi A B, Rationali, hoc est ipsi E I, longitudine incommensurabilis; e erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommensurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quod E F, dimidia sit ipsius E D, Ra-



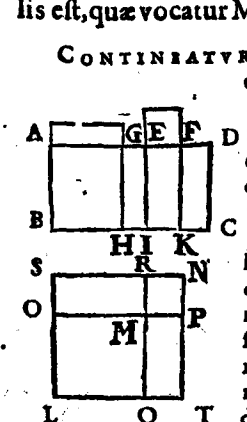
e 14. *decim.*

ED, Rationali: & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF,
a 22. decim. EI, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles: a Ac propterea EK, Medium est: ideoq; & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Mediis OM, MP, continetur. Itaq; cum OM,
b 22. decim. MP, Mediæ sint potentia solum commensurabiles, contineantque spatium Medium: b erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominib. tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

lvij. lj.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.



CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commẽsurabiles: & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F,
c 19. decim. fiant reliqua omnia, vt in propos. 55. c Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim
d 10. decim. AG, GE longitudine incommensurabiles sunt: d erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incõmensurabilia: atque adeo & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commen-
e 20. decim. surabilis Rationali AB: erit & AE, Rationalis: e & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM, MN. Rationale est.

ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, longitudine incommen-

surа-

surabilis; Et est EF, Rationalis, cum sit Rationali ED, commensurabilis. Igitur EF, & AB Rationales sunt potentia solũ commensurabiles. a Quare EK, Medium est, sub ipsis contentum: ideoq; & MT, illi æquale, cõtentumq; sub OM, MP, Mediũ est. Quocirca cum OM, MP, sint potentia incõmensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Rationale: Rectangulum vero sub ipsis MT, Medium, b Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur Si spatium ergo contineatur sub Rationali: & ex binis nominib. quarta, &c. Quod erat ostendendũ. a 22. decim. b 40. decim.

THEOR. 41. PROPOS. 59. lviij. lij.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatiũ AE, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles: & AE, plus põt, quam ED, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: & deniq; ED, longitudine cõmensurabilis est expositæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 5. c Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incõmensurabiles. Si missi autem modo, vt in propos. 55. constabit rectã OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantum commensurabiles d Quare rectangulum AI, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, commensurabilis longitudine, & Rationalis. e Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, longitudine commensurabilibus, Rationale est: atq; idcirco & MT, sub OM, MP, contentum Rationale erit, cum ipsi EK, sit æquale. Quamobrem cum rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles sint, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale: f Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contine- c 19. decim. d 22. decim. e 20. decim. f 41. decim.

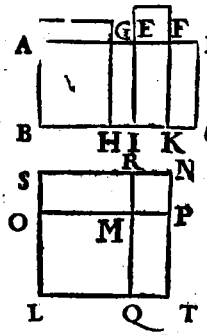
tineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erit demonſtrandum.

lix. liij.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles, & AE, plus poterit, quam ED quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis a 19. *decim.* Rationali AB. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus, *a* eruntq; AG, GE, lõgitudine incommenſurabiles. Iam vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Itẽ vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propoſ. 58, erit quoq; MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ED, hæc vero eidem commenſurabilis; b 13. *decim.* *b* erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. *c* Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt, *d* cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum b 41. *decim.* quadratis, *e* erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.



c 10. *decim.* d 1. *ſex.*

lx. liiij.

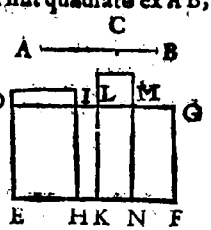
THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nomini-

bus

bus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; *a* & ad Rationalem expositam D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB latitudinem faciens D G. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub AC, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B. *b* æqualia sunt quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per constructionem; rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipsis L K, G F, parallela agatur, M N: eritque vtrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. *c* Et quoniam AC, C B, Rationales sunt potentia solum cõmensurabiles, quod tota A B, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; *d* quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis: erit quoque compositum quadratorum ex AC, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit: quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.



a 45. primi.
b 4. secundi.
c 37. decimi.
d 16. decimi.

Rvrsvs quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, *e* erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit. per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad LK, Rationalem; *f* facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilẽ. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. *g* Igitur D L L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L L G, Rationales potentia tantum commensurabiles; *h* Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

e 22. decimi.
f 23. decimi.
g 13. decimi.
h 7. decim.

Qvoniam enim ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B: erit quoq; L N, medium proportionale inter D H, I K, atque adeo *i* cum rectæ D I, L M, I L, eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K: erit quoque recta L M, media proportionalis inter D I, I L. *k* Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commensurabilia sunt, quod A C, C B, ponantur potentia commensurabiles:

i 1. sext.
k 17. sexti.

a 10. decim. erunt & DH IK, ipsis æqualia commensurabilia. a Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem D K, maius est, quam L F, quod & quadrata ex A C, C B, maiora sint. per lemma propos. 39 huius libri, quam rectangulum bis sub A C, C B; erit & recta

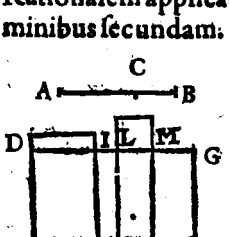
b 1. sex. D L, maior quam L G, b cum D L, L G, eandem rationem habeant, quam D K, L F. Itaque quoniam D L, maior est, quam L G, & ad D L, applicatur rectangulum sub D I, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore L G, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub D I, I L, æquale quadrato ex L M) diuiditurque D L, ad I, in partes D I, I L,

c 18. decimi. longitudine commensurabiles; vt est demonstratum; c poterit D L, maior plus quam L G, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum D G, ostensa sit ex binis nominibus, & D L, maius nomen plus posse, quam L G; minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen D L, longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominib. prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

lxj. lv.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.



d 45. primi. SIT ex binis Mediis prima A B, cuius maius nomen A C, d & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G, Dico D G, ex binis nominibus esse secundam. Constituantur eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, C B, & vtrumque ipsorum L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur

e 38. decim. A C, C B, ex binis Mediis primam A B, componentes e Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent: erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipsis

f 16. decim æqualia D H, I K, commensurabilia, atque Media. f Cum ergo propterea & totum D K, vtrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius libr. D K, Medium, quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, g erit eius

g 23. decim. latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis

bilis Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B; Rationale est, erit & eius duplum, nempe L F, Rationale, quod cum applicatum sit ad Rationalem L K, *a* erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; *b* erunt D L, L G longitudine incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; *c* ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam vero, vt in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostentum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

a 21. *decimi.*

b 13. *decim.*

c 37. *decim.*

THEOR. 45. PROPOS. 63.

lxij. lvj.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Mediis secunda A B, cuius maius nomen A C, & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis secundam A B, componentes, *e* Mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent: erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, & Media. *f* Cum ergo propterea & totum D K, vtrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile, erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, *g* erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & eius duplum L F, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K, *h* erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, longitudine est incommensurabilis: estque vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propositionis 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, *i* erit quoque quadratum ex A C, rectangulo sub A C, C B incommensurabile. *k* Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis

d 45. *primi.*

e 39. *decim.*

f 16. *decim.*

g 23. *decimi.*

h 23. *decim.*

i 10. *decimi.*

k 16. *decim.*

dratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, commensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur commensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub A C, C B. Igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, C B hoc est, rectangulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius l. b. conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habent a longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; b ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. ostendemus D L, esse maius nomen, posseq; plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cum D L, maius nomen plus possit, quam L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum D L, L G, Rationalis exposita D E, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

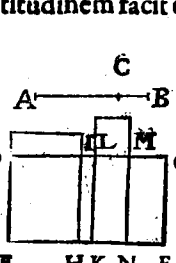
a 10. decim.

b 37. decim.

lxiij. lvij.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



Sit r maior A B, cuius maius nomen A C, c & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, d potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Mediū; erit quoque D K, cōpositō ex quadratis rectarū A C, C B, æquale existens, Rationale; At vero L F, duplum eius quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalē D E, e est applicatum; e erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit applicatum ad Rationalem L K, f erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, D E, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitudine: hæc vero eidem D E, longitudine incommensurabilis; g incommensu-abi-les e-

c 45. primi.

d 45. decim.

e 21. decimi.

f 23. decimi.

g 13. decimi.

les erunt lõgitudine DL, LG: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *a* Ideoq; DG, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ. 61. demonſtrabimus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM. Quia aũt quadrata ex AC, CB, commenſurabilia ſunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia PH, IK, incommenſurabilia, *b* atq; adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam vero vt in propoſ 61. oſtendimus, DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam DL, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles, *c* poterit DL, plus quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cum & ipſa DL, (maius nomen ipſius PG, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DI; erit ex defin. DG, ex binis nominib. quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 37. *decim.*

b 10. *decim.*

c 19. *dec.*

THEOR. 47. PROPOS. 65. LXIV. LVIIJ.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT rectæ potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Diço DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, *e* potentia incommenſurabiles ſunt; facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectangulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale compoſito ex quadratis rectarũ AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atque adeo ipſius duplum, LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, *f* facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, *g* facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commenſurabilis eſt Rationali DE, illa vero longitudine incommenſurabilis, *h* erunt DL, MG, longitudine incommenſurabiles. Quare DL, LG Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, *i* Ac propterea DG, eſt ex binis nomi-

d 45. *primi*

e 41. *dec.*

f 23. *dec.*

g 21. *decim.*

h 13. *decim.*

i 37. *decimi.*

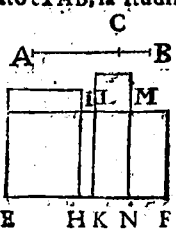
nibus. Iam vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL æquale esse quadrato ex LM, & vt in antecedenti propos. DL, maius nomen esse, atq; posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, ostensum sit ex positæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

LXV. LIX.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

a 45. primi. SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, *b* potentia incommensurabiles sunt, faciuntque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi compositio æquale, quã LF rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE;



b 42. dec.

c 23. dec. *d 42. dec.* *c* erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. *d* Quoniam vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum;

e 13. dec. *e* Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, BC; hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem Rationem habentes cum

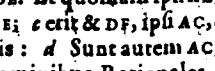
f 10. defin. g 37. dec. DK, LF, *f* longitudine incommensurabiles sunt Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; *g* Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen, possecq; plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 49. PROPOS. 67. LXVI. LX.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atq; ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitq; recta DE, ipsi AB, longitudine commẽsurabilis. Dico DE, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. *a* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *b* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; *c* erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis: *d* Sunt autem AC, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE:



Sunt autem AC, EB, potentia solum commensurabiles; *e* erunt & DF, FE, potentia solum cõmensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; *f* Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; *g* poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si AC, commensurabilis sit lõgitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima; *h* erit & DE, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit cõmensurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin est ex binis nominibus secunda. Si deniq; neutra ipsarum AC, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominib. tertia; *i* erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

AT si AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; *k* poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

a 12. *sexti.*
b 19. *quinti.*
c 10. *dec.*
d 37. *dec.*
e 10. *dec.*
f 37. *dec.*
g 15. *dec.*
h 12. *decim.*
i 12. *dec.*
k 15. *decim.*

quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD *si recta* DE, *potentia tantum commensurabilis sit ipsi* AB, *quæ est binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco : Commensurabilis longitudine : in demonstratione reponamus vbique : cõmensurabilis potentia tantum :)* & DE, *esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi* AB, *cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si* AC, *maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali;* & DF, *minus nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationalis,* & DF, *eidem* AC, *longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine : At vero* DF, *potentia tantum, ex hypothesi. Imo vero, si* AB, *sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt* DE, *illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.*

SIT *enim* AB, *ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad* C, *si fieri potest, vt* DE, *potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad* F, & *partes* AC, CB, *partibus* DF, FE, *proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota* AB, *ad totam* DE. *Dico nullo modo fieri posse, vt* DE, *ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi* AB. *Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen* AC, DF, *ex defin. Rationali expositæ commensurabilis*
a 12. dec. *longitudine.* a *Quare* & *inter se longitudine commensurabiles erunt.*
b 10. dec. *Et quoniam est vt* AC, *ad* DF, *ita* AB, *ad* DE, b *erunt propterea* & AB, DE, *longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim* DE, *ipsi* AB, *potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque* AB, DE, *ex binis nominibus prima est. Eodem modo nec vtraque ex binis nominibus quarta erit. Sed nec secunda vel quinta. Esset enim vtrumque nomen minus* CB, FE, *ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atque adeo* & *inter se. Igitur* & *tota* AB, DE, *longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

SEMPER *tamen verum est, si* AB, *sit ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam* DE, *ipsi* AB, *potentia solum commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eandem sit. Nam hoc posito, poterit* AC, *plus quam* CB, *quadrato rectæ*
c 15. dec. *si longitudine commensurabilis. Cum ergo sit, vt* AC, *ad* CB, *ita* DF, *ad* FE, c *potest quoque* DF, *plus quam* FE, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit* DE, *ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si* AB, *est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt* AC, *plus*

possit

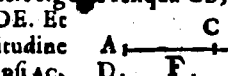
Possit; quam CB, quadrate recta si longitudine incommensurabilis,
a potuerit quoque DF, plus quam FE, quadrate recta sibi longitudine a 15. *decim.*
b incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB ita DF, ad FE. Igitur ex
c diffin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta,
licet non eadem ordine ipsi AB.

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

THEOR. 50. PROPOS. 68. LXvij. LXj.

Et, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensubilis, & ipsa ex binis Mediis est, atq; ordine eadem.

Sit ex binis Mediis AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, sique ei recta DE, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem. *b* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF, *c* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine cõmensurabilis DE; *d* erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. *e* Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: *f* Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; *g* erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; *h* Atq; idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3 propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. *i* Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, cõmensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; *k* atq; adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Mediũm, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FD, ei



b 11. *sexti.* c 19. *quinti.* d 10. *dec.* e 24. *dec.* f 38. *dec.* g 10. *dec.* h 38. *vel* 39. *decim.* i 10. *dec.* k 18. *dec.*

commensurabile, Medium, ex corollario propos 24. huius lib.
a 38. *dec.* *a* Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

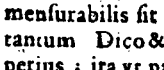
Eodem prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atq; ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

lxviij. lxij.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE.



Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel lõgitudine & potẽtia, vel potentia tantũ; *b* erunt quoq; tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita
b 10. *dec.*
DF, ad FE, *c* erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita
c 22. *sexti.* quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE. Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & po-
d 10. *dec.* tentia, vel potentia tantum. *d* Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis
e 40. *dec.* rectarum DF, FE. *e* Est autem compositum illud Rationale, cum
f 9. *defin.* rectæ AC, CB componant Maiorem AB. *f* Igitur & hoc Rationale est.

KVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lem-

ex lemmate 3. propos 19. huius libri; erit quoq; vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB; ad rectangulum sub DF, FE: Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC DF, ostensæ sint cõmensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. *b* Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, *c* sunt quæ AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componant Maiorem AB; *d* Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaque cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; *e* erit tota DB, Maior. Maiori ergo commensurabilis & ipsa Maior est Quod demonstrandum erat.

a 10. *dec.* *b* 40. *dec.* *c* 40. *dec.* *d* 10. *dec.* *e* 40. *dec.*

LXIX.
LXIII.

THEOR. 54. PROPOS. 70.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac medium potens est.

SIT (repetita figura antecedentis propos.) recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem quæ supra, ostendemus, vt in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, CB, cõmensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, FE: *f* Est autem illud compositum Medium, cum rectæ AC, CB, cõponant ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub AC, CB, *g* quod Rationale est, cõmensurabile rectangulo sub DF, FE, atque adeo & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique vt in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demonstratũ est; *h* erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

f 41. *dec.* *g* 41. *dec.* *h* 41. *dec.*

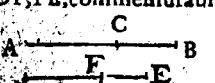
THEOR.

LXX. LXIV.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C commensurabilis DE, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & DE, esse bina Media potentē. Constructis iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in propos. 69. compositum quadratis rectarum AB, CB, composito ex quadratis rectarum DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub AC, CB, esse commēsurabile rectangulo sub DF, FE. a Cum ergo tam compositum quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulum sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24 huius lib. tam compositum ex quadratis rectarum DF, FE, quam rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incōmensurabiles sunt, vt prius. Postremo b quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub AC, CB. incommensurabilia sunt, ex hypothesi propterea quod AB, bina Media potest; Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulo sub AC, CB probauimus commensurabile rectangulum sub DF, FE; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, sequitur; compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabile ex composito ex quadratis ipsarum; c erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.



a 42. decim.

b 42. dec.

c 42. dec.

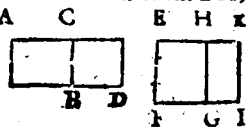
LXXI. LXV.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale Medium potens.

SIT Rationale spatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum spatiū AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorē, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias cum AB, sit Rationale, esset & illi æquale CD, Rationale quod nō ponitur. Sit pri-

maius, *a* & expositæ Rationali E F, applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B, & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, vt totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium, erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem E F, *b* erit E H, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis; *c* At vero H K, Rationalis & eidem E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia E G, H I, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus: quod E G, Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Medium: *d* erunt E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles; *e* Ac propterea E K, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc est, E G, quam H I: erit quoque E H, maior quam H K, *f* cum D H, H K, eandem rationem habeant, quam E G, H I. Iam vero maius nomen E H, plus potest quam minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, *g* Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

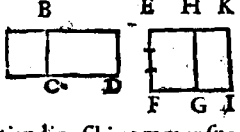


a 45. primi.
b 21. decim.
c 23. decim.
d 10. decim.
e 37. decim.
f 1. sex.
g 55. decim.

Si vero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit E A, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & spatium A D, *h* Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

h 58. decim.

Sit deinde A B, minus quam C D, & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, E K, ex binis nominibus & E H, ipsi E F, longitudine commensurabilis. Et quia A B, minus est quam C D, hoc est, E G, quam H I: erit quoque recta E H, minor quam H K. Potest igitur rursus H K, maius nomen ipsius E K, quæ est ex binis nominibus, plus quã E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis: erit E K, ex binis nomini-



nominibus secunda; cum E H, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali E F, vt ostensum est. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus secunda E K, atque adeo & spatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compositum, *a* Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima.

a 56. decim.

Si vero H K, plus possit quam E H, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atque adeo & spatium A D, *b* Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

b 59. decim.

lxxij. lxvj.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

Si duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

*Componantvr duo Media incommensurabilia A B, C D. Dico rectam quæ potest totum spatium A D, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus A B, vel maius, quam C D, vel minus: Æquale siquidem non erit: alias essent A B, C D, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia A B, C D, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia E G, H I, Media & incommensurabilia: cum illis sint æqualia. *c* Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt: & vtraque (cum E G, H I, Media sint, applicenturque ad Rationalem E F,) *d* Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles: *e* ac propterea E K, ex binis nominibus est. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit vt in antecedenti propos. E H, maius nomen ipsius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi cõmensurabilis longitudine,

c 10. decim.

d 23. decim.

e 37. decim.

cum

bum vtrumque nomen EH, HK, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK; atque adeo & ſpatium AD; a Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur. a 57. decim.

Si vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD, b Irrationalis eſt; quæ bina Media potens nominatur. b 60. deci.

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD, non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, c latitudinem efficit Rationalem ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. c 23. decim.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61. decim.

ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, e latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. e 62. decimi.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, f latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. f 63. decimi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum g latitudinem facit ex binis nominibus quartam. g 64. decs.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, h latitudinem facit ex binis nominibus quintam. h 65. decim.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, i latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. i 66. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus: perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

IN primo, qui continet propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ordinem ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus: & eius, quæ ex binis Mediis prima: & eius, quæ ex binis Mediis ſe-

diis secunda; & Maioris; & eius, qua Rationale ac Medium potest; & denique eius, qua possit bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextæ.

IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quænam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

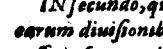
IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quænam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN exto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem aliquot dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit tursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, cuius est eius nomina media existit.

SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C, & diuidatur A B, bifariam in D; & erit



dimidia A D, vel D B, æqualis sumatur E. Dico E, mediam esse secundum Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & esse quoque ex binis nominibus. Quoniam enim A C, superat dimidiam A D, rectæ D C, & dimidiæ D B, superat ipsam C B, eadem recta D B: perspicuum est, dimidiam ipsius A B, nempe E, esse mediam proportionalem inter A C, C B. in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commensurabilis est longitudine toti A B, cum hæc illius sit dupla: erit & E, Irrationalis eadem: si A B, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SE-

SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quia in præcedentibus septem senariis de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. lxxiij. lxviij.

Si à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius libr. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB ad rectangulum sub AB, AC; Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles:

a erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. c Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale: (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale: atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. *decim.*
b 16. *decim.*
c 7. *secundi.*

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles: a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

a 37. decim.

lxxiv. lxix.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale cõtineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles: erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia, *b* atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius libr. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale: erit & rectãgulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incõmensurabile est cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoq; rectangulum bis sub AB, AC, vna cũ quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *d* Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt: Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali: erit quadratum ex BC, Irrationale: ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

b 16. decim.

c 7. decimi.

d 17. decim.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

Si à

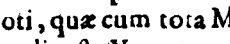
Si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, inus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocer autem Mediæ Apotome prima.

C V M enim A B, A C, sint Media potentia solum commensurab les, itineanique Rationale; a erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ek is Mediis prima dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. feratur igitur AC, minus nomen ex maiori A B vt relinquatur BC, edia Apotome prima. a 38. decimi.

THEOR. 58. PROPOS. 76. lxxv.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium conficiat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. lxx.

DETRAHATVR à Media A B, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B, sitque rectangulum sub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex A B, A C, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; b erit & compositum ex



b 16. decimi.

s vtrique ipsorum commensurabi- A B
lis est autem vtrumq; ipsorum Mediũ, quod & rectæ A B, A C, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ipsis vtriq; commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. huius lib. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium posuerit & eius duplum, rectangulum videl. bis sub A B, A C, ex coll. propos. 24. huius lib. Medium. c Cum ergo compositum ex quadratis rectarũ AB AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, cum quadrato ex B C; superabit compositum ex quadratis arum A B, A C, quod Medium est, rectangulum bis sub A B, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. d Medium autem superat Medium Rationale. Non ergo quadratum ex B C, ionale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta B C, Irrationalis, etur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secta, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igi- Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

c 7. secundi.

d 27. dec.

SCHOLIVM.

OC etiam theorema ita potuisset proponi.

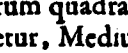
Si à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secun- ninus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. :etur autem Mediæ Apotome secunda.

QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum commen-
a 39. decim. *surabiles, continentque Medium: a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, reliqua quatuor BC, Media Apotome secunda.*

lxxvj. lxxj. **THEOR. 59. PROPOS. 77.**

Si à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis: Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius libr. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc



b 10. decim. est, Irrationale: *b* erit compositum ex quadratis rectarum AB,
c 7. secundi. AC incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur au-
d 10. defin. tem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

Si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faci-
e 40. decim. *unt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: e erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, cuiusque maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur*

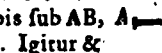
Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

LXXVIJ. LXXIJ.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota facit cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis cõtinetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incõmensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atq; adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, AC, Rationale; *a* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *b* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. *c* Sunt ergo rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; *d* erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existẽs toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. *defin.* b 7. *secundi.* c 17. *decim.* d 10. *defin.*

SCHOLIVM.

HOC *etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.*

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM *enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale;* c *erit compositum ex ipsis Irrationalis,* c 41. *def.*

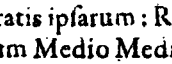
nalis, quæ nominatur Rationalis ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiès relinquatur.

lxxviij. lxxiij. **THEOR 61. PROPOS. 79.**

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. a Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. b Medium autē non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB AC, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

a 17. secundi.



b 27. dec.

SCHOLIVM.

IN *hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.*

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM *cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, qua bina Media potens dicitur; cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur LC, cum Medio Medium totum efficiens.*

LEM-

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.

SINT *quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, ſitque IB, exceſſus inter AB, CD, aqualis exceſſui KF, inter EF, GH, Dico eundem eſſe exceſſum inter AB, EF, qui eſt inter CD, GH. Quoniam enim IB, exceſſus eſt inter AB, & CD; erit AI, ipſi CD, aqualis. Eodem modo aqualis erit EK, ipſi GH. Idem igitur exceſſus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum ha magnitudines illis ſint aquales, ſingula ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, aquales ponantur. Igitur idem quoq; exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.*

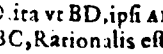
COROLLARIVM.

EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam, quoniam hujuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe, inter primam, & tertiam magnitudinem, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundã, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, & hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 61. PROPOS. 80. LXXIX. LXXIV.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam Rationalẽ non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia commenſurabilis, Rationalis Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantũ commenſurabiles. Eodẽ



modo erunt & AD, BD, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD, BD; (superat enim compositum ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; a quod compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum AD BD, superat rectangulum bis sub AD, BD, quadrato eodem ex AB; b cum & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cum quadrato ex AB,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27 huius lib. quod vtrumq; Rationale sit. (Nam cum AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata Rationalia, & commensurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium Rationale est. d Et quia rectangulum sub AC, BC Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24 huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. e Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Rationalis nō congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

A ——— B C ——— D

a 7. *secundi.*

b 7. *secundi.*

c 16. *dec.*

d 22. *dec.*

e 27. *dec.*

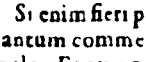
LXXX.
LXXV.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

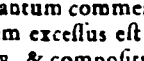
MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat AC, Media toti AC, potentia solum commensurab.lis, & rectangulum sub AC, BC,

AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitq; rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC Media est potentia tolum ipsi AC, commensurabilis; a erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadrat s rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex s. hotio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumque sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC BC, illi commensurabile, Rationale. Atq; eadem rat.one Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC. BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile est, atque adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarū AD, BD. c Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter cōpositum ex quadratis rectarum AC, BC, & cōpositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



a 24. decim.



b 16. dec.

c 27. dec.

LXXXj.

LXXVj.

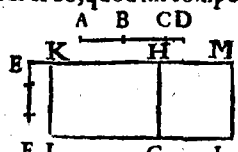
THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Medium. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatq; cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia

BD. Media totí AD, potentia tantum commensurabilis, fitque rectangulum sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF,
a 45. *primi.* *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale compositó ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale compositó ex quadratis rectarum AD, BD.
b 7. *sec.* *b* Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim BC, Media ponatur,
c 24. *dec.* *c* erit & AC ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia.

Ergo & compositum ex ipsis commẽsurabile est vtriq; eorum;
d 16. *dec.* atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. *d* Igitur & EG, quod illi compositó æquale est, Medium est; quod cum
e 23 *dec.* applicetur ad Rationalem EF, *e* erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius l.b & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cum applicetur ad Rationalem



f 23. *dec.* KI, *f* erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad propos 19 huius
g 10. *dec.* lib. *g* erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG, (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles;
h 16. *decim.* erunt & earum quadrata commensurabilia. *h* Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, est iis, quæ in scholio propos 14. huius lib. docuimus,
i 10. *dec.* *i* Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensæ, Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH,
k 74. *dec.* potentia solum commensurabilis ipsi EH, *k* erit EK Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis

existens

existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum cõgruere, a demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum. a 80 *dec.*

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82. 77.

MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam nõ congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulũ sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos 80 demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC & rectangulum bis sub AD, BD: Est aũt excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex 5. huius propos. 27 huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulũ bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24 huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. *b* Quare vnum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommẽsurabilis, &c. Minori ergo vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

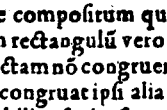
b 27. *dec.*

THEOR. 66. PROPOS. 84. 83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC potentia incommensurabilis, faciensque

cienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium rectangulũ vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam nõ congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cum vtrumq; ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

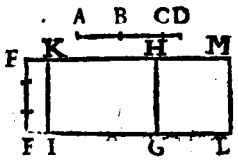


a 27. *dec.*

LXXXIV. LXXXIX.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipſi vero congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, facienſque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub AC, BC, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia BD, toti AD, potentia commenſurabilis, ita vt & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, Medium ſit, & rectangulum ſub AD, BD, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam EG, illi æquale, Medium

dium. *a* Recta igitur E H, Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AG, BC, Medium est; erit & eius duplum x o, Medium. *b* Igitur & recta K H, Rationalis est, longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Et quoniam x G, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub A C, B C, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC: *c* erit quoque x G eidem composito, hoc est, ipsi E G, incommensurabile: ac propterea rectæ E H, x H, tandem habentes cum E G, x G, rationem, *d* longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali E H, auferatur Rationalis x H, potentia solum commensurabilis ipsi E H; *e* erit E x, Apotome, & ei congruens x H. Non aliter ostendemus E x, esse Apotomen, & ei congruentem esse x M. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. *f* Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. *decimi.* *b* 23. *decim.* *c* 14. *decim.* *d* 10. *decim.* *e* 74. *decim.* *f* 80. *decim.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis: Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis: Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis: Vocetur Apotome quarta.

SI

V.

Si vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

85. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus A C, non sit quadratus: ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum: at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E F. Eritque E F, cum commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum A C, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, esse primam Apotomen.

a 6. *decim.* *a* Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo E F, ostensa sit Rationalis: erit & G F, Rationalis. Quia vero A B, A C, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantum commensurabiles; c atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E F, plus quam recta G F, quadrato ex H. Et quia est, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati.

b 9. *decimi.*

c 74. *decim.*

Igitur

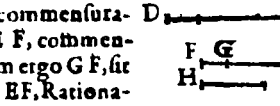
Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; a Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estq; tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine: erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 9. decim.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

86. 81.

Invenire secundam Apotomen.

Repertis duobus numeris quadratis A B, C B, vt in proposi præcedenti: expositaq; Rationali D, sumatur ei longitudine cõmensurabilis G F, eritque G F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratũ ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico E G, esse secundam Apotomen. Quoniam b enim quadrata ex G F, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ G F, E F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo G F, sit ostensa Rationalis: erit quoque E F, Rationalis. Quia vero numeri A C, A B, atque adeo & quadrata ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati: c erunt G F, E F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt G F, E F, potentia solum commensurabiles; d Ideoque E G, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta E F, plus quam G F, quadrato ex H. Quoniam ergo est vt A C, ad A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: Ostendemus iam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi E F, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota E F, plus possit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine cõmensurabilis, sitque congruens G F, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis: erit E G, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.



b 6. decim.

c 9. decim.

d 71. decim.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

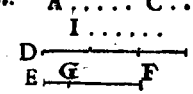
87. 82.

Invenire tertiam Apotomen.

Repertis duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propositione 86. sumatur alius numerus I, vt in propositione 1. huius libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum

a 6. *decimi.* tum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. *a* Eruntque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & E F, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionem non habent,

b 9. *decimi.*



quam numeri quadrati; *b* erunt rectæ D, & E F, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F ex eodem corollario propos. 6. huius lib. Dico E G, esse tertiam Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem habentia,

c 6. *decim.* quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo E F, ostensa sit Rationalis erit & G F, Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia A B, A C, atque adeo & quadrata ex E F, G F, proportionem non habent, quam numeri quad-

d 9. *decimi.* drati; *d* Erunt rectæ E F, G F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia solum commensurabiles: Ac propterea cum ex E F, auferatur G F, potentia illi solum com-

e 74. *decim.* mensurabilis: *e* reliqua E G, Apotome erit Dico & tertiam esse. Quoniam *a.* est, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratū ex E F; & vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F: Non habent autem numeri I, & A C, proportionem, quam numeri quadrati. Neq; igitur quadrata ex D, & G F, proportionem

f 9. *decim.* habebunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & G F, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H; Ostendemusque, vt in propos. 86. rectam H, esse ipsi E F, longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota E F, plus possit quam congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ: erit ex defin. E G, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

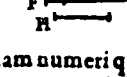
88. 83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt A B, exillis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib.

ius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F; eritque propterea & E F, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadratiſ, erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis; estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



a 29. decimi.

PROBL. 23. PROPOS. 96.

lxxxix. lxxxiv.

INVENIRE quintam Apotomen.

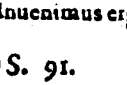
REPERTIS (repetita figura proxime antecedentis propositionis) duobus numeris A C, C B, vt in propositione præcedenti fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur G F, ~~longitudine~~ commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt A B, ad C B, ita quadratum E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis lõgitudine: erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

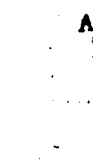
PROBL. 24. PROPOS. 91.

xc. lxxxv.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionẽ habeat, quã quadratus ad quadratũ: exponatur Rationalis D, & reliqua fiãt, vt in propos. 88. Ostẽdemus ergo similiter, vt ibi D, & E F, lõgitudine incõmensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse; & E G, Apotomẽ esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles: Atque addo neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D,





nali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit cõmensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextã Apotomẽ. Quod erat faciendũ.

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco:

849. decim. *SIT inuestienda exempli gratia, prima Apotome. a Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles: erunt etiam AC, DC, Rationales potentia tantum commensurabiles.* b *Est ergo AD, Apotome. Et quia*

b 74. decim. *AB, plus potest, quam CB, hoc est, quàm DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis & est AC, Rationali expositæ longitudinè commensurabilis, ex definitione eius, qua ex binis nominibus prima dicitur: erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta, sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.*

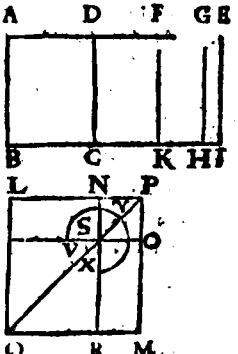
xcj. lxxxvj. THEOR. 68. PROPOS. 92.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotomæ prima: Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotomæ prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit EI, si AD, congruens, DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commensurabiles: & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB: & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quam congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, b bifariam in F; & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 1. propos. 17. huius libr. Et quia AE, plus potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: c erunt rectæ AG, GE, longitudine commensurabiles; d Ac propterea & vtraque tota AE, longi-

c 78. decim. d 16. decim.

longitudine commensurabilis erit: Est autem A E, Rationali A B, longitudine commensurabilis. *a* Igitur & vtraque A G G E, ipsi A B, longitudine est commensurabilis: atque ex definitione *b*. Rationalis. Quare ductis G H. E I, ipsi A B, parallelis, quæ ipsi B C, productæ occurrant in H I, *b* erit vtrumque rectangulum A H, G I, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraque D F, F E, longitudine commensurabilis est ipsi D E; & D E, longitudine incommensurabilis est Rationali A B; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & A E, sit eidem A B, longitudine commensurabilis; & essent A E, D E, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solum potentia commensurabiles;) *d* erit etiam vtraque ipsarum D E, F E, ipsi A B, longitudine incommensurabilis. Et quoniam vtraq; D F, F E, Rationali D F, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam A B, D F, quam A B, F E Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta F K, ipsi A B, parallela, *e* erit vtrumque rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.



a 22. decimi

b 20. dec.

c 12. decim.

d 14. decim.

e 23. decimi

Iam vero ipsi A H, *f* fiat quadratum æquale L M, & ipsi G I, æquale fiat quadratum N O, communem habens cum L M, angulum L P M. *g* Erunt igitur quadrata L M, N O, circa eandem diametrum, quæ sit P Q. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniã igitur rectangulum sub A G, G E, per constructionem, æquale est quadrato ex F E, *b* erunt tres rectæ A G, I E, G E, proportionales; *i* Ac propterea cum A H, F I, G I, eadem cum ipsis habeant rationem: erit F I, medium proportionale inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, N O, illis æqualia. Est autem inter eadem L M, N O, per lemma propos. 14 huius lib. medium quoque proportionale L O. Igitur rectangula F I, L O, æqualia sunt: *k* Sed ipsi F I, æquale est D K, & ipsi L O, æquale est M N. Est ergo totum D I, toti gnomoni V Y X, cum quadrato N O, æquale. Est autem & totum A I, per constructionem, æquale quadratis L M, N O. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato T R, est æquale: Ac propterea recta T S, potest spatium A C. Dico T S. Apotomen esse.

f 14. secundi

g 26. sexti.

h 17. sexti. i 1. sext.

k 36. decim.

Quoniam enim spatia A H, G I, ostensa sunt Rationalia & eis æqualia sunt L M, N O, erunt quoque quadrata L M, N O, Ra-

NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum: erit & LO, illi æquale Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cum vnum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, eandem rationem habentes cum LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt: Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

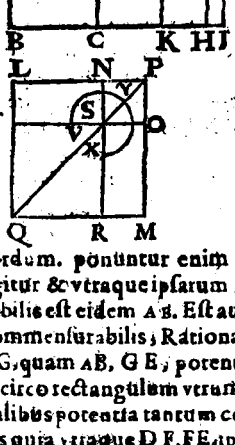
a 1. *sex.*
b 10. *decim.*
c 74. *decim.*

XCII. lxxxvij.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles: & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia construantur, vt in propositione præcedenti. Erunt-que rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine commensurabiles: Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commensurabilis. Est autem AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi AB, longitudine; cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commensurabilis; essent AE, DE, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles.) Igitur & vtraque ipsarum AG, GE, longitudine incommensurabilis est eidem AB. Est autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis; Rationalis. Rationales ergo sunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia solum commensurabiles: Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est, &



d 18. *decim.*
e 16. *decim.*
f 12. *decim.*
g 14. *decim.*
h 22. *decim.*

est; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commensurabilis; erit quoq; vt in scholio propos. 12. huius lib. ostendimus, eidem AB, Rationali longitudine commensurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. a Vtrumq; ergo rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primam. a 20. dec.

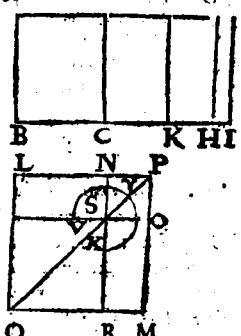
QVONIAM enim AG, GE, longitudine sunt commensurabiles, b erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atq; adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, saltem potentia erunt cõmensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (ostensa enim sunt AH, GI, Media esse) Media sint. Et quoniam FI, atque adeo sibi æquale LO, Rationale est, propterea q; Medio NO, incommensurabile; c erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles, erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum; d erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat. b 10. decim. c 10. decim. d 75. dec.

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, longitudine cõmensurabilis Rationali AB; Et denique AB, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabiles. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. erunt quemadmodum, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; e Ac propterea & vtraq; toti AE, longitudine commensurabilis erit. Est autem AE, posita commensurabilis longitudine Rationali AB f Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommensurabilis. Cum ergo vtraque AG, GE Rationali AE, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales potentia solum commensurabiles; e 16. dec. f 14. dec.

a 22. dec.



rabiles; a Ac propterea vtrumq; rectangulum AG, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incõmensurabilis Rationali AB, erit quoq; vtraq; DF, FE, ipsi DF, longitudine cõmensurabilis existens. b eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo vtraq; DE, FE, Rationali DE, cõmensurabilis sit Rationalis; erunt tam AB, DE, quã AB, GE, Rationales potentia tantum cõmensurabiles; c atque propterea vtrumq; rectangulũ DK, FI, Mediũ erit. Similiter iam demõstrabimus, vt in porpos. 92. rectam TS, posse

b 14. dec.

c 22. dec.

spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

Quoniam enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, d commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles sunt, saltem potentia. Ac vero quia AB, DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AB, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE, cõmensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incõmensurabiles; e ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, hoc est illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit LO, Medium.) f erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, &c. Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

d 10. dec. inv.

e 10. dec.

f 76. dec.

XCIV. LXXXIX.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

Continebatur spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Ra-

DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. a Erunt ergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidẽ AE, plus poteſt quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulum ſub AG GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensq; figura quadrata. Et quia AE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; b erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, c erit DI, atq; adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; d incommenſurabilia erunt AG, GI, eandem cum illi proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe minorem.

a 10. *dec.*
b 20. *dec.*
c 23. *dec.*
d 10. *dec.*

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis rectarũ TO, SO, Rationale. Idem quia F, Mediũ eſt oſtenſum; erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeo rectæ TO, SO, potentia incommẽſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitq; compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; e erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

e 77. *dec.*

THEOR. 72. PROPOS. 69. XCV. XC.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proxime antecedente) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totũ efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE Rationales potentia tantum commenſurales, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo

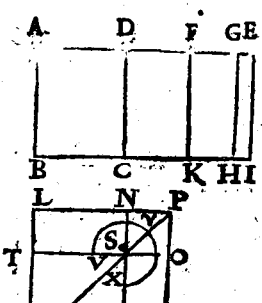
rursus, vt in antecedenti propos. AG, GE, longitudine incõmensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incõmensurabilis
a 22. dec. est Rationali AB, vt in propos 93. diximus; a erit rectangulum
b 20. dec. AI, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; b erit DI, atq; idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rursus erunt, vt in præcedenti propos. AH, GI, incommensurabilia; poteritque, vt ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

QVONIAM enim ostensum est AI. Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demõstratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum vero sub ipsis, Rationale;
c 78. dec. c erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

xcvj. xcj.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potẽtia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt supra. Erunt ergo rursus, vt in propos. 95. AG, GE, longitudine incõmensurabiles. Et quia tam

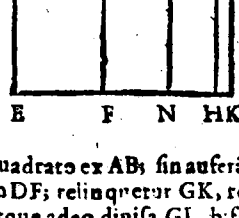
tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AE, longitudine incommensurabilis; *a* erit tam AI quam DI, atq; adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntq; vt in propos. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; *b* Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atq; adeo cum DI, FI, cõmensurabilia sint, *c* erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam vero demonstrabimus, vt in propos. 92, rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. a 22. *dec.* b 10. *dec.* c 14. *dec.*

QVONIAM enim AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumq; sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI est incõmensurabile, vt ostendimus; erit quoq; LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO, propterea quod LO ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & cõpositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; *d* erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum. d 79. *dec.*

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatũ, latitudinem facit Apotomen primam. xcvij. xcij.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; *e* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK, æquale sit composito ex quadratis rectarum AC, BC, *f* Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; sin auferãtur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam e 45. *primi.*



f 7. *secundi.*

riam in M, ductaque MN, ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC, BC, Rationalia; ideoque commen-
a 16. *dec.* surabilia. a Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad
b 21. *dec.* Rationalem DE, b erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum cõmensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeo & eius duplum GK, Mediũ. Quod cum applicetur ad Rationa-
c 23. *dec.* lem GF; c erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Me-
d 10. *dec.* diũ, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt: d erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum cõmen-
e 74. *dec.* surabiles; e Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam esse.

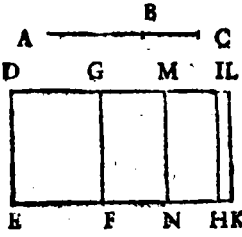
QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC. GB, hoc est, MK, medium est proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue propor-
f 17. *sexti.* tionales sunt. f Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensura-
g 10. *dec.* bilia sunt; g erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine cõmensurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, aplicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensque figura quadrata, atque sit ostensa DI, ipsi IL,
h 10. *dec.* longitudine commensurabilis; h poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam cõmensurabilem esse longitudine Rationali DE; erit ex desin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotome ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

xcviij. xciij. THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT

SIT Mediæ Apotome prima AB. & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, continentque Rationale: a Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG Dico DG, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propos. ita vt iam sus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC. BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia cõmensurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & cõmensurabilia; b ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium. per coroll. propos. 4. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, c erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale, ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, d erit GL, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incõmensurabilia sunt; e erunt rectæ DL. GL. eandē habentes cum illis rationem lõgitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum cõmensurabiles; f Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL plus posse, quam congruente GL, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.
b 16. dec.
c 23. dec.
d 22. dec.
e 10. decim.
f 74. dec.

XCIX.
XCIV.

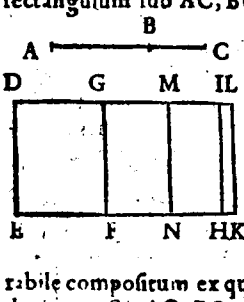
THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC BC. sint Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentque Medium: g Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrat ex AB, latitudinem faciens DG, Dico DG, esse tertiam Aporo-

g 45. primi.

Apotomen. Eadem enim fiant, quę ſupra. Oſtendemus iam, vt in
a 23. dec. propoſ. præcedenti DK, Medium eſſe, *a* atq; adeo rectam DL, Rationalem ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Et quia
b 23. decim. rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt, atque ob id & eius duplum GK, *b* erit quoq; GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Quia vero AB, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtq; vt AC, ad BC, ita per lemma 3 propoſ 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC,



c 10. dec. *c* erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC.
d 16. dec. *d* Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc
e 10. dec. eſt, ipſi GK. *e* Atq; adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incõmenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſæ & Rationes. Rationales ergo ſunt DL, GL, po-
f 74. dec. tentia ſolum commenſurabiles; *f* Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ 98. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit commenſurabilis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.

c. xcv.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

Qvadratvm Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

Sit minor AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facientesq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationales; rectangulum vero ſub
g 45. primi. AC, BC, Medium: *g* & ad Rationalem DE, applicetur ſpatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus.
h 21. dec. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt; *h* erit DL, Rationalis ipſi DE, lon-

D E, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium est; a erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam D K, Rationale, & G K, Irrationale, nempe Medium incommensurabilia sunt: b erunt D L, G L, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia tantum cõmensurabiles: c Ac propterea reliqua L G, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim A C, B C, potentia sunt incommensurabiles: Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, D H, I K, incommensurabilia; d Ac propterea rectæ D I, I L, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub D I, I L, æquale sit quadrato ex M L, id est, quartæ parti quadrati ex G L, vt in propos. 98. est demonstratum: e poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: quandoquidem ad D L, maiorem applicatum est rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem D L, in partes D I, I L, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota D L, plus possit quam congruens G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota D L, Rationali D E, longitudine ostensa commensurabilis: erit ex defin. D G, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. decimi.
b 10. decim.
c 74. decim.
d 10. decim.
e 19. decim.

THEOR. 78. PROPOS. 102. c 1. xcvj.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium: rectangulum vero sub iisdem A C, B C, Rationale: f Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, atque adeo & illi æquale D K, Medium est; g erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Rationale est; h erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Et quia D K, Medium seu Irrationale, & G K, Rationale, incommensurabilia sunt: i erunt D L, G L, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensura-

f 45. primi.
g 23. decim.
h 21. decim.
i 10. decim.

mensurabiles: Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DI, GL, potentia solum commensurabiles: a Atq; ideirco reliqua D G, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos demonstrauimus D L, totam plus posse quam G L, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens G L, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

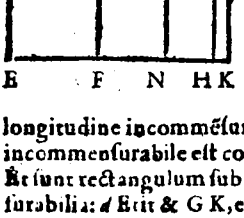
a 74. decim.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

cij. xcvij.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. b Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato, ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quam rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est, c & tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, BC; Et sunt rectangulum sub AC, B C, & eius duplum G K, commensurabilia: d Erit & G K, eidem cõposito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile: e propterea; rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K. G K, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L potentia solum commensurabiles, f Atq; ideirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter vt proposito rectam D L, plus posse quam congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit lõgitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta Quadratum ergo eius, quæ cũ Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.



b 45. primi.

c 13. decim.

d 34. decim.

e 10. dec.

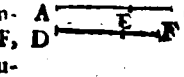
f 74. decim.

THEOR.

THEOR. 80. PROPOS. 104. ciij. xcviij.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis: & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine cõmensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB. Fiat n. vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. a 12. *sexti.*
b Erit ergo tota AC, ad totã DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. b 12. *quinti.*
Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles: c Erunt quoq; AC, DF, nec non & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF: & permutãdo vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solũ commensurabiles: erunt quoq; ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, d reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, e poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit cõmensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; f erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima; nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commensurabilis Rationali: erit eodem modo EF, Rationali lõgitudine commensurabilis: Atq; adeo vtraque AB, DE, ex defin erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; g erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



c 10. *decim.*
d 74. *decim.*
e 15. *decim.*
f 12. *decim.*
g 14. *decim.*

Possit rursum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, h poterit & DF, plus quã EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

h 15. *decim.*

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotome, quod ad propos. 87. huius libr. de-

lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem i. si AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est: sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At vero DF, potentia tantum ex hypothesi. 1mo vero. si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta vel quinta, eique congruens BC, & sit DE, ipsi AB, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem EF, & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine: a atque ideo & inter se longitudine commensurabiles erunt b AC, & DF. Quare cum sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE: b erunt quoq; AB, & DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neq; quarta Apotome erit. Sed neq; secunda, vel quinta. Esset enim vtraq; congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atq; adeo & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.

a 12. *decim.*
b 10. *decim.*

SEMPER tamen verum est, si AB, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, qua ipsi AB, potentia solum est commensurabilis, esse quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt AC, ad BC; ita DF, ad EF, c poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quarum ordine non eadem ipsi AB: quia rursus, cum sit vt AC, ad BC, ita DE, ad EF, d poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotomē quarta, vel quinta, vel sexta.

c 15. *decim.*
d 15. *decim.*

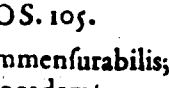
IN

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit D E, eadem ordine ipsi A B, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

Recta linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

Sit Mediæ Apotomè quæcunque A B, eiqui congruens B C, ita vt A C, B C, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, commensurabilis D E, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & D E, Mediæ Aptomen esse, & ipsi A B, ordine eandem. *a* Fiat enim vt A B, ad D E, ita B, C, ad E F. *b* Erit ergo tota A C, ad totam D F, vt A B, ad D E, & vt B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque B C, E F, & A C, D F, eodem modo commensurabiles. Et quia A C, B C, mediæ sunt, *d* erunt quoque D F, E F, illis commensurabiles, Mediæ Rursus, quia est vt A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt A C F, ad B C, ita D, ad E F. Sunt autem A C, B C, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10 huius lib. D F, E F, solum potentia commensurabiles. Quare cum D F, E F, Mediæ sint ostensæ, *e* erit reliqua D E, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi A B. Quoniam enim est vt A C, ad B C, ita D F, ad E F; & vt A C, ad B C, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt D F, ad E F, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, E F; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C B C, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F E F. Et permutando vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, B C, ad rectangulum sub D F, E F. Igitur cum quadratum ex A C, commensurabile sit quadrato ex D F, quod rectæ A C, D F, ostensæ sint commensurabiles; *f* erit & rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, E F, commensurabile. Quare si rectangulum sub A C, B C, sit Rationale, ita vt A B, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub D F, E F, Rationale, cum illi sit commensurabile; *g* atque adeo & D E, Mediæ Apotome prima erit. Si verò rectangulum sub A C B C, sit Medium, ita vt A B, sit mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulum sub D F, E F, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24 huius lib. *h* Ac propterea & D E, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.



e 1 v. x c i x.

a 12. sexti.
b 12. quinti.
c 10. decimi.
d 24. decimi.
e 75. vel 76. dec.
f 75. decimi.
g 75. decimi.
h 76. de iisd.

cv.cxvj c.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

Recta linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

Sint Minor *A* B, ipsique congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensuribiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; rectangulum vero sub iisdem *A* C, B C, Medium. Sit autem D E, ipsi *A* B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. *Dico* & D E, Minorem esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus *A* B, B C, ad *D* E, E F, eandem habeant rationem, quam *A* C, ad D F. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. D F, E F, ipsis *A* C, B C, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt *A* C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt *A* C, ad B C, ita D F, ad E F, *a* erit vt quadratum ex *A* C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F, & componendo vt compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F: & permutando vt compositum ex quadratis rectarum *A* C, B C, ad compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Est autem quadratum ex B C, commensurabile quadrato ex E F, quod rectas B C, E F, ostenderimus commensurabiles esse. *b* Igitur & compositum ex quadratis rectarum *A* C, B C, composito ex quadratis rectarum D F, E F, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum *A* C, B C, ex hypothesi Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub *A* C, B C, rectangulo sub D F, E F, esse commensurabile; ponitur autem rectangulum sub *A* C, B C, Medium: *c* rit quoque rectangulum sub D F, E F ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt *A* C, ad *L* C, ita D F, ad E F, sunt quæ A C B C, potentia incommensurabiles; *d* erunt etiam D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum D F, E F Rationale, rectangulum vero sub iisdem D F, E F, Medium; *d* erit D E, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. sexti. b 10. decimi. c 10. sexti. d 77. decimi.

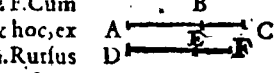
THEOR. 83. PROPOS. 107.

cvj. cxvij. ej.

Recta linea commensurabilis ei quæ cum Rationali Medium totum efficit, & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

Sit

Sit recta A B, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt B C, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; at rectangulum sub A C, B C, Rationale: Sit autem D E, ipsi A B, commensurabilis quocunque modo. Dico & D E, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectæ D F, E F, potentia incommensurabiles. Igitur cum D F, E F incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; erit D E, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



a 78. decim.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

cvij. cij.

Recta linea commensurabilis ei, quę cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

Sit recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomodolibet commensurabilis. Dico & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum A C B C, commensurabile est compositū ex quadratis rectarum D F, E F, vt dictum est; rectangulo sub A C, B C, commensurabile rectangulum sub D F, E F; Sunt autem compositum

ex quadratis rectarum *A C*, *B C*, & rectangulum sub *A C*, *B C*, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius libr. compositum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum sub D F, E F, incommensurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; *a* erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

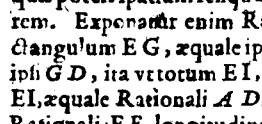
a 79. *decimi.*

cvi ij. eiij

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

Detrahatur á Rationali *A D*. Medium *C D*. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum *A B*, esse vel *Apotomen*, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis E F, *b* ad quam applicetur rectangulum E G, æquale ipsi *A B*, & ad G H, aliud H I, æquale ipsi *G D*, ita vt totum E I, toti *A D* sit æquale. Quoniam igitur E I, æquale Rationali *A D*. Rationale est; *c* erit E K, Rationalis, Rationali E F, longitudine commensurabilis. Rursus quia H I, Medio *C D*, æquale Medium est *d* erit H K, Rationalis, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itaque cum E K, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi E F, at H K, eidem E F, longitudine incommensurabilis, *e* erunt E K, H K, longitudine incommensurabiles Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles *f* propterea quæ reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest quã H K quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; aut incommensurabis Si plus potest E K, quam H K, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota E K, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, *Apotome* prima Quare recta potens spatium E G, contentum sub Rationali & *Apotoma* prima E H, hoc est, spatium *A B* sibi æquale, *g* *Apotome* est, Si vero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota E K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali. E F; erit ex definitione E H, *Apotome* quarta. Quapropter recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & *Apotoma* quarta E H, hoc



b 45. *primi.*
c 21. *decimi.*
d 23. *decimi.*
e 13. *decimi.*
f 74. *decimi.*
g 92. *decimi.*

EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *a* Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat. a 95. *decimi.*

THEOR. 86. PROPOS. 110. CIX.

Rationalia à medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens. CIX.

Detrahatur à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB potest, esse vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim construantur quæ supra. Et quia EI Medio AD, æquale, Medium est; *b* erit EK, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale est; *c* erit HK, Rationalis ipsi EF, longitudine commensurabilis. Itaque cum HK, quidem ipsi EF, sit commensurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommensurabilis; *d* erunt HK; EK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles; *e* Ac proinde reliqua EH Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK ostensa sit longitudine incommensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *f* Mediæ est Apotome prima. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH Apotome quinta ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quinta EH hoc est, spatium illi æquale AB, *g* est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem rationali à Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat. b 23. *decimi.* c 21. *decimi.* d 13. *decimi.* e 74. *decimi.* f 93. *decimi.* g 96. *decimi.*

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX. CXI.

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum [illegible]

ex quadratis rectarum *A C*, *B C*, & rectangulum sub *A C*, *B C*, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius libr. compositum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum sub D F, E F, incommensurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; *a* erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

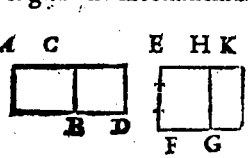
a 79. decimi.

cvi ij. eiij

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

Detrahatur á Rationali *A D*. Medium *C D*. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum *A B*, esse vel *Apotomen*, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis E F, *b* ad quam applicetur rectangulum E G, æquale ipsi *A B*, & ad G H, aliud H I, æquale ipsi *G D*, ita vt totum E I, toti *A D*. sit æquale. Quoniam igitur E I, æquale Rationali *A D*. Rationale est; *c* erit E K, Rationalis, Rationali E F, longitudine commensurabilis. Rursus quia H I, Medio *C D*, æquale Medium est *d* erit H K, Rationalis, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itaque cum E K, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi E F, at H K, eidem E F, longitudine incommensurabilis, *e* erunt E K, H K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles *f* propterea quæ reliqua E H,



b 45. primi.

c 21. decimi.

d 23. decimi.

e 13. decimi.

f 74. decimi.

Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest quã H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; aut incommensurabis. Si plus potest E K, quam H K, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota E K, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, *Apotome* prima. Quare recta potens spatium E G, contentum sub Rationali & *Apotoma* prima E H, hoc est, spatium *A B* sibi æquale, *g* *Apotome* est. Si vero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota E K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali. E F; erit ex definitione E H, *Apotome* quarta. Quapropter recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & *Apotoma* quarta E H, hoc

g 92. decimi.

EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *a* Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat. a 95. decimi.

THEOR. 86. PROPOS. 110. CIX. CIX.

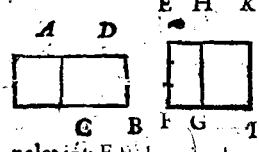
Rationalia à medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB potest, esse vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim construantur quæ supra. Et quia EI Medio AD, æquale, Medium est; *b* erit EK, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale est; *c* erit HK, Rationalis ipsi EF, longitudine commensurabilis. Itaque cum HK, quidem ipsi EF, sit commensurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommensurabilis; *d* erunt HK; EK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles; *e* Ac proinde reliqua EH Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *f* Mediæ est Apotome prima. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH Apotome quinta ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc est, spatium illi æquale AB, *g* est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem rationali à Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat. b 23. decimi. c 21. decimi. d 13. decimi. e 74. decimi. f 93. decimi. g 96. decimi.

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX. CV.

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB



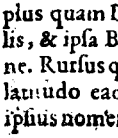
poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem quæ ſupra; quoniam EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia Media ſunt, a erunt EK, HK, Rationales ipſi EF, longitudine commenſurabiles. Et quia AD, CD, hoc eſt, EI, HI, ponuntur incommenſurabilia; b erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potẽtia tantum commenſurabiles; c Ac propterea reliqua FH Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudin commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt EK, q̃ HK quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF; & Apotoma tertia EH hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale; d Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, ſit longitudine commẽſurabilis, vt demonſtratum, erit ex defin. EH, Apotome ſexta. Quamobrem recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſexta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, e eſt ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto; &c. Quod demonſtrandum erat.

a 13. decimi.
b 10. decimi.
c 74. decimi.
d 94. decimi.
e 97. decimi.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt A, aliqua ex binis nominibus Expoſita autem Rationali BC, f applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A Quoniam igitur A, Apotome eſt: g erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & ipſa BE, Rationali BC, commenſurabilis erit longitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus: h erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomen BF. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nomi-



f 45. primi.
g 98. decimi.
h 61. decimi.

nibus prima est, B F, F D, Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine sit commensurabilis eidem B C; erunt quoque B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, sit longitudine commensurabilis parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 6. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B F, longitudine incommensurabilis est ipsi D E; (quod B E, D E, Rationales sint potentia solum commensurabiles) *b* erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua F D, *c* Apotome est; Atque ideo irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

a 12. *decimi.*

b 14. *decimi.*

c 74. *decimi.*

CORLLARIVM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

Quadratum enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum *d* latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. d 23. *decimi.*

At quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatam, *e* latitudinem efficit Apotomen primam. e 98.

Et quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatam, *f* latitudinem efficit Apotomen secundam. *decimi.* f 99.

Quadratum vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatū, *g* latitudinem efficit Apotomen tertiam. *decimi.* g 110.

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem efficit Apotomen quartam. *decimi.*

At vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem efficit Apotomen quintam. h 101. *decimi.*

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *k* latitudinem efficit Apotomen sextam. i 102. *decimi.*

Itaque cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se: à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ; Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam cõsequentes, & à Media, & inter se differre. k 103. *decimi.*

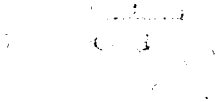
Quoniam vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, qui ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinq; Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur,

Ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam eadem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium: quandoquidem nulla Apotome eadem est, quę ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quamobrem cum & tam illæ, quam hæc a media differant, efficitur, Rationali quapiam expositæ, tredecim numero esse lineas irrationales inter se differentes, de quibus hactenus disputatum est: Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus cuius sex sunt species inuentę.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ,
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda,
11. Minor,
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

cxij. o. Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



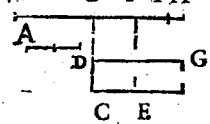
Sit rationalis A, & ex binis nominibus CB, cuius maius nomen CB, & [illegible] C applicetur rectangulum BE, æ[illegible] A latitudinem faciens

binis nominibus. *a* Applicetur enim rursus ad DC, minus no- a 45.
men, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo *primi.*
rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqua-
lis EH. Et quoniam æqualia sunt BE, CG, *b* erit vt BC, ad LC, b 14. *vel*
ita LG, hoc est, sibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad 16. *sext.*
DC, ita HF, ad FB: Est autem BD, maior quam DC. Igitur &
IF, maior est quam FB. Ponatur FI, ipsi FB, æqualis; *c* & fiat vt c 12. *se-*
HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad *xti.*
IF, hoc est, ad sibi æqualem BF, ita FK, ad BK. Ostensum est
autem esse vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt
BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius
BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum com- d 10. *de-*
mensurabiles. *d* Igitur & FK, BK, potentia solum commensura- *cimi.*
biles sunt.

e Rursus quia est vt HF, ad BF, ad FK, ad BK, *e* erunt quo- e 12.
que HF, FK, antecedentes simul, nempe tota HK, ad BF, & *quinti.*
BK, consequentes simul, hoc est, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac
propterea FK, media proportionalis est inter HK, BK. Quare
vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6.
quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia
vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato rationalis A,
æquale) ad Rationalem DC, applicatum *f* facit DG, latitudi- f 21. *de-*
nem Rationalem ipsi LC, longitudine commensurabilem; Erit *cimi.*
quoque HB, ipsi LG, æqualis, Rationalis & longitudine com-
mensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse vt BD, ad
DL, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quo-
quod vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. *g* Igitur vt quadratum ex BD, g 22.
ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex *sexti.*
FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex DC.
(quod rectæ BD, LC, sint Rationales potentia commensurabiles,
cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus.) *h* Commensu- h 10.
rabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed *decimi.*
fuit vt quadratum ex HK, ad quadratum ex FK; ita recta HK, ad
BK. *i* Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; at- i 10.
que adeo reliquæ BH, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa *decimi.*
est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis,
Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, commensurabilis,
Rationalis existit. Cum ergo ostensa FK, ipsi BK, potentia solum
commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK,
BK, Rationales sint, & potentia tantum ostensæ commensura-
biles, *k* erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod k 74.
est primum. *decimi.*

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, [illegible]
[illegible], longitudine commensurabilem, *l* sunt propterea [illegible]

BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi DC; erit quoq; BK, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt BD, ad CD, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt
a 10. decimi. autem modo DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles; a Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



Item quia demõstrauimus esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erũt idcirco Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominib. ipsius BC, quæ est ex binis nominib. Quod est tertium.

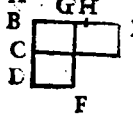
Postremo vel BD, plus potest, quam DC, quadrato rectę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest BD, quã DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK;
b 11. decimi. b poterit quoq; FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si BD, plus potest quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Et si quidem BD, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & FK, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi BD, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demõstrauimus Si vero DC, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine cõmensurabilis. Si denique neutra ipsarũ BD, DC,
c 14. decimi. sit Rationali longitudine commensurabilis; c erit quoque neutra ipsarum FK, BK, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome BF, ipsi BC, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

ex i ij.

THEOR. 39. PROPOS. 114.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & ad adhuc, quæ ex binis nominib. fit, eundem habet ordinem, quẽ ipsa Apotome.

Sit Rationalis A, & Apotome B, C, cui congruat C D, *a* & ad B G, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc ipsam B E, ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomę ordine eandē. *b* Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale, eidem quadrato ex A, hoc est ipsi C E, latitudinem faciens B G. Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; *c* erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoq; E G, ad H, secundum proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad C E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoq; B H, reliqua ipsius B E, ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoque vt B H, ad H E, ita E H ad G H; atque adeo H E, media proportionalis est inter B G, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cum sint nomina Apotomę B C, Rationales potētia tantum cōmensurabiles, *d* Erunt quoq; B H, H E, potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandē habent rationem cum quadratis ex B H, H E vt demonstrauimus; *e* longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. 16. huius lib. At vero cum B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; *f* erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeo Rationalis existit; quandoquidem B H B G, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia vero B H, H E, ostensę sunt commensurabiles potentia tantum, & B H Rationalis; erit quoque H E, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solum commensurabiles: *g* Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.



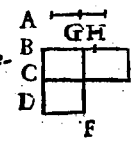
a 45. primi.
b 45. primi.
c 14. vel 16. sexti.
d 10. decimi
e 10. decimi.
f 21. decimi.
g 37. decimi.

Quoniam vero ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D, atque adeo permutando B H, ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; *h* erit quoque

h 10. decimi.

que H E, ipſi C D, commenſurabilis longitudine. Quare B H, H E, nomina ipſius B E, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus B D, C D, Apotomæ B C. Quod eſt ſecundum.

Immo & in eadem proportione, cum demõſtratum ſit eſſe B H, ad H E, vt B D, ad C D. Quod eſt tertium.



Poſtremo vel β D, plus poteſt quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel
a 15. decimi. E incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, a poterit quoque B H, plus quam H E, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi B D, plus poteſt, quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam β H plus quam H E, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem B D, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoq; B H, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi B D, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero C D, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione, H E, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum B D, C D, commenſurabilis ſit longitudine
b 14. decimi. Rationali expoſitæ; b erit quoque neutra ipſarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis atque tertiis definitionibus, ipſa B E, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ B C. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

CXIV. O.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

Si ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

Contineatur ſpatium A B, ſub Apotoma A C, & ſub C B, ex binis nominibus, cuius nomina C D, L B, commenſurabilia ſint nominibus C E, A E, Apotomæ A C; & in eadem ratione, nempe C D, ad L B, vt C E, ad A E. Poſſit autem recta F, ſpatium A B. Dico
c 115. F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, c applicetur ad
primi. G B, quæ ex binis nominibus rectangulum C H, æquale quadrato

ex G,

ex G a Erit ergo latidudo BH, Apotome, cuius nomina HI BI, longitudine commensurabilia E sunt nominibus C D, D B, & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, vt C D, ad D B; atq; a-deo vt C E, AE, & permutãdo vt tota H I, ad totam C E, ita ablata B I, ad ablatam A E, b Erit ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, vt tota H I, ad totam C E; c Commensurabilis autem est longitudine H I, ipsi C E, quod vtraque H I, C E, commensurabilis fuerit longitudine ipsi C D. d Igitur & B H, ipsi A C, Longitudine est commensurabilis, e Atque idcirco & H C ipsi B A, commensurabile erit, f cum sit vt H B, ad A C, ita H C, ad B A. Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale Rationale est. Igitur & B A, illi commensurabile, Rationale erit, propterea-que & recta F, ipsum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub A poroma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus A poromæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium poteus, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.

a 113. *decim.*

b 19. *quint.*

c 11. *decim.*

d 10. *decim.*

e 10. *decim.*

f 1. *sext.*

COROLLARIVM.

Et hoc manifestum est, fieri, posse vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub A C, C E, Apotama, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

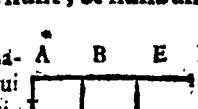
SCHOLIVM.

In proximum autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina C D, D B nominibus C E, A B, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. cxv. cvij.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius libr. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatium A D.



Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum,

duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex E F, *a* ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, seipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudini lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri in commensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

a 14. octaui.

SCHOLIVM.

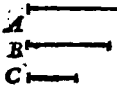
Sed & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2 ad 1. vel 4 ad 2. vel 8. ad 4. & c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunq; numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c, b solum tertius ab vnitate quadratus est, & c. ideo omnes vnà intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64 quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratū, (c alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quā numerus quadratus ad numerum quadratum. d Incommensurabilis ergo est diameter longitudini ipsi lateri. Quod est propositum.

b 10. nono. c 14. octaui. d 9. decimi.

Hoc etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8 lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentib. Stereometria libru pendet, vt merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paulò explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometria, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & alia quamplurima magnitudines, plana scilicet, atque solide incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A C, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll propos. 20. lib 6 vt A, ad C, ita est figura rectilinea quauis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi si-



milem, similiterq; positum super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; a erunt rectilinea illa figura super A, & B, incommensurabiles. a 10. decimi.

Rursus b quoniam circuli, quorum diametri A, B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B descripta. Quadrata autem hæc, cum sint figura rectilinea similes, similiterq; posita proportionem habent, quam recta A, & C, ex 20. lib. 6. c Habebunt quoq; circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam recta A, C. Sed recta A, C, incommensurabiles sunt longitudine. d Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. b 2. duo decimi. c 11. quinti. d 10. decimi.

Iam vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura rectilinea similes, similiterq; descripta super A, B, e habebunt pyramides atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilinea illa figura. Quare cum rectilinea figura illa incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum; f incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata. e 5. 6. vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

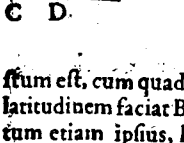
Quod si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, g habebunt huiusmodi coni, & cylindri eãdem proportionem inter se cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, h Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solum lineæ & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum. g 11. duo decimi. h 10. decimi.

Eadem autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, i eidem earum figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ, necnon & iarum circulos, commensurabiles esse, k atq; eadem & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eande habeant altitudinem, vt perspicuum est. i 10. decimi. k 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

tentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 111. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perspicuum est Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

a 23. decimi.



Quod si compleatur rectangulum D E; erit & hoc contentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. 11 Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi B E, Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à B E, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

exviij. vij.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

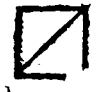
Proposito sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommensurabilem esse lateri A B. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; b ac propterea A C, A B, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G; sintque numeri E F, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt A C, ad A B, ita numerus E F, ad numerum G, Erit quoq; vt quadratum

b 5. dec.

dratum ex A C, ad quadratum ex *A B*, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G. *a* (Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex A C, duplum est quadrati ex *A B*, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex E F, duplus erit quadrati numeri ex *C*; Ac propterea quadratus numerus ex E F, cum dimidium habeat, atque adeo bifariam possit diuidi, par erit, ex d fin. Igitur & ipse E F, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cum seipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; *b* eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum ostensus est enim par.) Quia vero E F, & G, in sua proportione minimi, *c* inter se primi sunt; & E F, ostensus est par; erit G, impar. (Si enim par esset, metiretur vtrumque E F, & C, binarius; atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus E F, bifariam in H. Quia igitur numerus E F, duplus est numeri E H, *d* & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex E F, quadruplus quadrati ex E H (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qualium partium 4. est quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt supra de numero E F. diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter A C, lateri *A B*, Igitur incommensurabilis longitudine.

a 20. sexti. & 11. octaui



b 29. hu ius.

c 24. sexti.

d 11. oct.

Iteliter. Sit si potest fieri, diameter A C, commensurabilis longitudine lateri A B; habeantque A C, *A B*, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex *A* C, duplum quadrati ex *A* B; sit autem vt quadratum ex *A* C, ad quadratum ex *A* B, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex *E* F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex *E* F, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus, Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex E F, du-

pus

duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex E F, ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, seipsum metiatur, erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudini lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri in commensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

a 14. octaui.

SCHOLIVM.

Sed & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2 ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunq; numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c, b ipsorum tertius ab vnitate quadratus est, &c a erit omnes vnà intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64 quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratū, (c alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quā numerus quadratus ad numerum quadratum. d Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri Quod est propositum.

b 10. noni.

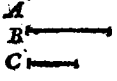
c 24. octaui.

d 9. decimi.

Hoc etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 3. lib. 5. & in scholio propos. 8 lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

Caterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentib. Stereometria libru pendet, vt merito omitti posset Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paulis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometria, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus,



inuenientur & alia quamplurima magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A C, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll propos. 20. lib. 6 vt A, ad C, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem

milem, similiterq; positum super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; a erunt rectilinea illa figura super A, & B, incommensurabiles. a 10. decimi.

Rursus b quoniam circuli, quorum diametri A, B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B descripta: Quadrata autem hæc, cum sint figura rectilinea similes, similiterq; posita proportionem habent, quam recta A, & C, ex 1. coroll. prop. 20. lib. 6. c Habebunt quoq; circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam recta A, C. Sed recta A, C, incommensurabiles sunt longitudine. d Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. b 2. duo decimi. c 11. quinti. d 10. decimi.

Iam vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura rectilinea similes, similiterq; descripta super A, B, e habebunt pyramides atq; prismata eandem propotionem, quam bases, hoc est, quam rectilinea illa figura. Quare cum rectilinea figura illa incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum; f incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata. e 5. & vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

Quod si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, g habebunt huiusmodi coni, & cylindri eadem proportionalem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, h Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solum linea & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia Quod est propositum.] g 11. duodecimi. h 10. decimi.

Eadem autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, i eidem earum figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ, necnon & iarum circuli, commensurabiles esse, k atq; eadem & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eande n habeant altitudinem, vt perspicuum est. i 10. decimi. k 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POstquam Euclides in prioribus sex libris, vnde de ea Geometria parte disseruit, qua circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearium commensurabilium, atq; incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in lib. 10. deinde exposuit vt constructio, atq; natura quinq; eorum regularium, de quibus in postremis tribus libris nimirum in 13. 14. & 15 subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci. Nunc tandem aggreditur in hoc lib. 11. eam partem Geometriæ, qua corpora, siue solida considerat, propriq; vocabulo Stereometria est appellata.

Explicat autem prius, more suo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima est: Solidum siue corpus: nempe tertiæ generis quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adijcit, superficies vocatur, vt in primo libro diximus.

Petro

Porro quemadmodum Mathematicus, vt recte intelligamus lineam, percipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hac enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, praterea quod punctum omnu est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hac enim describit vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem linea, latum vero propter motū illum qui in transuersum est factus: carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoq; vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione praditam, conjulunt, vt concipiamus superficiem aliquam aqualiter elenari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob superficiem qua longa & lata existit: profundum vero eu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hac ergo quant tas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propter a quod triplex tātum dimensio possit assignari, vt perspicue in commentariis, qui in sphaeram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratum ex Ptolemaeo in I bello de Anatemmate.

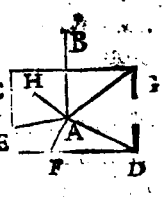
II.

Solidi autem extremum, est superficies.

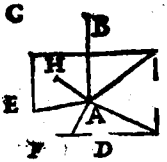
Quemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. locuit, ita nunc ai Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus esse intelligatur ex illo motu imaginario superficiei: perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

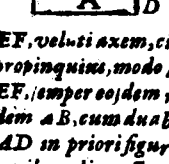


Vt linea recta AB, plano CD, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum CD, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, qua in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, aqualiter insistat plano CD, & non magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque



G deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eadem ratione prorecta qualibet linea in plano CD faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Et propterea æqualiter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, vt AB cum vna linea ex A, in plano CD educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB recta ad planum CD esse; quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

Vt autem recta quæpiam plano cuicunq; insistens rectos cõstituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoq; angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. D. xi: cum duab. non efficientibus lineam vnã: quia si duæ linea componant vnã rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, qua cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos concere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis BA, AF quæ rectam vnam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; neq; id ideo non esse rectam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cum AB circa EF, veluti axem, circumuerti queat ita vt puncto B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen is sit cum EF, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos effiiet, vt diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. huius lib.

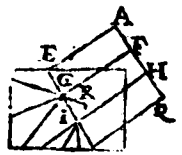


IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

Insistat planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, sit in sublimi

ſublimi, hoc eſt, extra planum ſubiectum C D, at E B, in i; ſo eodem plano. Sit autem K horum planorum communis ſectio E B, L qua vt demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G, I, ex ipſis in plano A B, ducantur G F, I H perpendiculares ad communem ſectionem E B. Si igitur lineæ F G H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum alijs omnibus in plano C D, à puncto G & I. ductis; dicetur planum A B ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim K G, producatur ad R, cum anguli F G K, ponantur recti; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illis æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobiq; à lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe concediſur ad planum aliud, concedendum quoque erit lineas perpendiculares in vno eorũ ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contrà, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas rectas eſſe ad reliquum planum.

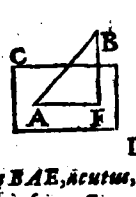


MNONBD

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea & adiuncta comprehenſus.

Inſiſtat recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctũ verò A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ A B, intelligatur ad idem planũ deducta perpendicularis B E, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta E A; erit q; neceſſario angulus B A E, acutus, a eũ in triangulo A B E, duo anguli B A E, B E A, duobus ſint rectis minor ex, & angulus B E A, rectus. Angulus igitur acutus B A E, cõprehenſus linea inſiſtente A B, & adiuncta A E, dicitur inclinatio rectæ



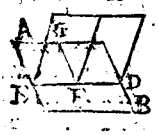
a 17. primi.

AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus BAE.

VI.

Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis cõtentus, quæ in vtroque planorũ ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

Plano namque AB, insistat planum CD, ita vt pars ad C sit in sublimi extra planum AB. & pars ad D, in ipso plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; & ceruus angulus acutus GFH, dictus rectus comprehensus, inclinatio plani CD ad planum AB ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



Interdum Geometræ angulum CFH dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtususue: quanquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum communi vsu situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur ductis rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Non obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius anguli inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis recesserit.

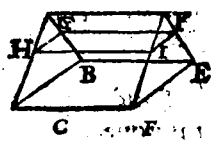
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

Intal-

Intellige, in quamcunq; partem, etiam infinite, producantur: hoc est, siue ad dextram, siue ad sinistram: & siue sursum siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda: quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissū, remanentia duo plana non conuenient, quāuis producantur infinite ad dextrā & ad sinistrā: Sed tamen quia sursū protenta coeunt, nimirū in ipso fastigio idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam A B C D E F, *contentum duobus planis* A B E D, A C F D *cuius Basis* B C F E, *auferaturque fastigium* A C H D K I. *Quo facto perspicuum est, reliqua plana* G B E K, H C F I *non conuenire inter se, si ad partes* G B H C, *vel ad partes* K E, I F, *producantur nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes* G H, K I, *conueniant in fastigio* A D. *Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem linea in eodē plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nēpe ad sinistrā, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum atq; deorsum. Itaq; duo plana quacunq;, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea vero recta, vel sunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallela, neq; vnquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum posita. Vide in definitione lenearum parallelarum in 3. lib additum fuit: qua cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur, qua nunquam conueniunt.*



IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

Potuisset Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11 patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod si plana similia, quibus corpora sin ilia ex præcedenti definitione circumscribantur, fuerint æqua in singula singulis, dicentur eiusmodi figura solida non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida neutrum alterum excedet, propter æqualitatem ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorū æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate laterum proportionaliū æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent: ac propterea inter se existent æqualia.

XI.

Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

Duæ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conuenient efficiunt angulum planum, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes nō debere in eadem superficie existere, quon ā videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non cōponetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idē dicas, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.

ALITER.

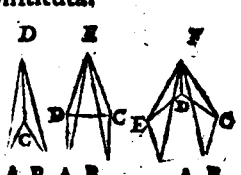
Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

Hæc definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, precedenti recte intellecta. Cum enim ſaltē tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur vt, ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano eſt, in quo recta A B A D, & angulus D .. C, in plano, in quo recta A D, A C; angulus deque C A B, in plano, in qua recta A C, A B, atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Habebit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbēt duo parietes cum pauimento domus vel inquam, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earū ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perſpicuū cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſeſe penetrare intelligantur. Quemadmodū autē in 1. lib. Euclides ex omnib. angulis planis ſolum rectilineū aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quē plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua cōtinetur; neq; is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidē plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi comus per verticē ſecetur.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.



VIDELICET figura ſolida à planis A B C, A B C D, A B C D E, ad punctum D, E, F, conſtituta appellantur pyramides. Perſpicuum autem eſt, omnia plana quibus Pyramis continetur, eſſe triangula, cum omnia ad vnum punctū tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitum. Hoc enim poteſt eſſe vel trian-

triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictũ continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, praeter basin triangula sunt A B D, A C D, B C D, Quadrangula vero A B E, A D E, B C E, C D E: Pentagona denique A B F A E, B C F, C D F, E D F

XIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

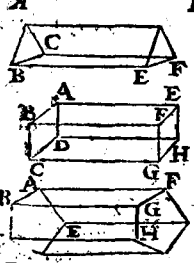


Figura scilicet solida quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula, vt A B C D E F: vel quadrangula A B C D, E F G H vel pentagona A B C D E, F G H I K. & parallelogramma vero A C F D, A B E D C B F: vel A B E A D H E C D H G C B G F: vel A B G F, A E K F, D E K I, D C H I, B C H G dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit quam columna quadã laterata æqualis crassitudinis, cuius bases appositæ sũt æquales similes, & parallelæ siue hæ sint triãgula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma cõtinebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vnoquoq; oppositorũ planorũ reperiũtur, vt figura indicãt.

Ex his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidã duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela æqualia similiaq;, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quã quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autẽ tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurima demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus cõueniunt; perspicuũ est eos hallucinari, qui vnũ tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autẽ animduerterunt, septimam propositionem lib. 11. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorũ triangulorũ oppositorũ

oppositorum, eo quod tali primati solum demōstratio illa conuenit. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullū aliud prisma daretur. Imo in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atq; adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12 apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometra sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi linea circumuoluta: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est centrum semicirculi circumducti, à quo omnes recta cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametri dicti item circuli æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

Sphæra est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

Cicero in libro de Vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod quod σφαιροειδὲς Graci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

Axis

XV.

Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

Hæ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ, propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

Conus est: quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

Vt si triangulum rectangulum A B C, circa latus quiescens A B, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem explet, describetur solida quadã figura, quæ continetur duab. superficiebus, circulari vna ac plana, quã B C, latus alterum circa angulũ rectum, suo motu describit: & curua alia, eaque conuexa, quam latus A C, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

Quod si latus quiescens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cũ autem

latera

latera AB, BC, ponantur aequalia, a erunt & anguli BAC, BCA, aequales, qui cum aequiualeant uni recto, eo quod ABC, rectus est, erit angulus BAC, semirectus. Eodem modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si uero quiescens latus AB minus fuerit circumducto BC, ut in secunda figura, uocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet, angulus ad uerticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; b erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo aequipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC ponitur rectus, erit BAC semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circumducto BC, ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad uerticē A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC, c erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo uni recto aequiualeāt, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoq; reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

a 5. primi.

b 18. primi.

c 18. primi.

XIX.

Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

Vt in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

Basis vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

Nimirum circulus, qui describitur ab altero latere rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

Quoniam vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basim, Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est: placuit ex Apollonio Pergaeo adducere generalem coni descriptionem, qua & rectum, & inclinatum complectatur: propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quae Euclides de recto cono ostendit, ut ibi dicetur. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto;

puncto, circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cæpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

Verticem ipsius manens punctum.

Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

Conum autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

Verticem coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

Axem, rectam lineam, quæ à vertice circuli centrum producitur.

Basim, circulum ipsum.

Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

Hæc autem omnia ita explicat Eutocius in commentariis, quos in Apollonium scripsit.

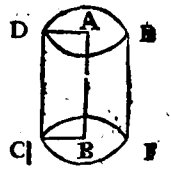
Sit circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaq; D B, in infinitum ex vtraq; parte producatur ad puncta E. F. Si igitur recta linea D B, feratur circa conjque circuli A B, circumferentia, quousq; punctum B, rursus in eum locum restituatur,

à quo cæpit moueri: describit superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D punctum sese tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei est punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo A B & ea superficie, quam D B, solâ describit. Coni verticem punctum D. Axē D C. Basim A B

sim AB, circulum. Quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus Scalenum.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus reuoluitur, vnde cæpetat moueri, circumassumpta figura.



Veluti si rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quiescēs AB, circumuolutum, donec integrē expleat reuolutionem, appellatur figura descripta cylindrus, quā quidē tribus superficiebus continetur, duabus videl. planis circularibus, quas latera AD BC, describunti & altera curua, eaq; connexa, quam latus CD, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

Nempe recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

Quales sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositis descripti.

Euclides porro solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramq; basim, atq; de hoc solum in lib. 12. disputaturus. Cum igitur nos in eadem fere theoremata, ex aliis Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, qua Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antisensi definire cylindrum vniuersum, vt complectatur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsę in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos

ex ea-

ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cæpit: Superficies, quæ à circulata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

Cylindrus est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

Cylindri bases sunt circuli ipsi.

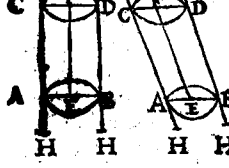
Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

Latus autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasq; contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus

Cylindrorum, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

Sint duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra E F, & diametri æquidistantes quoque AB, CD: Iunctaq; recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa cẽtra E, F, in plano circulorũ semper æquidistantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locũ restituãtur, vnde moueri cæperunt, describetur à linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitũ, producitur.



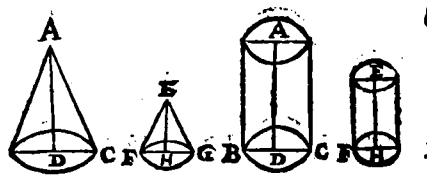
Cylindrum vero appellat figuram AB DC circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD, Axem, rectam EF, qua circulorum centra cõiungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum; Sin minus, Scalenum.

XXIV.

Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

Recte

Recte Euclides similitudinem conorum, atq; cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autem Axes AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaq; si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diametri basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se, quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundū profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB EHF ex quorū reuolutione descripti sunt coni, necnon rectangula AB, EF, quorū conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cū enim sit vt AD, ad EH, ita BA, ad FG: Sit autem vt BC, ad FG, a ita dimidia BD, ad dimidiam FH: erit quoq; vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD,

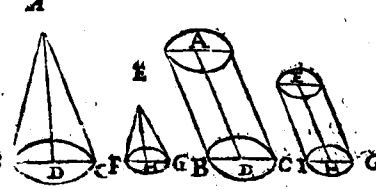


a 15. quinti.

ad DB, ita EH, ad HE. Quare tam in triangulis, quā in rectangulis latera, circū aquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erunt: Triangula quidē, b propterea quod triāgula vnum angulum vni angulo habentia aqualē, & circum aquales angulos latera proportionalia, aquiangula sunt, c ideoq; latera omnia circa angulos aquales habēt proportionalia atq; adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, d eo quod reliqua duo latera duobus laterib. AD. DB, sunt aqualia, primi oppositis oppositu, ac propterea eandem cum his proportionē habent.

b 6. sex.
c 5. sext.
d 34. primi

Quod si coni vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorū axes, & diametri basium erunt proportionales, anguli q; inclinationū, quos axes efficiūt, aquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri ABC, EFG. In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in



cylindri. Itaq; si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD ad EH, ita BC ad FG extiterintq; anguli inclinationum ADB FHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni inter se, & cylindri quoq; inter sese similes: quoniã nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisq; demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Hac sunt quinq; corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus cõtinentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinq; mũdi corpora, quæ simplicia à philosophis nuncupãtur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram, quinq; hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omniũ constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autem propos. 17. Icosaedri deniq; propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimũ est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formam quis intueatur. Trademus tamen propriis in locis præxes admodum faciles, quibus ea quilibet fa-

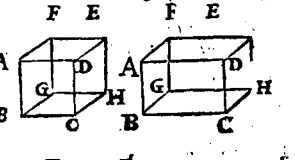
bet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque verò aliud corpus regulare præter quinque illa dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

Quoniam verò frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 13. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium: necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quid nue sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parellelæ sunt contenta.

Veluti solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH. Item CF CG; Item AG, DH, sunt parallela, nominantur parallelepeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur prop. 24 huius lib.



Sunt autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebit quæ quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi,

quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel deniq; in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

Solida figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

Non eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ cum interdum figura exterior plures interdū pauciores angulos cōtineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangāt vel aliquot angulos vel aliquot latera, vel deniq; aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus reliquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel deniq; à planis figuræ exterioris.

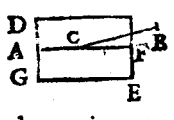
Verum dua hæ poſtrema definitiones p'anius percipiētur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusq; mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

Sit enim ſi fieri poteſt, rectæ lineæ, AB, pars quidem AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AE, AF, commune habebunt ſegmentum AC. Quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtratum eſt. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.

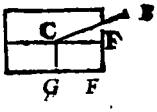


SCHOLIVM.

Hæc eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectā AC eſſe aliquam rectam in plano DE inflexum, & continuum projectam. Quia enim concipitur recta AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi vtique negabit, rectā AC continuo

DE, dari

DE. dari posse aliam rectam in cõtinuum, & directum, quandoquidem rectam C B, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Verumtamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex aqualibus sui interiacet lineis, hoc est, quæ recte, & aqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrè si AC, *in plano DE producatur vsq; ad F, erit CF, recta recta A C in continuum & directum posita. Verum demarstremus iam id ipsum Geometrice, in plano videl. DE, ipsi AC, nare posse aliã rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineã constituat. quamuis quis dicat AB, esse quoq; rectam, eiusq; partem AC, in plano DE partem vero CB, in sublimi esse positam. a Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG. & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF Dico CF, esse ipsi AC positam in continuũ & rectum. Cum enim AC & FC, in eodem plano DE cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione, b erunt AC, & FC, in directum & continuum posita. Quamobrem etiamsi quis cõtendat AB, esse rectam, cuius quidem pars AC in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodẽ plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atq; adeo duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.*



a 11. primi.

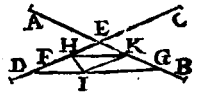
b 14. primi.

Nunc sit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam in vno existere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omnem in vno est plano.

Rectæ lineæ A B, C D, se mutuo secent in E, & in E B, E D, sumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum E F G, in vno esse plano; Item rectas AB, C D, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli E F G, pars quidem nimirum E H I G, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua F H I, in sublimi, vel contra: Existent quoq; rectarum E F, G F, partes quidem E H, G I, in vno plano, partes vero H F, I F, in sublimi, vel contra: quod fieri non posse, iam supra c demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem E F I K, in vno plano credatur esse; pars autem G I K, in sublimi, vel contra; eruat eadem ratione rectarum EG, F G, partes quidem E K, F I, in



c 1. *undecimi.*

F I, in vno plano, partes vero K G, I G, in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem F H K G, in vno concedatur esse plano pars vero E H K, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum F E, G E, partes quidem F H, G K, in vno plano, partes autem H E, K E, in sublimi vel contra. Quæ omnia absurda sunt, a vt est demonstratum. Quare triangulum E F G, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

a 11. vndecimi.

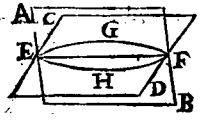
Quia vero, in quo plano est triangulum E F G, in eodem existunt eius latera E F, E G: In quo autem sunt rectæ E F, E G: b in eodem sunt rectæ totæ C D, A B, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Eiunt propterea rectæ A B, C D, in vno plano in quo nimirum triangulum E F G, consistere demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

b 11. vndecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

Secent se mutuo plana A B, C D, sitque communis eorum sectio E F, *Dico* E F, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano *A B*, recta E G, F, & in plano C D, recta E H F. Rectæ igitur E G F, E H F, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio E F, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



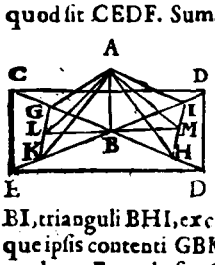
Aliter. Secent se rursus plana A B, C D, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta E F. Si igitur recta E F, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero E F, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur E G F, concludent rursus duæ rectæ E F, *E* G F, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta E F, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta E G F; includent iterum duæ rectæ E F, E G F, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta E F, in vtroque plano A B, C D; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo se cantibus, in

bus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illa ducto etiam per ipsas plano ad angelos rectos erit.

Recta linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B, a erunt ipsæ in uno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectos GK, IH, in punctis L, & M. Dimittantur quoq; ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; b & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales. c Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BGK, BIH, inter se quoque æquales.



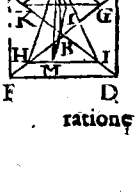
Rursus d cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint, æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. e Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex cōstructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, f erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; g erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi æquales.

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI IM, trianguli AIM: & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus: h erunt quoque bases AL, AM, æquales.

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis: i erunt quoq; anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cū sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1 Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq;



a 2. undecimi.
b 15. pri.
c 4. pri.
d 15. pri.
e 26. primi.
f 4. pri.
g 8. pri.
h 4. pri
i 8. pri.

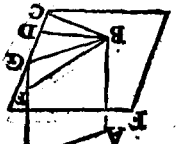
ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta, G, I, & K H, ductæ sint, dūmodo rectæ G I, KH iungantur: vel certæ literæ disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen L M, non ducitur á sinistra in dextram, vt in priori figura, sed á superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano C E, D F, quod per rectas CE, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3 huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illæ tres rectæ in vno sunt plano.

Insistat recta linea AB tribus rectis lineis B C, B D, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi eorum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. *a* Cum enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint B C, B D, in plano F G; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. *b* Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B, sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. *c* Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; *d* erit propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit recta B G, quæ ipsam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in vno plano F C, existentibus, non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. vndecimi.



b 1. vndecimi.

c 3. vndecimi.

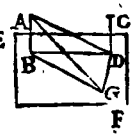
d 4. vndecimi.

THEOR. 6. PROPOS 6.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; parellelæ erunt illæ rectæ lineæ.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, an angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoq; ipsis contenti ABD, GDB; æquales, nempe recti; *a* erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, *b* erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniã vero ex eadem defin. angulus quoq; GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. *c* Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: *d* Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano, Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; *e* erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaq; rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

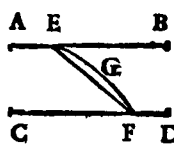


a 4. primi.
b 8. primi.
c 3. vndecimi.
d 2. vndecimi.
e 28. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

In parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CE. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra, secet iam aliud planum superficiem parellelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, *f* quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF, Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta; Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



f 3. vndecimi.

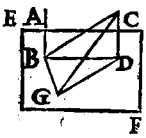
SCHOLIVM.

Hæc eadem proposito vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodo in eodem plano existant, vt manifestum est, ex demonstratione.

viij. **THEOR. 8. PROPOS. 8.**

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint parallelæ rectæ AB, CD: sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim BD, in plano EF, erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus; *a* Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD: ponanturq; æquales BG, CD. Coniungãtur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti: *b* Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & basis est communis CH: *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existent: *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB: *e* propterea quod rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD: cum puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum AB recta sit ad rectas BG, BD; *f* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat ostendendum.



a 29. *primi.*

b 4. *pri.*

c 8. *pri.*

d 4. *vndecimi.*

e 7. *vndecimi.*

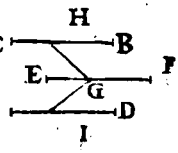
f 4. *vndecimi.*

ix. **THEOR. 9. PROPOS. 9.**

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano; Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

Sint rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem

in eodem cum E F, plano. Dico A B, C D, parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto C G, rectæ E F, ad ipsam E F, ducantur duæ perpendiculares, G H, quidem in plano parallelarum A B, E F, at G I, in plano parallelarum A C, D E F. Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas G H, G I, se tangentes mutuo in G; a erit recta quoque ad planum per ipsas G H G I, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ A B, E F, & E F, sit recta ad planum per G H, G I, ductum; b erit quoque A B ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ C D E F, sit autem E F, recta ad planum per G H, G I, ductum; c erit etiam C D, recta ad idem planum; d Atque omnes rectæ A B, C D, cum rectæ sint ad idem planum per G H G I ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.



a 4 undecimi.
b 8. undecimi.
c 8. undecimi.
d 8. undecimi.

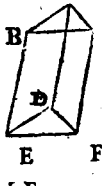
SCHOLIVM.

Data opera Euclides voluit duas rectas A B, C D, non esse in eodem plano cum recta E F cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa E F, essent A B, C D, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic iaem demonstrare

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectę lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas ex se mutuo tangentes sint parallelæ, non aût in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

Sint rectæ A B, A C, se tangentes in A, parallelæ rectis D E, D F, se tangentibus in D; non sint autem A B, A C, in eodem plano, in quo D E, D F. Dico angulos B A C, E D F, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim A B, D E, inter se æquales, & A C, D E, inter se; ducanturque rectæ B C, E F, B E, A D, C F. Quoniam igitur A B, D E, parallelæ sunt & æquales; e erunt quoque B E, A D, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales C F, A D. Quare cum B E, C F, parallelæ & æquales sint eidem A D, f erunt etiam B E, C F, inter se parallelæ, & æquales; g Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ B C, E F. Quia ergo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sunt lateribus D E, D F, trianguli D E F, ex constructione; & basis B C, basi E F, æqualis, vt modo demonstrauimus; h Erunt & anguli B A C, E D F, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

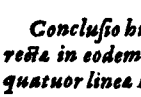


e 33. primi.
f 9. undecimi.
g 33. primi.
h 8. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

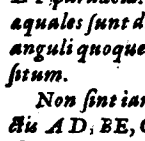
Conclusio huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ rectæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC DF, in eodem plano sitque AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallela. Dico angulos BAC EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturque rectæ BC, EF, quæ aut in una recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in una recta BF. Quoniam igitur parallelæ sunt AB, DE, æquales erunt anguli ABC, DEF internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB DFE. Sunt enim & AC, DF parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æquales sunt duobus angulis DEF, DFE trianguli DEF. Igitur anguli quoque reliqui BAC EDF, æquales erunt. Quod est propositum.



a 29. primi.

b 32. primi.

Non sint iam BC, EF, in una recta linea constitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; c erunt & AD, BE parallelæ & æquales. Eadem ratione AD CF parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE CF, eidem AD, parallelæ existentes & æquales, d inter se parallelæ erunt & æquales; e Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC EF. Itaque cum duo latera AB, AC, trianguli ABC æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, & basis BC, basi EF, f erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.



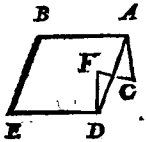
c 33. primi.

d 30. primi.

e 33. primi.

f 8. primi.

Cæterum vt conclusio huius theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (siue omnes sint in eodem plano siue non,) vt tres rectæ AD BE, CF, nulla ratione se mutuo secent, vt ex prima & vltima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.



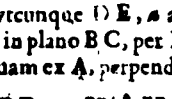
Sunt enim rectæ AB, AC, rectæ DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non sunt æquales cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, se mutuo secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 32. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit à puncto A, in sublimi ad subiectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunque DE, *a* ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF; & in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH, *b* ad quam ex A, perpendicularis dimittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. *c* Ducta enim in plano BC per I, ipsi DE, parallela KL, cum DF, *d* rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, *e* ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, *f* erit quoque KI ad idem planum per FA, FH, ductum recta. *g* Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulis KIA: rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI IF. *h* Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectã lineam diximus. Quod faciendum erat.



a 12. *primi.*
b 11. *primi.*
c 12. *primi.*
d 31. *primi.*
e 4. *vndecimi.*
f 8. *vndecimi.*
g 12 *vndecimi.*
h 4. *vndecimi.*

SCHOLIVM.

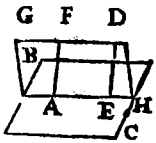
Quod si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis, i erit ipsa AF, a initio ad DE ducta perpendicularis, ad subiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.

i 4. *vndecimi.*

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit à dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. *k* Ex quouis puncto D, in sublimi dimittatur ad planum BC perpendicularis DE quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, *l* ducatur per A ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cum enim DE AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planum EG, ex constructione, *m* erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

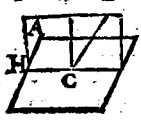


k 11. *vndecimi.*
l 31. *primi.*
m 8. *vndecimi.*

THEOR.

xiij. ## THEOR. 11. PROPOS. 13.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



Sit datum planum *A B*. Dico à dato eius puncto C, ad easdē partes nō posse educi duas perpendiculares ad planum *A B*. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum *A B*, & per C D, C E, *a* quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum F G, secans planum A B per rectam lineam G H. Cum igitur E C, D C, rectæ sint ad planum A B; erunt per def. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datū est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

a 11. vndecimi.

Aliter. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cum igitur duæ D C, E C, rectæ sint ad idem planum *A B*; *b* erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. vndecimi.

SCHOLIVM.

Eodem modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A

punctō in sublimi ad subiectum planum B C, si fieri potest, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E, quæ cum in vno plano sint, planum F G, secans planum B C per rectam G H. Cum igitur A D, A E, rectæ sint ad planum A C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D E. Quod est absurdum: cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.

c 12. vndecimi.

d 17 primi.

Aliter. Si A D, A E, rectæ sint ad planum B C, ipsæ erunt inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

e 6. vndecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

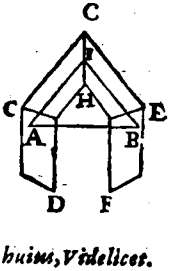
xiv. **AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.**

Sit recta *A B*, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E, *e* & faciant communem sectionem rectam lineam G H; In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I *A*, I *B*, in planis G C D, G E F. Quia

e 3. vndecimi.

igitur

igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GFF, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. a Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Atque igitur plana, eadem recta linea, recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



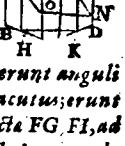
a 17. primi.

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnū eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

Sint duo plana parallela AB, CD ad quorum alterum AB, recta sit linea erit recta EF. Dico FF, rectæ quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF incedens, faciatq; communes sectiones cū dictis planis rectas GH, IK, eruntq; anguli GEF, HEF, recti per defin. 3 huius lib. Ac proinde recti etiā erunt anguli IFE, KFE (Si enim a ter eorum, nempe IFE dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores Quæ recta FG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atq; adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; b cum tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB, producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana se et per EF, faciens alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta c quoque erit EF, ad CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.



b 1. vndecimi.

c 4. vndecimi.

THEOR. 13. PROPOS 15.

XV.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, d enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. e Deinde in

d II. vndecimi.

e 31. pri.

plano

plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſis DE, DF, parallel. Quoniam igitur rectæ AB, GH, ſunt parellelæ ſunt ipſi DE; *a* erunt & AB, GH, inter ſe parellelæ; *b* Ac proinde anguli BAG AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB, AC, *c* recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. *d* Igitur parellela ſunt plana BC EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 9. *undecimi.*
b 29. *primi.*
c 4. *undecimi.*
d 14. *undecimi.*

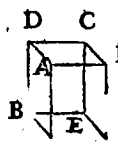
SCHOLIVM.

Quod ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non ſunt ducenda alia parallela. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; oſtendemus, vt prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parellelum planum ducere.

Datum planum ſit AB, punctum q, extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB DC, ducto, c agatur CE, ipſi DB, parallela. E: in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF ductum, parellelum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibuſque non eiſdem cum illis plano parallelæ ſint, f parellela erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.



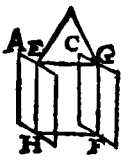
e 31. *primi.*
f 15. *undecimi*

THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam ſecetur: communes illorum ſectiones ſunt parellelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GE, eſſe lineas

neas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in puncto I. a Quia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vno quoq; est plano, videlicet in CD, producto: conueniens etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. vndecimi.

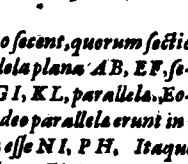
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm, sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, b erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, c atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano: d erunt plana AB, CD, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.

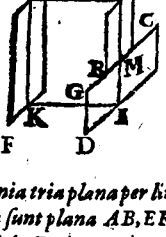


b 16. vndecimi.
c 9. vndecimi.
d 15. vndecimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad

planum EF, recta quoq; erit ad planum AB. sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione Gl, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana
a 14 vn decimi. *AB, CD; a parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.*

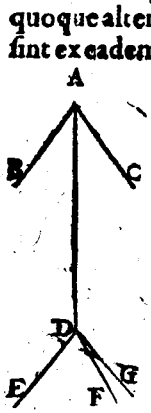
QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniant q; producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur paral-
b 16. vn decimi. *lela sunt plana AB, EF, b erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quamobrem cum recta LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantq; in eodem plano secante HI, & conueniant in M: ipsa erunt in rectum & continuum posita, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum ef-*
c 1. vn decimi. *ficiēt; c propterea quod recta LI, in vno iaceat plano. Quod est propositū.*



ITA QVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel cerè si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuersum quoq; propos. 10. facile demonstrabimus, hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri linea parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallela ducti.



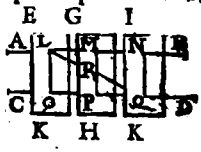
IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, *sitque* AB, *ipsi* DE, *parallela; &* AC, DF, *sint ad easdem partes plani per* AB, DE, *ducti. Dico* AC, DF, *parallelas quoque esse: hoc est, ducta recta* AD, *planum per* AC, AD, *ductum transire etiam per rectam* DF: *ita vt* AC, DF, *sint communes sectiones facta à plano per* AC, AD, *ducto, in planis parallelis per* AB, AC, & DE, DF, *ductis.* d *Hinc enim efficitur, sectiones* AC, DF, *parallelas esse. quod est propositum. Si namque planum per* AC, AD, *ductum non facit in illis planis parallelis sectiones* AC, DF, *faciat sectiones* AC, DG, e *quæ parallelæ erunt.* f *Igitur angulus* EDG, *angulo* BAC, *hoc est, angulo* EDF, *æqualis erit.*
d 16. vn decimi.
e 16. vn decimi.
f 10. vndec.
quod est absurdum, cum vnus sit totum, & alter pars.

THEO-

THEOR. 15. PROPOS. 17. XVII.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In eadem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano: siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secetur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, *a* Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, *b* erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. *c* Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



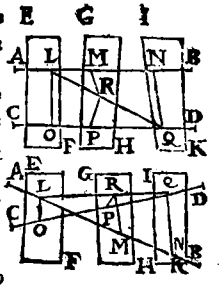
a 2. vndecimi.

b 16. vndecimi.

c 2. sexti.

SCHOLIVM.

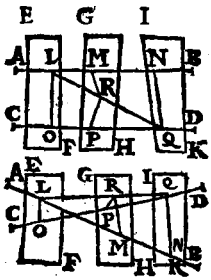
QVOD, si data rectæ AB, CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in rectam MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nempe communem sectionem planorum LOQN, GH.



d 16. vndecimi.

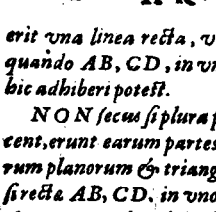
SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia e cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno eriam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa

e 2. vndecimi.



triangula in vno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesin.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorum: ac proinde vnam rectam non constituent; a alias in vno essent plano. quod est absurdum.

a 11. vndecimi.



EADEM hac propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc RMP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

EX demonstratione porro perspicuum est, si quotlibet linea in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearum inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunq; in vno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ. Iuncta enim recta LQ, b *erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ, quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademq; ratio est de pluribus. Vt autem rectè demonstratio procedat in quibusuis duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis vnius recta ad vltimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rectæ CD. Idemq; seruatum est in figuris huius propos. 17.*

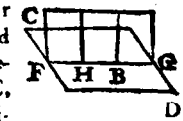
b 2. sexti.

XVIII. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum, CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam
c 11. pri. FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, c ducatur in pla-

in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ ſunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; a erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionē FC, per pendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similiq; argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.



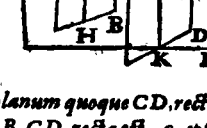
a 28. undecimi.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum & idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia ſectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, qua ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: b *eademque perpendicularis erit ad IK, ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumq; planum AB, CD, recta eſt,* c *ipſa parallela erunt.*



b 19. primi.

c 14. vndecimi.

SED iam parallela ſint plana AB, CD: ſitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum eſſe ad idem planum EF. Sint enim communes ſectiones plani EF, & planorum AB, CD, recta GH, IK; d *qua parallela erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM: erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit.* e *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum: ideoq; viciſſim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod eſt propoſitum.*

d 17. vndecimi.

e 18. vndecimi.

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propoſ. oportet

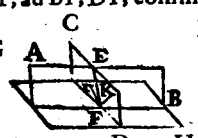
a 12. *vn decimi.* *b* 18. *vndec.*

tentq; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, a erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF. b quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

XIX. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit,

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Autenim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, *c* recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planũ GH, recta ex defin. 4. huius lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturq; in plano CD, ad planum GH, recto. Si deniq; EF, ad neutram BF, DF esse credatur recta; *d* ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI: Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoq; perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra *e* demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



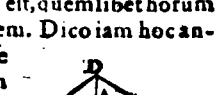
c 4. *vndecimi;* *d* 11. *primi.* *e* 13. *vndec.*

XX. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis

planis BAC, CAD, DAB. Dico quolibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuū est, quosuis duos maiores esse reliquo: si vero duo tantum sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto *a* fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniungantur-que rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem æquales; *b* erunt bases BC, BE, æquales. *c* Quia vero latera DB, DC, maiora sunt latere BD; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC: & basis CD, maior basi CE: *d* erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 23. primi.

b 4. primi.

c 20.

d 25. primi.

THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC, At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. *e* Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD: similiterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. *f* Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis

e 20. vndec.

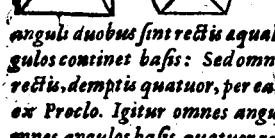
f 22. primi.

rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DABi
a 32. primi, a (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex, datus angulus solidus, tot laterum, angulorúmve, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli



b 32. primi. *horum triangulorum, (b cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum propè basim maiores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angu-*
c 20. vndec. *lis continetur, c & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.*

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F, ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot an-
d 32. primi, *guli plani componunt angulum solidum A. d Quia verò omnes anguli quinq;*

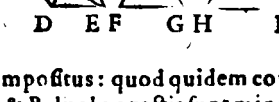
quinq; triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur, a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquus angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis: quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis.

a 22. undec.

THEOR. 20. PROPOS. 22. XXII.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FC, HI, quæ rectis illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, *b* ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. *c* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque prismum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus: quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; *d* erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; *e* erit & basis EK, maior basi HI: *f* Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK,



b 22. primi.

c 23. primi.

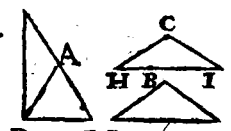
d 22. primi.

e 24. primi.

h 20. ostensa primi.

ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE, quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. a Erit, igitur, vt prius, DK, ipsi FG, æqualis. b Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE; & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoq; ED, DK, maiores duabus CH, HI: c Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



a 4. pri.
b 20. primi.
c 20. primi.

CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK: quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponaturque rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. d Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. e Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & constructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: f Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG, erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad

d 4 pri.
e 21. primi.
f 20. primi.

b 22. primi. FB, constituatur angulus æqualis, &c. g Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonstrandum.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales: b erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor: i erunt quoque duæ illorum bases æquales, k & basis tertii vtraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; l erit quoq; basis DE, omnium

b 4. primi.
i 4. primi.
k 24. primi.
l 24. primi.

omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. *a* Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem: erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales: *b* erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; *c* erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: *d* Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

a 23. primi.

b 4. primi.

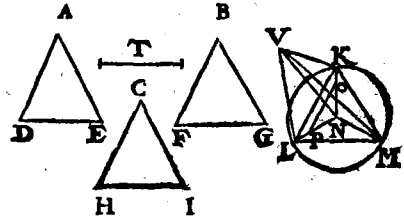
c 24. primi.

d 20. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 23. XXIII.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunq; assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

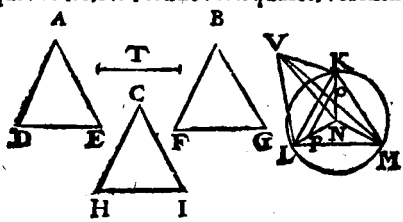
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponatur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturq; bases DE, FG, HI. *e* Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulũ KLM, sitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. *f* Describatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum



e 21. undec.

f 5. quarti

erum N, à quo ducantur rectæ NK, LN, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL, & basis DE, basi KL, æqualis: a erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll propos 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores sint AD, AE, quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia: erunt latera NK, NL. trianguli NKL, secta proportionaliter: b ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. c Quare anguli NQP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulũ. d Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autem NK, maior quam NO. e Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP, f erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores.



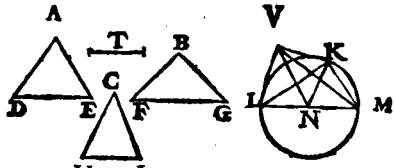
a 8. pri.

b 2. sexti.
c 29. primi.
d 4. sexti.
e 14. quinti & 25. primi

CADAT deinde centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL: erunt quoque

BF, BG,

BF, BG', æquales eisdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Posita autẽ fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur

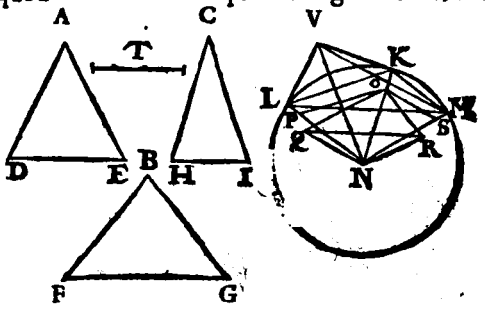


BF, BG, æquales quoq; sunt rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF, BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credatur, quam NK, NL: erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æquales sit ipsi NM: minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt rectæ FG. Quod est absurdum, *b* cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL: sed neque æquales: Igitur maiores.

a 20. primi.

b 20. primi.

CADAT postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto propos 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicãtur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis: *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem



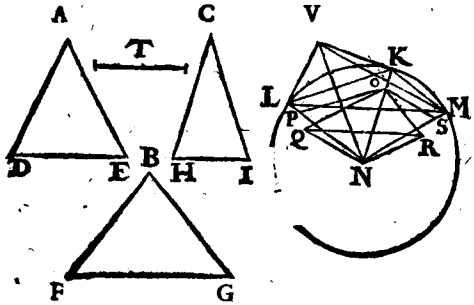
ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B, Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis: *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL: si abscindantur NO, NP, ipsi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP: demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP: & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. *e* Fiat angulus ONQ, angulo A: & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales

c 8. primi.

d 8. primi.

e 23. primi.

ipsis



les ipſis AD, AE, & connectantur OQ, OR, caderque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta cum æquales ſint rectæ NO, NP, NQ. a Quare cum angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno: erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadat enim ſi militer OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE: Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem: b erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR: & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus: c erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR: & baſis FG, maior baſe QR: d erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A, & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B, Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B Quod eſt abſurdũ, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſũt AD, AE, quã NK, NL: ſed neq; æquales: Igitur maiores.

a 29. primi.

b 4. pri.

c 24. primi.

d 25. primi.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat: poſsit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. e Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3, huius lib. ad rectas NK, NL, NM. f ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtru-

e 12. vndec.

f 46. primi.

ctione,

ctione, eiſdem quadratis rectarum KN, NV, æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erũt rectæ VK, AD. Rurſus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL: & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti: *a* erit baſis VK, æqualis baſi VL: Atq; eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem cum latera V K, VL, trianguli V K L, æqualia ſint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & baſis KL, baſi DE: *b* erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non ſecus demonſtrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C, Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

a 24. pri.

b 8. pri.

THEOR. 21. PROPOS. 24. XXIV.

Si ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin 30, huius lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma ſimilia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, ſecentur plano AC: *c* Erunt communes ſectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, ſecentur plano AC: erunt communes ſectiones AD, BC, parallelæ: Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera A B C D. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ ſint rectis DC, CE, & non in eodem plano, ſed in oppoſitis: *d* erunt anguli A B H, D C E, æquales: eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. *e* Quoniam vero AB, ipſi DC, in parallelogrammo AD: & BH, ipſi CE, in parallelogrammo BE, æqualis eſt: erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE. Ac propterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de cauſa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales proportionalia: ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis iam diametris AH, DE, *f* cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia ſint lateribus DC, CE, trian-

c 16. vndec.

d 10. vnde.

e 34. primi.

f 34. primi.

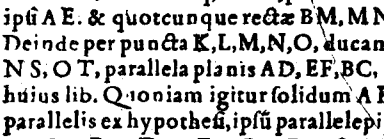
a 10. vndec. b 4 pri. c 34. primi.

CE, trianguli DCE; *a* & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; *b* erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. *c* Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia Quod erat demonstrandum.

THEOR 22. PROPOS. 25.

Si solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est, basis AG, ad basim BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumliber, sumanturq; in AB, protracta quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AE. & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana, K, P, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypothesi, ipsum parallelepipedum erit, ex definitione,



d 24. vndec.

d habebitque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP: EBCP, BNRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. *e* Quoniam veroparallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AK, KL, æqualia sūt: & similia quoq;, *f* cum anguli vnius sint æquales angulis aliorū, & latera circa angulos vnius æqualia lateribuscirca angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia, sunt parallelogramma AY, KZ, Lα. Cùm igitur æqualia quoq; sint, & similia parallelogramma AD, KP, LQ. Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AE, FD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus planis LX, Lα, LQ, solidi KLQP: *g* Sunt autem tria in vnoquoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF: & AY, ipsi VF: & AD, ipsi EF, &c.

d 36. primi. e 29. primi. g 24. vndec.

Igitur

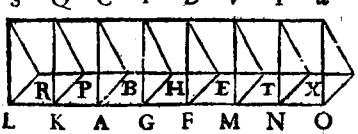
Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD, Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BH, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoq; ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoq; ſolido maius eſt; & ſi minor, minus in quacunq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidũ AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis DY, ad baſin CY, & vt baſis AY, ad baſin BY, & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio accommodari etiam poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelo: erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF, ſeceturque plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABGIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur enim priſma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta vtring, capiantur quotcunq, recta AK, KL, ipſi AG; & quotcunq, recta FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZa; parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI, a erunt communes ſectiones AC, GI, parallela: Sunt autem & AG, CI, parallela ex hypotheſi ob parallelogrammum AD: igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH, b erunt communes ſectiones AB, GH, parallela: Sunt autem & AG, BH, parallela, ob parallelo-

a 16. undecimum AD: b 15.

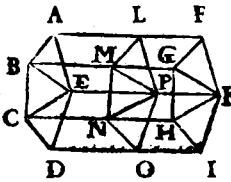
grammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, aqualia sunt lateribus GI, CH, trianguli GHI; a 234. primi. arum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit aquale: b & anguli CAB, IGH, sunt quoque aquales, eo quod recta CA, AB, parallela sunt rectis IG, GH, & non in eodem plano; c Erunt triangula ABC, GHI, b 10. vndec. aqualia inter se, & aquiangula. d Quare latera circa aquales angu- c 4. pri. los proportionalia habebunt: Atq; idcirco similia erunt. Igitur solidum d 4. sex. ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, aqualibus & similibus, atq; parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadem arte prismata erunt AECQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quo-



niam vero parallelogramma AI, KC, LQ, aqualia sunt, & similia; nec non AH, KB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana prismatis ABCIHG, aqualia & similia omnibus planis prismatis ABCQPK, KPQSRL. Quare per defin. 10. huius lib. aqualia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione aqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG, & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magnitudinis) aqualis est basi OI, (multiplici est basis FI, secunda magnitudinis,) aquale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertia magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarta magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus aqualibus, aqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est, & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AM, ad basin FH, & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, sexteruque plano LMNOP. Dico rursus vt est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita per-allela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quo-

ta, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. a *Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prisma ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prisma LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter se.* b *Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus constatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.*



a 1. sex.

b 12. quinti

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramq; partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, c *propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum,* d *ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde vt prius ostendetur prismata ex vna parte inter se æqualia, nec non & prismata ex altera parte &c.*

c 15. vndecimi

d 10. vndecimi

COROLLARIVM

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. (Idem dices de parallelepipedo.)

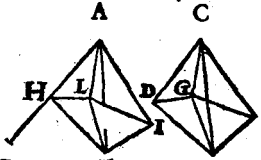
PROBL. 4. PROPOS. 26. EXVI.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. a Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde b scindatur AH, æqualis ipsi CD, *f* fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æ

a Vndec. primi

Rursus in plano per AH, AI, ductum constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit: &
a 12. recta AL, rectæ CG, æqualis *a* Ex L, vero ad planum, in quo sunt
vndec. tres AH, AL, AI, erigatur perpẽdicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL: cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales per
b 4. *pri.* constructionem: *b* Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, per, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE,
c 4 *pri.* per constructionem: *c* æquales quoq; erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF: & anguli HLK,
d 4. *pri.* DGF, recti ex defin. 3. huius lib. *d* erunt & bases HK, DF, æquales



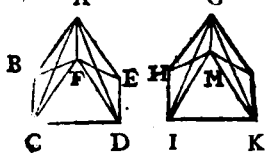
E Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex constructione (cum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia sint ex cõstructione, comprehendantq; angulos æquales, nimirum
e 4. *pri.* rectos, ex defin. huius lib. *e* erunt bases AK, CF, æquales) *f* Erunt
f 8. *pri.* quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti
g 4 *pri.* ex defin. 3. huius lib. *g* Erunt bases IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli, AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF,
h 4. *pri.* sint æqualia ex constructione: *h* Erunt quoq; anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus. Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidũ constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulis planis recta in vno eodemque existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant, pyramisque quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quod triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis soli-

lis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resoluatur BCF, BCF, FGD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD,



DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; *Ita enim fiet totus angulus solidus* G, *toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.*

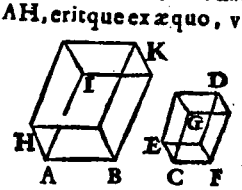
THEOR. 5. PROPOS. 27. XXVII.

ADATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, eiusque punctũ A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis EGG, GCF, FCE. Deinde vt est, CF, ad CG, *b* sic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt GF, ad CE, ita AB, ad AH. Post hæc, perficiatur parallelepipedũ AK, completis nimirũ parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positũ. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, CF. Tria igitur

a 26. *vndec.*

b 12. *sexti.*

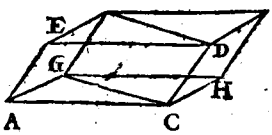


plana BH, HI, LB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita
a 24. vndec. tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. *a* Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD: Ac proinde ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

XXVIII. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF.
b 34. primi. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, *b* & æqualis ipsi AE, cum sint parallelogramma CE, GE; *c* erunt & inter se paral-
c 9. vndecimi. lelæ, & æquales CD, GF. *d* Ac proinde, quæ ipsas coniungunt
d 33. primi. CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. *e* Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se:
e 24. vndec. sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED,
f 6. sexti. DBF, proportionalia. *f* Igitur similia quoq; erunt dicta triangula. *g* Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile
g 24. vndec. parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, GF, prismatis ACGFED, æqualia similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF: propterea q; prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

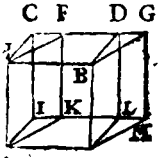


XXIX. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana

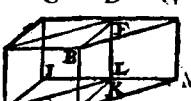
plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE. AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC. HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ADCE, AFGE, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta: erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoq; inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; *&* eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales. (*f* Nam cum rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoq; inter se æquales: quare communi empta KL, æquales erunt IK, LM,) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.



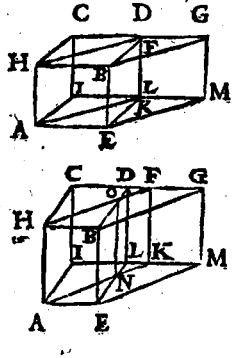
a 35. primi.
b 34. primi.
c 4. sexti.
d 24. vndec.
e 26. primi.
f 4. pri.

SCHOLIVM.

HÆC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit: vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. Vnde vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



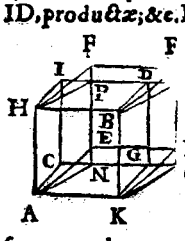
IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, aqualia: quib si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, aqualia fient. Vnde, vt prius, aqualia erunt prismata AIK, FCH, ELM-GDB, a quibus si auferatur prisma commune KLNODF, (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO,) remanebit solidum comprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, aquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se aqualia.



xxx. THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis; inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AG, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, nõ sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, neque, CG, ID, productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, ALMFK, esse æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur, in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiungantur q; rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF,



a 34. primi.

sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. b Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedũ est APQR. c Quamobrem paral-

b 33. primi.

c 29. primi.

lelepi-

lelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

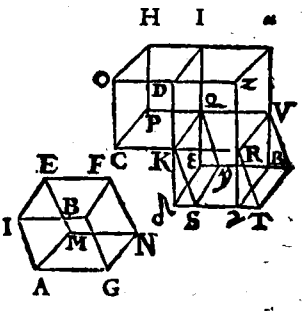
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnum dicatur altius; si eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale: æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum. a 29. vel 30. vndecimi.

THEOR. 26. PROPOS. 31. XXXI. XXXII.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda ABFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares.

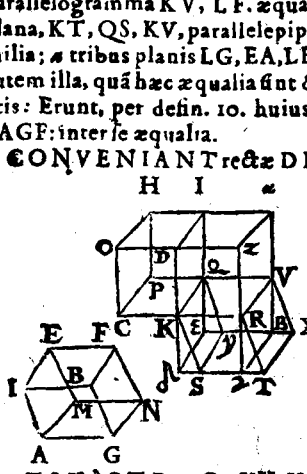


Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, sitq; KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA: & perficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, constituatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelo-

gramma KT, LG, æqualia & similia: Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin 3 huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia; *a* tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, *b* tam autem illa, quã hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF: inter se æqualia.

a 24. *vndec.* *b* 24. *vndec.*

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ: & IQ, KY, in ς, compleaturq; parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniantin α: & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα.



Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Rδγ V, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ, Qι, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, ιX, *c* ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V.

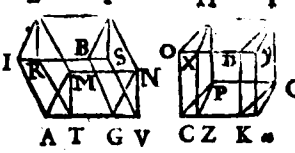
c 19. *vndec.*

d QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se: & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale: cum bases LG, CD, ponantur æquales. *e* Quare erit vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: *f* Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidũ CHIK, ad solidum KLαR: cum parallelepipedum CHαR, secetur plano IK, planis oppositis, CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidum Qδγ V, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano KV, oppositis planis Dαδβ, parallelo. *g* Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qδγ V, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kγ, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoq; erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositũ.

d 35. *primi.* *e* 7. *quinti.* *f* 25. *vndecimi.* *g* 9. *quinti.*

SINT iam neque insistentes lineæ AM, GN; LE, BF, ad basin AB, neq; CP, KQ, OH, DI, ad basin, CD, perpendiculares. Et à

Et à *a* punctis E, F, M, N, demittantur ER, ES, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares, Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qæ. Eruntautē omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yæ, æZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZæI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantq; insistētes lineas perpendiculares, cum inter se æqualia, vt ostensum est. *b* Sed parallelepipedū ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZæI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistētes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

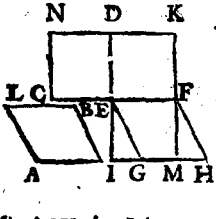


a 11. vndecimi.

b 29. vel 36. vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortassè demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes linea ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ist demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorū insistentes linea ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L: & recta EF, rectæ LB, & rectæ EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super AC, CD, constructis; sint q; insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super EH, æquale esse ac simile solido super AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint



29. undecimi, *sint & similia planis huius, per constructionem.* a *Sunt autem & aequalia parallelepipeda super EH, IF, cum habeant basin eandem, eiusq; infimum latus EF, erectam super planum IK; item plana basi opposita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH, atque insistentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eisdem rectis lineis IH, &c. Igitur aequale erit parallelepipedum super IF, parallelepipedo super AB.* b *Quoniam vero parallelogramma EH, IF, aequalia sunt; & EH, aequale est ipsi CD. aequalia erunt IF, CD.* c *Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK;* d *Est autem vt IF, ad EK, ita solidum super IF, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super EF, erecto parallelo planis super DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super CN, FK, erectis. Quare erit vt solidum super IF, ad solidum super EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK.* e *Ac proinde aequalia erunt parallelepipeda super IF, & CD. Ostensum est autem parallelepipedum super IF, aequale parallelepipedo super AB. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda super AB, CD. Quod est propositum.*

b 35. undecimi. c 7. quinti. d 25. undecimi. e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque haec propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, f *sient aequalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aequale alteri; aequale erit abscisso toti. Quod est absurdum.*

f 31. undecimi.

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis aequalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

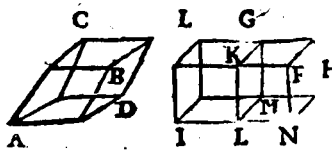
XXXIII. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, vt est basis ad basin. g Super rectam enim EK, construatur parallelogram-

g 45. primi.

grammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit æqualis angulo ENF, Constituent autem parallelogramma EF, IK, rōtum



parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum vnum parallelepipedum IFLH: *a* erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypothesi. *b* Quare erit vt solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad idem solidum EFGH: *c* Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, vt basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sūt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

a 31. vn. decimi.
b 7. quinti.
c 25. vn decimi.

SCHOLIVM.

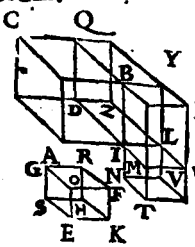
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo, ex maiori abscindantur minori æqualis, & ducatur planum basi parallelum, d erit, vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.

d 32. vn decimi.
e 9. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvi.

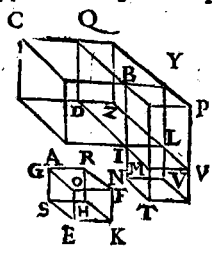
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda ABCD, EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR: Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO, Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO: *f* & anguli contenti æquales, cum angulus ILM



f 15. primi.

LIM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, similia, & æqualia. Eadē ratione similia erunt, & æqualia LN, RS: item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: *a* Sunt autem tria cuiusq; similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10 huius lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL: Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedū IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinē parallelepipedorū ABCD, EFGH, est vt AI, ad EK, hoc est ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM: & BI, ad FK, hoc est, ad IN. *b* Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL: Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM: & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad CL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. *c* Sed vt AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedū DLYQ: & vt basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & vt basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, vt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, ex defin. 10 lib. 5. *d* Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; *e* Et vt AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonstrandum.



§ 24. *vndec.*

b 11. *sex.*

c 32. *vndec.*

d 32. *vndec.*

e 1. *sex.*

COROLLARIVM

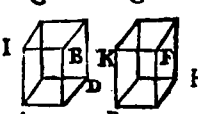
EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primā descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedū ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 34. XXXIV. XXXV.

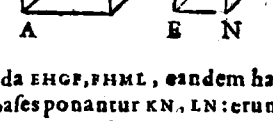
ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales: cum & parallelepipeda æqualia ponantur: erunt & baſes AD, EH, æquales. per ea quæ ad finē propoſ 31. huius lib. oſtēdimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint: ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis: & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF: a erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ae idem ſolidum EHML: b Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL. Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione baſis KM, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN: erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: c Sed vt KN, ad LN, ita eſt, recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualē. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

a 7. quinti
b 32. vndec.

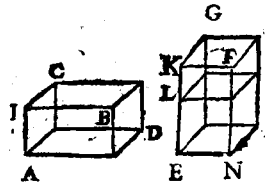


c 1. ſexti

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales: cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales d. Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

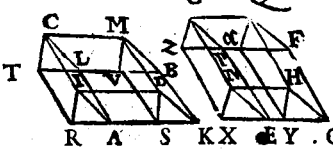
d 31. vndec.

QVOD



QVOD si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem: *a* Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur. *b* Et vt EK, ad EL, ita est KN, ad LN: *c* Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN: erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit vt solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML: *d* ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

a 23. *vn decimi.* *b* 1. *sext.* *c* 32. *vn decimi.* *d* 9. *quinti.*



SED proponatur iam parallelepipeda BACD, EFGH, æqualia, quorum insistentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, nō sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem a punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT: Itē a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Q*a*, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Z*a*, XZ, Y*a*: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico Rursus, vt basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. *e* Cum enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale solido X*a*GH: Erunt & parallelepipeda RVCD, X*a*GH, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH, erit, vt iam demonstratum est, vt basis CD, ad basin GH, hoc est, vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

e 29. *vel* 30. *vn decimi.*

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt prius; Cum sit vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI, sit autem AB, ipsi CD, & EF, ipsi GH, æqualis; erit quoque vt basis CD, solidi RVCD, ad basin GH, solidi X*a*GH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, sint insistentes

f 24. *vn decimi.*

lineæ

neæ perpendiculares ad bases CD, GH; erunt vtiam ostensum est, æqualia parallelepipeda RVCD, XæGH. a Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idemque ostenderur, si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum. a 29. vel 30. vndecimi.

SCHOLIVM.

OMNIA hac, qua demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; prismatis, qua habẽt duo plana opposita triangularia, si prædicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. b *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.* b 29. 30. vel 31. vndecimi.

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. c *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin:* d *Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.* c 32. vndecimi. d 15. quinti.

PRÆTEREA, si duobus prismatis prædictis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, e *qua inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia,* f *cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, qua quoque sunt latera homologa prismatum.* e 33. vndecimi. f 15. quinti.

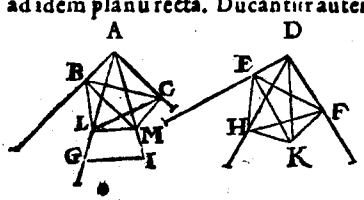
DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda, æqualia eorundem altitudinum cum prismatis. g *Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangula eorum dimidia* h *eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.* g 34. vndecimi. h 15. quinti.

xxvii.

THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, ſit æqualis: à ſumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, eſſe æquales inter ſe. Nam ſi AG, DH, ſunt inæquales, auferatur à maiori AG, ipſi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipſi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ ſunt GI, LM, & eſt GI, ad planum anguli BAC, recta; a erit quoque LM, ad idem planũ recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. b Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; c Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus ſit, ex conſtructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CM, ML, : d At quadratis rectarum CM, ML, æquale eſt quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CL; e Ac proinde angulus ACL, rectus erit. f Rurſus quia quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AM, ML: g Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale



a 3. undecimi.
b 48. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.
e 48. primi.
f 47 pr.
g 47 pr.

æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: a At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; b propterea queangulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera AL, DH, æqualia; c Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; d erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DEF, æquales: cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; e erunt latera BM, CM, & lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, sunt recti; f erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata, æqualia. Verum quadratum rectæ BL æquale est quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint ex defin. 3. huius lib. Et quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqualis; b erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistent, &c. Quod ostendendum erat.

a 47. primi.
b 48. primi.
c 26. primi.
d 4. primi.
e 26. primi.
f 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique: Erunt à punctis ex-

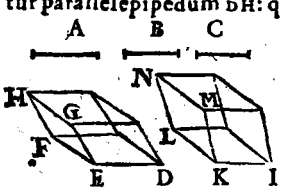
extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissa perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales & sublimes æquales AL, DH, constituunt angulos æquales LAB, HDE. Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.)

XXXVIII THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo; quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Constituaturq; angulus solidus E, extribus angulis planis quibuscunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipsi A: & EF, ipsi B, & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH: quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur

a 26. vn decimi.



contineri, aut ex ipsis fieri. a Deinde ad rectam IK, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solido angulo E, extribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG, ita vt rectæ IK, KL, KM, æquales sint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis NL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur sub linea B, se ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solido IM. Cum enim sit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B, & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: b Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales per co-

b 14. sexti.

c 31. vn decimi. roll. propos. præcedentis. c Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeant bases DG, IM, æquales & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

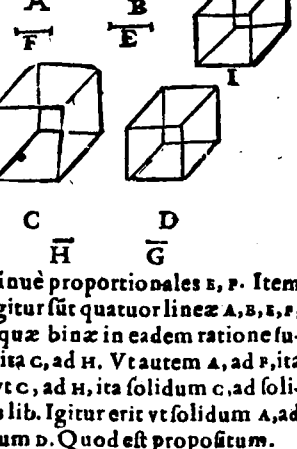
VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea de-

nea deſcripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, deſcriptum ex rectis A, B, G, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo I N, deſcripto a media B. Dico tres A, B, C, eſſe continuè proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex FL, demiſſa eſſe æquales. Quare cum & ipſæ ponantur æqualia; erunt eorum baſes DG, IM, æquales per ea, quæ ad finem propoſ 31. huius lib. demonſtrauimus. Qua baſes cum angulos habeant æquales D E G, I K M, ex conſtructione: a habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, vt DE, ad IK, ita KM, ad E G. Quapropter cum DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

a 14. ſexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. XXXIX.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D: conſtituanturq; ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterq; deſcripta: item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterq; poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia ſiue non. Dico eſſe quoq; ſolida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidũ D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſũt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur: erit ex æquo vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B, Et vt C, ad H, ita ſolidum C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.

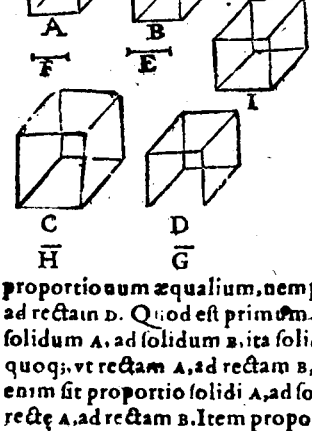
SINT iam è contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoq; proportionales. *b* Tribus enim rectis

b 12. ſexti.

a 29. undec. A,B,C, inueniatur quarta proportionalis I, a super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterq; positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I: erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D. Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. b Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6 Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandũ.

b 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectã D. Dico esse quoq; vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. c Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Itẽ proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidẽ triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoq; vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. d Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erũt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B: & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.



c 33. vnd ecimi.

d 33. vndecimi.

SCHOLIVM.

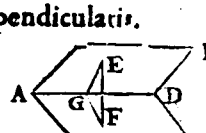
EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstra-

tum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & lineæ secundæ æquale tertiæ lineæ: perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia sunt triangula. vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singulis singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. a Cum igitur prismata, a 15. eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quinti. quod proponitur.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC, sitq; eorũ cõmunis sectio recta AD. Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionẽ AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, *b* & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planũ AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3 defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, *c* cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

b 12. primi.

c 17. primi.

SCHOLIVM.

HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem, d ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

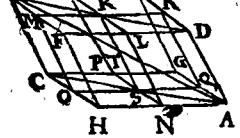
d 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXX.

SI solidi parallelepipedi eorum; quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & soli-

di parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo seca bunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I,K,L,M,N,O, P,Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorũ sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC: considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia



sunt lateribus CO, OS, trianguli COS: (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, *a* & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) *b* & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: *c* Erunt & bases AS, CS, æquales: & anguli ASQ, CSO, æquales, *d* Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: *e* Ac propterea AS, CS, vnam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, *f* ipsæ quoque inter se parallelæ & æquales. *g* Quare & rectæ AC, BD, earum extremas coniungentes, parallelæ sunt & æquales: Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt: *h* erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. *i* Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT: & latus AS, lateri BR: *k* Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia: Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

a 34. *primi.* *b* 29. *primi.* *c* 4. *primi.* *d* 13. *primi.* *e* 14. *primi.* *f* 9. *vndecimi.* *g* 33. *primi.* *h* 7. *vndecimi.* *i* 29. & 15. *primi.* *k* 26. *primi.*

COROLLARIVM.

(HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est rectam RS.)

SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum;

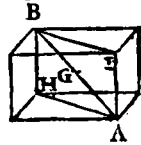
trum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sic enim primo planum CD, oppositis planis AE, BF, parallelum. a *Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem BA, bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque quo & bases AH, BI, bifariam.* b *Cum igitur sit vt basis KC, ad basim CH, ita solidum AD, ad solidum CB, erit parallelepipedum AB, sectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*

a 17. vndec.

b 25. vndecimi.

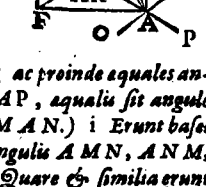
TRANSEAT secundo planum secans AI, BH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, imo per totam diametrum AB, c *cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI.* d *Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.*



c 7. vndecimi.

d 25. vndecimi.

TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM: e *erunt communes sectiones AM, BK, parallelae. Similiter parallelae erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, facta à plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM:* f *ideoque tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, inter se erunt aequales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, aequalia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN: & angulus KBL, angulo MAN, aequalis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelae:* g *ac proinde aequales anguli erunt OAP, LBK.* h *Cum igitur OAP, aequalis sit angulo MAN: aequales quoque erunt anguli KBL, MAN.)* i *Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, aequales: & triangulum triangulo aequale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN,* k *cum latera habeant circa aequos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, rectae MN: & angulus BKL, angulo AMN: & angulus KBL, angulo MAN, est aequalis, vt ostendimus: erit & reliqua IK, reliquae HM: & reliquus an-*



e 16. vndecimi.

f 34. primi.

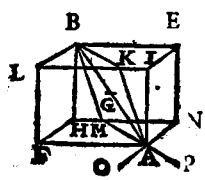
g 10. vndec.

h 15. primi.

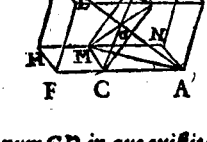
i 4. pri.

k 4. sex.

gulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, aqualis. (Est enim tota LI, toti NH, aqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis aquales: & totus angulus LBE, toti angulo NAF, aqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, aqualia: & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & aquilaterum, & aquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea aquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo aqualia erunt & similia triangula BHM, AIK: & quadrilatera AKLF, BMNE: cum inter se sint & aquilatera & aquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, aquale erit solido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & aqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.



POSTREMO planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum, sed vtrumq; secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas EK, DM, quam rectas CM, DK, esse aquales. Ducantur in parallelogrammo ED, diametri CD, KM: connectantur que rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, a inter se sunt parallelæ: b Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano: ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. c Et quoniam anguli BDC, angulo alterno ACD, aqualis est: d Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem aqualis: & latus BG, lateri AG, aquale, quod AB, bifariam secetur in G, centro: e Erit & latus DG, lateri CG, aquale. Cum ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, aqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC: f & angulus BGD, aqualis angulo AGC: g Erit & basis BD, aqualis basi AC. Eodem argumento aquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, aqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM: Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1.



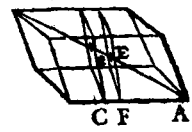
a 9. vndecimi.
b 7. vndecimi.
c 29. primi.
d 15. primi.
e 26. primi.
f 15. primi.
g 4. primi.

lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus D B L, toti C A N, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum B I, A H. Igitur & reliquus K B L, reliquo M A N, erit æqualis. Quoniam igitur latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis;

a *Erit & basis K L, basi M N: & reliqui anguli reliquis angulis æquales.* a 4. pri.

Si igitur æqualibus angulis B K L, A M N, æquales addantur anguli B K D, A M C, fient toti anguli D K L, C M N, æquales. Quare quadrilaterum B D K L, quadrilatero A C M N, & æquilaterum est, & æquiangulum: Ac propterea æquale & simile, cum singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota L I, toti N H, est æqualis, erit & reliqua I K, reliquæ H M, æqualis. Eademque ratione reliqua D E, reliquæ C F, æqualis erit: Ac propterea quadrilaterum D E I K, æquilaterum est quadrilatero G F H M: Sed & æquiangulum; cum anguli D E I, E I K, æquales sint angulis C F H, F H M, propter similitudinem parallelogrammorum B I, A H: & anguli E D K, I K D, angulis F C M, H M C, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni L K D, B D K, angulis N M C, A C M. Igitur quadrilatera D E I K, C F H M, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia & quadrilatera A C K I, B D M H: Item D E N M, G F L K, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis C K L F, F H M C, C K D M, M H B D, D K L B, B H F L, per 10. defin. huius lib. æquale est solido contento planis D M N E, E I K D, D M C K, K I A C, C M N A, A I E N: cum hæc illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur A B, sectum est per centrum G, plano C D, bifariam.

SED secetur iam parallelepipedum A B, plano C D, bifariam. Dico planum C D, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum C D, secat diametrum A B, diuidere diametrum A B, bifariam. Si enim diameter A B, in G, non diuidatur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum F H, plano C D, parallelelum, secabitur parallelepipedum A B, bifariam plano F H, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam



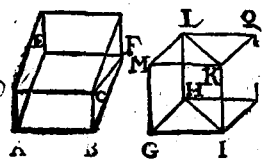
secari plano G D: Igitur solida C B, F B, cum sint dimidia parallelepipedi A B, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum A B, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorũ extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. *a* Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem *b* & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum: æquale erunt parallelogramma AC, GP. *b* Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis, super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM. (*c* Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.



a 34. *primi.*

b 31. *vn decimi.*

c 32. *vn decimi.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, qua duo triangula habent opposita: cum imperet parallelepipeda compleri: quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

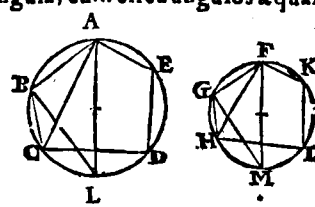
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et solidorum secundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona similia; inter se sunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH: *a* erunt a *6. sex.* triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: *b* Est autem b *21. tertij.* angulus ALB, angulo ACB: & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales sint,



c nempe recti in semicirculis existentes: *d* erunt & reliqui BAL, c 31. *tertij.*
GFM, æquales. *e* Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG: & d *32. pri*
permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. *f* Igitur est vt qua- *mi.*
dratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, e *4. sex.*
super AB, ad polygonum FGHIK, super FG: cum tam quadra- f *22. se-*
ta, quam polygona sint figuræ similes, similiterq; descriptæ. Quę *xti.*
itaque

itaque in circulis polygona similia, inter se sunt, vt diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

11.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quę vel minor erit vel maior circulo EFGK. Si enim

a 7. quinti. esset æqualis *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I. & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidiū est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L. recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos 17. lib. 3. ostendimus, occurrat-

b 41. primi. que rectis HE, GF, productis in T, & V *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidiū, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG

11. decimi. &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tandem

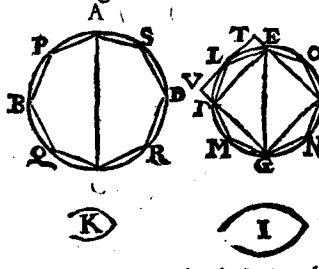
tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulū EF. GH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmētis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D, & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quod distributa est circūferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. *a* Quoniam igitur est polygonum APB. a 1. *decimi.*
QCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. Igitur & polygonum ELFMGNHO, b 14. minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est ab- *quinti.*
surdum. Non igitur maior est magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura conferatur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratū diametri minoris EG, ad quadratū maioris diametri AC, Ita vt generaliter & vniuerse demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinē posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratū diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, *c* maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. c 14. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri *quinti.*
AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, nō posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

Quam

Quamuis autem circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor: eadem tamen ratione ostendemus quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratū diametri EG, eandē habere proportionē, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod fallum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuerse quoque demōstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandē habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinē posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I: & sit autem vt circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I: Erit quoque vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodū à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.



2 7. quinti.

COROLLARIVM.

(HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.)

XII.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturq; rectæ

rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D: nec non in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF: huius vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI: & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, nec non eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti: Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter: *a* erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC: & HK, AC: & EG, BC: & EF, AC: & FG, AB: & EH, BD: & EI, AD: & IF, DC: & HG, DC.

b Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ: Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE. EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ: *c* erunt anguli EHG, BDC, æquales: Aceadem rationes æquales erunt anguli HEG, DBC: & HGE, DCB; *d* proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos: ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9 lib. 11. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ: *e* erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC: & HKI: ACB. *f* Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia: ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9 lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta: ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum

a 12. vndecimi.
b 9 vndecimi.
c 10. vndecimi.
d 4. sexti.
e 10. vndecimi.
f 4. sexti.
g 21. sexti.

similia sint ostensa triangulo A D C, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cum similia sint ostensa triangulo A B C, & super rectas posita AE, HI, *a* quæ æquales sunt, ob parallelogrammum A E I H. Non secus æqualia erunt & similia triangula E H G, I D K, cum sint ostensa similia triangulo B D C, & habeant rectas H I, D I, *b* quæ æquales sunt, ob parallelogrammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi.

RVRSVS, *c* quia rectæ E H, H G, G E, æquales sunt, & parallelæ rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B, F G H I, B F G E; Erunt triangula E H G, B I F, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: *d* Sunt autem & parallela, cum E H, H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ sint rectis B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur solidum B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G, B I F, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis, & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum C F G H I K. *e* Cum enim rectæ F C, C G, G F, æquales sint, & parallelæ rectis I K, K H, H I, ob parallelogramma C F I K, C G H K, F G H I; erunt triangula C F G, H I K, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: *f* Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, per quas ducitur planum C F G, parallelæ sint rectis K I, K H, per quas planum K I H, ducitur Igitur solidum C F G H I K, contentum duobus triangulis C F G, K I H, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H, prisma est. Quoniam vero prismata E B F G H I, C F G H I K, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K: & parallelogrammum E B F G, basis illius, duplum est trianguli C F G, basis huius, per scholium propos. 41 lib. 1. *g* Ipsa inter se æqualia erunt.

d 15. vndecimi.

e 34. primi.

f 15. vndec.

g 40. vndec.

DENIQVE quia prisma E B F G H I, maius est pyramide E B F I, totum parte; Est autem pyramis E B F I, æqualis & similis pyramidi A E G H, nec non pyramidi H I K D, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata E B F G H I, C F G H I K, pyramidibus A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis A B C D, excedent, hæ vero à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor re-

ber vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

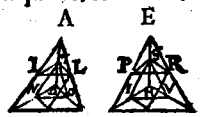
SI fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraq; diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, IK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD, EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propositio præcedens: Eodemq; modo intelligatur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG; Cum enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterq; posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST *b* ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide AIBCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Similiargumento ostendemus, ita esse bina prismata in

a 12. xii.

b 12. quinti.

pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LK, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH. Ac propterea erunt quoque vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH: & ita deinceps. Quare cum sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, a ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia: Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.



a 12. *quinti.*

LEMMA.

QVOD autem sit LKC, & RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissa perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, b *secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cum tot a perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.*

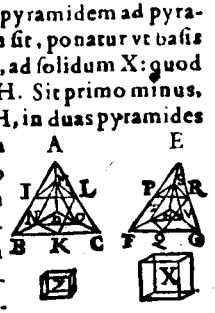
b 17. *vndecimi.*

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. v.

SINT pyramides eiusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non its sit, ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X: quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plusquam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV; *a* quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plusquam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps: *b* relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y: erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. *c* Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, vt basis ABC, ad basin EFG, hoc est, vt pyramis ABCD, ad solidum X. Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; *d* erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & maiora, Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.



a 3. *duo decimi.*

b 1 *dec.*

c 4 *duo decimi.*

d 14. *quinti.*

SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, vt basis ABC, ad basin EFG: Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, vt basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH, *e* erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit vt basis EFG, ad basin ABC, ita py-

e 14. *quinti.*

ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est basis ad basin, ita pyramidē ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt
a 9. quinti. basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; a fit autem pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. b *Pyramis ergo constituta æqualis erit toti pyramidi,*
b 9. quinti. *pars tot. Quod est absurdum.*

COROLLARIVM

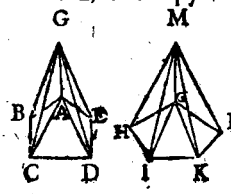
HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur è conuerso, pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

VI. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidē ad pyramidem, vt est basis ad basin.



c 5. duo decimi. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia: erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. c Quia vero est, vt basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF: erit componendo vt basis ABCD, ad

basin

basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: *a* Sed rursus est vt basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt basis GHIKL, ad basim GKL, ita pyramis GHIKL, ad pyramidem GKLM: & conuertendo vt basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. *b* Rursus quoniam est, vt basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM: Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionib. cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit vt basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. duorum

b 5. duodec.

ABCDE	ABGDEF
ADE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

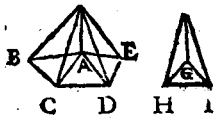
SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygona latera habent multitudine aqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum dua pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, *quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basim. Resoluto enim pentagono in in triangula, erit & pyramis in pyramides numero aquales diuisa.* c *Quoniam vero est, vt basis* ABC, *prima quantitas, ad basin* GHI, *secundam quantitatem, ita pyramis,* ABCF, *tertia quantitas ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem: & eodem modo, vt basis* ACD, *quinta quantitas, ad basin* GHI, *secundam quantitatem, ita pyramis* ACDF, *sexta quantitas, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem:* d *Erit vt basis* ABCD, *prima quantitas cum quinta, ad basin* GHI, *secundam quantitatem, ita pyramis* ABCDF, *tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis* ABCD, *prima quantitas, ad basin* GHI, *secundam*

c 5. duodec.

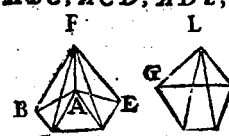
d 24. quinti.

cundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo est ostensum:
a 5. duodecimi. a & vt basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: b Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem,
b 24. quinti.



ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin, triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK: Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides qualibet, quarum vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere à triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygona, sintque plura latera in vna base quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratum, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: & vt bases ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem:



c 24. quinti. c Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem,

vt ante

vt ante est ostensum; a Erit etiam vt basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedemus erit, si plura triangula fuerint in basi ABCDE. a 24. huius.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem

QVOD non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 3. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

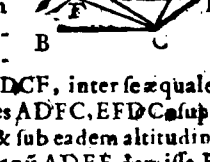
(PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Has autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.)

THEOR. 7. PROPOS. 7. VI.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma [redacted]DEF, cuius duo triangula opposita æqualia ac similia ABF, DGE. Dico ipsum prisma sacari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in trib. parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD: CF, in BCEF: FD, in ADEF. *b* Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt: *c* est que vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinẽ, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam: Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planũ ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF: hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi



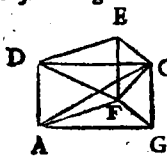
b 34. primi. c 5. duo decimi.

ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, vt perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCD-EF, in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

(*HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Sive prisma quodlibet triplum esse pyramidis, qua eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.*)

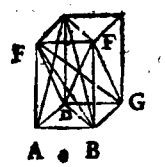
SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularē ABE. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis.



Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, a *vt demonstratum est: Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hac illi sit æqualis, imo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum.*

a 7. duodecimi.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum: & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, vt demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB: b Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul ter-



b 12. quinti.

tium

tiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aequales pyramidi ABCDE: propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nempe inter plana parallela, sunt aequales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione aequales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, *erit & pyramis* ABCDE, *tertia pars prismatis* ABCDEFGH. *Cum igitur pyramis* ABCDE, *aequalis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basim* ABCD, *constitutae, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.*

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeant latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam dissectis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertia partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes ha pyramides aequales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

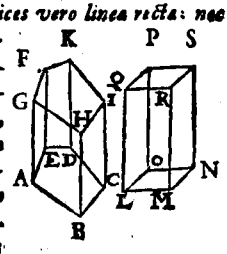
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis aequalem. Nam eiusmodi pyramis, aequalis est pyramidi illi, quae eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem tam esse diximus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases, inter se sunt, vt bases.

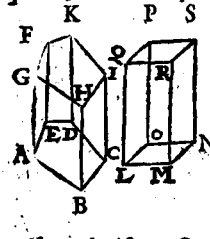
QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & aequalia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero linea recta: nec non de parallelepipedis, quae nomine prismatum continere diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases



sint

sint figura multilatera. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, sta esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, linea recta ducantur, consurgent dua pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per coroll. praedictum huius propos. qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. a Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, sta prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est, propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.

a 15. quinti.



CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM II.

(VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases quascunque, inter se sunt aequalia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quae aequales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Prismata aequalia super aequales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine: Et prismata aequalia eiusdem altitudinis, bases habent aequales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.)

SCHOLIVM II.

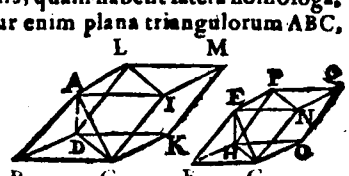
CÆTERVM tam ea, quae in priori corollario, quam illa quae in scholio proximo demonstrata sunt, intelligantur tantummodo de prismatis, quae in vertice habent plana basi parallela, aequalia & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, aequalibus, similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in paismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, sta vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertia partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent. 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud aequale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corolla-

corollario praedicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quae eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quae cum ita sint, Non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quae ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quae in verticibus plana habent basibus parallela, aequalia atque similia. Hac enim ratione, vt vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, duae tertiae partes prismatum, vt modo demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. VIII.

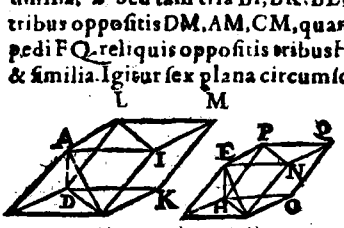
SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidũ esse triplicatã proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta KM.



Erit igitur completum parallelepipedũ BM, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi BM, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, atque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma AL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia.

a 24. undec. similia. a Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ. b sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia



sunt sex planis solidum FQ, ambientibus: Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniã vero ductis rectis

c 15. quinti. LI, PN, c prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla: d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi

d 11. quinti. e 32 undecimi. BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoq; proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

EX hoc quoq; est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia pluriumlaterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex

f 20. sexti. *angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC, LH, LI, & diuisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia: nimirum triangula ABE, EBC, CDB, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita BH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quaque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH, & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM,*

g 9 sexti. *erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH.* g *Quare æquiangula,*

gula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. a Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL, habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; b Atque idcirco erit vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quamobrem, c cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH: habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

a 8. duodecimi.

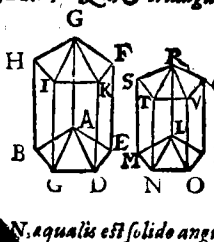
b 12. quinti.

c 12. duodec.

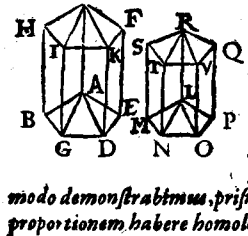
SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sunt enim duo prismata similia ABCDEFGHIK. LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD: LN, LO, d erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK: RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, simila, cũ omnia plana prismatis opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt: erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM, Vt autem CB, ad CA: ita quoq; est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus [redacted] N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum: si ille [redacted] ponatur, omnia inter se cõuenient, nimirum ii anguli MNO, angul[redacted]D, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO. angulo ICD: Conuenit autẽ & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA. sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt, Ac [redacted] ppterea cũ latera circ[redacted] ipsos ostensa sint esse proportionalia.

d 12. sexti.



nalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV, nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, qua demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.



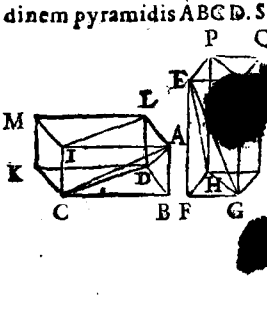
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

VII. THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, PQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia: Ac proinde parallelepipeda BM, PQ, cum sint



sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. a Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: b Vt autem basis BI, ad basim FN, ita est triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem sint, quę parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur. a 34. vndecimi. b 15. quinti.

Sint iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; c cum sit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoq; bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ: d Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum. c 14. quinti. d 34. vndec.

SCHOLIVM.

Eadem ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illa sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, basin habeant triangularem; at vero EIGHL, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum,

per propos. 45. lib. 1 Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1 Deinde super KLM fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem, ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; e erit vt basis ABC, ad basin KLM hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponitur autem hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis e 9 duodecimi.

ABCD Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

Sed reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo cum baſi KLM, æqualis ſit baſi EFGH; & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI, ponatur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt baſis ABC, ad baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.

a 9 duodecimi

Sint deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multangulæ. Fiat rurſus triangulum MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE. Erit, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIkL, baſes & altitudines reciprocantur.

Sed reciprocentur iam harum pyramidum atq; altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſi MNO, æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis ABCDE: Erit quoq; vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIkL. Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis in propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

Omnia hæc facile quoq; demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyrami-

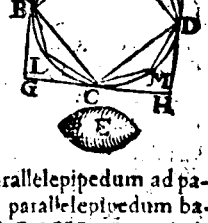
pyramides earundem altitudinum cum ipsis. & super easdem bases, æquales; cum sint eorũ tertia partes, ex coroll propos. 7. huius lib. Vel certe dua tertia, si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorũ vertices, linea recta, vt in scholio eiusdem propos. ostensum est. Quare vt modo demonstrauimus, bases harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

Rursus, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismata habentium. Quare, vt demonstratũ est, pyramides æquales sunt; & propterea prismata, cum eorũ sint tripla, vel certe sesquialtera, æqualia quoq; sunt. Quod est propositũ.

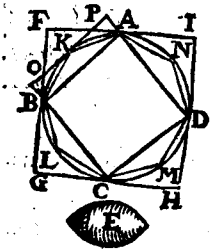
THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem. ix.

Habeant conus & cylindrus basin eandem circulum A B C D, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I. intelligaturq; super hæc quadrata tria altitudine coni & cylindri. erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I. vt ant propos. 9. lib. 4. ostendimus; & est, vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis A B C D, dimidium parallelepipedi basis F G H I; A: proinde parallelepipedum basis A B C D, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius basis circulus A L C D. Secentur bifariam peripheriæ A B, B C, C D, D A, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ K A, K B, L B, L C, M C, M D, N D, N A. Ducatur quoq; per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad prop. 17. lib. 3. ostendimus. occurrat q; rectis D A, C B, productis in P, & O; & super A k B, A B O P, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulum A K B, dimidiũ est parallelogrammi A B O P; erit quoque prisma basis A k B, dimidium prismatis, seu



parallelepipedi basis A B O P: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis A k B, maius erit, quam dimidiu & segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta A B, peripheria A K B. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ A k, k B, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omniũ segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniã vero si à cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D, & à reliquis segmentis plus quam dimidium, numirum prismata basium A k B, B L C, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium A k, k B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni, vna cum magnitudine E ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquũ prisma basis multangulæ A k B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum tripli coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.



a 1. *dec.*

Sit deinde cylindrus minor tripli coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelligantur que super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, b est-

b 6. *duodecimi.*

que vt

que vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiungunturque rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurrátq; rectis D A, C B, productis in P & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. a Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, b cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero cum cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & á reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium A K B, B L C, C M D, D N A; atque in hunc modum semper fiat detractio; & relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri. Sint iam segmenta coni relicta basium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in co-

a 41. primi. b 6. duo decimi. c 1. def.

rollario propoſitionis ſeptimæ huius libri à nobis eſt demonſtratum, erit huiuſcemodi priſma maius cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo cylindrus, minor eſt triplo coni. Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, propterea; conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

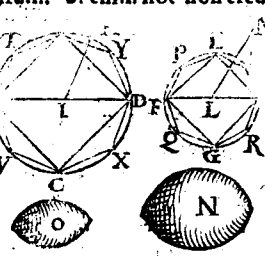
Quamuis propoſitio hac ſolum in eligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, vt perſpicuum eſt eius demonſtrationem diligenter intuenti. Itaq; propoſitio vniuerſe ita proponi poterit.

Omnis conus ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuslibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes.

Sint ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli *A B C D*, *E F G H*, altitudines vero æquales *K*, *L M*. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, ſit vt baſis *A B C D*, ad baſim *E F G H*, ita conus *A B C D K*, ad aliquam magnitudinem, nempe ad *M*, quæ vel maior erit, vel minor cono *E F G H M*. Si enim eſſet æqualis, habebit conus *A B C D K*, ad conum *E F G H M*, & ad *N*, proportionem eandem; ac propterea eſſet conus ad conum vt baſis ad baſim: quod non conceditur. Sit ergo primum *N*, minor quam conus *E F G H M*, magnitudine *O*, ita vt conus *E F G H M*, æqualis ſit magnitudinibus *N* & *O*, ſimul. Inſcribatur in circulo *E F G H*, quadratum *E F G H*: diuidanturque peripheriæ *F F*, *F G*, *G H*, *H E*, bifariam in *P Q R S*, & adiungantur rectæ *E P*, *P F*, *F Q*, &c. Quoniam igitur in ex cono *E F G H M*, deſcribatur pyramis ſuper baſim *E F G H*,



17. quinti.

cuius

eiusdem altitudinis & à reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basiu o E P F, F Q G, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est: * relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni E F G H M, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium E P, P F, F Q, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, minus si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est: erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPIQCRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo A B C D, polygonum A T B V G X D Y, simile polygono E P F Q G R H S: vt in propos. 2. huius lib. docuimus, duo autem circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. huius lib. est vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita polygonum A T B V C X D Y, ad polygonum E P F Q G R H S: Vt autem circulus A B C D, ad circulum E P G H, ita ponitur conus A B C D k, ad magnitudinem N, b & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis: Erit quoque vt pyramis A T B V C X Y D k, ad pyramidem E P F Q G R H S M, vt conus A B C D K, ad N. Cum igitur pyramis A T B V C X D Y k, minor sit cono A B C D k, pars toto, c erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quam N. Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

Sit Secundo N, maior cono E F G H M. Cum igitur ponatur vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita conus A B C D k, ad N: Erit & conuertendo vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita N, ad conum A B C D k. Ponatur vt N, ad conum A B C D k, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono E F G H M, maior quoque erit conus A B C D k, quam O. Quare erit vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O, quæ minor est cono A B C D k. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo coni E F G H M. Sed neque maior est ostensa: Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita conus A B C D k, ad N: d Sit autem vt conus A B C D k, ad N, ita idem conus A B C D k, ad conum E F G H M, erit quoque vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita conus A B C D k, ad conum E F G H M.

e Quoniam autem, vt conus A B C D k, ad conum E F G H M,

a 1. *decimi.*

b 6. *duodecimi.*

c 14. *quinti.*

d 7. *quinti.*

e 15.

ita est cylindrus A B C D K, qui triplus est coni A B C D G, ad cylindrum E F G H M; (qui triplus est coni F E G H M,) Erit quoque vt basis A L C D, ad basin E F G H, ita cylindrus A B C D K, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo vsi sumus in conis, si loco conorum & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, in se sunt, vt bases. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Perspicuum quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solu rectis proposuit, ob rationem superius tradi tam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifeste iudicat, ita vt propositio vniuersè proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Conuertetur haec propositio hoc modo.

Si coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiusdē altitudinis semper eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti vel scaleni, siue vnus, rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel vna & eadem.

Item sequitur, conos & cylindros æquales, super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

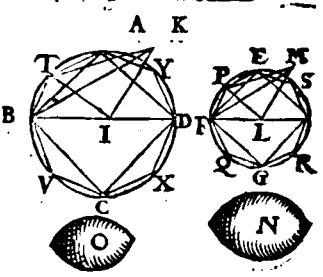
THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

Sint coni & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F, G H, axes vero L K, L M, & diametri basium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem N,

propor-

proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, vel minor, vel maior cono E F G H M. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H, quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis E P F Q G R H S M, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T, M F, M P, vt habeantur duo triangli B K T, E M P, pyramidum A T B V C X D Y K, E P F Q G R H S M, & connectantur rectæ T I, P L. Quoniam igitur coni A B C D K, E F G H M, similes ponuntur; erit ex 14. defin. lib. 11. vt diameter B D, ad diametrum F H, *b* ac propterea vt semidiameter B I, ad semidiametrum F L, ita axis I K, ad axem L M; Ac permutando vt B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cum igitur anguli B I K, F L M, recti sint ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorum bases; *c* Erunt triangula B I K, F L M, æquiangula; *d* Ac propterea vt K B, ad B I, ita erit M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad E P. ob similitudinem triangulorum B I T, F L P. (Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus arcubus B T, F P, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est: sitque vt B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æqualitatem tam linearum B I, I T, quam F L, L P, & erunt triangula B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, vt K B, ad B T, ita M F, ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sunt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis I K, rectus ponatur ad circulum A B C D, *f* erunt bases K B, K T, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ M F, M P: Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erunt, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. *g* Quoniam vero vt K B, ad B T, ita K T; ad eandem B T: Item vt M F, ad F P, ita M P, ad eandem F P; Erat autem vt K B, ad B T, ita M F, ad F P: Erit quoque vt K T, ad B T: ita M P, ad F P; Et conuertendo vt B T, ad T K, ita F P, ad P M. Quare cum sit vt T K, ad K B, ita P N, ad M F, & vt K B, ad B T, ita M F, ad F P; Et vt B T, ad T K, ita F P, ad P M, veluti ostensum est; habebunt triangula B K T, E M P, latera proportionalia, *h* ideo-



a 7.

b 15. quinti.

c 6. sex.

d 4. sex.

e 6. sex.

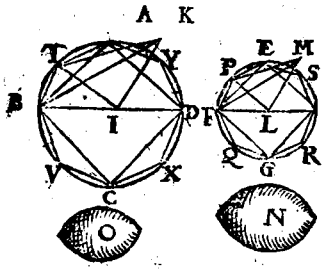
f 4. pri.

g 7. quinti.

h 6. sex.

que æquiangula erunt: Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYk, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æquania, erunt dictæ pyramides similes ex defin. 9 lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL similitudinem triangulorum BIT, FLP:

a 11. quinti.



a Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDk, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDk, ad N. Quare cum pyramis

b 14. quinti.

ATBVCXDYk, minor sit cono ABCDk, pars toto, b erit & pyramis EFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono EFGHM.

Sit deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime ostendimus: Erit vt conus ABCDk, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM: & conuertendo vt N, ad conum ABCDk, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYk Quare cum ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYk, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PE, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD: habebit quoq; N, ad conum ABCDk, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ACBDk, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia

c 14. quinti.

N, maior ponitur quam conus EFGHk: c erit quoque conus ABCDk, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDk, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem

alio

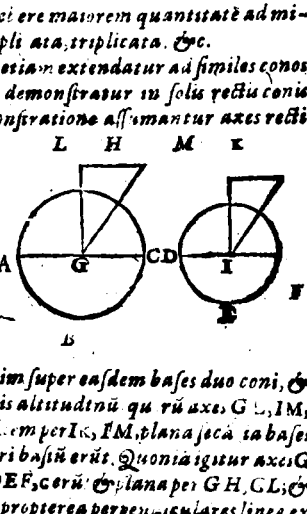
alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGH Sed neque minor est ostensa Æqualis igitur est; ac proinde conus ABCDK. eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum BD, & IH erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata. [a] 7. quinti. [b] 15.

[b] Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoq; obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atq; prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat. 2.

SCHOLIVM.

Quod si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur perspicuum est, in secunda parte huius propos. Euclidem assentire, demonstratum esse propos. 8 huius lib minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterũ homologorum triplicatã. Li quod ad defin. 10. lib. 5 monuimus contra Federicum Commandinum & alios, qui putant referri semper deficere maiorem quantitatẽ ad minorem, vt habeatur proportio dupli ata, triplicata, &c.

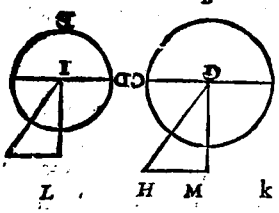
Hac porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cũ in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similis coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABC, DEF, axes vero CH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrũ triplicatam. Intelligatur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundẽ cũ scalenis altitudinũ quæ rũ axes GL, IM, Ducanturq; per rectas GH, GL, IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF, quæ diametri basium erũt. Quoniam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC DEF, erũt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdẽ recta CA. propterea perpendiculares lineæ ex vnde HK, ad bases demissæ cadẽt in AC, DE, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationũ, qui æquales in eruntur,



c 18. d 8.

se erunt

se erunt, eum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem
a 32. primi *& anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Reliqui igitur, HGL, KIM, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL*
b 29. primi. *per axium vertices ducta ipsi AC parallela; ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK, Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula sunt; atque idcirco erit vt GH, ad GL, ita IK, ad IM; &*
c 4. sex. *permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, vt diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, similes erunt ex definitione.* d *Quare*
d 12. duodec. *proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll propos. 11. huius lib. Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM. ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.*



13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

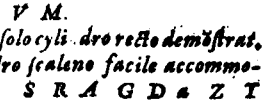
Secetur cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico vt est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantum libet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ Ek, kL, æquales ipsi EI; Item quotcunque rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, k, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, kP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, describent circulos GH, PQQS, Ta, VZ,

T a, V Z X Y, parallelos æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quę ſemper inter ſe æquidiſtantes circumferuntur. A: propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum S Q X Y. Quoniam vero tam cylindri S P, P A, A H, ſuper baſes æquales Q S, P R B A, & ſub altitudinibus æquantibus k L, E k, I E, æquales ſunt, quam cylindri X Z, Z T, T D, D H, ſuper æquales baſes X Y, V Z, T a,, C D, & ſub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus

S H. cylindri A H, quam multiplex eſt axis I L, ipſius axis I E; I cum tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quam multiplex eſt axis I O, ipſius axis I F, Quoniam autem ſi axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi I O, (multiplici axis I F, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior. eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt, Et ſi minor, minor, in quacunque hęc contingat multiplicatione; Erit, per defin 6: lib. 5 ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, ſecundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Etſi hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demõſtrat, tamen eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodatis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni, ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulũ circa quieſcens latus circumfertur, ſic quoque

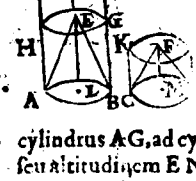


in conis ſcalenis circumferantur ſemidiametri L S, k R. E A, &c. ſemper æquidiſtantes circa centra L, k, E, &c. una cum recta S T, ſemidiametros coniungente. Hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur. vt conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in l. b. 1. de ſectione cylindri.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xj.

Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.

Sint ſuper baſes æquales AB, CD, duo coni *A B* E, C D F, & duo cylindri A B G H, C D I k, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) L E, M F. Dico eſſe conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum *A* B-G H, ad cylindrum C D I k, vt eſt altitudo L E, ad altitudinem M-F. Extendatur enim cylindrus *A B* G H, ad partes G H, vna cum eius axe *L* E, & rectangulo A G; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O P, eiuſdem altitudinis cum cylindro C *D* I k. Quoniam igitur cylindri H-P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. *a* cylindrus *A* G, ad ipſos eaudem habebit proportionem. *b* Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, vt axis ſeu altitudo L *E*, ad axem ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo *L E*, ad altitudinem M F.



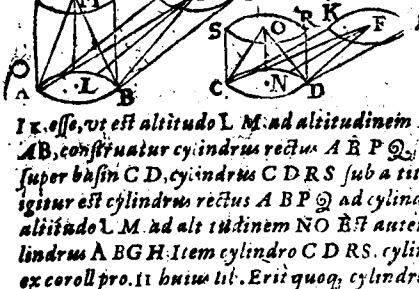
a 7. *quinti.*
b 13. *duode.*

c Quia vero coni *A* B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; *d* ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem. Ac proinde erit quoque conus A *B* E, ad conum C *D* F, vt altitudo L-E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

c 10. *duode.*
d 15. *quinti.*

SCHOLIVM.

Hoc idem conuenire conis ſcalenis hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E, C D F & cylindri A B G H, C D I k, ſcaleni quorum altitudines L M N O. Dico conum A B E, ad conum C D F & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D-I k, eſſe, vt eſt altitudo L M, ad altitudinem N O. Super baſin enim A B, conſtituatur cylindrus rectus A B P Q, ſub altitudine L M, ita ſuper baſin C D, cylindrus C D R S ſub altitudine N O. Quoniam igitur eſt cylindrus rectus A B P Q ad cylindrum rectum C D R S vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Eſt autem cylindrus A B P Q, cylindrus A B G H. Item cylindro C D R S, cylindrus C D I k, æqualis, ex coroll. pro. 11. huius lib. Erit quoq; cylindrus A B G H, ad cylindrum C D I k, vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod eſt propoſitum.



e 14. *duod.*
f 10. *duode.*

Quoniam autem coni, ſcum ſint tertiæ partes cylindrorum

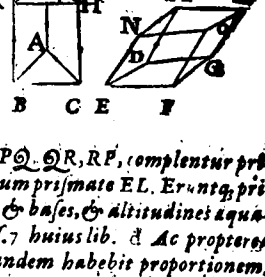
eiuſdem

a eandem habeant proportionem, quam cylindri. Erit quoq; conus ABE, ad conum CDF vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod quintò tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinem cum cylindris ABPQ CDRS. a 15. quinti

Idem cõcluditur quamuis vnus conorum & cylindrorum, nempe conus ABE & cylindrus ABGH, fuerit scalenus; alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus, CDRS, rectus. Nam cũ cylindrus scalenus ABGH, aequalis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demõstrauit: Erit quoq; cylindrus scalenus ABGk, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

b Quoniam vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, c cum illi horum sint tertia partes; Erit etiam conus scalenus ABE ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est. b 15. quinti. c eo. duodec.

Eadem quoq; hac propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super aequales bases constitutis. Sint enim super bases aequales ABC DEFG prismata ABCHIk, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinib. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem Sint namq; insistentes lineae AI, CH, Bk prismatis ABCHIk, ad basin ABC, perpendiculares, ita vt Bk sit altitudo prismatis ABCHIk. Productis autem rectis AI CH Bk, sumantur IQ HR, kP, aequales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, complentur prismata HIkPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Erunt q; prismata HIkPQR EL, cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se aequalia ex coroll. 2. propos. 7. huius lib. d Ac propterea prisma ABCHIk, ad vtrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25 lib. 11 prisma ABCHIk, ad prisma HIkPQR, est vt planum BI, ad planum kQ, e Et vt planum BI, ad planum kQ, ita est recta Bk ad kP; erit prisma ABCHIk, ad prisma HIkPQR, hoc est, ad prisma EL, vt Bk, altitudo prismatis ABCHIk, ad kP, altitudinem prismatis HIkPQR hoc est, prismatis EL. Quod propositum.

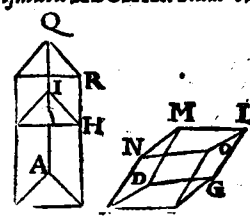


d 7. quinti. e 1. sexti.

Quod si insistentes lineae AI, CH, Bk, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, a inde prisma

cuius

uius insistentes sint perpendiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cum ex 2. coroll propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habētia altitudinem, & basin, sint æqualia, sitq; prisma constitutū ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem, erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.



a 15. quinti. b 10. quinti. a *Quoniā vero pyramides eandem proportionem cum prismatis,* b *quod illa sint horum tertia partes: Perspicuum est, ita quoq; esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.*

Eadem prorsus ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

Hæc omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

Omnia quoq; hæc facile conuerti possunt hoc modo.

Coni & cylindri tam recti, quam scaleni, Item prismata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines bases habebunt æquales.

Nam alioquin pars æqualis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

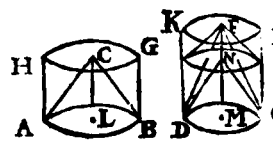
xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

Sint æquales coni ABC D, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudines ve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostenderur. Si altitudines LC, MF, sint æquales; cum cylindri ponantur quoque æquales, erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.

Quod

QVOD ſi altitudines L C, M F, inæquales fuerint, ſit M F, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi L C, æqualis: & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri A B G H, DEIK: *a* erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. *b* Eſt autem vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita baſis A B, ad baſin D E, cum æquales ſint altitudines: *c* Item vt cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cum baſes ſint æquales, imo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc eſt, ad huic æqualem L C: Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.



a 7. *quint.* b 11. *duodec.* c 14. *duodec.*

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni A B C, D E F, ſint æquales: erunt & cylindri A B G H, D E I K, æquales. *d* cũ coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas: Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demõſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, vt in figura.

d 10. *duodec.*

SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris cõfirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, ſint æquales, cum ſit vt baſis A B, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C: erunt & baſes A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes A B, D E, & ſub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis A B, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem L C, hoc eſt, ad huic æqualem M N: *e* Eſt autem vt baſis A B, ad baſin D E, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, cum altitudines ſint æquales: *f* Item vt altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cum baſes ſint æquales: erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O: *g* Ideoque cylindrus A B G H, cylindro D E I K, æqualis erit.

e 11. *duodec.* f 14. *duodec.* g 9. *quinti*

AT vero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum A B C, D E F, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, quandem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Q

obrem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

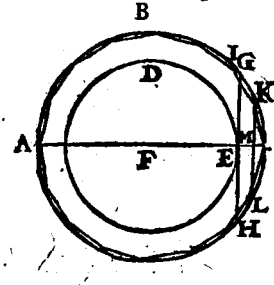
NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti eadē cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoq; erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

XIII. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli A B C, D E, circa idem centrum F, oporteatque in maiori A B C, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta A C, secans circulū DE, in E, puncto, & per E ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulū D E, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniā igitur arcus AGC, maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidiū IK, & sic deinceps; *a* relinquetur tandē minor arcus quam CG Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes



a 1. decimi.

numē-

numero & magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, a quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ KK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt: b erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DF, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neq; alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, c ideoque æqualiter cum CK, à centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

a 29. sexti.

b 29. sexti.

c 14. tertij.

COROLLARIVM.

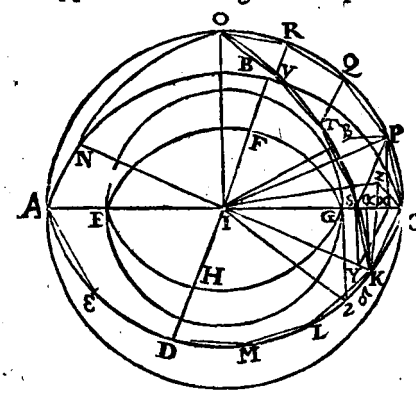
(HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.)

PROBL. 2. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS sphæris circà idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circà idem centrum I, oporteatq; in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum. sintq; communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrũ sphærarũ I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadẽtes ex I, ad peripherias sectionũ sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarũ ad earũ superficiem, erunt ipsæ sectio-

nes, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BC, sese in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint
a 16. duodec. quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. *a* Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex C, ad EG, ducatur perpendicularis G γ, ad circumferentiam vsque circuli A B C D, quæ circulum
b 1. quarti. EFGH, tangit in G, ex coroll propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, *b* applicetur in circulo ABCD, recta æqualis A ε. Quia vero si arcui
c 19. primi. C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, *c* latus C γ, oppositũ maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ.



quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta C γ, maior recta A ε; ac proinde arcus C γ, arcu A ε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod si ex quadrante C D, dimidiũ auferatur D L, & ex reliquo
d 1. dec. CL, dimidium L K, & sic deinceps: *d* relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, seu arcu A ε. Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C K, subtensa minor quam recta A ε, hoc est, quam G γ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet: multo minus recta C K, subtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulũ tan-
e 12. vn decimi. get. Rursus ducta diametro K N, *e* erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis I O, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, K N,
f 18. vn decimi. plana ducantur, *f* quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia vero anguli O I C, O I K, recti
g schol. 11. def. 11. sunt, ex defin 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt O C, O K: atque adeo cum circuli ABCD, D O C, N O K, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, quoque quadrantes C D,

tes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL: & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD: a Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD: CP, PQ, QR, RO, KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY b quæ in communes sectiones AC, NK, cadent: c eruntque inter se parallelæ.

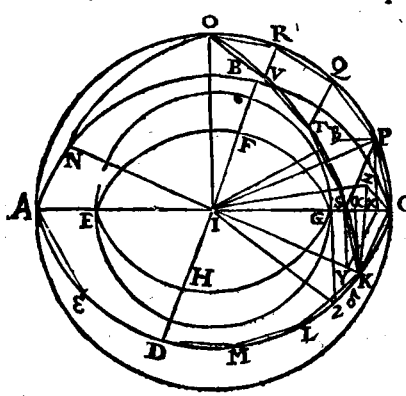
a 29. tertij.
b 38. vndec.
c 6 vndecimi.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKI, anguli PXC, SIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. d. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt: (Nam si ex semicirculis AOC. NOK. æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. e Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PY, SY, æquales sint & parallelæ: si connectatur recta XY, f æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter se. g At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, reliquentur & IX, IY, æquales: AC proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad IK.) h Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi XY, i ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS: in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CK, SP, in vno erit plano. Quod si ex Q. & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas: atque adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, sint parallelæ: totumque quadrilaterum PSTQ, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterū QTVR. k Est autem & triangulum RVO, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis, inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptū dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

e 26. primi.
f 33. primi.
g 2 sex.
h 8. duodec.
i 17. vndecimi.
k 2. vndecimi.

DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IK, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequenti

ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3 lib. 1. anguli IZC, IZK, a 47. 1 mi. recti sunt; a erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia: Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erũt, ideoque & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P transibit. Eademq; ratione circa reliqua quadrilatera PST Q. QTVR, & triangulũ RVO, circulos describi posse: demõstrabimus. Quoniam vero, b 12. secund. vt postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est: b erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarũ ZC, ZK: ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.



DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendiculares K, α, Cum igitur AC, dupla ipsius AI, & Aα, maior sit, quam AI, erit AC, e 1. sex. minor duplo ipsius Aα. Quam ob rem cum sit, c vt AC, ad Aα, ita rectangulum sub AC, αC, ad rectangulum sub Aα, αC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aα, & eadem altitudo αC: erit quoque rectangulum sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. d Est autem rectangulum sub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK, & rectangulum sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα: quod recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis, & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim conecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratũ rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. e Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale e 47. primi. est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis re-

tis rectarum I α, α K; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarum I α, α K. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ α K; & ex illis minus, videlicet rectæ Z C, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z, maior quam recta I α. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorem E F G H, quod per coroll. propos. præcedentis recta K α, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani C K S P, longius absint a sphæra E F G H, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum C K S P, sphæram E F G H.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum C K S P, non tangere sphæram minorem E F G H, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam C K, minorem esse recta C γ: a Est autem a 19. C K, maior quam Z C, quod angulus C Z K, obtusus sit, vt mox primi. demonstrabitur; Multo maior erit G γ: quam Z C; Ac propterea quadratum rectæ G γ, maius quadrato rectæ Z C. b Quia vero b 47. quadratum rectæ I γ, æquale est quadratis rectarum I G, G γ; & primi. quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur, quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quamobrem, cum I G, sit Sphæræ minoris E F G H, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum G K S P, sphæram E F G H, nequaquam continget.

DVCATVR rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa P S T Q, descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. c erit quadratum rectæ I P, æ- c 47. quale quadratis rectarum I β, β P. Quia vero & quadratum rectæ primi. I C, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I C, I P,) æquale est quadratis rectarũ I Z, Z C; erunt quadrata rectarum I β, β P, quadratis rectarum, I Z, Z C, æqualia; Est autem quadratũ rectæ Z C, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, maior sit, quam linea β P, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratũ rectæ I β, reliquo quadrato rectæ I Z, maius erit; ideoq; & linea, I β, maior quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram E F G H, existet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget sphæram maiorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus,

quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

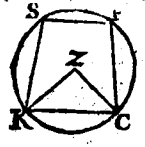
COROLLARIVM

(EX iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quæ habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum: vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrū descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cū singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum: vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autē, vt vna pyramis ad vnā pyramidē ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum vnius sphæra ad polyedrum alterius sphæra proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, a cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.)

a 15. quinti.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera: quæ tamen nondum sunt demonstrata: idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. 

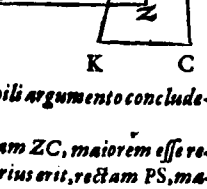
Quoniam igitur in figura superiori, est vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, similia sint.) Est autem IK, maior quam IY: b erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostensæ ipsi SP, erit quoque KC, maior quam SP. Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. c Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ: (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figura superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores: Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS,

b 14. quinti.

c 28. lib. iij.

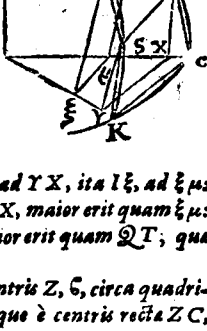
C P, K S, quadrantem circuli C K, S P, excedet: atque à semicirculo superabitur: ac proinde multo magis segmentum S P, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illius segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum C K S P. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex l, ad planam aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est K β, cadere intra quadrilatera: nec non & perpendicularem ex l, ad triangulum O R V, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus C K, quadrante maior est: angulus C Z K, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est scholio propos. 27. lib 3.

S E C V N D O demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri C K S P, longius à centro l, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunq; aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & adiungantur rectæ l θ, Z θ. Quoniam ergo angulus l Z θ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppositum l θ, maius latere l Z, quod minori angulo l θ Z, nimirum acuto, opponitur: Ac propterea punctum θ, longius à centro l, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.



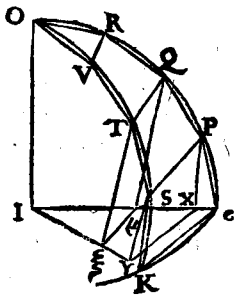
a 19. pri.

T E R T I O, ac vltimo probandum est, rectam Z C, maiorem esse recta β P. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam P S, maiorem esse recta Q T. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, qua continetur semidiametris l C, l K, l O, & quadrantibus O C, O K, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, O ad planum circuli A B C D, in quo est triangulum l C K, perpendiculares Q μ, T ξ, b qua in communes sectiones l C, l K, cadent, c erunt q; inter se parallelæ, vt de rectis P X, S Y, dictum est. Quod si adiungatur recta μ ξ: erunt Q T, μ ξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse æquales S P, X Y. d Quia vero μ ξ, ipsi C K, parallela est quod latera l C, l K, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta X Y: e erunt quoq; μ ξ, X Y, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt l Y, ad Y X, ita l ξ, ad ξ μ. Est autem l Y, maior quam l ξ. f Igitur & Y X, maior erit quam ξ μ: Ac proinde & P S, qua æqualis est ipsi X Y, maior erit quam Q T, qua æqualis est ipsi ξ μ.



b 38. vndec.
c 6. vndec.
d 2. sex.
e 30. pri.
f 14. quinti.

H O C ergo demonstrato, describantur ex centris Z, ζ, circa quadrilatera C K S P, P S T Q, circuli egredianturque à centris rectæ Z C, Z K, Z S, Z P: ζ P, β S, β T, β Q. Si igitur Z C, non credatur maior, quam β P, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo

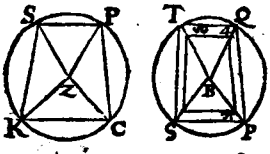


latera Z K, Z C, aqualia, ponuntur lateribus β S, ζ P, & baſis K C, maior eſt baſe P S; a erit angulus K Z C, maior angulo S ζ P: Eadem ratione maior erit angulus S Z P, angulo T ζ Q. At quoniam baſes K S, G P, baſibus S T, P Q. ſunt aequales; b erunt anguli K Z S, C Z P, angulis S ζ T, P ζ Q, aequales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad ζ: Sunt autem & aequales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint aequales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur aequalis eſt recta Z C, rectae ζ P.

a 25. primi.

b 8. primi.

S i T deinde Z C, minor quam ζ P, & abſcindantur ζ π, β ϱ, β ω, β φ, ipſis Z C, Z K, Z S, Z P, aequales, connectantur q rectae π ϱ, ϱ ω, ω φ, φ π, c quae parallelae erunt rectis P S, S T, T Q, Q P, eo quod rectae ex centris ſectae ſunt proportionaliter; ac proinde ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit vt β S, ad S P, ita β ϱ, ad ϱ π. Cum ergo β S, maior ſit quam β ϱ, d erit & S P, maior quam ϱ π. Eadem q ratione maiores erunt S T, T Q. Q P, rectis ϱ ω, π φ, φ π: Ac propterea cum P S, minor ſit, quam C K, & S T, P Q, aequales rectis K S, C P: & T Q, minor quam P S, erunt rectae π ϱ, ϱ ω, ω φ, φ π, minores rectis C K, K S, S P, P C. Quare cum rectae β π, β ϱ, β ω, β φ, rectis Z C, Z K, Z S, Z P, ſint aequales: e erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & aequales. quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis aequales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta Z C, quam β P: Sed neq; aequalis eſt oſtenſa: Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.



k 6. ſexti.

l 14. quinti.

m 25. primi.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

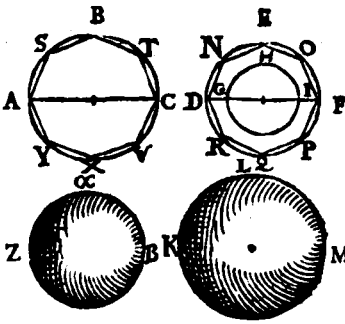
SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SINT duæ ſphæræ A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. Dico ſphæram A B C, ad ſphæram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra A B C, ad aliam ſphæram G H I, minorem, vel K L M, maiorem, quam D E F, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrum A C, ad diametrũ D F. Habeat primum ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæræ D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; in-

n 17 duo decimi. telligaturque ſphæra G H I, concentrica ſphæræ D E F, f Inſcri-

f batur

batur in ſphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI: Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, a erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.



a 14. quinti.

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedētis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametsi AC, ad diametrū DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, : Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphærā Zαβ, proportionē triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoq; ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphærā Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatā diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt,

non

non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem non habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphæram KLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neq; ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter se sunt triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM

(HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum simile habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.)

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI

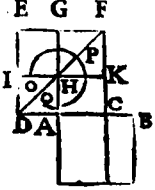
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et ſolidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quàdratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela, ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. *a* Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *b* erit rectangulum CM, ſub AB, GB. æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB: & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: *c* Eſt autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, qua-



a 3. defi. ſexti.
b 17. ſexti.
c 1. ſexti.
d 43. primi.

AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4 lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD, erit & gnomon OPQ eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratū CE, quadrati AI.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ
§ 2. sect. AD, ponatur. *a* Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, cōprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB,
b 1. sext. AD, est dupla, *b* ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectangulī sub AD, AC, duplū ipsius cum vtriusq; rectanguli eadē sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) *c* Quod vero sub AB,
c 17. sexti. BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD.
§ 4. sec. *d* Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

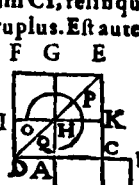
A C D B

§ 2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, positq; quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratū BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in pūcto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB; Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturque EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum

plum ponitur quadrati CI: Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus. Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2 quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomō OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD: & CH, ipsi AC, æqualis: erit & LC, ipsius CH, dupla. *a* Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK: erit quoque illud huius duplum: *b* Est autem CK, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB, ipsis CK, HF. Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD: estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB: *c* Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum CB.



a 1. sexti.

b 43. primi.

c 17. sexti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC: *d* est quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo sub AC, CB, bis: Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vna cum rectāgulo sub AC: CB, bis quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratū rectæ CB, & rectāgulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdē quadrati rectæ AC: Est autem & quadratū rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2: Aequale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum A — C — B — D ergo rectangulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectangulo sub CD, CB: (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, *e* ita quoque duplum erit rectangulū sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB: cum vtriusque rectāguli eadem sit altitudo CB: Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: *f* At quadratū rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulū sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CC, & sub CD, BD: Ac proinde dempto communi rectāgulo sub CD, CB, relinquetur quadratū rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD: *g* ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque segmentū maius CB. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum posit, &c. Quod erat demonstrandum.

d 4. sexti.

e 1. sexti.

f 2. sexti.

g 17. sexti.

LEM.

LEMMA.

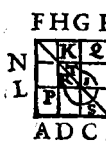
QVOD autem recta CD, maior sit necessario quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, a *cumæquale sit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB, ideoque demptacommuni AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB, Quod est propositum.*

a 4. secundi.

XII. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH in P, Q. Eruntque excoroll. propos. 4. lib 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, b erit rectangulum sub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD. CD: erunt earum latera HK, IQ, æqualia: c ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. d Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. e Est autem IO, ipsi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID. æquale



b 17. sexti. c 34. primi. d 36. primi e 43. pr.

æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ: erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati BQ, ex recta CD.

ALITER. Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita CB, a erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum sub AA, CB, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum sub AB, AC, æquale quadrato rectæ AC: quod cum ex scholio propos. 4. l. 2. quadruplum sit quadrati rectæ CD: erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulū sub AB, BC, vna cū quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

a 6. 2. communia

A C D B

b 17. sexti

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoq; cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum AC, bifariam sectum sit in D, sitq; quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ GD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus, (Sum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ.) ex rectæ CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æquale erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, vt ostensum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum: c Ac

ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, secta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

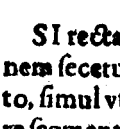
a 6. secundi. *ALITER Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita GB, a erit rectangulum sub AB, BG, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD: Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD: rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ*

b 17. sexti. *AC, æquale est rectangulum sub AB, BC.* b *Quamobrem erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde secta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

v. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sit que segmentum maius AC, & minus CB, Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC, Describatur



enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in punctο G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC,

c 17. sexti. ad CB: c erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD: erit gnomon KLM, vna cum quadrato GH, duplus quadrati IF: Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectæ BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

d 17. sexti. ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: d erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC,

e 7. secundi. triplum quadrati rectæ AC. e Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrati rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta secundum extremam & mediam

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.)

SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraque simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, GD; Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC: a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema ac media ratione. a 17. sexti.

ALITER. *Cum quadrata rectarum* AB, BC, *tripla sint quadrati rectæ* AC; b *Sint vero quadrata rectarum* AB, BC, *æqualia quadrato rectæ* AC, *& rectangulo sub* AB, BC, *bis: erit &* C b 7. secundi. *quadratum rectæ* AC, *vnà cum rectangulo sub* A B AB, BC, *bis, triplum quadrati rectæ* AC. *Dempto ergo quadrato rectæ* AC, *relinquetur rectangulum sub* AB, BC, *bis, duplum quadrati rectæ* AC. *Et proinde rectangulum sub* AB, BC, *semel, æquale quadrato rectæ* AC. c *Quare vt prius erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB: *ideoq;* AB, *in* C, *secta erit extrema ac media ratione.* c 17. sexti.

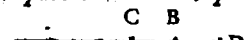
EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta

illa linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt.

SIT primum recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum eſſe quadrati ex AC, maiore ſegmento. a *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* b *Rectangulum autem ſub AB, BC, æquale eſt quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, ſint continuè proportionales) erit rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, AC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.*

a 8. ſecundi. b 17. ſexti.



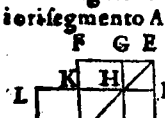
SIT deinde recta AB, ſecta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis, ſitq; quadratum ex AD, quadrati ex AC, maiori ſegmento quintuplum. Dico AB, in C, ſectam eſſe extrema ac media ratione. c *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, vna cum quadrato ex AC: quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc eſt, rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* d *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

c 8. ſecundi. d 17. ſexti.

IV. THEOR. 5. PROPOS. 5.

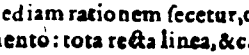
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentũ AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori ſegmento AC. Dico rectã BD, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeq; maius ſegmentum AB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipſi BE, parallela CG, ſecans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipſi BD, parallela IK, & ex D, ducatur



catur ipſi AF, parallela DL, occurrens ipſi IK, producta in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2 CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; a Erit rectan- a 17. ſe-
gulum IF, contentum ſub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. xti.
b Eſt autem CK, ipſi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi AL: b 36.
additoque communi BK, erit rectangulum BL, contentum ſub primi.
BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB: c Ac proinde erit vt BD, c 17. ſe-
ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ra- xii.
tione, eſtque maius ſegmentum AB.

ALITER. Quoniam eſt vt AB, ad AC, hoc eſt, ad AD, ita AC, ad CB: Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad DA: & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, opponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extremâ ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum AB, minus autem ſegmentum AD, & ex maiori ſegmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori ſegmento AD. Dico maius ſegmentum AB, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figura conſtructione, cum ſit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD, d *erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB: & ablato communi BK, erit AL, æqua-* d 17. ſexti.
le ipſi IF: e *Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF,* e 36. primi.
contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC: f *Ac proinde erit vt* mi.
AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C, extre- f 17. ſexti.
ma ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum.

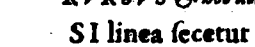
ALITER. Quoniam eſt vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB, g *erit quæ-* g 19.
que ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius quinti
AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc eſt, vt AB, ad AC: Ac propter-

ea diuisa erit AB, *in* C, *extrema & media ratione. Quod est propositum.*

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, *extrema ac media ratione in* C, *sitque* DE, *dimidium totius, &* DF, *dimidium maioris segmenti* AC. *Dico* DE, *in* F, *secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse* DF.



Cum enim sit vt AB, *tota ad* DE, *totam, ita* AC, *ablata ad* DF, *ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla:* a *erit quoque reliqua* CB, *ad reliquam* FE, *vt tota ad totam: Ac proinde &* CB, *dupla erit ipsius* b FE. *Quoniam vero est, vt* AB, *ad* AC, *ita* DE, *dimidia illius, ad* FE, *dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione,* AB, *ad* AC, *vt* AC: *ad* CB: *erit quoque* DE, *ad* DF, *vt* DF, *ad* FE: *Ac proinde ex eadem defin.* DE, *secta erit in* F, *extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

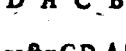
a 19. quinti.

b 15. quinti.

VI. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumq; segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. *c* Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD: habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. *d* Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD: propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent porportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8.



c 1. tertiidec.

d 6. dec.

e 9. dec. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) *e* erunt

rectæ

rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantū commensurabilis: a erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome. a 74. decimi.

RVRSVS applicata ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, b erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, c facit alterum latus BE, hoc est rectam CB, illi æqualem, Apotomē primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. b 17. sexti. c 98. decimi.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano offendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sit q, maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D: erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. d *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum: e ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ ED, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24 lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD; Rationalis potentia tantum commensurabilis;* f *erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

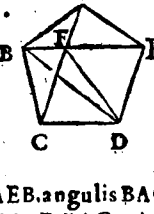
d 3. tertiæ. e 6. dec. f 74. decimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. VII.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint; Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABGDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonū esse

æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD: & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ BF, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur laterâ AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; *a* erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; *b* Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD: Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; *c* Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; *d* erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera AF, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, trianguli FCD: & basis communis FD; *e* erunt & anguli dictis lateribus contenti GED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi æquales. Æquales igitur sunt toti anguli AED, BCD: Ac proinde cum angulo AED, ostensus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE: erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.



a 4. pri.
b 5. pri.
c 4. pri.
d 6. pri.
e 8. pri.

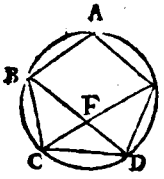
SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D, Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD: & anguli quoque ipsis contenti, æquales, ex hypothesi: *f* Erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales: *g* Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE: erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D: Ac proinde vt iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

f 4. pri.
g 5. pri.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæc extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, D, rectæ DB,



CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni. *a* Descripto enim circulo circa pentagonum; *b* erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, CB, trianguli DCB; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi: *c* Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCB, æquales: ac proinde cum in triangulo CDE, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, *d* & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: *e* Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt: *f* Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. *g* Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, triangulis BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD. *h* Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. *i* Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD: Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum DF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. *quarti.*
b 28. *tertij.*
c 4. *primi.*
d 32. *primi.*
e 33. *sexti.*
f 6. *primi.*
g 27. *tertij.*
h 32. *primi.*
i 4. *sexti.*

SCHOLIVM.

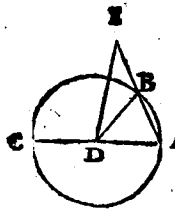
FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est. BD, parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum. k *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales:* l *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

k 22. *tertij.*
l 28. *primi.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectum adda-



tur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diametra AC, coniungaturq; rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruples erit arcus AB. *a* Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) *b* erunt & anguli BDE, BED, æquales: *c* quibus cum æqualis sit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: *d* Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadruplicabuntur anguli BED. *e* Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC, erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensum fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD, *f* erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. *g* Igitur erit vt EA, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis ad BA: Atq; idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.

a 33. sex.
b 5. pri.
c 32. primi.
d 5. pri.
e 32. primi.
f 32. pri.
g 4. sex.

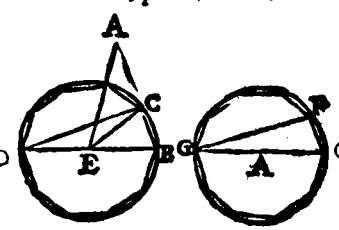
SCHOLIVM.

QVIA verò demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum linea diuisa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum secari quoq; extrema & media ratione, eiusq; segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonstrabimus Videlicet.

SI linea diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentũ latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

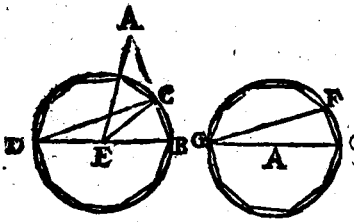
SIT enim AB, *diuisa in* C, *extrema & media ratione, sitque primum* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Dico minus segmentum* CB, *esse eiusdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim* BC, *in circulo, ita vt* CA, *extra circulum cadat. Et ducta ex* B, *per centrum* E, *diametro* BED, *connectantur recta* EA, EC. *Quia ergo est, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB: *& est* AC, *latus hexagoni æquale semidiametro* EB, *ex coroll. propos 15. lib. 4. Erit quoq; vt* AB, *ad* BE, *ita* EB, *ad* BC, *ideoque triangula* ABE, EBC, *æquiangula erunt, cum habeant latera circa communem angulum* B, *proportionalia: eritque angulus* A, *angulo* BEC, *æqualis. Rursus quia latera* CA. CE, *æqualia sunt, nempe latera hexagoni;* b *erunt anguli* CAE, CEA, *æquales; quibus cùm æqualis sit externus* BCE, *erit* BCE, *duplus anguli* A: d *Est autem angulo* BCE, *angulus* CBE, *ob æqualitatem laterum* EB, EC, *æqualis. Igitur &* CBE, *duplus erit anguli* A; *Ac proinde duo anguli* BCE, CBE, *simul quadrupli erunt eiusdem anguli A.* e *Cùm ergo anguli* BCE, CBE, *æqualis sit externus* CED; *erit quoque angulus* CED, *eiusdem anguli* A, *& propterea anguli* BEC, *qui æqualis ostensus est angulo* A, *quadruplus.* f *Quare & arcus* CD, *quadruplus erit arcus* BC; *Ac proinde arcus semicirculi* BCD, *eiusdem arcus* BC, *quintuplus, existet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus* BC. *Quapropter recta* BC, *latus est decagoni.*



a 6. sex.

b 5 pri.
c 32. primi.
d 5. pri.
e 32. primi.
f 33. sex.

SIT *deinde* CB, *minus segmentum, latus decagoni circuli* BCD. *Dico maius segmentum* AC, *esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus* BC, *in circulo* BCD; *ducaturq; diameter* BED. *Deinde interuallo* AC, *describatur circulus* CFH, *cuius diameter* CAG, *erit q; ex coroll propos. 15 lib. 4.* AC, *latus hexagoni circuli* CF. *Quoniam igitur* AB, *secta est in* C, *extrema ac media ratione, est q; maius segmentum* AC, *latus hexagoni circuli* CFG: *erit vt iam ostensum est, minus segmentum* CB, *latus decagoni eiusdem circuli* CFG, *Describatur ergo in circulo* CFG, *decagonum æquilaterum, & æquiangulum* CFG: *Item in circulo* BCD: *decagonum æquilaterum, & æquiangulum* BCD: *erunt q; latera* BC, CF, *inter se æqualia. Quoniam verò si com-*



si connectantur rectæ CD, FG, *anguli* GDB, FGC, *sunt æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistant arcubus similibus* BC, CF, *nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoq; anguli* BCD, CFG, *in semicirculis æquales, a* *nimirum recti:* b *Erunt quoque latera* BD, CG, *inter se æqualia. Quamobrem cum diametri* BD, CG, *sint æquales, æquales quoque erunt circuli* BCD, CFG. *Ac proinde cum recta* AC *sit latus hexagoni circuli* CFG, *erit quoque eadem recta* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Quod est propositum.*

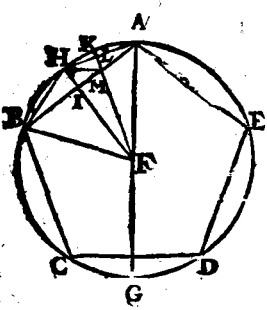
a 31. tertij.

b 28. primi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

In circulo ABCDE, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vna cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta EB. Diuiso deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, secans rectam AB, in I: eritque recta AH, latus decagoni, & EF, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, secans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniam igitur arcus AH, BH, æquales sunt; *e* erunt & anguli ipsis insistentes AFH, BFH, æquales. Quare cum latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia sint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipsis contenti æquales quoque; *d* erunt & bases AI, BI, æquales & anguli AIF, BIE, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ AL, HL, & anguli ALF, MLF, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus AB, DG, AEDG, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquentur arcus CG, DG, inter se æquales, ideoque erit arcus CG, dimidium arcus CD. Est autem & arcus AH, dimidium arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales sint: erunt quoque eorum



e 27. tertij.

d 4. primi.

eorum dimidii arcus CO, AH, æquales; Ac proinde cùm arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales sunt, & est arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, eiusdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquè multiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH: *a* Ac propterea totus arcus BG, duplus quoq; erit totius arcus BK, *b* & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: *c* Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; *d* Ac propterea triangula ABF, FBM, cùm habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; *f* ideoque rectangulum sub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 1. quinti.
b 33. sexti.
c 20. tertij.
d 32. primi.

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia sunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: *h* Est autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia sint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. *k* Quamobrem erit vt AB, ad AH, ita AH, ad HM; *l* ideoque rectangulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostensum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarum BF, AH, *m* At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

g 4. primi.
h 5. primi.
i 32. primi.
k 4. sexti.
l 17. sexti.
m 2. secundi.

COROLLARIVM I.

(HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quemuis bifariam, diuidere quoq; rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in l, & ad angulos rectos. Eademq; in cæteris est demonstratio.)

COROLLARIVM II.

(PERSPICVVM quoq; est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductum diuidere & arcum, quæ latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppositum CD, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoq; latus CD, bi-

CD, bifariam & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolemeo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusq; demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc à nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, secta sit bifariam in E, eique addita DF, a erit rectangulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF, est æqualis. b Est autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarum AD, DE: Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc est, quadrato rectæ CD. c Quamobrem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF, propterea quæ recta CF, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. d Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli; e Est autem eiusdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF: erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF: ac proptereà recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.

a 6. sec.

b 47. primi.

c 17. sexti.

d 10. tertiidec.

e 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem: describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, esse lineam Irrationalē, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrū F, diametri AG, BH, secetq; AG, latus CD, in I, connectanturq; rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in K. Ab-

R. Abscindatur quoq; ex semidiametro FH, quarta eius pars FL: Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis: erunt quoque FL, BF, illi commensurabiles: cum sint eius partes aliquotæ, Rationales: Atque idcirco & tota BL, composita, *a* cum sit commensurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.

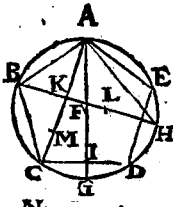
a 16. *decimi.*

RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat arcum AC, bifariam in B: secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I. bifariã, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, *b* æquiangula inter se erunt. *c* Quamobrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, siue ad FH, ipsi FA, æqualem. *d* Vt autem CA, ad FH, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL; *e* Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia verò recta AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) *f* maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD; *g* Erit quadratum rectæ compositæ ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, *h* ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL: Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia; Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. *primi.* *c* 3. *sexti.* *d* 15. *quinti.* *e* 22. *sexti.* *f* 8. *tertij decimi.* *g* 1. *tertij decimi.* *h* 6. *decimi.*

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. *i* habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. est quadratum rectæ FL, talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25 est quadratum rectæ BL, talium 5. est quadratum rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionẽ non habent, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum,

i 20. *sexti.*



dratum (vt patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) *a* Erunt rectæ BL, KL, longitudine incommensurabiles: ideoq;, cum ostentæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali BL, dematur Rationalis KL, potentia tantum commensurabilis; *b* erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit KL.

a 9. dec.

b 74. decimi.

IAM vero recta BL, posit, plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum KL, & N: Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ BL, talium 1. fuit quadratum rectæ KL. Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. *c* Quare commensurabilia erunt: propterea que rectæ ipsæ BL, & N, commensurabiles, saltem potentia; Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N Quia vero quadrata rectarum BL, & N. proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quòd proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) *d* Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali BH: (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) posit que plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est: Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

c 6. dec.

d 9. dec.

POSTREMO quia recta AB, est media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quod triangulum ABH, habeat angulum BAH, rectum, à quo ducta est AK, ad basin perpendicularis,) *f* erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo sub BH, BK. Quocirca cum superficiem contentam sub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, posit recta linea AB: *g* Erit AB, linea minor, &c. Si ig.tur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

e 31. ter.

f 17. sex.

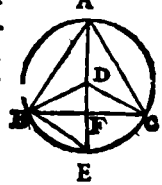
g 95. decimi.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN cir-

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10 huius lib. arcum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariā quoq;, & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus BC, sit tertia pars totius peripheriæ: erit arcus BE, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoq; coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. li. 4. Quod etiā ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres sextas partes totius circuli: arcus vero AB, cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus BE, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta BE, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro DE, ex coroll. propos. 15. lib. 4.



a Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale est quadratis rectarum AB, BE, b quod angulus ABE, in semicirculo rectus sit: Est autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla sit lineæ BE: erunt quadrata rectarum AB, BE, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ BE: Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE: & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum est quadrati rectæ BE, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 47. primi. b 31. tertij.

COROLLARIVM. I.

(SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli aequilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD, posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. li. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. vt est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoq; latus trianguli aequilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basin demissa potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.)

COROLLARIVM II.

(HINC facile etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, à latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplū sit quadrati rectæ BE; si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. c Est autem quadratum rectæ

c 47. primi.

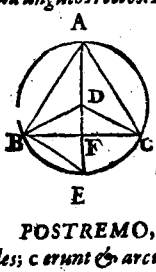
BE, aquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partiũ 4, erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratũ rectæ BF (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratũ rectæ BE, hoc est, quadratum rectæ DE, sibi aquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex scholio propos. 4. lib. 2. recta DE, dupla erit ipsius FE. Quocirca DE, bifariam secatur in F.)

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito:

SI in circulo ttiangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, secari à latere BC, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; cum latera AB, AD, aqualia sint lateribus AC, AD, trianguli CAD; & bases BD, CD, æquales quoq; : a Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod est primum.



a 8. primi.

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, aqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales ostensi: b Erunt & bases BF, CF, & angulo ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

b 4. primi.

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse æquales; c erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BEC, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit BE, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD, aqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. d Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; e Erunt & latera DF, EF, æqualia. Quod est tertium.

c 26. tertij.

d 5. primi.

e 26. primi.

XIII. PROBL. I PROPOS. 13.

PYRAMYDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT

SIT data sphæræ diameter AB, circa quam semicirculus describatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta DG, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur EFG, adiungunturq; rectæ HF, HG, quæ singulæ æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi HE, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum contentum quatuor triangulis FEG; IEF, IFG, IEG, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam enim latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipsis contenti, recti ex hypothesi, & 3. defin. 11, *a* erit basis AC, basi IE, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC, æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt AD, ad DC, ita quadratum rectæ AD, ad quadratũ rectæ DC; & componendo, vt AB, ad DB, ita quadrata rectarũ AD, DC, simul ad quadratũ rectæ DC: *b* Sunt autẽ quadrata rectarũ AD, DC, æqualia quadrato rectæ AC. Igitur erit quoq; vt AB, ad DB, ita quadratũ rectæ AC, ad quadratũ rectæ DC: Ac proinde cum AB, sit ipsius DB, tripla, erit quoq; quadratũ rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis sit ipsi DC: *c* Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit: & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum rectæ AC, ostensa quoq; sit æqualis rectis IE, IF, IG: erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu, Tetraedrum, cuius basis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter AB: & diametrum sphæræ AB, potentia sesquialteram esse lateris EF, vel AC.

a 4. *prim.*

b 47. *primi.*

c 12. *tertij.*

EXTENDATVR perpendicularis IH, vsq; ad K, vt sit HK, ipsi DB: & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH, HE, HK: erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cum HE, sit ad IK, perendicularis & media proportionalis inter IH, HK, semicirculus circa IK, descriptus in plano rectarum IK, HE, transibit per E, vt mox ostendetur: Eodemque

argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutũ Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehenderitur idem Tetraedrum ſphæra data.

QVONIAM verò tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, talium 2. ſit AD. Igitur & quadratum rectæ AB, ſeſquialterum erit quadrati rectæ AC: Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, *in plano rectarum* IK, HE, *deſcriptus, tranſeat per* E, *facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.*

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, *perpendicularis* CD, *& media proportionalis inter* AC, *&* CB. *Dico ſemicirculum circa* AB, *deſcriptum tranſire per* D. *Nam ſi tranſeat circa* D, *vel vltra, nunquam per punctum* E; *erit quoque* CE, *media proportionalis inter* AC, *&* CB, *ex coroll. propoſ.* 13. *lib.* 6. *Quare tam quadratum rectæ* CD, *quam quadratum rectæ* CE, *æquale erit rectangulo ſub* AC, CB; *Ac proinde quadrata rectarum* CD, CE, *inter ſe æqualia, & ipſa rectæ* CD, CE, *æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per* D.

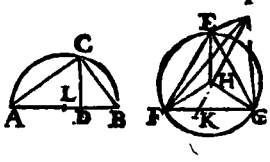
à 17. ſexti.

HINC *manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum*

ſcriptum circa IK, in plano rectarũ IK, HE, tranſire per E, cum HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

(HINC facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſin pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratum rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratum rectæ HE, 2 quod quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE: Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cum proportio quadratorum ſit, qua 9. ad 2.



2 12. *ter tijdec.*

COROLLARIVM II.

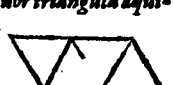
RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ACB, erit & L, centrum quoq; ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis: cum AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB: Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcireo LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.)

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, vt hac figura indicat, facilè ex ipſis vtrinque inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totam ſoliditatem. Hanc verò praxin, & ſequentes quatuor, quibus re-



liqua quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex alberto Durero non ignobili scriptore.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris istius octaedri.

SIT sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque
a 4. pri. rectæ AC, BC, *a* quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuo secantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales; cum sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. lib. demonstratum est. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE; Et denique ex K. & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH: LFE, LEH, KHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus FI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3.
b 8. pri. lib. 11. At vero EIG, *b* eo quod sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH,
c 4. pri. GH,) *c* Erit & basis EK, basi BH, æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL: (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum

semi-

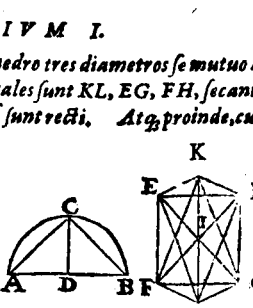
semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB, (Nam cum rectæ AC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD. EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

QVIA vero quadratum rectæ AB, *a* æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt: erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaq; octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

a 47. *primi.*

COROLLARIVM I.

(EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atq; proinde, cum IK, recta sit ad lineas EG, HF: b recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum. c Ideoq; ad plana KELH, ELGK, per KI, ducta, rectæ erunt ad planum EFGH. Imò eadem ratione, vt pauciis rem complectar, erit tria plana EFGH, KELH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt: Qua quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantq; angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri FK, KH. d Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademq; est ratio de cæteris angulis.



b 4. *vndecimi.*
c 8. *vndecimi.*
d 48. *primi.*

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines deniq;, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, qua est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

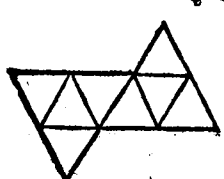
COROLLARIVM. III.

(SI tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. a Quoniã igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. a 13. tertijdec.
b Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri ſphæræ. Igitur cum talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.) b 14. tertijdec.

COROLLARIVM. IV.

(DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ FG. & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: c Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ductoparallelum. Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe) c 15. vndecimi.

SCHOLIVM.

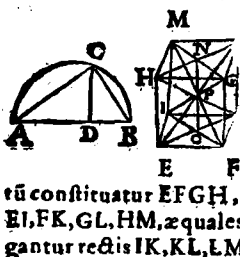


QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturq;, vt hæc figura indicat, facilè ex ipſis rite inter ſeſe complicatis componetur octaedrum ſecundum totã ſoliditatẽ, vt ait Albertus Durerus.

PROBL. 3. PROPOS. 15. XIV.

CVBVM conſtituere: & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratũ conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoq; ipſi BC, quarũ extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniã ergo rectæ EI, FK, ad planum EF, GH, rectæ ſunt; d erũt rectæ EI, EK, parallelæ. Sunt autẽ & æquæ d 6. vndecimi.



& æquales, quod vtraq; æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF.
a Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelo- a 33. pr.
grammum est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales
sunt ipsi EF, omnes quatuor lineæ æquales existunt: b Sunt autē b 34. pr.
& omnes quatuor anguli recti, cū EIK, FKI, æquales sint oppo-
sitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Ea-
dem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque id-
circo & IKLM, quadratū erit, c cum simile sit & æquale quadra- c 24.
to opposito EFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, vndec.
d quod eius plana opposita sint parallela, nimirū per lineas pa- d 15.
rallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem vndec.
dico comprehendi sphæra diametri AB. Sint enim planorū op-
positorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HI, per quas
ducantur plana EKLH, FIMG, e Quia igitur tam planum E- e 28.
KLH, quam FIMG, cubum bifariam secat; vtrumque per cen- vndec.
trum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum vi-
delicet P, in quo ex coroll. eiusdē propos. se mutuo quoque bifa-
riam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea cōmunis pla-
norum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet.
Quia vero plana EKLH, FIMG, rectangula sunt, (Cum enim
HE, perpendicularis sit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM,
EK, f perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad f 4. vn-
rectam EK, ex defin. 3. lib. 11 Rectus ergo angulus est HEK. Ea- decimi.
dem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec non
& anguli in plano FIMG. Rectangula ergo sunt plana EKLH,
FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus al-
terius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æqua-
les, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidia-
metri PE, PL, PH. PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare
semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus,
fixa manente diametro EL, sphæram describet per omnes cubi
angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ dia-
metri AB, ita demonstrabitur.

CVM quadratum rectæ EK, g æquale sit quadratis æqualibus g 47.
rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ primi.
EF, hoc est, quadrati rectæ KL; Erunt quadrata rectarum EK. KL,
tripla quadrati rectæ KL. h Est autem quadratis rectarum EK, h 47.
KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus primi.
in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum
erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero eius-
dem quadrati rectæ BC, triplum est quadratū rectæ AB. (Nam
tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt ex coroll. propos. 8.
lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. li. 6. vt est AB, ad BD, ita
erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo

AB, ipſius BD, ſit tripla. erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum. Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt: ac propterea ipſæ rectæ EL, AB, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarum ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri EL, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL, manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtũ eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeq; mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atq; eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeq; mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML: EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP æquales ſunt duob. angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorũ parallelorum EFKI, GHML, c & angulus OPF: æqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eadem q; eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.

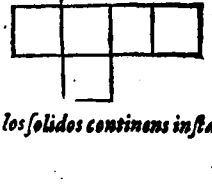
a 29. primi. b 16. vn decimi. c 15. prs.

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. d Nam qualium partium 9: eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri: e Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3 eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorũ laterũ. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrum ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero BC, f Perſpicuum autem eſt, diametrum ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.

d 13. ter tijdec. e 15. ter tijdec. f 47. primi.

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturq;, vt hac figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, vt conſtat. ICO-

PROBL. 4. PROPOS. 16. xvi.

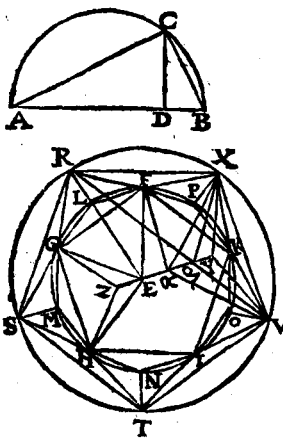
ICOSAEDRVM constituere: & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta: At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta CD, perpendicularis ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E: a in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro, EF, seu rectæ BC. Eruntque omnes inter se æquales: b sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, b 6. vn. decimi. nempe EL, QR, EM, QS: EN, QT: EO, QV: EP, QX, (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus) c binæ c 33. pri mi. inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF, æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC, d Quia d 15. vn decimi. vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto, eadem que ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem EGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum: nec non planum per QV, QX, & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano: Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. e Quia igitur e 6. vn. LR, PX, æquales, & parallelæ: si concipiatur duci recta LP: f decimi. erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ: g Ac proinde in f 33. pri. circulis æqualibus æquales arcus auferent: Auferautem LP, g 28. quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes tertij. FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RST-VX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST,

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est lateri hexagoni circuli FGHIK, & est LF, latus decagoni; a erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF:

a 10. ter zijdec.

b 47. prim.



b Est autem eisdem quadratis æquale quadratū rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; cum eorū omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri.

Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli: erit quadratū lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; d Est autem eisdem quadratis æquale quadratū rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta: ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemq; modo eidem XV, æqualis ostendetur VY, Ac proinde triangulū VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV,

c 10. ter zijdec.

d 47. prim.

TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandē ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorū latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ. bifariam in α, ducantur rectæ αF, αX & αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque bases αX, αF, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIK: & EZ, latus decagoni eiusdē circuli: c erit QZ, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ, d quintuplum potest eius, quod ex Eα, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propos. 4. lib. 2 quod recta EF, dupla sit ipsius Eα: Erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum

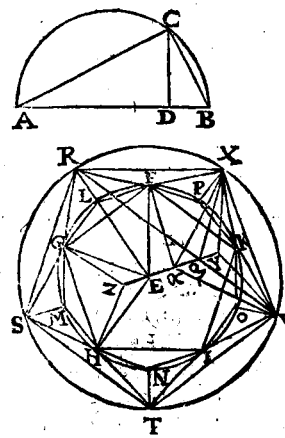
a 4. pri.
b 4. pri.
c 9. tertijdoc.
d 3. tertijdoc.
e 47. primi.

ZY, ex

ZY, ex centro α per omnes angulos Icosaedri constituti transibit, Hanc ergo sphærā dico æqualem esse sphæræ diametri AB.

a 15. quinti. b 22. sexti.

a CVM enim sit vt α Z, ad α E, ita Y Z, dupla ipsius α Z, ad QE, duplam ipsius α E; b Ac propterea vt quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratū rectæ Y Z, ad quadratū rectæ QE; sit autem quadratum rectæ α Z, ostensum quintuplum quadrati rectæ α E; erit quoque quadratum rectæ Y Z, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ B C; quod recta QE, æqualis sit positæ semidiametro E F, hoc est, rectæ BC; Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt A B, ad BD, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC,) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.



QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineā Irrationalem, quæ Minor vocatur) potestq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi æqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. c erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB. EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, d Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrū igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras; demonstrauimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. Quod erat faciendum.

c 6. decimi.

d 11. eiusdē.

COROL.

COROLLARIVM. I.

(EX dictis infertur, sphæra diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.)

COROLLARIVM II.

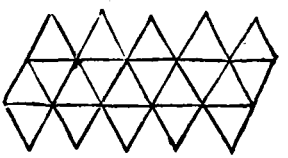
(ITEM manifestum est, sphæra diametrum esse compositã ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.)

COROLLARIVM. III.

(CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus HL, IP: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ.) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas: Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.)

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia confictantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, componetur Icosaedrũ, secundũ totã solidatẽ, si rite inter se aptentur.



PROBL. 5. PROPOS. 17. XVI.

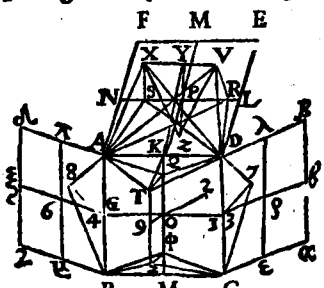
DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit cõmunis horum sectio recta AD, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedẽtibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipsi basi, EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) Diuisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui

a 18. vndec.

proble-

Problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in punctis Q. R. S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, VR, SX, æquales segmentis maioribus OQ. PR, PS. Contunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX: Dico ATDVX, esse vnum ex duodecim peutagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonũ ATDVX, sit in vno plano, ita ostendetur, Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectæ a ipsę erunt parallelæ: Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt posita, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN, æquales sint. b) erunt quoq; contingentes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ: c Est autem & AD, eidem RS, sine LN, parallela, eo quod AM, DL, parallelæ sunt & æquales. d Igitur & AD, VX, parallelæ sunt: e Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodẽ cum ipsis erunt plano, ideoque trapezium ADVX, in vno existet plano: Est autem triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio ADVX. Ex P, namque ducatur PY, parallela ipsi RV, f quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta sit RV: Et connectantur rectæ KT, KY. Quoniam igitur est vt OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionem rectæ OK: Est autem KP, ipsi OK, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi) & PY, ipsi OQ. (cum æqualis sit ipsi RV, quæ posita fuit æqualis ipsi OQ, maiori segmento;) Erit quoque vt KP, ad PY, ita OQ, hoc est, QT, illis æqualis, ad QK. Quare cum triangula PKY, QTK, duo latera habeãt duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulũ K, composita, g ita vt homologa latera sint parallela, nempe PK, & QT, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum ABCD; & PY, QK, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum ADEF: h Erunt reliqua latera KY, KT, in rectam lineam collocata, i Ac propterea recta TY, in vno erit plano, ideoque planum ATD, & planum ADVX, vnum planum constituent per rectas TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno existit plano.



a 6. undecimi.
b 33. pr.
c 33. pr.
d 9. undecim.
e 7. undecimi.
f 8. undecimi.
g 6. undecimi.
h 32. sexti.
i 1. und.

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia sint lateribus AK, KQ. trianguli AKQ (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, segmenta minora rectarum æqualium sectarum) & anguli ANS, AKQ.

AKQ, recti; si ducatur recta AQ, *a* erunt bases AS, AQ, æquales. Rursus cum latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT. (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3. lib. 11. *b* Erunt quoq; bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; si vero ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV, æqualia: quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. *c* Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ SX: Est autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ SX. *d* Cum ergo quadratis rectarum AN, NS, æquale sit quadratum rectæ AS; erit quoq; quadratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX, Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX. *e* Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum quoq; erit quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ XY; *f* Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX. dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsę æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. tertii dec.
d 47. primi
e 47. primi.
f 34. primi.

QVOD autem & æquiangulum fit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori segmento PS; *g* erit quoque NR; secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit NP. *h* Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectę RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ AN. *i* Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarũ RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectæ AN. *k* Cum ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectę AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectę AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Æqualia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoque & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS,

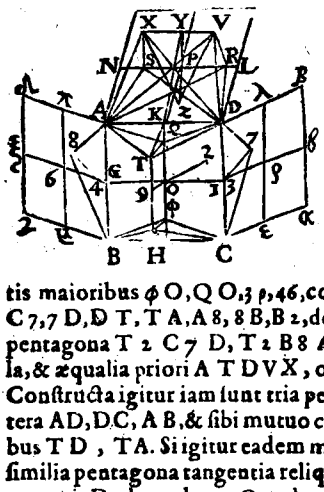
g 5. tertii dec.
h 4. tertii dec.
i 47. primi.
k 47. primi.

DX, ostendemus DX, D A, æquales esse: ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera T A, TD, trianguli T A D, æqualia sunt lateribus D V, VX, trianguli DXV: & bases AD, DX, æquales quoq; a Erunt & anguli A T D, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus D V X, æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, D V X, A X V, b ipsum erit æquiangulum.

a 8. pri.

b 7. tertii dec.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata C α β D, B γ δ A, recta ad quadratum A B C D, in communibus sectionibus C D, A B, quorum singula latera bifariam secentur in ε, ϑ, λ, l, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde O H, O K, ρ l, σ G, extrema ac media ratione, in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, Q T, 37, 48, æquales segmentis maioribus φ O, Q O, 3 ρ, 46, coniunganturque rectæ T 2, 2 C, C 7, 7 D, D T, T A, A 8, 8 B, B 2, demonstrabimus eadem ratione. pentagona T 2 C 7 D, T 2 B 8 A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori A T D V X, ob communia latera T D, T A. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, A B, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus T D, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera: constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.



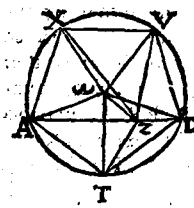
INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum A D E F, & eius oppositum, planis ductis per rectas K M, L N. Item planum A B C D, & eius oppositum, planis per rectas G I, H K. ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana A D E F, A B C D; c Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum Y P, recta sit ad planum A D E F, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas K M, L N, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum A B C D, erigatur perpendicularis φ O Z; erit ipsa, commu-

c 19. vndec.

communis sectio planorum, quæ per rectas G I, H K, ducuntur.
a Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant: secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem seſe diametri cubi bifariam in centro ſphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propoſ. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit ſphæræ circa cubum deſcriptæ: Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; eſſe omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, ſic fiet perſpicuum, ducta recta Z X. b Quoniam parallelæ ſunt K P, O Z, quod vtraq; recta ſit ad planum A B C D: Item parallelæ ſunt O K, Z P, quod vtraque recta ſit ad planum A D E F: erit P K O Z, (debent enim duo puncta Z, intelligi eſſe coniuncta) parallelogrammum, ac propterea P Z, æqualis erit ipſi K O, hoc eſt, ipſi N P, dimidio lateri cubi: Eſt autem & P Y, ipſi P R, æqualis. Tota ergo Z Y, toti N R, æqualis erit. c Quare cum quadrata rectarum N R, P R, ſimul tripla ſint quadrati rectæ N P, quod N R, in P, ſecta ſit extrema & media ratione: erunt quoque quadrata rectarum Z Y, P Y, hoc eſt, quadrata rectarum Z Y, Y X, ſimul tripla quadrati rectæ P Z: (Eſt enim X Y, æqualis ipſi P S, hoc eſt, ipſi P Z:) d Eſt autem quadratis rectarum Z Y, Y X, æquale quadratum rectæ Z X. Igitur & quadratum rectæ Z X, triplum erit quadrati rectæ Z P, hoc eſt, quadrati dimidii lateris cubi. At quia eiuſdem quadrati dimidii lateris cubi triplum eſt quoq; quadratum ſemidiametri ſphæræ cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiameter ad dimidium lateris: f Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum ſemidiametri ad quadratum dimidii lateris. g Cum ergo quadratum diametri triplum ſit quadrati lateris, erit quoque quadratum ſemidiametri triplum quadrati dimidii lateris.) Æquale igitur eſt quadratum rectæ Z X, quadrato ſemidiametri ſphæræ, ſeu cubi: Ac propterea Z X, æqualis ſemidiametro. Eadem ratione erit ducta recta Z V, ſemidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera Z Y, Y X, trianguli Z Y X, æqualia ſint lateribus Z Y, Y V, trianguli Z Y V, & anguli contenti recti. (Cum enim P Y, ſit perpendicularis ad L N, erit quoque eadem ad ſibi parallelam V X, perpendicularis.) h Erunt baſes Z X, Z V, æquales: Sunt autem & Z A, Z D, ad angulos cubi, ſemidiametro ſphæræ æquales, vt dictum eſt. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro ſphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem oſtendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus A T D V X, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ

a 39. *vndec.*
b 6. *vndeci.*
c 4. *terii decc.*
d 47. *primi.*
e 15. *quinti.*
f 22. *ſexti.*
g 15. *tertii decimi.*
h 4. *pri.*

perpendicularis demittatur Z ω, connectanturq; rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. a Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale
a 47. primi. est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quod rectæ Z A, Z X, ostensę sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoq; rectæ ipsæ ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, æquales, quod & rectæ Z V, Z D, æquales sint ostensæ rectis Z A, Z X. Quare cum ex ω, cadant in circũferentiam plures rectę
b 9. tert. lineæ æquales, quam duæ, b punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt
c 47. primi. quadratis rectarum Z ω, ω T. c Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; propterea q; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque A T D V X; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



d 17. quinti. POSTREMO cum sit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: d erit quoque vt N L, dupla ipsius N P, ad R S, duplam ipsius P S, ita R S, duplam ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L, nimirum ad duplã ipsius S N. Si igitur cubi latus N L, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R; Sed N L, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius) e Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

e 6. tertiidec.

COROLLARIVM I.

Cum ergo demonstratum sit; recta L N, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: Sit autem L N, æqualis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROL-

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis A V, D X, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, a facit maius segmentum latus pentagoni: b ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmẽtum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

a 8. *tertiæ doc.*
b 5. *tertiæ doc.*

COROLLARIVM III.

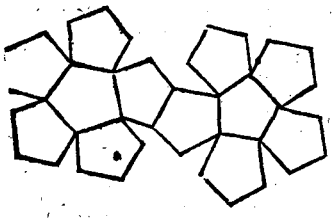
CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariam que secanrur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nã duo ex dictis lateribus sunt V X, T Z, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi E F, A B: aliaque quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturq; ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ Y Z, 9 Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo intersecant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ P Z, O Z, æquales sint dimidio lateri cubi, & Y P, 9 O, æquales maioribus segmentis æqualibus P S, O Q; Erunt totæ Y Z, 9 Z, æquales. Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus est, cum opponatur recto O K P Non aliter ostendetur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IV.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum Z Y, Y P, tripla ostẽsa sint quadrati rectæ P Z: erit Z Y, secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit P Z, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt Z Y, ad Z P, ita Z P, ad P Y: c ideoque vt dupla ipsius Z Y, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius Z P, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplam ipsius Z P, ad duplam ipsius P Y, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.

c 15. *quinti.*

SCHOLIVM.

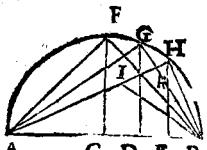


QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona aquilatera, & aquiangula, inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, componetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se complicentur.

xviij. RROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæra diameter A B, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita vt B D, sit ipsius pars tertia: In E, denique ita, vt B E, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa A B, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsa A B, perpendiculares C F, D G, E H: connectanturque rectæ A F, B F, A G, B G, A H, B H. Post hæc ex H A, abscindatur H I, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est B H, connectaturque recta B I. Postremo B C, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum B K.



QVO D igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico A G, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri: A F, latus Octaedri: B G, latus cubi: B I, latus Icosaedri: B K, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim A G, media proportionalis est inter B A: A D, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll propos. 20. eiusdem lib. vt B A, ad A D, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A G: Est autem B A, ipsius A D, sesquialtera: cum talium partium 2. sit A D, qualium 3. est B A Igitur & quadratum rectæ B A, sesquialterum est quadrati rectæ A G: *a* A e proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri: erit A G, latus Tetraedri.

a 13. *tertii decimi.*

RVRSVS quoniam A F, est media proportionalis inter B A, A C, ex eodem coroll propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt B A, ad A C, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A F, ex adducto coroll. propos. 20. libr 6: Est autem B A, ipsius A C, dupla: Erit quadratum rectæ A B, duplum quadrati rectæ A F. *b* Quare cum diameter

b 14. *tertii decimi.*

sphæræ

ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

DEINDE cum BG, ſit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipſius BD, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. a Quocirca cum ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; ERIT BG, latus cubi. a 15. tertiæ dec.

PRÆTEREA quia, ex eiſdem corollariis, BH, eſt media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Eſt autem ex conſtructione AB, ipſius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter ſphæræ potẽtia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis ex coroll. 1 propoſ. 16 huius lib. Erit BH, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli; Eſt autem HI, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. b Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, ſimul; Ac proinde c cum quadratum rectæ BI, æquale ſit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiuſdem. d Quam obrem BI, latus eſt Icoſaedri. b 10. tertij dec. c 47. pr. d 16. tertij dec.

DENIQVE cum BG, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius ſegmentum latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

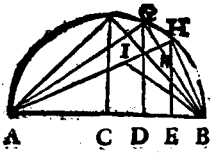
QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratũ lateris Tetraedri: talium vero 3. quadratum lateris Octaedri: & denique quadratum lateris cubi talium 2 Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quam numerus ad numerum. e Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ ſunt commenſurabiles; atque adeo cũ diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt

Diamet.	6.	
Tetraed.	4.	
Octaed.	3.	
Cub.	2.	

e 6. dec.

a 9. dec. constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. a Erunt huiusmodi lineæ, nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demõstratum est nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum laterib priorum, cum latera priorum sunt diametro sphæræ cõmensurabilia; essent quoque lat ra posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.



SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112 lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

b 104. decimi.
c 106. decimi.
d 16. tertij dec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint.: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus deniq; Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM

EODEM modo non oſtendemus, latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1.3.9 Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9 habent proportionem quintuplam, minor quam 2 Quare quadratum rectæ GD, maius eſt quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, maior quam recta BH. Rurſus quia diameter ſphæræ, AB, componitur ex BH, ſemidiametro circuli, ex quo Icoſaedrum conſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiuſdem circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. conſtat latus decagoni HI, maius eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt, minus recta BD. Nam ſi HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipſi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi BD; Atque adeo cum quadratum rectæ AB, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectæ BD. erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod eſt abſurdum. quintuplum enim eſt demonſtratum. Non ergo HI, tertia pars eſt ipſius AB. Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI. dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipſius HI, maior quam duæ tertiæ, hoc eſt, quam AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis abſurdum. Non igitur maior eſt HI, tertia parte ipſius AB. Sed neque æqualis tertiæ parti, vt oſtendimus. Minor ergo eſt quam tertia pars, hoc eſt, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, maiores ſint rectis BH, HI, vt demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Eſt autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis recta-

a 20. *ſexti.*

b 15. *tertii dec.*

c 10. *quinti.*

d 47. *quinti.*

rum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoq; erit quadrato rectæ BI, Ac proinde recta BG. nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique est latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: *a* Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK (Nam cum sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; *b* erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo, sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH. (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde vuum quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus: forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta BK: Ac propterea cum BI, maior sit quam BH, multo maior erit BI, latus videlicet Icosaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

a 2. *sec.*

b 17. *sexti.*

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter se æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus.

EX

EX quinque, angulus Icoſaedri:

EX ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli aquilateri anguli contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. propoſ. 32. lib. 1. Erunt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes unius recti, hoc eſt, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus conſtituetur. a Nam ſolidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. a 20. vndecimi.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus continet vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipſis angulus ſolidus conſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi angulis, nullus ſolidus angulus conſici poteſt. Cum enim vnus, vt dictum eſt, maior ſit recto, eo quod continet vnum rectis, & inſuper recti quintam partem: erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis conſtituetur: Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec ſane ex aliis figuris aquilateris, & aquiangulis conſtitui poterit angulus ſolidus. Nam cum ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum: ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes ſextas vnius recti: continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo componetur angulus ſolidus: Atque idcirco multo minus ex pluribus eiuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur: neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, præter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus continetur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum angu-

angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrum viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle, Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidu, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6 numerus ſcilicet laterum Pyramidu. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt ad angulum ſolidum conſtituendum, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati,

fiunt

fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12 pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos: octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solidos Tetraedrum (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes, totidemque ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alii vero, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES *Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinæ societatem commendatus longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumque dissererent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum vel maxime in Geometria versatus, scite ac prudenter iudi-*

ter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt proœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi adscribuntur: Duo vero subsequentes à plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui solent: in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam: vt hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non inamœna, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones vnius in alio: quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuersum disserere proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quamplurimis theorematibus problematibusque locupletauit: verum etiam integrum librum, qui ordine decimussextus est, adiunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14 disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facile intelligi potest ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

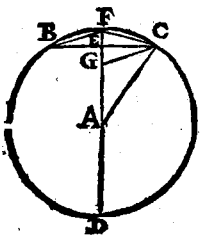
QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & à Francisco Flussate, ideoque & à nobis discrepant: annotauimus in margine ordinem vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur: Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidiũ eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur
a 3.tertii. rectæ AC, CG, CF, BF. a Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli, BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF;



Cum igitur & anguli contenti ſint æquales,
b 4.primi. nempe recti; b erunt baſes CF, BF, æquales;
c 28.tertii. c ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiuſdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſuntq; anguli contenti recti;
d 4.primi. d erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit
e 33.ſex. arcus CF. e Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli
f 20.tertii. CAF: f Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF,
g 32.primi. duplus erit anguli CAF: g Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, vt oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium eiuſdem anguli CGF, ideoque æquales erunt
h 6.primi. anguli GAC, GCA; h ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atque idcirco è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam

in pen-

in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta haec linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quae ex centro perpendicularis est ad BC, dividere arcum BC, bifariam in F.

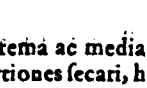
COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam aequalem esse vtrique lineae simul, & ei, quae ex centro ad latus trianguli aequilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiae lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni aequalis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul: Est autem perpendicularis ad latus trianguli aequilatera, ex coroll. propos 12. lib. 13. aequalis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse aequalem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. iv. ij.

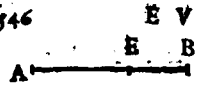
SI binae rectae lineae extrema ac media ratione secentur, ipsae similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECANTVR binae rectae AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim sit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB, & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD; *a* erit rectangulum sub AB, EB, aequale quadrato rectae AE; & rectangulum sub CD, FD, aequale quadrato rectae CF. Quam ob rem erit vt rectangulum sub AB, EB, ad quadratum rectae AE, ita rectangulum sub CD, FD, ad quadratum rectae CF (est enim vtrobique aequalitatis proportio) Ac propterea, per ea, quae demonstrauimus in scholio propos. 12. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, ad quadratum rectae AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, ad quadratum rectae CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, & quadratum rectae AE, ad quadratum rectae AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, & quadratum rectae CF, ad quadratum rectae CF. *b* Sed quod quater continetur sub AB, EB, vna cum quadrato rectae AE, aequale est quadrato lineae compositae ex AB, EB; Et quod quater continetur sub CD, FD, vna cum quadrato rectae CF, aequale est quadrato lineae compositae ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineae compositae ex AB, EB, ad quadratum



a 17. sexti.

b 8. sept.



tum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF, *a* Ac proinde, vt recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD, ad rectam CF: Et componendo vt composita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AF, ita recta composita ex CD, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius CD, ad rectam CF; Et permutando, vt dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita AE, ad CF; *b* Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius GD, ita est AB, ad CD. Erit ergo vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, Ac propterea, cum sit vt tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; *c* erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum vtraque proportio eadem sit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit vt AE, ad EB, sic CF, ad FD, & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; &c Quod erat ostendendum.

a 2. sext.

b 15. quinti.

c 19. quinti.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

QVONIAM enim d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam;* e *& recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni:* f *fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti recta angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.*

d 9. tertii dec.

e 8. tertii dec.

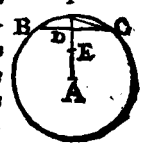
f 2. quarti decimi.

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri

lateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta: minus vero segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. arcus BC. nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F, a Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni minus vero segmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum: & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: b Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propositionis 12. lib 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri: perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse ductæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.



a 9. tertiædec.

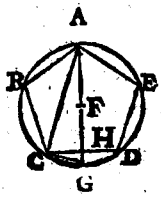
b quartidecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per Coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa CG,



latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla est rectæ FG: erit ex scholio propos. 4. lib 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: a Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla sunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiusdem rectæ FG: b Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

b 10. tertii dec.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. c Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG. &c.

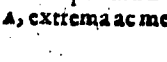
c 3. quarti decimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

o. iij.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi AB, d eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum BA: Ponitur



d 9. tertii dec.

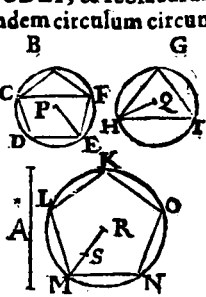
tur autem & AB, secta in C, similiter. *a* Igitur erit vt BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, maius segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; *Ac* propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est AB; erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni. a 2. *quartidecimi.*

ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori segmento AC; *b* eritque tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib 13. AD. minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; *Ac* propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum. b 5. *tertiidec.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

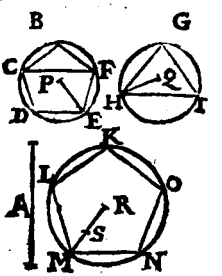
IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, *c* ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoq; quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secetur-que RM, extrema ac media ratione in S; *d* eritque maius segmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni Subtendat quoque recta CF, angulum B. pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris



c 13. *tertiidec.*

d 4. *quartidecimi.*



a 2. *quartidecimi.* b 22. *sexti.*

cubi CF, ſecti extrema ac media ratione, *a* erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo per ea; quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM. ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale

c 10. *tertiidec.* erit quintuplo quadrati rectæ RS: *c* Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed

d 3. *quartidecimi.* quoniam, *d* (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi

e 12. *tertiidec.* GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; *e* ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco ſemidiameter BE ſemidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrandum.

iij. vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

. Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari com-

ri comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8 lib. 1. cum bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. a Quoniam vero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 41. primi.

ALITER. Facta eadem figuræ constructione, b cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD, sumptum sexagies æquale erit superficiei Dodecaedri.

b 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum ſub DE, & BC, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes

trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipſi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum ſub FB, hoc eſt, ſub DE, & BC. a Quoniam vero rectangulum BG, duplum eſt trianguli BDC. atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triangulo Icoſaedri; Atque adeo idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 41. *primi.*

b 41. *primi.*

ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, b cum rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo DBC, ſumpto ſexageſies. Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigeſies ſumptum æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſuperficies, (repetita figura proxime antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. c Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto; d Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoq; ſumpto: Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri. e Quare erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt rectangulum illud, trigeſima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

c 6. *quartidecimi.*

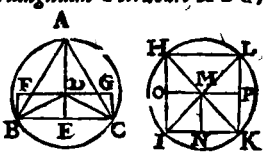
d 7. *quartidecimi.*

e 15. *quinti.*

SCHO-

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, Octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quòd sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi aquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, aquale esse superficiei Tetraedri. a Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempè quatuor triangula aquilatera ipsi A B C, aqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aquale.



a 41. primi.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptum, aquale esse superficiei Octaedri. b Cum enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum aquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptum aquale est superficiei Octaedri.

b 41. primi.

SIT tertio quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula aqualia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, aquale esse superficiei cubi. c Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, aquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum aquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum aquale superficiei cubi. Quod est propositum.

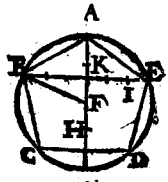
c 41. primi.

ALITER Cum duo rectangula I P, conficiant quadratum H I x L; (sunt enim I P, P H, aqualia, cum recta O I, sit dimidium lateris H I, nempe aqualis ipsi M N) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

XV. THEOR. 8. PROPOS. 8.

viij. RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti, æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum vero A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sint quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F, quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cum sit semidiameter; erit A H, ipsius A F, sesquialtera. Quia vero recta F A, diuidens arcum B A E, bifariam, diuidit quoque rectam B E, bifariam, per coroll. 1. propos. 10 lib. 4. in puncto K; continebit tam K B, quam K E, tres sextas rectæ B E; atque adeo cum B I, contineat quinque, continebit K I, duas: Ac proinde & K B, ipsius K I, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt A H, ad A F, ita K B, ad K I; *a* atque idcirco rectangulum sub extremis A H, K I, æquale erit rectangulo sub mediis A F, K B. *b* Est autem rectangulum sub A F, K B, duplum trianguli A B F, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin A F, & eandem altitudinem B K, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub A H, K I, duplum erit eiusdem trianguli A B F: *c* Est autem & rectangulum sub A H, K I duplum rectanguli sub A H, I E; propterea quod & basis K I, dupla est basis I E, (continet enim K I, duas sextas partes ipsius B E, & I E, vnam) eademque semper altitudo A H. Igitur æqualia sunt triangulum A B F, & rectangulum sub A H, I E; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum A B C D E, quintuplum est trianguli A B F, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero sub A H, B I, quintuplum est rectanguli sub A H, I E; quod & basis B I, quintupla sit basis I E, eademque semper altitudo A H.



a 16. sexti.
b 41. primi.
c 1. sex.
d 1. sex.

Igitur

Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH. BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

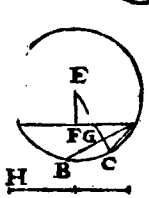
QVONIAM vero, si pentagonum ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. libr. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (a comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG, in H. (cum ex coroll propos. 12. lib 13 secet semidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG. bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

a 5. *quartidecimi.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. IV. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eãdem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, *b* circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagon. BD, & trianguli AD: & ex centro E; ducãtur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse, vt H, lat. cubi, ad AD, latus Icosaedri: ita superficiem Dodecaedri ad superficiẽ Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentum est EF ex scholio propos. 2. huius lib. *c* Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; *d* Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF; æquale erit rectangulo sub mediis BD, EG. *e* Quia vero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectangulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cum ex coroll. propos. 2. huius lib. sit, vt rectangulũ sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoq;, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiẽ Icosaedri. Superficies itaque



b 5. *quartidecimi.*

c 2. *quartidecimi.*

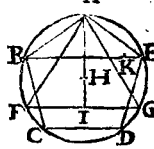
d 16. *sexti.*

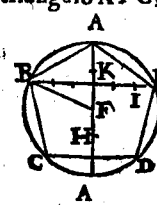
e 1. *sexti.*

itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. *quartidecimi.*

ALITER. *a* Circumſcribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icoſaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2 propoſ. 17 lib. 13 cuius quinque ſextæ partes ſint B k. Dico rurſus eſſe, vt B E, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub A I, B k, æquale eſt pentagono A B C D E, ex coroll. propoſ 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale eſt triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B k, ad I F. cum baſes ſint B k, I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque vt pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B k, ad I F; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta B k, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æque multiplicentur per numerum 20. *c* erit quoque vt pentagonum A B C D E, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta B k, duodecies ſumpta ad rectam I I, vigeſies ſumptam: Atqui recta B k, duodecies ſumpta æquialet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B k, contineat quinque ſextas partes ipſius B E, continebit eadem B k, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E) Recta vero I F, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri F G, decies ſumpto; (eo quod F G, eſt ipſius I F, dupla.) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi B E, decies ſumptum ad latus Icoſaedri F G, decies ſumptum; Ac propterea, *d* cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.





b 1. *ſex.*

c *ſchol.* 22. *quinti.*

d 15. *quinti.*

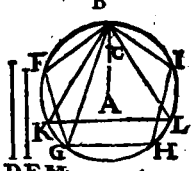
THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

IV. IX.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

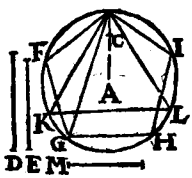
SECTVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum Bkl. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam vero AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, *a* est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni; *b* poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositi Icosaedri, vt est BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus segmentum BC *c* Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri Bk, triplum est quadrati semidiametri AB: *d* Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ Bk, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ Bk, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1 prop. 17. lib. 13. eo quod BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; *e* Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF; *f* Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG ad quadratum rectæ BF,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF, ita



a 4. quartidecimi.
b 10. tertiadecimi.
c 12. tertiidecimi.
d 4. tertiidecimi.
e 2. quartidecimi.
f 22. sexti.

BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; a Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cum igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF potens totam AB, & maius segmentum AG, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. sexti.



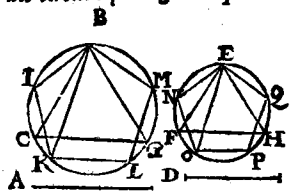
SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ connectanturque rectæ BK, CK, EO, FO.

b 5. quartidecimi.



b Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13 recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex de-

finitio-

finitione segmentorum similium, aequales inter se, quam anguli BKC, EQF, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant. Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, aequalis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, aequiangulum. a *Quare erit* a 4. *sext.*
vt BK, hoc est, recta A, illi aequalis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, recta D, illi aequalis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum.

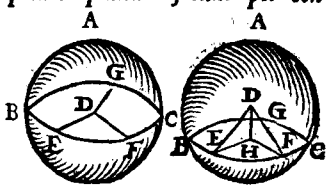
PERSPICVVM est igitur id ipsum, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

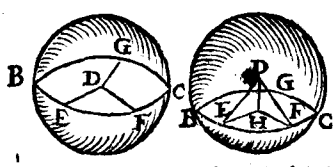
SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducaturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, linea recta, quotcunque DE, DF, DG.



Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, aequales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectan-

nectantur recta DE, DF. *Quoniam igitur anguli* DHE, DHF, a 47. primi. *ex defin.* 3. *lib.* 11. *recti sunt*; a *erit tam quadratum rectæ* DE, *quadratis rectarum* DH, HE, *quam quadratum rectæ* DF, *quadratis rectarum* DH, HF, *æquale*: *Sunt autem quadrata rectarum* DE, DF, *æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* DH, HE, *quadratis rectarum* DH, HF, *æqualia erunt*; *& proinde, dempto communi quadrato rectæ* DH, *reliquum quadratum rectæ* HE, *reliquo quadrato rectæ* HF, *æquale erit. Quare & rectæ* HE, HF, *æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex* H, *ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus* HE, HF. *Figura igitur plana* BEFCG, *unica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit*; *eiusque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis* DH, *cadit. Quod est propositum.*



COROLLARIVM.

IT A QVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

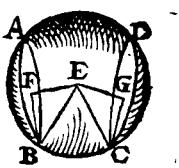
LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, *cuius centrum* E, *sunt circuli æquales* AB, DC. *Dico ipsos æqualiter à centro* E, *distare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* EF, EG, *quæ per corollar. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* FB, GC, *ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ* EB, EC. *Quoniam igitur anguli* b 47 primi. EFB, EGC, *recti sunt, ex definit.* 3 *lib.* 11. b *Erit tam quadra-*

tum

tum recta EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale : Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale : Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant à centro E.

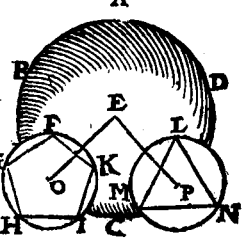


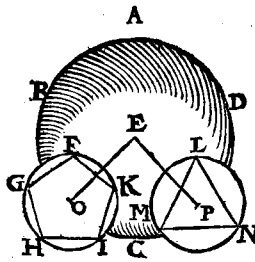
SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit: atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.

THEOR. II. PROPOS. II. 17.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cui latus ad latus Icosaedri: in vna eademque sphæra.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum EGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangũt: si per pentagonũ, & triangulum plana ducãtur, efficientur, per lemma 1. præcedent, duo circuli in sphæra FGHIK,





LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. *a* Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum: æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN: Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendicularis ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri: & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ: resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum: Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12 Eodemq; modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrū in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. *b* Quoniam autem est, vt basis FGHIK, ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriusque eadem sit altitudo: Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos 22 lib. 5. demonstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, tota videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est (sicut modo diximus) vt tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20 bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: *c* Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ: atque adeo ex scholio propos 16. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque sphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. *quartidecimi.*

b 6. *duodecimi.*

c 9. *quartidecimi.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero ostensum est quoque, *d* ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra. *e* Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemque sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quam-

d 9. *quartidecimi.*

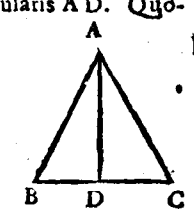
e 10. *quartidecimi.*

quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: a Ité a 17. quartidesimi.
ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; & lineæ potentis totam quamcunque sectã extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdẽ sphæræ, esse inter se æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineę perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, sesquitertium esse quadrati perpendicularis A D. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, b anguli B, & C, æquales sunt: & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC. habent autem & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. c Igitur & reliqua latera B D, C D, æqualia sunt: ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D; ex scholio propos 4. lib. 2. d Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia sint quadrata rectarum A D, E D; erunt quoque quadrata rectarũ AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD: Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ A B, partium 4. sesquitertium est quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendẽdum erat.



b 5. primi.

c 26. primi.

d 47. primi.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & C D, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera A B, AD, trianguli A B D, æqualia sint lateribus A C, A D, trianguli A C D; & basis BD, basi CD, æqualis, c Erunt & anguli B A D, C A D, æquales, id est, angulus B A C, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari A D.

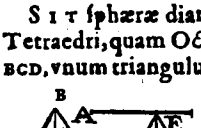
c 8. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

o. xiij.

Si ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim BCD, vnum triangulum Tetraedri, & EFG, Octaedri illius ſphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, EI. a Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri BC, b & duplum quadrati lateris Octaedri EF; habebunt quadrata re-



a 13. *tertii decimi.*
b 14. *tertii decimi.*
c 6. *decimi.*

ctarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. c ideoque commenſurabilia erunt: Quare lineæ ipſæ, A, BC, EF, commenſurabiles exiſtent ſaltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.

d 12. *quarti decimi.*
e 6. *dec.*

RVRSVS, d quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BH, quam quadrati rectæ EF, quadrati rectæ EI, ſeſquitertium eſt: habebunt tam quadrata rectarum BC, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter ſe, quam numeri 4.3. e ideoque tam illa, quam hęc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam CH, ipſi BC, quam FI, ipſi EF, dimidia

f 12. *decimi.*

videlicet toti, commenſurabilis. f Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI; commenſurabiles inter ſe erunt: Ac proinde cum CH, & FI, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales.

g 9. *decimi.*

g Quoniam verò tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt conſtat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quã

h 12. *quarti decimi.*

1. ad 3. h cum oſtenſum ſit talium partiũ 1 eſſe tam quadratũ CH, quam quadratũ FI, qualium 3. eſt tam quadratum BH, quam quadratum EI) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles: i Ac proinde tam rectangulum ſub

i 22. *decimi.*

CH, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contẽtum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum CD, FG, duplæ ſint baſium rectangulorum CH FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri trian-

triangulo BCD, sit commensurabilis: (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis: (Est enim triangulum EFG, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum.

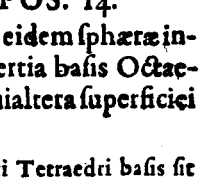
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale; perspicuum est, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14. XIV.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri vero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At vero superficiem Octaedri esse sesquialterã superficiei Tetraedri. Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; sit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD, & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, sesquitertium est quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. (quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habẽt laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitertium est trianguli EFG.



a 13. tertii decimi.

b 14. tertii decimi.

c 20. & 19. sex.

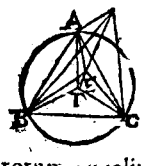
RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG: Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG: Efficitur, vt triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16.

Quamobrem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atq; Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphęrę ducta, cadit in centrum basis oppositę, estque perpendicularis ad dictam basin.

SIT Tetraedrum A B C D, contentum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus A B C, D A B, D B C, D C A, in sphæra, cuius centrum E: ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta D E F, incidens in basin A B C, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis A B C, & D F, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis E A, E B, E C F A, F B, F C: quoniam rectæ E A, E B, E C, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt: erunt duo latera E A, E D, trianguli E A D, æqualia duobus lateribus E C, E D, trianguli C E D: Sunt autem & bases A D, C D, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum & æqualium. *a* Igitur anguli A E D, C E D, æquales erunt: Ac proinde & reliqui A E F, C E F, æquales erunt, *b* eo quod tam A E D, A E F, quam C E D, C E F, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli B E F, C E F, si considerentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera E A, E F, trianguli E A F, æqualia sunt lateribus E C, E F, trianguli E C F, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales: *c* Erunt bases F A, F C, æquales. Sic quoque æquales erunt F B F C, si considerentur triangula E B F, E C F Quare cum tres rectæ F A, F B, F C, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales: *d* erit F, centrum basis A B C, seu circuli eam circumscribentis.



a 8. primi.
b 13. primi.
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos 10 huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli A B C, demissa in centrum circuli cadit: efficitur, vt recta D E, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri A B C. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra, quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplũ quadrati diametri sphæræ. 0. xvj.

SIT Octaedrum A B C D E F, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus E A D, E A B, E B C, E C D F B C, F B A, F A D, F D C, & in sphęra descriptum, cuius centrũ G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualiũ altitudinum quarum basis communis est quadratum subduplũ quadrati diametri sphæræ. Ductus enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quæ æquales sunt, cum sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet è centro ad superficiem sphæræ: *a* quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati semidiametri A G, ex schol. 10 propos. 4. lib. 2 Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ A B, & talium partium 1. quadratum rectæ A G; Ac proinde quadratum rectæ A B, duplum erit quadrati rectæ A G Cum ergo quadratum rectæ A G, æquale sit quadrato rectæ B G: erit quadratum rectæ A B, æquale duobus quadratis rectarũ A G, B G: *b* Ac propterea angulus A G B, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli A G D, B G C, C G D, recti. *c* Quam ob rem A G, C G, & B G, D G, in rectum erunt coniunctæ: *d* atque adeo rectæ A C, B D, sese secantes in G, in vno existent plano: *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum A C D, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarum basis communis A B C D, vertices vero E, & F: quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet constet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia, & basi communi A B C D. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin A B C D, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri A B, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum A G, B G: erit quoque quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis semidiametrorum A G, E G: *f* Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, *g* ipsa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe

a 14. *tertii decimi.*

b 48. *primi.*

c 14. *primi.*
d 2. *vndecimi.*
e 7. *vndecimi.*

f 48. *primi.*

g 4. *vndecimi.*

ad basin pyramidū. Quare E G, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo F G, FG, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuū est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia

a 14. tertii decimi.

AC, est diameter sphæræ: a erit eius quadratum

b 8. primi.

duplum quadrati lateris AD: Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD, DC. b Quare angulus ADC, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est: quod cum

c 12. tertij decimi.

sit descriptum ex latere Octaedri AB: c constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o. xvij.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

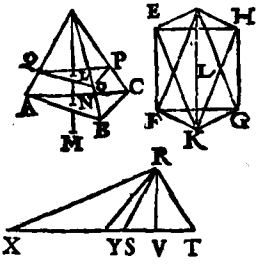
TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrū in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquinquepartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratū diametri sphæræ.

§ 1 Tetraedrum A B C D, & Octaedrum E F G H I K, in vna eademq; sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ D M, incidens in basin A B C, ad punctum N. d Erit igitur N, centrum basis ABC, & D N, perpendicu-

d 15. quarti decimi.

laris

laris ad eandem basin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum sphæræ, & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, per coroll. 2. propos. 13 lib. 13. Erit DL. semidiameter talium partium 3. qualium 1. est LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde ex scholio propos. 16. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC: *a* Eruntque rectæ QO, OP, PQ. Parallelæ rectis AB, BC, CA: Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, *b* cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 5. Igitur & QOP, æquiangulum erit: Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. *c* Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter: erit vt DN, ad DL ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP. erit vt 4. ad 3. Ac proinde, *d* cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4 ad 3 vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus *e* quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam: erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



a 16. *undecimi.*

b 10. *undecimi.*

c 17. *undecimi.*

d 8. *duodecimi.*

e 20. *sexti.*

Sit iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP: demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. *f* Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. *quartidecimi.*

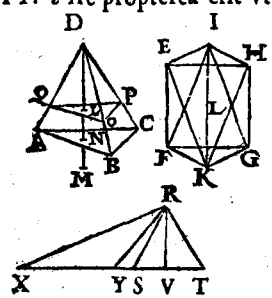
Rvrsvs extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3 nempe sesquiter-

tia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27 eſt ſeſquitertia) ac propterea qualium TY, eſt 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum ſub recta RV, (quæ poteſt viginti ſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris DC) & ſub recta TY (quæ continet octo nonas partes eiuſdem lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

a 1. *ſext.* CVM enim ductis rectis RX, RY. *a* triangulum RTX, duplum ſit trianguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY;

b 41. *primi.* *b* Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV, TY. *c* Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum, RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idem triangulum RST:

c 7. *quinti.*



d 1. *ſext.* *d* Eſt autem triangulum RTX, ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale, erit vt 64 ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD: At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK (Nam cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planum QOP, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque ſphæræ ſemidiameter DL.

e 16. *quartidecimi.* altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: *e* Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratū EFGH, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidem EFFGHI; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrum EFGHIK) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum

dratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitum ad Octaedrum; &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, a cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV: erit a 12 *quar-*
RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qua- *tidecimi.*
lium 27. ST, ſeu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimaſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. vt rectangulum ſub RV. qua potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, qua ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur. o. xvij.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico AE, triplam eſſe rectæ DE, quæ ſcilicet perpendicularis eſt è centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia ſint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (è centro enim ducuntur) ſit autem & baſis AB, baſi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum ſub AE, EB, triangulo ABC, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli BDC, dupla ſit baſis BE, vtriuſq; rectanguli; Erit quoque rectangulum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub AE, EB, ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdem altitudinis EB, ita baſis AE, ad baſin DE: Igitur & AE, tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendū.

b 1. ſex.

COROL-

COROLLARIVM.

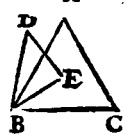
ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliqua rectæ AD, interangulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

EX quibus rurſus fit, rectam AD, rectæ DE. duplam eſſe.

0. xvij. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur: erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro ſphæræ D, perpendicularis dimittatur DE; ducaturque ſemidiameter ſphæræ DB. Dico ſemidiametrum DB potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum ABC, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; *a* quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. *b* Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare *c* cum quadratum rectæ DB, æquale ſit quadratis rectarum BE, DE; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur Octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 14. *tertiidec.*

b 12. *tertiidec.*

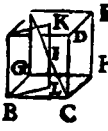
c 47. *primi.*

0. xviij. THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum

centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. *a* Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.. *a tertiidee.*



PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos.14 lib.11 Rursus, *b* quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK BL, *c* quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea ea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam vero perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos.10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll.1. propos.15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cum KK, ostensa sit æqualis lateri cubi. erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat. *b 6. undecimi.* *c 16. undecimi.*

COROLLARIVM I.

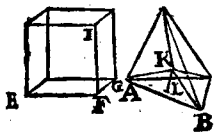
EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. *d* Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: *e* Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum. *d 15. tertiidee.* *e 31. undecimi.*

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro

centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſin ducta ſit tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, ſolidum autem EFGH, contentum ſub EI, tertia pars ſuperficiei corporis ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad baſin ABC; Dico ſolidum EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſi æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſitionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contentum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplum eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 6. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum: Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.



20. THEOR. 21. PROPOS. 21.

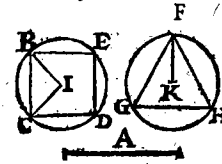
xj.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc eſt, circulos BCDE, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex centris IB, KF. *a* Quia igitur quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum re-

a 15. *tertii dec.*

b 47. *primi.*



ctarum

ctarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, buadrati rectæ BI) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus a quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG: b & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ: qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI: æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK: Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. tertii.
b 12. tertiæ decimæ.

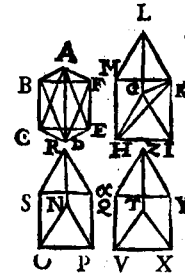
COROLLARIVM.

HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. c qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13 quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod est propositum.

c 11. quartidecimi

THEOR. 22. PROPOS. 22.

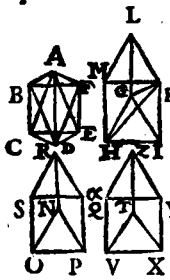
SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.



IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarũ latus communis est ipsa diameter AD, & vertex cõmunis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD: in BDFA: cuius basis BDF: in CDEA, cuius basis CDE: & in DEFA: cuius basis DEF: quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyrami-

dum

dum conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD,
a 8. primi. diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtunt, a inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIkLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis.
b 14. quartidecimi. b Quoniam igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum. Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14 lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIkLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIk, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9 erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4 ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandum erat.



COROL-

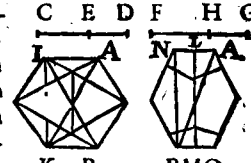
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. *a* Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram. *a* 18. *tertiidec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

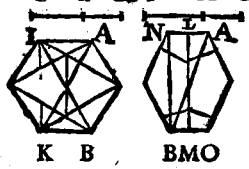
POSSIT recta AB, rectam CD, & eius segmentum maius CE; Item rectam FG; & eius segmentum minus HG. Dico CE, esse latus Icosaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius sphæræ, cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter AB, descriptum Icosaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icosaedri opposita AI, BK, connectantur recta IB, quæ subtendet vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, vt constat ex propos. 16. lib 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia in superficiem sphæræ, in quo recta RH, latera opposita RX, HI, coniungens angulum RSH, subtendit (clariusque patebit ex constructione Icosaedri, quam ad finem lib. 16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16 lib. 13. *b* erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales. (Ducta enim alia diametro IK; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; *c* Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; *d* ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE. Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt



b 29. *primi.*
c 8. *primi.*
d 47. *primi.*

quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuisæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuisæ; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est IA, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, *a* maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE, maius segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. *b* Cum enim sit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; *c* erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA ad quadratum rectæ IA: Ostensa sunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; *d* Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.

a 8. tertii dec.
b 2. quartidecimi.
c 22. sexti.
d 14. quinti.



Rvrsvs latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. *e* erunt quoque LM, NB. æquales & parallelæ: Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, *f* Ac proinde quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA: Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarum FG, HG, æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, sit minus segmentum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmentum ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauimus, CE, maius segmentum æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea *propo*sita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter exiſtit. Quod erat ostendendum.

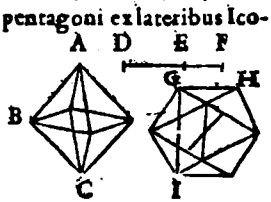
e 33. primi.
f 47. primi.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI, erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione: *b* Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. *c* Quia vero quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: *d* Est autem quadratum diametri HI duplum quadrati lateris octaedri AB Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cum sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. *f* Erit quoque vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



a 3. *tertiidec.*
b 5. *tertiidec.*
c 47. *primi.*
d 14. *tertiidec.*
e 2. *quartidecimi.*
f 22. *sexti.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

Si recta linea diuisa extrema ac media ratione cũ minore segmento angulum rectum cõstituat; cui recta subtenda-

tendatur? Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius *rectæ* subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit maiori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BE, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua AD, vel AC, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum AC, vel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti BC, nempe lateris cubi: *a* Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ. *b* Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, *latus Dodecaedri ponatur.* Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. *tertii dec.*

b 14. *tertii dec.*

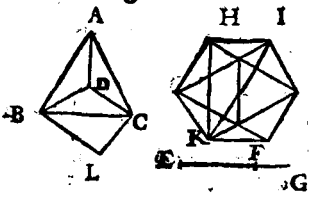
COROLLARIVM.

c 18. *tertii dec.*

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, ve constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, *in* qua Octaedrum descriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ, latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque HI, latus Icosaedri HIK, eiusdem sphæræ. Dico HI, rectam potentia esse

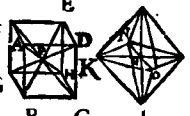
esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta IK, diameter. *a* Quia igitur HI, est maius segmentum rectæ HK, diuisæ extrema ac media ratione; *b* Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum HK, & minus HI. *c* Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCK, ita vt BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis, *d* Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG. Est autem & angulus IHK, rectus, vt proposi 23 huius lib. ostendimus: *e* Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. *f* Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt *g* Ac propterea, vt KI, ad IH, ita BC, ad CL: & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CL. *h* Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC, Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FH. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

a 8. tertiæ
b 5. tertiæ
c 22. primi.
d 48 primi.
e 2. quartidecimi.
f 6. sext.
g 4. sext.
h 13. tertiæ

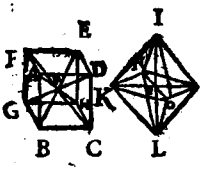
THEOR. 27. PROPOS. 27.

Cvbvs ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem, Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

Sint in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri: nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines (Cum enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. *i* Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum: æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri a cẽtro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basin y-



i 21 quartidecimi.

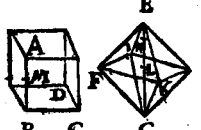


ramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſin pyramidis Octaedri; Ideoq; rurſus ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

SINT rurſus in eadem ſphæra cubus ABCD, & octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex ſemidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octaedrum ſecari diximus propoſ. 16 huius lib. a ſeſquialterum eſt quadrati BD, lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, rectæ BM, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes IFKH, BD, & altitudines AB, BM: b Ac propterea parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſin BD, & ſub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL, rectæ EN tripla eſt; erit & parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine EL, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſin, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio propoſ. 14. lib. 12 oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12 Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine LN, ex ſcholio propoſ 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN. c Item Octaedrum EFGHIK, duplum eſt pyramidis IFKHE. Æquale igitur erit parallelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelelepipedum ſuper baſin IFKH, & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL,

a 18. *tertiidec.*

b 34. *vndecimi.*

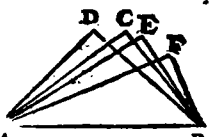


c 16. *quartidecimi.*

ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine BM æquale est ostensum cubo ABCD: Et parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine LN æquale est Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipsa sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD demonstratum est, a diametrum sphæra, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt si quadratum diametri ponatur 3. partium, eorundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia: qua proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphæra ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB:



Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC: erit recta AC, latus Tetraedri.

a 13. tertii dec.

RVRSVS b cum ostensum sit, diametrum sphæra potentia duplam esse lateris Octaedri: Fit, si ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium sit quadrati diametri AC: Vel si constituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis secundum doctrinam scholii propos. 33. lib. 6. rectam AD, latus esse Octaedri.

b 14. tertii dec.

DEINDE, c quoniam docuimus, diametrum sphæra potentia esse triplam lateris cubi: Efficitur, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars sit quadrati diametri AB: Vel si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiusdem scholii propos. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB, possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC: Quemadmo-

b 14. tertii dec.

dum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extremam ac mediam ratione sectam, & maius ipsius segmentum:

a 23. quartidecimi. a *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea: Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 13. lib. 6. demonstrata sunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quauis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.*

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius

b 23. quartidecimi. *segmentum:* b *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quacunque recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.*

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt. Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, quisequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiecimus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

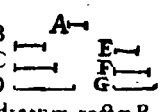
THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportionales, nec non quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secunda ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A: c habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam

c 20. sexti.

tam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratū rectæ E: vt recta C, ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.



quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F. a 20. *sexti.*

Rvrsvs cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; *b* habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubū rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: *c* Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

b 33. *vndec.*

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

c 33. *vndec.*

SCHOLIVM.

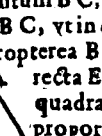
HOC idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-

portionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in corollar. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. a Inueniatur ergo



recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulũ A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. b Sit aũt eidem rectangulo sub A B, B D, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. c Quoniam vero quadratum lateris A B, ad quadratũ rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoq; duplicatã lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. *sex.*

b 17. *sexti.*

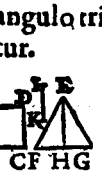
c 20. *sexti.*

COROLLARIVM.

ITAQVE, *si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidiũ lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.*

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpẽdicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; d cum quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B; e sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangu-

d 28. *tertiidec.*

e 1. *sexti.*

ctangulum ſub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; *a* Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc eſt, tres rectæ F H. A B, E F, continuè erunt continuè proportionales: Sunt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continuè proportionales, ex conſtructione. Igitur cum omnium antecedens ſit F H, *b* erit proportio rectæ E F, ad rectam E H, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ A B, ad rectam I K, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc eſt, E F. E H. ad triangulum E F G (eſt enim ex coroll. propoſ. 19. huius lib. quadratū rectæ I K, æquale triangulo E F G) *c* proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, vt latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 17. *ſexti.*

b 28. *quartidecimi.*

FH. IK. EF. EH.

c 19. *ſexti.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis vero, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulum A B C & altitudo, ſeu axis Tetraedri D E, latusq; cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri A B, eſſe potentia ſeſquialterum axis D E: Axem vero D E, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* deſcripto circulo A B C; ad centrū D, in quod videlicet cadit axis D E, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur A D, ſemidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc eſt, lateris A B, *e* æquale eſt quadratis rectarum A D, D E, *f* & triplum quadrati ſemidiametri A D; Fit, vt poſito quadrato lateris A B, ſeu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

d 5. *quarti.*

e 47. *primi.*

f 12. *tertiidec.*

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, *g* potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratū lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris A B; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratū axis D E. Igitur quadratum axis D E, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaq; Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

g 18. *tertiidec.*

COROL-

COROLLARIVM I.

a 13. *tertii decimi.* b 20. *sexti.*

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. *a* quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Eiusdem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, *b* cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6 9 apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

COROLLARIVM II

c 12. *quartidecimi.*

CONSTAT quoq; ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet *c* tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propositæ ipse axis Tetraedri lateris cubi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

d 30. *quartidecimi.*

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. *d* Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2 propos. 31. huius libr. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinē cubi seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. libr. 11. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFFHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1 propos. 7. libr. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM, VT nonnulli putant. Vt vero alii, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus,

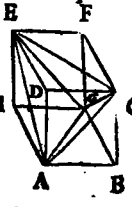
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato A B C D E F G H, oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri E A, E G, E C, ex quarum extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur A G, G C, C A, in reliquis tribus baſibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potentia duplæ ſint laterum æqualium quadratorum, vt in ſcholio propoſ. 47 lib. 1. demonſtrauimus, perſpicuum eſt, quatuor triangula A C E, G A C, G A E, G C E, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem, ſeu Tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cuoi collocantur; manifeſtum eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.



PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

ij.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus laterib⁹ bifariam in B,F,G,H,I,K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: a æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt & æqualia inter se; ideoq; octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 8. *duodecimi.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: b Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

b 8. *duodecimi.*

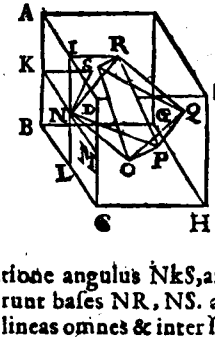
PROBL. 3. PROPOS. 3.

iij.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto; quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NI, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum,

totum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 9. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS, conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR, quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales, propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; *a* angulus NIR, æqualis eſt recto angulo kAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NkS, angulo recto IAF, in quadrato AE; *b* Erunt baſes NR, NS. æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe: ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AB, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ, Nk, Sk, ductæ ſunt ad k, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP: Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 10. vndecimi.
b primi.

ALITER. *c* In cubo dato inſcribatur pyramis: *d* In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis: Latera vero pyramidis ex demonſtratione propoſ 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri: perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi, atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 1. quinti decimi.
d quinti decimi.

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO (ſi ducantur, ſe mutuo ſecant ad angulos rectos; ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13.

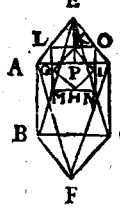
quæ

quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarū: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum seſe mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propoſ. 15. libr. 13. ſed etiã ad angulos rectos, vt hic oſtendimus, diuidere.

IV. PROBL. 4. PROPOS. 4

In dato Octaedro cubum inſcribere.

DATVM Octaedrum ſit ABCDEF, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in Octaedro ſex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices ſunt ſex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum conſtituunt; ſit vna earum



pyramis ABCDE, cuius baſis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CFD, DEA, ſintque horum triangulorum contra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum ſimilia ſint triangulis æquilateris ABE, EBC; CED, DEA, ex coroll. propoſ. 4. libr 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habent communia. Eſt enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis NEO, EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipſi NEO; & hoc ipſi OEL, æquale eſſe. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox oſtendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter ſe æquales ſunt. *a* Quia vero ducta recta EKP, tripla eſt rectæ KP. *b* Eſt autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumq; conſtituent LMNO Rurſus quia LO, LM, parallelæ ſunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipſis exiſtentibus plano; *c* æqualis erit angulus MLO, angulo BAD qui rectus eſt, cum ABCD, quadratum ſit, vt oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14 lib. 13 & in propoſ. 16. libr. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos eſſe. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, *d* parallelum eſt plano ABCD, *e* ipſa, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, triãguli ELK, æqualia ſint lateribus

a 18. *quarti elem.*
b 2. *ſex.*
c 10. *vndec.*
d 15. *vndec.*
e 15. *vndec.*

teribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12 lib. 13. Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN dimidia, æquales inter se erunt: Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, *b* æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos: (*c* cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus GKI: Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinq; pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubũ descripsimus. Quod faciendum erat.

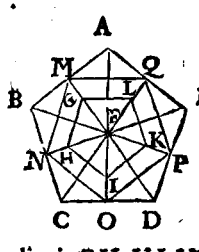
a 4. *primi.*

b 4. *primi.*

c 13. *primi.*

PROBL. 5. PROPOS. 5. v. vj.

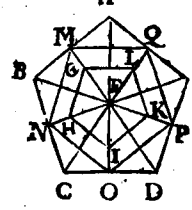
In dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.



Sit ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum videlicet bases sunt pentagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero, duodecim anguli Icosaedri, una pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triãgulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, EP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. libr. 13. bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q. ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, *d* æquales quoque erunt rectæ MN,

d 4. *primi.*

ctæ MN, NO, OP PQ, QM, puncta, M, N, O, P, Q, connectentes: a Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia sint, continentq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; b erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratũ est; c Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. d Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis. e Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonũ erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP FQ æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplæ sunt ipsarum GM, HN, IO, KP, LQ ex coro'l. propos. 18. lib. 14. f parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ, QM; g Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoq; & inter se æquales erunt. h Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ductà parallela sunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto conueniuntq; in recta HI, ipsa vnum planum efficient, ex scholio propos. 16 lib. 11. Eodemq; modo ostendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, nec non per LG, GH, ducta idem planum constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL. pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadẽ arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula; quę cum latera habeant cõmunia, æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidẽ ex defin. 31. lib. 11. in Icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri, con-



a 8. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.
d 13. primi.
e 4. primi.
f 2. sexti.
g 10. vndecimi.
h 15. vndecimi.

dri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum describimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basiū, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpēdiculares sint ad plana circulorum æqualiū bases Icosaedri circumscribentiū, atq; adeo eorundem distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lem. 2. eiusdem propos. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atq; sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6. o. v.

In dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro A B C D E F. In pyramide octaedri superiori A B C D E, sumantur G, & H, cētra triangulorū ex aduerso sibi respondentiū A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, cētra triangulorum ex aduerso quoq; sibi correspondentium C F D, A F B: quæ quidem centra coniungantur sex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per scholiū propos. 12. lib. 3. coniungaturq; recta LM, *a* quæ ipsi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirū dimidia laterum DE, BF, oppositorū in quadrato E F. Quoniam vero rectæ AL, AM, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplæ sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propos. 18 lib. 14 *b* Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia *c* Quare erit vt AL, ad LM, ita AG ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK. Est aūt AL, ipsius AG, sesquialtera; *d* quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoq; AG, eiusdem AL, duæ tertiæ Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentiū sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componētes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrum constituit: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin 31. lib 11 in octaedro Quocirca in dato octaedro pyramidem describimus. Quod erat faciendum.

a 33. primi.

b 2. sext. 4. sext.

d 18. quartidecimi.

e 4. quartidecimi.

ALITER. *e* In octaedro dato inscribatur cubus, *f* & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium Octaedri, & in angulis cubi

f 1. quintidecimi.

collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

COROLLARIVM I.

QVIA vero oſtenſum eſt, vtramque G K, D F parallelam eſſe ipſi L M, a ac propterea & G K, ipſi D F, atque adeo ipſi B E, parallelam eſſe; b Atque eadem ratione k H, ipſius F C; E A, parallelum eſſe: Atque idcirco, planum Gk H, per G k, K H, ductum, parallelum eſſe plano D F C, per D F, F C, necnon & plano B E A, per B E, E A. Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula: Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

a 9. *vndecimi.*
b 15. *vndecimi.*

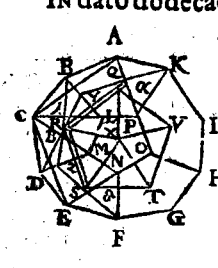
COROLLARIVM II.

PRÆTEREA cum octaedrum circumſcribat & cubum & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur: Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt conſtat ex 4. propoſ. huius libr. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. libr. 14. vel per coroll. 2. propoſ 13 Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

o. vij.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis A B L P K, P K I H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectæ ducantur K Y, D Y, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem Y K, Y D, rectas A P, C M, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis. quod & arcus A K P, C D M, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant (c conſtat enim rectus A K, P K; Item C D, M D, arcus ſubtendere æquales.) d Igitur A α, C β, parallelæ ſunt rectæ B Y, e atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales,

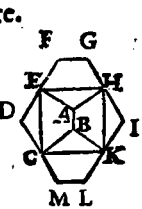
c 28 *tertij.*
d 28. *primi.*
e 9. *vndecimi.*

les, nempe dimidia rectarum A P, C M, *a* quæ æquales sunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. *b* Rectæ ergo ipsas connectentes A c, $\alpha\beta$, æquales erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æquales esse ipsas c z, $\gamma\delta$: *c* Sunt autem A C, C E, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet) Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales sint (Nam Y Q, Y R, Z R, Y S, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum B L, D M, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, *d* atque adeo æquales. Item Q α, R β, R γ, S δ, distantiæ sunt rectarum æqualium A P, C M, C L, E N, à centris eorundem circulorum æqualium, *e* ideoque æquales: Ac proinde & totæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales erunt.) *f* Erunt quoque anguli α Y β, γ Z δ, æquales: Ac propterea, cum & rectæ Y Q, Y R, Z R, Z S, æquales sint; *g* æquales quoque erunt rectæ Q R R S, centra Q R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri, L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. *primi.*
b 33. *primi.*
c 4. *primi.*
d 14. *tertij.*
e 14. *tertij.*
f 8. *primi.*
g 4. *primi.*

PROBL. 8. PROPOS. 8. o. viij.

In dato Dodecaedro cubum describere.



Proponantur quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus ARCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB: duo quidem ABCDE, ABKIH, secundum latus idem commune AB: alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK. In his vero pentagonis subtendantur anguli A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, qua-

quadrilaterum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omni latera AE. AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint,
a 4. primi. angulo q; contineant æquales, ex hypothesi; a æquales erunt ba-
b 28. tertij. ses EH, HK, KC. CE. b Quoniam igitur rectæ AE, BC, æqua-
les, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circumscribente
c 9. undecimi. arcus æquales; Erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB HK. c Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; d Ac propterea rectæ EH, CK,
d 33. primi. e 7. undecimi.

quæ ipsas connectunt; parallelæ erunt, e in eodemq; cum ipsis plano; ideoq; parallelogrammum erit EHKC; quod ostendimus esse æquilaterũ. Quia vero planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1 propositionis 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK. descriptum; f Erunt tam anguli oppositi E, K, quam C, H, duobus rectis
f 22. tertij. g 34. primi. æquales; g Ac propterea cum oppositi E, & K, sint æquales, necnó & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit; collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constituẽ
h 4. primi. erit solidum sex quadratis contentũ; quæ cum sint æqualia, h eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt, cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis residēt. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

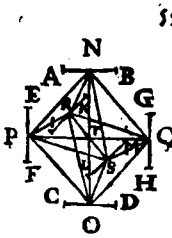
HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CB. ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit Octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH. IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O. P, Q, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & angulos rectos diui-

diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. a Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, OSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentq; octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

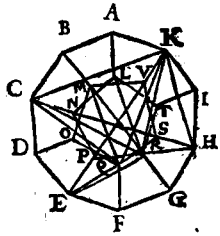


a 4. primi.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

In dato dodecaedro pyramidem describere.

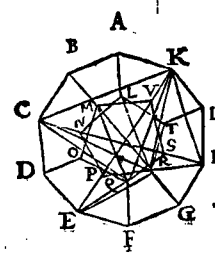
SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDQM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, commmuni pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LV, communi pentagonis KLT, LTP; Deniq; R. Lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; b quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet cõmunis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. c Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Nõ secus ostendemus, rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. d Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH,



b 17. tertij decimi.

c 31. tertij

d 47. primi.



& quadratis rectarum K R, R E, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualiũ K H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H, (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonum æquales æqualibus rectis comprehensos, *a* æquales sunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum C K, C R, R K, K Q, R Q, & C Q: Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C K R, C K Q, K R Q, R C Q, æquilatera sunt, & æqualia, ideoq; tetraedrum componunt C K R Q: quod cũ habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 14. primi.

ALITER. *b* In proposito Dodecaedro cubus describatur: *c* & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant: perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

b 8. quinti decimi.

c 1. quinti decimi.

o. xj.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

In dato Icosaedro cubum describere.

d DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrum: *e* & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideãt in angulis Dodecaedri: anguli vero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur: tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

d 5. quinti decimi.

e 8. quinti decimi.

o. xij.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

In dato Icosaedro Pyramidem describere.

IN dato Icosaedro *f* cubus describatur, *g* & in hoc cubo pyramis: factumque erit, quod proponitur. *h* Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri: & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri: Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. *i* In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

f 11. quinti decimi.

g 1. quinti decimi.

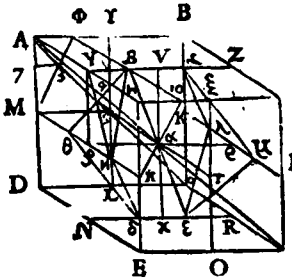
h 11. quinti decimi.

i 12. quintid.

PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

In dato cubo Dodecaedrum describere.

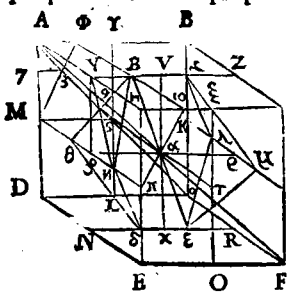


Ducatur in figura recta HaG.

Sit in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξ O, M π, KP, NR, nusquam inter se coeuntibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed vna duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρ Q, quæ se mutuo in centro κ, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, sunt que lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, M π, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt sint maiora segmenta, Y β, Z γ, M θ, π κ, ductis rectis Y ϱ. Y κ, βθ βκ. Quoniam ergo Y ρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρ κ, β V, segmenta minora rectarum æqualium YV, ρ π, æqualia quoque: *a* Sunt autem quadrata rectarum YV, β V, tripla quadrati rectæ Y β; Erunt & quadrata rectarum Y ϱ, ρ κ, tripla eiusdem quadrati rectæ Y β. Quare, *b* cum quadratis rectarum Y ρ, ρ κ, æquale sit quadratum rectæ Y κ, *c* quod angulus Y ϱ κ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y κ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Y ρ, *d* recta est ad planum AE, per rectas AY, Y ϱ, ductum, rectus erit angulus β Y κ, ex *e* Ac propterea quadratum rectæ β κ, æquale quadratis rectarum Y κ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Xβ (quia nimirum quadrata rectarum Y κ, Y β, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Y κ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Y β) Idcoque *f* cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta β κ, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1, 2, 4. apparet: Est autem & θκ, dupla ipsius ρ κ, quod minora segmenta θ ρ, κ ρ, rectarum æqualium M ρ, π ρ, æqualia sint. *g* Erit igitur vt Y β, ad ρ κ, ita β κ, dupla ipsius Yβ, ad θ κ, duplam ipsius ρ κ: Est autem Y ϱ, maius segmentum ad ρ κ, rectam minori segmento β V, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & β κ, ad θ κ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde θ κ, erit maius segmentum rectæ β κ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θ κ, maius esse segmentum

a 4. *tertii dec.*
b 47. *primi.*
c 29. *primi.*
d 4. *undecimi.*
e 47. *primi.*
f 20. *sexti.*
g 15. *quinti.*

rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta $Y\theta$. Quare æquales erunt $\beta\theta$, $\beta\varkappa$, constituentes triangulum Isosceles $\beta\theta\varkappa$, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus: Ac proinde $\theta\varkappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\varkappa$, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.



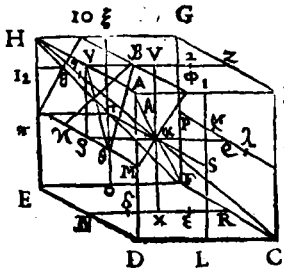
a 33. primi.

INTELLIGATVR iam planum trianguli $\beta\theta\varkappa$, extendi, (ducta per β, hecta $\beta\Phi$, ipsi $M\pi$, parallela) per parallelas M,ϕ 10. vt sit planum extensum $\phi\pi$, occurrens diametro AB, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in pũcto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\phi$, parallela, connectaturque MS, a quæ parallela est vtrique $A\phi$, 73. Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo AMS; b ac proinde vt AM, ad MS, ita est A 7 ad 73. Sunt autem AM, MS. æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad $A\phi$, ita M 7. ad 73. Est autem $A\phi$, maius segmentũ rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione (c quod æquales sint $A\phi$, $Y\beta$, necnon & MA, YV, dimidia cubi latera) Igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentum erit rectæ M 7. extrema ac media ratione sectæ; d Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusq; segmentum erit M 7. e Atqui vt M 7. ad 7. A, ita est S. 3. ad 3. A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3 maiusq; segmentum est S. 3 f Quia vero $S\varkappa T$, parallela est ipsi $M\pi$; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS: si per $S\varkappa T$, planum ducatur parallelũ plano $\phi\pi$, ducto per $M\pi$, g secabuntur rectæ AS, $A\varkappa$, in easdẽ rationes, in punctis 3. & 4. cũ planũ $\phi\pi$, rectas AS, $A\varkappa$, secet in 3. & 4. at planum per $S\varkappa T$ ductũ plano $\phi\pi$, parallelũ easdem secet in S, & $\varkappa$. Atq; idcirco, cũ AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodẽ modo $A\varkappa$, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmentũ erit $\varkappa$ 4.

b 4. sex.
c 34. primi.
d 5. tertii dec.
e 2. sex.
f 33. primi.
g 17. vndecimi.

ISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano $\phi\pi$, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum AC. locum quadrati HF: & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione proba-

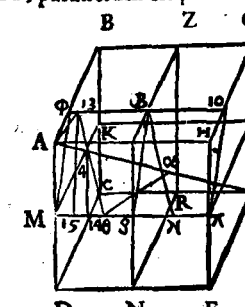
probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura: (Hæc deest in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum $\phi\pi$, secet in 9. prope punctum H: intelligaturque per rectam AH, planum plano $\phi\pi$, parallelum. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H, & 4, 9: (Nam planum $\phi\pi$, eas secat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano $\phi\pi$, parallelum easdem secat in A, & H) a erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo α A, secta sit in 4 extrema & media ratione, erit quoque α H, similiter secta, quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur θ 4, β 4, β 9. $\varkappa$ 9, rectilineum β 4, $\theta\varkappa$ 9, in plano $\phi\pi$, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.



a 15. *vndecimi.*

INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum $\beta\theta\varkappa$, siue planum $\phi\pi$, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano $\phi\pi$, recta coniuncta θ 4. extendatur vsque ad rectam ϕ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, π P, *b* planum MP, parallelum est plano AG, (quod & rectæ PK, kM, parallelæ sint rectis GB, BA) *c* secatque cubum bifariam: ideoq; per centrum α, transit, per ea quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt: si per rectas α 4 A, θ 4 13. planum extendatur, *d* fient α β A 13. communes sectiones planorum MP, AG, parallelæ: Ac proinde triangula $\alpha\theta$ 4. 13 α 34. æquiangula erunt: *e* Eritque vt α 4. ad 4 A, ita θ 4. ad 413. Quare cum α A, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostendimus: eodem modo erit secta θ 13. in 4. Rursus plano NZ, per centrum α, transeunti parallelum ducatur planum per punctum 4. ex schol. propos. 15. lib. 11. secans $\phi\pi$, recta 4. 14. *f* Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. *g* Rectæ igitur αA, ρM, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & *g* M. in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusque

b 15. *vndecimi.*



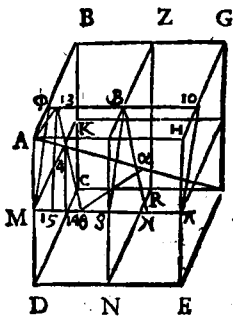
c 32. *vndecimi.*

d 16. *vndecimi.*

e 4. *sex.*

f 15. *vndecimi.*

g 17. *vndecimi.*



minusque erit segmentum 14M, ideoque æquale minori $\rho\theta$, ipsius Mρ. Quare cum ex ϱ14. maiori segmento ipsius ρM, auferatur $\varrho\theta$, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ϱ14. diuisa in θ, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit $\varrho\theta$. Postremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, *a* secabuntur rectæ θ13, θ15. proportionaliter; Ac proinde & θ15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit θ14. *b* Quapropter erit vt $\varrho\theta$, maius segmentum ad θ14. minus ita θ14. maius ad 14.15. minus: Vt autem θ14. ad 14 15. ita est tota θ15. ad θ14. maius segmentum. Igitur erit vt $\rho\theta$, ad θ14 ita θ15. ad eandem θ14. Ac propterea rectæ $\rho\theta$, vel $\varrho\varkappa$, & θ15. æquales erunt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelum per 4.14. ductum, secantur plano $\phi\pi$, *c* erunt communes sectiones $\beta\varrho$, 4.14 parallelæ, ideoque & 13.15. $\beta\rho$, parallelæ erunt, *d* angulusque externus $\beta\rho\varkappa$, interno 13.15 θ. æqualis. Cum igitur & latera $\beta\rho$, $\rho\varkappa$, lateribus 13. 15. 15 θ, sint æqualia, *e* æquales erunt quoque rectæ $\beta\varkappa$, 13 θ. Ac proinde & earum segmenta maiora $\theta\varkappa$, θ4. (Ostensum enim est $\theta\varkappa$, esse maius segmentum ipsius $\beta\varkappa$) æqualia erunt. Eadem arte & β4, ipsi $\beta\gamma$, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basin $\beta\gamma$, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem $\theta\varkappa$, $\beta\gamma$, æquales erunt $\varkappa\rho$. β9. Æquilaterum ergo est pentagonum β4. $\theta\varkappa$9. quandoquidem $\beta\gamma$, $\theta\varkappa$, rectæ æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt YV, ZV, $\pi\varrho$, Mϱ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipsi $\beta\theta\varkappa$, similia, & æqualia construantur; (ita enim ad Mπ, duo huiusmodi triangula vides $\beta\theta\varkappa$, $\delta\theta\varkappa$) & ipsorum beneficio duodecim pentagona ipsi β4. $\theta\varkappa$9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirum in singulis, octo vero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris Aα, & Hα, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cum non omnes eius anguli vel in angulis, vel

a 2. sext.

b 2. quartidecimi.

c 16. undecimi.

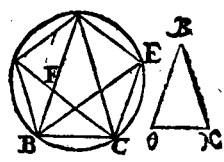
d 29. primi.

e 4. primi.

vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, residean-t. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

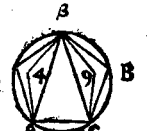
QVOD autem triangulum βθx, cuius basis θx, maius segmentum existat vtriusque lateris βθ, βx, extrema ac media ratione diuisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos.10. lib.4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isoscelis ABC, quale Euclides construere docet propos.10. lib. 4. circulus ADBCE, diuisisque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum aquilaterum & aquiangulum ADBCE, vt propos.11. lib.4. tradidimus, secentque se mutuo rectæ AB, CD, in F. a *Quoniam ergo AB in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentum est AF, æquale lateri BC:* b *Erit vt AB, tota ad maius segmentum BC, ita βθ, tota ad maius suum segmentum θx. Idemque modo, vt tota AC, ad maius segmentum CB, ita βx, tota ad maius segmentum xθ: Est autem quoque vt AB ad AC, ita βθ, ad βx, vtrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur βθx, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt æqualesque erunt anguli θ, B; Item x, C, & β, A; propterea que vterque angulorum θx, duplus erit anguli β; & triangula βθx, ABC, similia.*



a 8. tertii dec.

b 2. quarti decimi.

PENTAGONVM vero β4θx9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum βθx, circulus βAθxB, qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex iis, quæ ad propos.16. lib.4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum βAθxB. Quoniam igitur tam rectæ Aθ, Aβ, quam rectæ 4θ, 4β, æquales sunt rectæ θx, cum & β4θx9,



& βA-

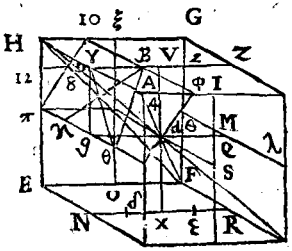
& β A θ κ B, pentagonum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A, θ 4, quam duæ β A, 4 β, æquales. quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo circulus triangulo β θ κ, circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ κ 9, æquiangulum eſt.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.



DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ι, intelligaturque coniuncta recta γι, a æqualis exiſtens & parallela lateri cubi V X quod & V γ, X ι, æqualis ſint & parallela. Quoniam igitur angulus β V X, rectus eſt: b rectus quoque erit angulus β γ ι, ad γ, conſtitutus: c Ac proinde quadratum diametri β ι, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ι, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius vero ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti.

d 15. quinti. *IN eadem enim prima figura, d cum ſit vt Y X, ad β V, ita Y Z, dupla ipſius Y V, ad β γ, duplam ipſius β V: Sit autem β V, minus ſegmentum ipſius Y V, ſecta extrema ac media ratione. Erit & β γ, minus ſegmentum lateris cubi Y Z, ſecti extrema ac media ratione: compoſita vero ex Y β, γ Z, hoc eſt, recta β κ (qua dupla fuit oſtenſa ipſius Y β, ideoque compoſita ex Y β, γ Z, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione β γ, eſſe latus Dodecaedri e & β κ, ſeu β θ, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 θ.*

e 8. quinti decimi.

III.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus; Dodecaedri

caedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi YZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Yβ, γZ, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim YZ, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. a Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris YZ, sicbi extrema ac media ratione: Erit βθ, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris YZ, & aqualis duabus Yβ, γZ, simul, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumscripti.

a 8. tertii dec.

IV.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

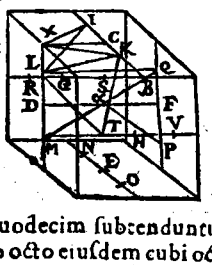
IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppositi, b aqualis est recta VX (quod & βV, δX, aquales sint, & parallela) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

b 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

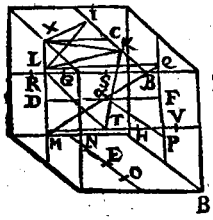
CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquam inter se conuenientes, & harum mediates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta propecentra sint in punctis I, k: L, M: N, O: P, Q: R, S: T, V: quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus cõnectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IkL, IkQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN. TVk, TVO, ILR, ISQ, kTL, kQV, OPV, OTM, NSP, NMR: quorum priora duodecim subtenduntur, duodecim cubi lateribus, posterioravero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, Xk, Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, Ck, trianguli XCk: & anguli cõtenti, recti, quod XC,



c 29. primi.

paral.

a 4. *primi.* parallela sit ipsi AY: *a* Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per definit. 4. lib 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK, Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, trianguli LXK, &
b 4. *primi.* anguli contenti, recti; *b* æquales erunt bases LI, LK. Rursus, &
c 7. *primi.* quoniam quadratum rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc



d 4. *tertii decimi.* tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI, (*d* Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cum eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectæ KI, ex scholio propos. 4 lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum LI, Ik, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum IkL, lateri cubi AG, subiectum.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera Ik LM, NO, PQ RS, TV, æqualia sint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo kTL, latus kL, commune est triangulo IkL, & latus kT, triangulo TVk, & latus TL, triangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim trangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

DIA-

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela est, & aequalis, quod & DL, FQ, parallela sint, & aequales: b manifestum est, quadratum diametri QM, aequale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est, c cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, sit rectus.

a 33. primi.
b 47. primi.
c 29. primi.

II.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum coniungant centra basium cubi oppositarum, aequales sunt lateribus cubi, sesque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF. FQ, trianguli αFQ, aequalia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, d aequales erunt rectæ αQ, αP. Eademque ratione aequales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

d 4. primi.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI. sit maius segmentum rectæ CY: e sitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY: f erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, esset maius segmentum rectæ βY. esset βY, ad illam rectam, vt CY, ad CI, hoc est, vt βY, ad KI, diuersum ab illa recta. quod est absurdum.

e 15. quinti.
f 2. quarti.

IV.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

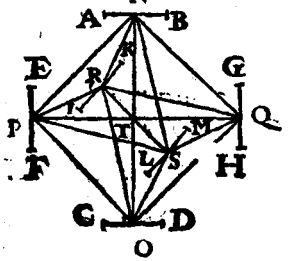
SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se aequalia, angulosque alternos habentia aequales ex 4. propos. lib. 1. qua quidem in centro conueniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt: g Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

g 15. undecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt: ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ: OP, OR, OS, OQ. PR, PS: QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN: RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum sint rectarum æqualium dimidia) angulosque continent, rectos, vt dictum est: a Æquales erunt bases NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & bisce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt & inter se æqualia: Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptum est, cum eius anguli resideant in binariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 4. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

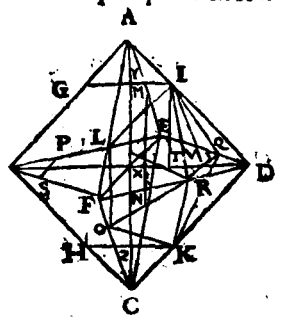
PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATVM octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC: DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD: AF, AE: CE, CF, iuxta angulos oppositos A, G, quadrati AECF: Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantum duo latera: at vero latera AB, AD: CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuere) EB, ED: FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD (Nam

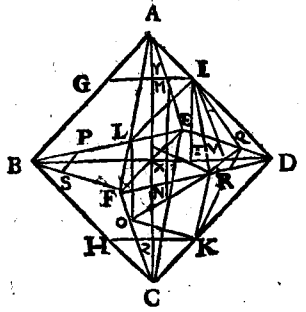
latera

latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos E, F, iam accepta sunt) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodetim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinq; proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere DF, quod cũ tribus DE, DA, DC, pyramidem constituit in vertice D; est commune triangulis octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinq; laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, sese in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14 lib. 13 quarũ AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y. & V; connectatur; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Quoniã ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, trianguli DRI; (Sunt enim DQ, DR, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri ADE; ADF; *a* erunt bases IQ IR, æquales. Deinde cum sit, *b* vt BG, ad GA, ita DI ad IA; *c* erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipsi EF, parallela; *d* Ac proinde vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita AY, ad YI (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentũ est rectæ XA Nõ aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualem; ideoq; GI, rectã bifariam in Y. similiterq; QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendant rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; *e* æquales erunt



a 4. primi.
b 2. quarti.
decimi.
c 2. sexti.
d 4. sexti.
e 4 primi.

baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ Hk, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturque duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13.



a 34. *primi.*

b 34. *primi.*

c 4. *tertiũ dec.*

Eſt autem XY, rectæ XV, æqualis (cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD) *a* & YI, rectæ XT: erit XT, maius ſegmentum ipſius XV, & idcirco TV, ſegmentum minus, eiuſdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT (*b* cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmenti, *c* tripla ſunt quadrati rectæ XT, maioris ſegmenti: Atque adeo quadratum rectæ IV, *d* æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdem quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV: erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: *e* At quadratis rectarum IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR, *f* quod anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR: IV, VQ, & ſubtenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR: Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque ſit per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR: Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe kQR, GIL, GIM: GPS, HPS: NHK, OHK: RLO, SLO: PMN, QMN, atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe, quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum octaedri: duo vero reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterum Octaedri, maiore & mino-

d 47. *primi.*

e 47. *primi.*

f 8. *primi.*

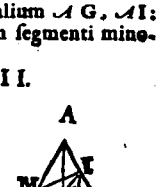
minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per corollarium propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, ſubtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehenſos minoribus ſegmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia ſunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur ſegmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic vero ſegmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non ſecus latera I R, G L, æqualia erunt. Æqualia igitur ſunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propoſ. 8. lib. 1 Atqui I Q R, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur, reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, videlicet G M P, in A E B; H N P, in B E C; K N Q, in C E D; I M Q, in A E D; G L S, in A F B; H O S, in B F C; K O R, in C F D; I L R, in A F D, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triangula, quorũ quina in ſingulis ſectionibus laterum Octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi (vt vides in quinq; R Q I, R I L, R L O, R O K, R K Q, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum, cum Icoſaedri duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGTVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmenti. Cum enim in triangulo æquilatero A D E, maius ſegmentum lateris A D, ſit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, oſtenſa æqualis rectæ G I, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti A I, cum quadratum rectæ G I, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perſpicuum eſt, & rectam I Q, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris A I. a 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS ſit, cum octo Icoſaedri baſes collatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. ſuſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulũ A E D, in quo collocatũ eſt triangulũ Icoſaedri I M Q, ſitq; C, centrũ trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D: C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia ſunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q (quod hæc latera ſint ex centro, &c



tro.& maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosq; comprehendunt æquales,nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri,vt in ſchol. propoſ 12.lib.13.oſtendimus: Erunt baſes CM,CQ,æquales.Nō ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ. Quare C,centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficile eſt deniq; ex dictis colligere, idem centrum eſſe Octaedri, atq; ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X,centro Octaedri,duabus rectis ad quoſcunq; duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G,& Q, cum latera XA,AG, trianguli XAG, æqualia ſint lateribus XF.FO,trianguli XFO. (Nam XA,XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac media ratione) angulosq; complectantur æquales,ſemirectos videlicet (cum AC,EF,diametri ſint quadratorum ABCE, EAFC: ac proinde, per demōſtrata in ſcholio propoſ 34.lib.1.angulos quadratorum bifariam
a 4. primi. ſecent.) a Æquales erunt & baſes XG,XO. Eodemq; argumento oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X,ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri,centrum quoq; eſt Icoſaedri.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

In Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

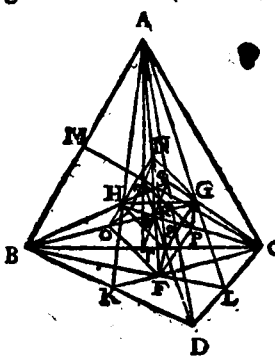
b 16. quintidecimi. b INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrum; c & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum
c 5. quintidecimi. enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri,quarum octo concentricæ ſunt baſibus Octaedri,ex coroll. 2. propoſ 16 huius lib. Manifeſtū eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem centris octo baſium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur,reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur,quanquam non proprie, vt ex defin 31.lib.11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

In data pyramide cubum deſcribere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur deſcribi; ſitq; eius centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis re-
d 15. quartidecimi. ctæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, d quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F,G,H,I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A,B,C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL. BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD,CD,AB,AD, BC,bifariam,& ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ 12.lib.13 in punctis K,L,M,S. Secētur quoq; rectæ ex ſolidis angulis per centrum E,demiſſæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N,O,P,Q, punctis. quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris,

tris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur cētrum illius basis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis coniunguntur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpēdiculares sint ad BD, CD, ex centro E, ductæ ostendant æquales distantias rectarū æqualium BD, CD, à centro E) angulosq; contineant rectos, ex 3 defin. lib. 11. a Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, tranguli ANG (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æqualium ABD, ACD) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; b Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostēdentur æquales rectæ QG; QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namq; FT, FK; distantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorū æquilaterorum æqualium ABC, ABD) angulosq; contineant æquales; c Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

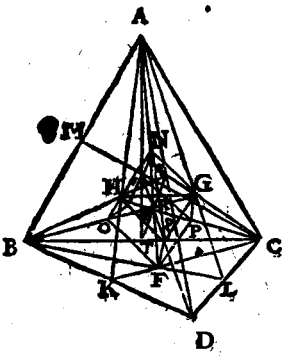


a 4. primi.

b 4. primi.

c 4. primi.

Assvmatvr quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, nō coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propositionis 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit



ST, per E, centrum pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. *a* erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur, *b* atque idcirco HG, parallela est lateri BC, secatque latera TS, CS, trianguli TSC (quod quidem pars est trianguli BSC) proportionaliter; ideoq; & RS, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus *c* quæ DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde taliū 4 recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atq; idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secentur, *d* recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitq; latera ES, ED, trianguli DES (quod quidem pars est trianguli AED) proportionaliter, idcoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur vtraq; HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, à rectis HG, NQ; Atq; idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem sese puncto intersecabunt. *e* Quare in eodē sunt plano, propterea q; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ; Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

a 18. *quartidecimi.*

b 2. *sexti.*

c 15. *quartidecimi.*

d 2. *sexti.*

e 2. *undecimi.*

CVM ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atq; adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC. ex coroll. propos. 4. lib. 6. *f* Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC; Est autem SH, tertia pars ipsius SB: Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC, Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendātur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; *g* Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales,

f 2. *sexti.*

g 8. *primi.*

vt esten-

vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1 recti erunt, ideoq; quadratum erit NQ. Eademq; ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent, qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G H I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpēdicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus, factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentq; eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelę sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2 huius lib. (*a* cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD; *b* erunt quoq; triangula EGH, BCD, per illas rectas ductæ, inter se parallela, & sic de cæteris) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoq; ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scolio propos 14. lib. 11. Quare cum prędictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, *d* hoc est, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaq; pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 2. *sext.*
b 15. *vnde-cim.*
c 17. *vnde-cim.*

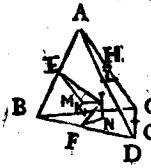
COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

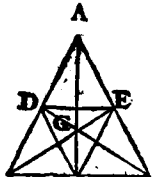
INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat: Recta RS, dupla ipsius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, ostensa sit tertia pars ipsius ST; perspicuum est, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis AD, BC, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi RS.

LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum pyramis 

ABCD, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares dimittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes, sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantia LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. libr. 11.

a 4. primi. a *Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.*



SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis Octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri;

b 2. sexti. b *erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF, quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 19. PPOPOS. 19.

In data pyramide Icosaedrum describere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inscribatur Octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum Octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK, HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH. in punctis L, M, N. O, P, Q. R, S, T V, X, Y. Nam si quilibet horum punctorum cum quinq; proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptū erit Icosaedrū in dicto Octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habēs omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum Octaedri. Cum ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, denique latera IK, KE, EI Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin 31 lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum

a 2. *quarti decimi.*

PROBL. 20. PROPOS. 20.

In data pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ *b* inscribatur Icosaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus: consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basib. pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde *d* quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus

b 19. *quindecimi.*

c 5. *quinti decimi.*

d 8. *quinti dec.*

pyra-

a 18. *quinti-decimi.* pyramidi inſcriptus, a quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt quatuor autem reliquos in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem bifariis ſectionibus perpendicularium dictarum: ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorū bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

xiij. IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum complectentis an ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoq; æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter à centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies connexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quolibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 19. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: qua quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum b 16. *quinti-decimi.* *Octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta:* c 5. *quinti-decimi.* b *In Octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos* d 8. *quinti-decimi.* *angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde* c *Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hac in Dodecaedro* d *deſcribitur cubus, cubus octo anguli,*

guli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident: ac propterea & cubus ipse in Octaedro descriptus est.

a Denique in cubo pyramis includitur, qua ideo in Octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis. a 1. quintidecimi.

NEQVE vero praetereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphaera comprehendi. b Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, c conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri: liquido constat sphaeram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum sphaera illius superficies per horum solidorum angulos incedat. b 1. quintidecimi. c 8. quintidecimi.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium Octaedri propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesue quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum: & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphaera depingatur docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ solidorum regularium sibi mutuo inscriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Francisco Flussate Candalla adiectum; & de quinque corporibus.

LIBER TERTIVS.

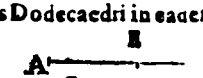
QVEMADMODVM *libro 14. tradita sunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphæra descriptarum, quarum quidem descriptionem lib. 13. exposuit Euclides; ita etiam Franciscus Flussas Candalla hoc lib. 16. inter se comparat easdem figuras regulares sibi mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inscriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15 quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri possit tractatio hæc quinque corporum regularium, si liber hic decimussextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D: diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cum enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docui-

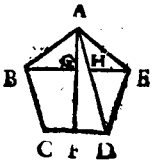
decimus, Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra: Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, vt AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris G, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris segmenti AE ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, subtendente angulum A, secari in G: extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ secet BE, in H: quoniam BE, recta lateri CD, ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, *a* secabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: *b* Atqui AD, in H secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentum DH Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.



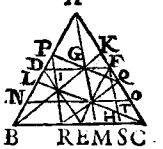
a 2. sexti
b 18. tertiidec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris,

lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alii triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, constituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosaedri GHI, hoc est rectam BK, transire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum sit; quippe quod simile sit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis est rectæ FH, maiori segmento rectæ FE, seu DF, ipsi æqualis: (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli comprehensos; *a* ideoque æqualia sint.) *b* Est autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, *c* propterea quod FH, DF, parallelæ sunt rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO, composita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, *d* secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde cum tres parallelæ BC, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex iis, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam AM, transire per puncta GH. Haud secus ostendemus Bk, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB: Atque idcirco rectæ Bk, CL, AM, suis sectionibus producent triangulum Icosaedri GHI.



a 4. *pri.*
b 34. *primi.*
c 2. *sex.*
d 5. *tertii dec.*

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis est rectæ DF, seu rectæ FE, cuius maius segmentum fuit FH, hoc est. FO, illi æqualis: Erit quoque FO, maius segmentum rectæ AF: *e* ac proinde tota AO, secta in F, extrema ac media ratione: *f* Est autem vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob

e 5. *tertii dec.*
f 2. *sex.*

GH, ob triangulum AHO; & vt AH, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, sunt que maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. quia vero est vt AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris AB, maiusque reliqua BP; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione; atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero singula latera trianguli PQR, cum subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, *b* æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex iis, quæ ad propos 4 lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, *c* secans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

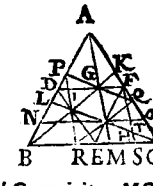
a 2. *quartidecimi.*

b 4. *primi.*

c 2. *sex.*

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. *d* Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; *e* sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DE. Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC,



d 2. *sex.*

e 34. *primi.*

a 2.sex. in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde a quia FE, FS, similiter secantur: secatur autem FE, extrema ac media ratione, secabitur & FS, in T,
b 34.primi. extrema ac media ratione; maiusque segmentum erit FT, recta b æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti maius est segmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, basin Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib 2. quod PQ. recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ. potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP. dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. c Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, d cum diametro potentia sit commensurabile. e Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit. Atque adeo f cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

c 13.tertii dec.
d 6. tertii dec.
e 6. tertii dec.
f 6.dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15 Sit autem quadratum huius diametri, duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. fit autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex corol. propos. 4. lib. 6. a Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

a 2. sexti.

DENIQVE b quia diameter sphæræ, seu octedri potentia est dupla lateris octaedri; fit autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra basium oppositarum, vt in coroll. propos. 3 lib. 15 diximus: patet latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

b 14. tertii dec.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. libr. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; c existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius, segmentum rectæ esse, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

c 5. sexti decimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SI latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propos. 14. libr. 15. demon-

A ——————
B ——————
C ——————

A ——— strata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum
B ——— sit lateris cubi A; & C. latus Dodecaedri, per ea,
C ——— quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ in propos. 18. lib. 5. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC) a Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

a 20. *sexti.*

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro describatur, inscriptus, quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 13. b Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.

b 8. *sexti dec.*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosae-

Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta (qualis fuit ibi recta GI, subtendens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehensum) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare *a* cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmēta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. a 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octedri ABCDE, cuius basis quadratū ABCD, triangula vero ad E. verticem, ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratū cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14 qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: *b* Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9 & quadratum rectæ LM, nimirum KL, MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, descriptum; *c* cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.

b 2. sexti.

c 33. primi.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema

ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem Octaedro inscripti: eius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bisarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib 15. eiusque scholio: Et in bisarijs sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residunt sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quæ ad propos. 14. libr. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoq; idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. a Atqui diameter sphæræ seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmẽtum eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat

a 14. *tertiidec.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionẽ habet, quem minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. libr. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmẽtum, vel maioris segmenti ad minus (quod tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

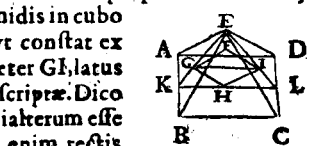
PRÆ-

PRAETEREA, cum constet ex coroll 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra, F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. expositum, Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis GI, Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 18 libr. 14. *a* Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propos. 4 lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit vt EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoque cum EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. *b* Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterũ lateris pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandũ.



a 2. sexti.

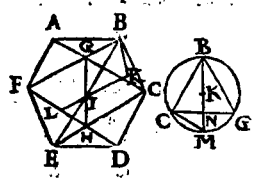
b 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, &

centrum I; triangula vero oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib 13 BCG, EFH, quorũ centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, eadem, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10 lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per ſcholium propoſ. 14. libr. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, vt conſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque IK, IL, ſemidiametri æquales: Coniuncta autem KB, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis; erit angu-



a 74. *primi.* lus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. *a* Ac proinde quadratum rectæ BI. æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri BI, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarũ rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris BK, KI, deſcriptorum.

b 15 *tertiidec.* Ablato ergo quadrato diametri cubi KL (*b* quod triplum eſt quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icoſaedri BE, remanet, quadratum diametri circuli triangulum BCG, circum ſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extenſaq; BK, vſque ad M, quæ ſecet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta perpẽdicularis eſt ad CG, per ea, quæ oſtendimus

c 12. *quartidecimi.* in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. *c* erit recta BC, potentia ſeſquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita eſt BM, ad BC, quod BC, ſit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propoſ. 8.

d 31. *tertii.* lib. 6. *d* cum angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens, Recta igitur BM, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, ſeſquitertium eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambien-

bientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, *a* duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos 9. lib. 5. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. libr. 13. Liquet, latus dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplũ potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll Itaq; latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum. *a* 14. *tertii decimi.*

THEOR. 17. PROPOS. 17.

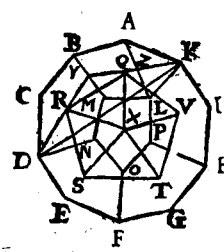
DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ libr. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circumdantis: *b* Potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basin Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & sui ipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basin Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum. *b* 13. *tertii decimi.*

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdē lineæ inter centrum pentagoni & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componētia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. libr. 13. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſium BM, per cētra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2 propoſitionis 10. libr. 13. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur *a* perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione.



a 2. *ſextidecimi.*

Dico ita eſſe latus Dodecaedri LM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt KZ, minus ſegmentum perpēdicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodem ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) *b* parallela erit QR, ipſi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4 libr. 6 *c* Quamobrem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. *d* Vt autem DK, tota ad totam KY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KY, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmētum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus &c. Quod erat demonſtrandum.

b 2. *ſexti.*

c 4. *ſex.*

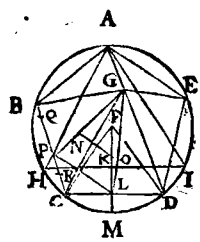
d 2. *quartidecimi.*

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

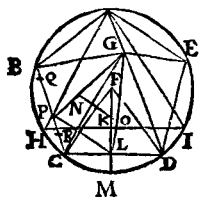
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum A B C D E, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinq; latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex iis quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur A H I. Quoniam igitur arcus A B C, A E D, æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus A B H, A E I, cum sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus H C, I D, æquales; propterea q; rectæ H I, C D, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur F K L, a secans rectas H I, C D, bifariam in K, & L; coniungãturq; rectæ F C, F D. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum G B C, G C D, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur G N P, G O L, dividentes, per scholium propos. 12. lib. 13 latera opposita B C, C D, bifariam, & ad angulas rectos. Itaq; recta G O, in punctum L, in quo divisa est C D, bifariam, cadet. Iunguntur autem centra N, O, recta N O, quæ, vt constat ex demõstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro scripti. Deniq; B P, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento B Q, ex toto latere B C, reliquæ C Q, tertia pars detrahatur C R. Dico reliquam Q R, æqualem esse lateri Dodecaedri N O. Cum enim F L, perpendicularis à latere trianguli æquilateri H I, secetur in K, extrema ac media ratione (quod F L, hac ratione secta faciat maius segmẽtum æquale perpendiculari F K, per coroll. propos. 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento F K, æqualis recta K M, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos. 5. libr. 13. maius segmentum K M, sectum quoque in L, à minori segmento K L, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F L, minore dimidiæ suiipsius segmento L M. Quoniam vero iuncta P L, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, descri-



a 3. tertii.

descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo lib. 4. ideoque similis illi: erunt triangula FCD, FPL (si recta duceretur FP) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare vt FG, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP; Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmẽto dimidij ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmẽto dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit PQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris NO (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14) a parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. b Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autẽ GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR, per cõstructionẽ; Ac propterea earundẽ 2. QR) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaq; lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

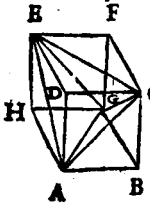


a 2. *sexti.*
b 4. *sexti.*

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non residẽt quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis AEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. definitione libri vndecimi, cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quæ libet enim constat tribus æqualibus & simili-



similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basin habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 17. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. [a] Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. undecimi.

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. [b] Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

[b] 32. quartidecimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt propos. 3 lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib 11. cum contineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per corollar. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) [c] Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum (cum octupla proportio sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet

bet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD: Atq; idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripto octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum: octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. *a* Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, *b* & pyramis octaedri sibi inscripti dupla: Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2 sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum: atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

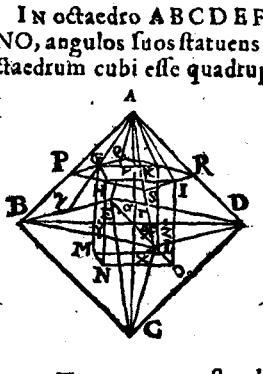
a 20. *sexti dec.*

b 21. *sexti dec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum cõstituentes PQRS, vt in propos. 4. lib. 15. est demonstratum: *c* quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. Propos. 4. lib 13. Ac proindé perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14 lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS; *d* (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter: erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ,



c 15. *vndecimi.*

d 17. *vndecimi.*

e 47. *primi.*

AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP, AV, VQ quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ propterea que & rectæ ipsæ VP, VQ, æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR, VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS. Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo descripti, per schol. vltimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt constat ex demonstratis in propos. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO; Necnon & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib. 14. *a* Cum ergo plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: necnon VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, $\alpha\beta$, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 1. propos. 15. lib. 11. rectæ centra basium cubi oppositarum connectentes sese bifariam secent in centro. Iam vero quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autem fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. cum vtriusque eadem sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX: *b* Est autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & basis PQRS, dupla sit basis GHIK: illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9 lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6 triangulis illius) *c* proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterum, quod & recta Aγ, *d* proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 14 ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet,

a 17. vndecimi.

b 6. vndecimi.

c 8. duodecimi.

d 2. sexti.

habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. *a* Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

a 11. *sexti dec.*

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; *b* Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis *c* triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

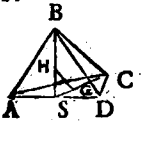
b 23. *sexti dec.*

c 20. *sexti dec.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim GH, centra duarum basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. li. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur BS, CS, *d* parallelæ erunt BC, HG, & per coroll propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo BCS, simile. *e* Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita CS, ad



d 2. *sex.*

e 4. *sex.*

CS, ad GS: *a* Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est: Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis: GH, vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera. (Est enim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum vtrobiq; sit proportio dupla. *b* Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat aũt BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoq; latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, *c* proportionẽ habent laterum homologorũ triplicatam. Cubus igitur circumscriptum ad cubum inscriptum pyramidi ABC, proportionẽ habet, quam 27. ad 1. Hæc n. proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, *d* cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quã 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubũ sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atq; adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

b 18. *quartidecimi.*

b 22. *sexti.*

c 33. *undecimi.*

d 19. *septimidecimi.*

COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN Octaedro ABCDEF, accipiatur descriptum Icosaedrum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases octaedri

habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. *a* Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

a 11. *sextidec.*

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; *b* Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis *c* triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

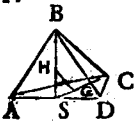
b 23. *sextidec.*

c 20. *sextidec.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim GH, centra duarum basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. li. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa vero recta GH, cum BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur BS, CS, *d* parallelæ erunt BC, HG, & per coroll propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo BCS, simile. *e* Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita CS, ad



d 2. *sex.*

e 4. *sex.*

CS, ad GS: *a* Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est: Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis: GH, vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera. (Est enim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum vtrobiq; sit proportio dupla. *b* Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat aũt BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoq; latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, *c* proportionẽ habent laterum homologorũ triplicatam. Cubus igitur circumscriptum ad cubum inscriptum pyramidi ABC, proportionẽ habet, quam 27. ad 1. Hæc n. proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, *d* cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quã 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubũ sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atq; adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

c 18. *quartidecimi.*

b 22. *sexti.*

c 33. *vndecimi.*

d 20. *sextidecimi.*

COROLLARIVM.

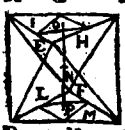
IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN Octaedro ABCDEF, accipiatur descriptum Icosaedrum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases octaedri

ctaedri ad quinque baſes Icoſaedri, Cum enim, vt ex demonſtratis in propoſ.16. libr.15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur: ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atque ex N, centro octaedri, necnon & Icoſaedri (idem enim vtriuſque eſt centrum, per coroll.3.propoſ. 16. libr.15.) ad baſin A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll.lemm.1, propoſ.10.lib.14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli G H I, per coroll.2. propoſ.16. lib.15. Cum ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint,



ex coroll.4.propoſ.14. lib. 13. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſ.14 lib.11.ad planum B C F, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſin, & altitudinem habentis, per coroll.1.propoſ.7.lib.12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo vero O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib.12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſin A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti: priſma videl. cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo vero eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P, cum per ea, quæ docuimus ad propoſ.7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis G H I, altitudo vero O P, æquales eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: propterea que triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem

G H I,

GHI, & sub altitudine OP, constituti: prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI; altitudo vero eadem OP; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius vero basis tertia pars basis GHI & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia; ad duo hæc prismata; Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. libr. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes (cum vnius basis sit ADE, hempe tres tertiæ partes ipsius ADE; complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE) ad bases prismatum Icosaedro æqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes (cum vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipsius GHI, continens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI.) Sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI; a ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, hempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. libr. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE (hoc est; duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cum sex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipsius GHI (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est; ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

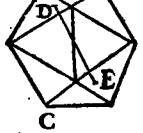
a 15. huius.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam

habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat centra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectam DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; *Erit*



FG

DE, diameter Dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti, cum copleat angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC: Dodecaedro diametri AC, hoc eſt, in eadem ſphæra, in qua Icoſaedrum ABC, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter: & Dodecaedro diametri DE, intra Icoſaedrum videlicet ABC, conſtructo; Proportio *primæ* magnitudinis nempe Icoſaedri ABC, ad tertiam *videlicet ad Do*decaedrum diametri DE, ſibi inſcriptum, *componetur* ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icoſaedro ABC, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem ſphæra comprehenſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi (a Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icoſaedrum ABC, eiuſdem diametri eſt, vt G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, vt F, latus Icoſaedri ad G latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiuſdem diametri AC, ad Dodecaedrũ diametri DE, in Icoſaedro videlicet ABC, deſcriptum, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem, ex coroll. propoſ. 7. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum diametri DE, componi quoque ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum

a 11. *quartidecimi.*

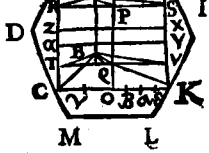
pro-

proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

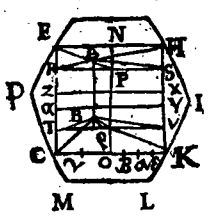
QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK: His vero pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet CBKHAE, constans quinq; planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, *a* triangula sunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia sint lateribus pentagoni AE, AH, angulosq; comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia sunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABKLI. per hypothesin, & triangula ex ipsis ablata CDE, HIK, *b* æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique est basis cubi inscripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque solida huic similia, & æqualia, per 10. defin libr. 11. super reliquas quinque cubi bases; ita vt Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit à CEHK, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi CK, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati late-



a 4. *primi.*

b 4. *primi.*

ris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demissæ in planum EK, vt constat ex demonstratis propos. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas



L N, V X, V R, X S, figuræ propos 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius segmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propos. 17. libr. 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT SV, maiora segmenta laterum EC, HK; atq; adeo ER, CT, simul, & HS, KV, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, constituantur duæ Pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propos. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales

a 33 primi. sint; consistentque extra solidum ABTVSR. a Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT, æqualis est, & parallela, cum

b 15. vndecimi. coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, b parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. libr. 1. cum latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, prisma est, ex definitione.

IAM vero, cum ostensum sit rectas HS KV, minus segmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriusque HS, & KV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY. tertia vero pars sit XY, ducanturq; XZ Y æ, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides

c 6. duo decimi. ERSHA, CTVKB, æquales sunt ostensæ; c vtriusq; vero earum dupla est pyramis super basem TX, & sub eadem altitudine PA,

d 1. sexti. vel QB, constituta, d quod & basis TX, dupla sit basis CV, vel RH; Æqualis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis sit ipsi VX, vt demõstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars

rectæ

rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. a quod & 9 1. sexti.
basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc prisma oppositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoque à base cubi deficientem rectangulo αX, cõtento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinq; prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; constituentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurgens parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorũ, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in ε, ita vt quemq; Cβ, maius segmentũ, & βK, minus bifariam in χ, δ; atque ex βK, abscindatur βε, æqualis ipsi βχ, seu Cχ, ita vt Cχ, vel χβ, vel βε, dimidia pars minoris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB; & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cχ, dimidio maioris segmẽti; quia βk, maior est, quã dimidium maioris segmenti Cβ. Cum enim sit, vt Ck, ad Cβ, ita Cβ, ad βk; sit autem CK, minor, quam dupla ipsius Cβ, quod Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ipsius βK, hoc est, erit βK, maior, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota CK, ad maius segmẽtum Cβ, ita maius segmentum Cβ, ad minus βK; b erit quoque vt CO, dimidia b 15. quinti

ipſius CL, ad C γ, vel βε, dimidiam ipſius C β, ita C γ, vel βε ad βδ, dimidiam ipſius β K; Ac proinde ſi C O, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum C γ, vel Cε, & minus βδ. Quare & βδ, minus ſegmentum ſecabit βε, maius ſegmentũ extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. eritq; maius ſegmentum βδ, minus autem δε; Ac propterea rurſus δε, minus ſegmentum ſecabit rectam δK, maiori ſegmento βδ, æqualem, extrema ac media ratione, minuſque ſegmentum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi CK, minore ſegmento εK, rectæ δK, vel ſibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmentum minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum cubum, à baſe cubi deficere rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro ſuperati docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens quam cubus, altitudo vero à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius parallelepipedũ, compoſitum erit parallelepipedũ prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidẽ & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, imo vero alter cubus, vt demonſtratum eſt.

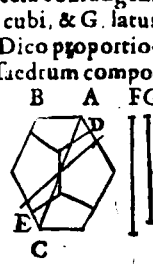
THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quã habet diameter Dodecaedri ad rectam

centra

centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

IN Dodecaedro A B C, diameter ſit AC, & recta coniungens centra baſium oppoſitarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicta proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri. Cum enim anguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in centris baſium oppoſitarum; erit recta DE, centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem ſphæra cum Icoſaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato deſcribetur, cum eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icoſaedro eiuſdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet ABC, deſcripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem; componetur per ea, quæ ad defin. 5 libr. 6. à nobis ſunt demonſtrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, deſcripti ſecundæ magnitudis ad Icoſaedrum in Dodecaedro A B C, deſcriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum A BC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ac diametrum DE, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. a Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icoſaedrum eiuſdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro A B C, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaq; ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 11. quar-tidecimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdẽ segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

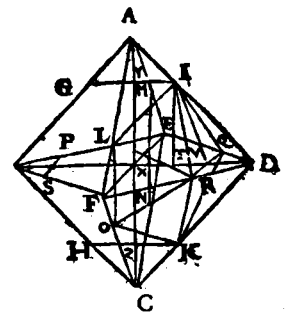
QVONIAM in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadẽ pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus aũt pyramidis, in qua de- a 25. *sextidecimi.* scribitur, nona pars est, a cum pyramis cubi sibi inscripti sit nonacupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 18. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propos. 16. libr 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum cõponẽtia esse IQR, KQR,

KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABC DEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri QR, altitudo vero IT, maius segmentum semidiametri AX Cum enim in quatuor basibus Octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum solidum Octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib 12. cum earū altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum AX, secta est à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; secta est CX, à recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducantur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrū prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ (Cum DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ; ideoq; quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7 libr 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos 7. lib. 12. pyramidis IDQR,



a 34 primi,

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdẽ segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

QVONIAM in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadẽ pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus aũt pyramidis, in qua describitur, nona pars est, a cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 18. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

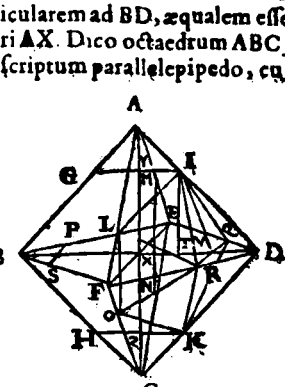
a 15. sexti decimi.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propos. 16. libr 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum cõponẽtia esse IQR, KQR,

KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABC DEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri QR, altitudo vero IT, maius segmentum semidiametri AX Cum enim in quatuor basibus Octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum solidum Octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib 12. cum earū altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum AX, secta est à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; secta est CX, à recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducantur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, a erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrū prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ (Cum DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ; ideoq; quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7 libr 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos 7. lib. 12. pyramidis IDQR,



a 34. primi.

IDQR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui Octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde Octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. libr. 15. constet, si Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: *a* Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet IT, seu YX: Fit, vt Octaedrum bis sumptum, nempe *pyramis;* cui inscribitur (*b* quod Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet duplum Icosaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. libr. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramidis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

31. *sext.*

21. *sextidecimi.*

DE QVINQVE CORPORVM REGVlarium descriptione in data sphæra ex Pappo Alexandrino.

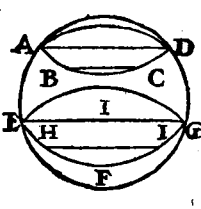
QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde vero eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cum eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam constructio illa ab Euclide prascripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosij demonstrantur, non tamen propterea

pterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus: quippe cum propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant: vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. Incitandis autem Theodosij propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli ABCD, EFG: sitque primum in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur vt in scholio propos. 18 libr. 11. docuimus per diametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, a *faciens in sphæra superficie circulum AEGD. Quoniam igitur circulus AEGD, circulum ABCD, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus AEGD, maximus, transibitque per polos circuli ABCD, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG,* b *cum paralleli eosdem polos habeant:* c *ideoque cum bifariam secabit. Communis ergo sectio EG, eius diameter erit:* d *qua cum sit ipsi AD, parallela patet propositum.*



a 1.1. *Theo*

b 1.2. *Theo*

c 15.1. *Theo*

d 16. *vnde cimi.*

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo EFG. e *Ducatur ipsi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD: cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus. Quoniam igitur vtraque BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione,* f *ipsa quoque BC, EG, inter se parallela erunt. Quod est propositum.*

e 31. *primi*

f 9. *vnde cimi.*

EADEM ratione recta BC, *ducetur in circulo* EFG, *parallela HI, à diametro* EG, *diuersa qua ipsi* BC, *æqualis sit, si modo* BC, *maior non sit diametro* EG. *Nam si in circulo* EFG, *ducatur ipsi* EG, *parallela HI, & æqualis, vt propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.*

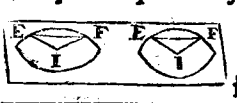
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes:

erunt

erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt:

IN planis parallelis AB, CD, *descripti sint duo circuli, in quibus* recta EF, GH, *primum parallela sint, ad easdem partes centrorum* I, K, *auferantur quæ arcus similes* EF, GH, *ac tandem iungantur*



ad centra recta EI, FI, GK, HK; *Dico tam* EI, GK, *quam* FI, HK, *parallelas esse. Quoniam enim arcus* EF, GH, *similes sunt, erunt anguli* IK, *æquales; ex scholio propos.* 21. *lib.* 3. *à igitur reliqui anguli* E, F, *reliquis angulis* G, H, *æquales erunt.* B *Cum ergo tam illi, quam hi, sint inter se æquales: erit tam angulus* E, *angulo* G, *quàm angulus* F, *angulo* H, *æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ* EF, GH, *parallelæ sunt, & rectæ* EI, GK, *ad easdem partes plani per* EF, GH, *ductæ efficiunt cum ipsis æquales angulos* E, G: *erunt ex iis, quæ in scholio propos.* 16. *lib.* 11. *demonstrauimus,* EI, GK, *parallelæ: Eademque ratione* FI, HK, *parallelæ erunt.*

a 31. *primi.*
b 5. *primi.*

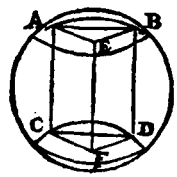
DEINDE sint EF, GH, *parallelæ, non ad easdem partes centrorum* I, K *Dico tam* EI, HK, *quam* FI, CK, *esse parallelas. Producatur enim* GK, HK, *iungatur recta* LM. *Et quia latera* GK, HK, *lateribus* LK, MK, *sunt æqualia,* c *anguloque ad verticem* K, *æquales continent:* d *erunt & bases* GH, LM, *& anguli* H, L, *æquales, &* e *anguli* G, M. f *Igitur arcus* GH, LM, *æquales sunt,* f *& recta* GH, LM, *inter se parallelæ: Ac proinde cum vtraque* EF, LM, *ipsi* GH, *sit parallela,* g *erunt &* EF, LM, *parallelæ inter se. Quia igitur* EF, LM, *parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes* EF, LM. *(Nam cum arcus* GH, *sit arcui* EF, *similis; erit quoque arcus* LM, *qui arcui* GH, *æqualis est, eidem arcui* EF, *similis) erunt tam* EI, LK; *hoc est,* EI, HK, *quam* FI, MK, *hoc est,* FI, CK, *parallelæ. Quod est propositum.*

c 14. *primi.*
d 4. *primi.*
e 28. *tertii.*
f 27. *primi.*
g 9. *undeci.*

LEMMA III.

Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales; ad easdem partes centrorum; rectæ harum parellarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares:

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus sint*



Sint duæ rectæ æquales & parallelæ AB, CD, ad easdem partes centrorum, quarum extremæ iungantur ad easdem partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque esse, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt: a erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Quare cum AB, CD, sint etiam æquales: b *æquales quoque erunt ac parallelæ AC, BD, quod est primum.* a 7. undecimi. b 33. primi.

EX centris deinde E, F, ductis rectis EA, EB, FC, FD; iunctaque recta EF: erunt tam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 1. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c *Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales.* d *Quoniam vero circuli AB, CD, parallelis circa eosdem polos sunt,* e *recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ; & ad plana eorundem recta erit. Quocirca rectæ EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra ducantur transire, nimirum recta per eorum polos extensa, quod est absurdum. Haberent enim illæ rectæ segmentum commune EF.* f *Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, recta est:* g *At propiores & vtraque AC, BD, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.* c 33. primi. d 1. 2. Theod. e 10. 1. Theod. f 10. 1. Theod. g 8. undecimi.

HÆC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, sunt circulorum diametri, sed rectæ EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, vt patet.

LEMMA IV.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in iis ductæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad easdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro sphæræ se intersecare, ideoque diametros esse sphæram inter se æquales.

Quoniam

a 7. vndecimi. *Quoniam enim AB, CD, parallela sunt: a erunt AD, BC, in eodem cum ipsis plano: ac proinde se mutuo intersecabunt, vt in puncto Hi quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis EA, EG: FD, FG.* b *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem æquales sunt:* c *item tam alterni anguli BAD, CDA: quam alterni ABC, DCB: æquiangula erunt triangula ABG, CDG.* d *Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æquales,* e *erunt quoque tam BG, CG, quam AG, DG, inter se æquales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum æqualium æquales: sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* f *ideoque anguli alterni EAD, FDA, æquales: erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia angulosque comprehendent æquales.* g *Igitur & bases EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales sunt.* h *Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallela AE, DF:* i *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF: erunt EF, FE, in rectum & continuum constitutæ propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus,* k *perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensa,* l *erit F, centrum sphæræ, propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro sphæræ absunt: inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.*

b 15. primi.

c 29. primi.

d 4. primi.

e 14. quinti.

f 29. primi.

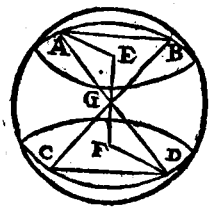
g 4. primi.

h 7. vndecimi.

i 2. vndecimi.

k 10. 1. Theod.

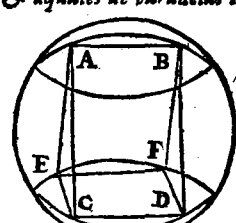
l 1. Theod.



SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BCD, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, m *manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur in circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi; ac proinde & reliqui* n *arcus, EFD, CEF, semicirculi erunt,* n *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, recta CD, EF, æqua-*

m 33. primi.

n 31. tertii.



les

les sunt, a ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EG, EA, & ad vtramque FD, FB; vt ostendimus, b perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: c ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt: ideoq; ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.

a 9. undecimi.

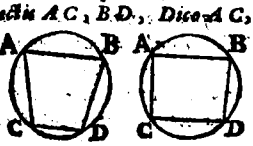
b 4. undecimi.

c 8. undecimi.

LEMMA V.

Si in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt AB, CD, d erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano, e fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ sint AB, CD: erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales: f ideoq; & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod si parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & æqualia: erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.



d 7. undecim.

e 1. 1. Theod.

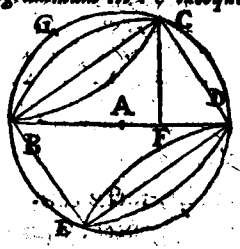
f 29. tertii.

LEMMA VI.

In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. propos. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in E vt BF, ipsius FD, dupla sit: erit BD, talium partium 3. qualium 2. est BF: ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungatur recta BC; DC, ductaque DE, ipsi BC, parallela, connectatur

a 29. primi. recta BE. a Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quam duo
b 31. tertij. BED, CBE, duobus rectis aquales sunt: b estque tam BCD, quam
BED, rectus: erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scho-
c 34. primi. lio propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelo-
grammum est: c ideoque recta BC, DE, aquales sunt. Diuiso iam



arcu BC, bifariam in G, erit quoque ar-
cus EGD, diuisus bifariam in G, quod ex
scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque BE,
CD, aquales sint. Polo igitur G, & inter-
uallis GB, GE, circuli in superficie sphæræ
describantur transeuntes per C, D, ob æ-
qualitatem tam arcuum GB, GC, quam
d 1. 2. Theo. GE, GD: d qui parallelli erunt, cum eos-
d 15. 1. Theo. dem habeant polos. e Et quia circulus ma-
ximus BCDE, per polos secat circulos BC,
ED, bifariam: erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cum aquales sint
ostensæ, erunt & circuli BC, ED, aquales. Dico diametrum sphæræ BD,
ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia ses-
quialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC,
BF, continue proportionales sunt: erit ex coroll. propos. 20 lib. 6. vt BD,
ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autem BD,
ipsius BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD,
quadrati ex BC, [illegible] ad eo & quadrati ex DE, sesqui[illegible]
quæ idcirco diameter sphæræ BD, vtriusque diametri [illegible]
sesquialtera est: quod est propositum.

His demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinq; corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

In data sphæra Pyramidem describere.

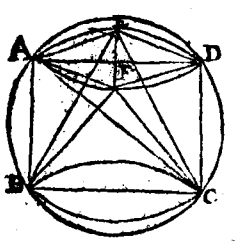


Fig. 1. Theo.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, aquales, & parallelli, quorũ diametrorum potẽtia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, f qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, esse æquilatera & æ-

gialia.

qualia. Iungãtur enim rectæ AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA, erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, descriptum, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli: si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, 3 æquale sit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadratis ex DF, duplum, ex scholio propos. 47 lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF: b quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit: erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea que quadrati ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF; eidem BC, æqualis: ideoq; BCF, triangulum est æquilaterum. a 47. primi. b 47. primi.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum: est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: c quibus cum æquale sit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit: duplum quoq; erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea que recta CE, rectæ AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atque adeo & recta CF, quæ ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est; & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonstrabimus triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FGE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale quippe cum latera BE, CE, ipsis BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant quod erat proposi tum. c 44. primi.

COROLLARIVM.

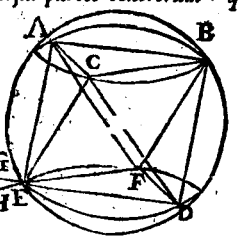
HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

In data sphæra octaedrum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli

culi æquales & paralleli A B C, D E F, ita vt sphæra diameter dia-
a 2. quarti. metri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. a Describpto autem triangulo æquilatero A B C, in circulo A B C, ducatur per primum lemma, recta A B, in circulo D E F, parallela & æqualis D E, ad diuersas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo D E F, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero D E F, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli A B C, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum A B, D E, æqualitatem; parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Cum enim parallelæ sint A B, D E, & anguli A B C, D E F, æquales; productis rectis D E, F E, ad G, H, erunt quoque anguli A B C, G E H, æquales. Cum ergo parallelæ sint A B, G E, & B C, E H, ad easdem partes plani per A B, G E, ducti: erunt quoque B C, H E, hoc est, B C, E F, parallelæ, ex illo scholio propos. 16 lib. 11. Eadem ratione parallelæ erit D F, ipsi A C. Connectantur denique A E, E C, C D, D B, B F, F A, vt in figura, Dico A D, octaedrum esse, hoc est, octo triangula A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæra, recta A B, D E, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ A D, B E (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ A E, B D, æquales etiam erunt, ac
b 47. primi. perpendiculares ad ipsas A B, D E. b Quadratum igitur ex B E, duobus quadratis ex B D, D E, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ B E, 6 quadratum ex D E, est 3. { Nam cum per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli D E F: posito quadrato ex B E, 6. erit quadratum diametri circuli D E F, 4. At posito quadrato diametri circuli D E F, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri D E, est 3. quod ex corollar. 1. propos. 12. libr. 13. diametro circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri. } Igitur & quadratum ex B D, est 3. ac proinde quadrata ex D E, B D, æqualia sunt, & rectæ ipsæ D E, B D, æquales. Est autem D E, ipsi A B, per constructionem, & B D, ipsi A E, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ A B, B D, D E, E A, æquales erunt, constituentes quadratum A B D E, cum angulis ad A, B, D, E, rectis sint ex eodem 4. lemmate.



RVRSVS quia B C, E F, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum: erunt quoque iunctæ rectæ B E, C F, non ad easdem partes diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ B E, C E, æquales inter se, atque ad B C, E F, perpendiculares, eritque rursus, vt prius, quadratum B C E F. Nam aliter ostendemus, A C D F, quadratum

est:

esse; cum iunctæ rectæ AD, CF, *sint quoque sphæra diametri ex 4. lemmate &c. Cum ergo tria quadrata* AD, BE, CF, *constructa sint super latera æqualia* AB, BC, CA, *nimirum super latera trianguli æquilateri, cum* AB, *latus sit quadrati* AD; *&* BC, *quadrati* BE; *&* CA, *quadrati* CF; *erunt omnia triangula octo* ABC, CAE, BCD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est* AD, *ex defin. 27. libr. 11. & in data sphæra descriptum, cum eius anguli solidi* A, B, D, E, C, F, *sphæra superficiem attingant. quod est propositum.*

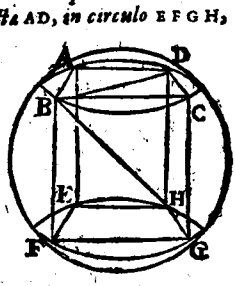
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplum esse lateris Octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere Octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

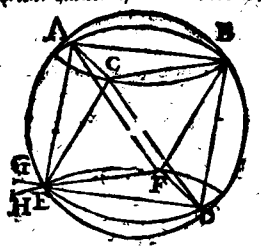
In data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR *ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli* ABCD, EFGH, *quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ.* a *Descripto autem quadrato* ABCD, a 6. quarti. *in circulo* ABCD, *ducatur per 1. lemma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH. *& æqualis ex eadem parte centrorum, qua latus quoque erit quadrati in circulo* EFGH, *descripti, ob circulorum æqualitatem. Cõplete ergo quadrato* EFGH, *erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum* AD, EH, *æqualitatem: parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ sunt* AD, EH, *sunt & anguli*



æquales ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum sint ad easdem partes plani per* AD, EH, *ducti, & sic de cæteris. Iungantur denique ad easdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico* AG. *esse cubum, hoc est, sex quadrilatera* ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, *esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate 4.* BH, *diameter sphæræ; at* BD, *diameter circuli* ABCD, *quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex* BH, *sesquialterum est quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *dupluin, ex scholio propos 47. libr 1. si statuatur quadratum ex* BH, 3. *erit quadratum ex* BD, 2. *& quadratum*

dratum ex DG, 1. *atque adeo quadratum ex* BH, *quadrati ex* DG, *triplum erit. Rursus quia quadratum ex* BH, *est* 3 *& quadratum*
a 47. primi. *ex* BD, 2. a *est quadratum ex* BH, *aquale quadratis ex* BD, DH, *quod anguius* BDH, *ex defin.* 3. *lib.* 11. *rectus sit, erit quadratum ex* DH, 1. *Quadratum igitur ex* BH, *triplum est quadrati ex* DH. *Fuit autem idem quadratum ex* BH, *triplum quadrati ex* DC. *Æqualia ergo sunt quadrata ex* DG, DH, *ac proinde recta* DG, DH, *aqualis. Cum ergo oppositis lateribus* GH, CG, *aquales sint, erunt omnia quatuor latera aqualia in parallelogrammo* CH. *Cum*



igitur & anguli recti sint, ex aesin. 3. *libr* 11. *quadratum erit* CH. *Eadem ratione &* BE, AH, EG, *quadrata estendentur: Sed &* AC, EC, *quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se aqualia, ob laterum aqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin.* 25. *lib.* 11. *& in data sphæra descriptus, cum eius anguli solidi, A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæra contingant. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

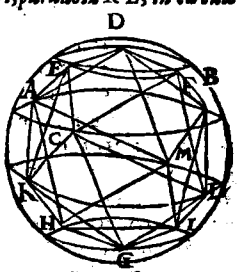
MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum; quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis est circulo A B C, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

In data sphæra Icosaedrum describere.

b 14. sexti. RESECATVR b *recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ data, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiat* ex coroll. *propos.* 6 *lib.* 10. *vt numerus* 3. *ad ternarium quadratum recta inuenta, ad quadratum alterius cuiusdem linea, ad cuius interuallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Descripto maximo circulo in sphæra data,* c *accommodetur in eo recta, qua*
c 1. quinti. *inuenta semidiametri sit dupla, cum hac recta minor sit diameter sphæra sine illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam si per eam*
d 1. 11. Theod. *rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* d *faciet id circulum A B C, in sphæra, cuius semidiameter, ex constructione,*

ctione, potentia ſubtripla eſt recta initio inuenta. Deinde inueniatur a rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæra diameter, vt a 12. *ſeni pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; fiatque vt 3. ad 1. ita per coroll. propoſ. 6. lib. 10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo A B C, parallelus; quo fiet ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallelæ prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad propoſ. 1. lib. 4. demonſtrauimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectum, ex ſcholio propoſ. 18. lib. 11. Nam per idem ſcholium planum hoc erit circulo A B C, parallelum,* b *faciet q; in ſphæra* b 11. Theod *circulum D E F, cuius ſemidiameter ſemidiametro intentæ æqualis eſt. Hic duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alii duo æquales ac paralleli deſcribantur G H I, K L M, quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.* c *Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æquila-* c 2. quarti. *tero D E F, ducatur lateri E F, in parallelo circulo A B C, ex lemmate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit vni laterum trianguli æquilateri in circulo A B C, deſcripti: Item huic A B, agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circulo K L M, & æqualis: Ac denique huic K L, in circulo G H I, ducatur ex altera parte centri, parallela H I, & æqualis ipſi E F, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo G H I, deſcripti. Completis ergo triangulis æquilateris A B C, K L M, G H I, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli D E F, parallela; nimirum A C, M L, G H, ipſi D F; at B C, M K, G I, ipſi D E, quod probabitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe B C, E F, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus. Poſtremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, rectæ D E, D A, D M, D B, D F; ex G, rectæ G H, G K, G C, G L, G I, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico D G, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula D E F, D E A, D A M, D M B, D F B, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16.*



lib 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulis in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT *igitur in sphæra descriptum Icosaedrum* DG, 12. *angulos statuens in punctis* D,E,A,K,H,G,I,L,B,F,M,C. *Et quia* 5. *rectæ* DE, DA, DM, DB, DF, *æquales sunt, cum sint latera triangulorũ æquilaterorum æqualiũ; si ex polo* D, *per* E, *in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta* A, M, B, F: *ac propterea pentagonum* EAMBF, *in vno plano erit, nimirũ in plano illius circuli. Cum ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata, sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit* AKCFD, *ob quinq; rectas æquales* EA, EK, EC, EF, ED: *Et* KHMDE, *ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia* AK, AH, AM, AD, AE: *Et* HGCEA, *ob quinque latera Icosaedri æqualia* KH, KG, KC, KE, KA: *Et* GIMAK, *ob latera quinque Icosaedri æqualia* HG, HI, HM, HA, HK: *Et* ILCKH, *ob quinque rectas æquales* GI, GL, GC, GK, GH: *Et* LBMHG, *ob rectas quinque æquales* IL, IB, IM, IH, IG: *Et* BFCGI, *ob quinque rectas æquales* LB, LF, LC, LG, LI: *Et* FDMIL, *ob quinque rectas æquales* BF, BD, BM, BI, BL: *Et* DECLB, *ob rectas quinque æquales* FD, FE, FC, FL, FB: *Et* DAHIB, *ob quinque latera Icosaedri æqualia* MD, MA, MH, MI, MB: *Ac tandem* GLFEK, *ob quinque Icosaedri latera æqualia* CG, CL, CF, CE, CK, *ita vt* 12. *pentagona æquilatera, æquiangula, inter se æqualia constituantur. Quoniam vero recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. libr 13. demonstrauimus; erit iuncta recta* AB, *ipsi* EF, *parallela in pentagono* EAMBF: *&* AC, *iuncta ipsi* DF, *parallela in pentagono* AKCFD; *Et*

a 15. *vndecimi.* BC, *iuncta parallela ipsi* DE, *in pentagono* DECLB, a *Plana ergo per rectas* DE, EF, *&* CB, BA, *ducta parallela sunt,* b *faciunque*

b 1.1. *Theod* *circulos parallellos in sphæra* DEF, ABC. *Eodem modo erit iuncta* KH, *ipsi* HI, *parallela in pentagono* ILCKH: *Et iuncta* KM, *ipsi* GI, *in pentagono* GIMAK: *Et* LM, *iuncta ipsi* GH, *in pentagono* LBMGH: *Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt* GHI, KLM. *Non aliter erit* AB, *iuncta ipsi* HI, *parallela in pentagono*

c 9. *vndecimi.* DAHIB: *Et iuncta* KL, *ipsi* EF, *in pentagono* GLFEK, c *Igitur* EF, HI, *cum sint eidem iuncta* AB, *vel* KL, *parallelæ, inter se parallelæ sunt, Eademque ratione* DE, GI, *cum sint eidem iuncta* BC, *vel* KM, *parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea que plana circulo-

gulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter se sunt: & tam circuli DEF, GHI, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quam circuli ABC, KLM, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, constituuntur: quippe cum latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.

QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extremæ K, B, parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus BAK, rectus ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad easdem partes extremæ K, A, earundem parallelarum; a erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipsi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæræ KB (quæ ambas AB, AK, potest, vt ostendimus) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare sphæra diameter KB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cum tam AB, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, qua dupla est semidiametri initio inuentæ, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

a 47. primi.

b 10. tertii decimi.

a 12. tertii decimi.

HIS demonstratis facili negotio includemus, solidam figuram à nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedra in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, à quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est

esse diametrum sphæræ KB, ad EP, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni trianguli isosceles constituant: *a* ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoq; vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

a 22. primi.

COROLLARIVM.

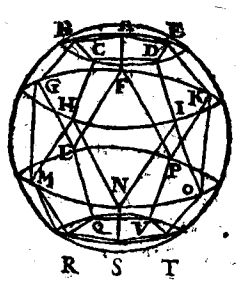
COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descripto rum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum AB *b* Est autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ AB, quod AB, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti.

b 12. tertiidecimi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR *in data sphæra quatuor circuli parallelli, vt in antecedenti propositione* ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, *ita vt semidiametri circulorum* ABCDE, QRSTV, *sint potentia subtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum* FGHIK, LMNOP, *potentia sint subtripla duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sese habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Describatur autem in circulo* ABCDE, *pentagonum* ABCDE, *æquilaterum, & æquiangulum, ducanturq; eius lateri* CD, *ad easdem partes centrorum parallela* HI, *in circulo* FGHIK, *& æqualis lateri pentagoni eiusdem circuli, ex* 1. *lemmate: Recta autem* HI, *ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela* LP, *in circulo* LMNOP: *Huic tandem* LP, *ad easdem centrorum partes ducatur parallela* QV, *in circulo* QRSTV. *Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis (quorum tamen latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni*



ABC-

ABCDE, *parallela, to ordine, quo lateri* CD, *parallelæ ductæ sunt; quod demonstrabitur, vt in problemate secundo ostendimus, parallelas esse* BC, EF, *nimirum* HG, PO, TV, *latera iuncta, parallela erunt ipsi* BC, *&c. Postremo ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico* AS, *Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona* ABCDE. DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTQ, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, *æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propositione* 17. *lib.* 13.) *suos viginti angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos describimus, quinos videlicet in singulis circulis, atq; in eo situ, quo eosdem viginti puncta notauimus.*

SIT ergo *in sphæra descriptum Dodecaedrum* AS, *viginti angulos statuens in punctis* A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. *Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos.* 2. *lib.* 13. *demonstrauimus, erit iuncta* GH, *lateri* BC, *parallela in pentagono* BCHMG; *& iuncta* HI, *lateri* CD, *in pentagono* CDINH; *&* IK, *lateri* DE, *in pentagono* DEKOI; *&* KF, *ipsi* AE, *in pentagono* AEKPF; *&* FG, *ipsi* AB, *in pentagono* ABGLF; *& sic de cæteris. Quia igitur rectæ* AB, AE, *rectis* FG, FK, *parallelæ sunt; a erit & planum per* FG, FK, *ductum plano pentagoni* ABCDE, *per* AB, AE, *ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per* FG, GH, *ductum, quod ha rectæ rectis* AB, BC, *sint parallelæ. Igitur ex scholio propositionis* 16. *lib.* 11. *plana per* FG, FK, *& per* FG, GH, *ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni* ABCDE, *sint parallela; atque adeo, ex eodem scholio, cum conueniant in recta* FG, *vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per* FK, FI, *& planum per* KI, IH, *& planum per* IH, HG, *cum plano per* FK, FG, *ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta* A, B, C, D, E, *& per puncta* F, G, H, I, K, *ducta in sphæra b efficiant duos circulos parallelos* ABCDE, FGHIK. *Eodemque modo plana per puncta* Q, R, S, T, V, *& per puncta* L, M, N, O, P, *ducta circulos parallelos efficient* QRSTV, LMNOP, *Eruntque tam duo circuli* ABCDE, QRSTV, *quam duo* FGHIK, LMNOP, *inter se æquales, ob pentagona æqualia* ABCDE, QRSTV, *& ob rectas* FG GH, HI, IK, KF; LM. MN, NO, QP, PL. *c quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.*

a 15. *vndecimi.*

b 1. 1. *Theod.*

c 4. *primi.*

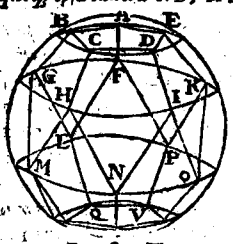
DEIN-

DEINDE *quia ex scholio propos. 8. lib. 13. recta iuncta* ND, MB, *lateri* CH, *parallela sunt in pentagonis*, CHNID, BGMHC; a *erunt quoq; ipsa iuncta* ND, MB, *parallela*: *Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant* b *Igitur & iuncta* NM, BD, *æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iuncta* NO, CE, *eum connectant duas* NC, OE, *æquales ac parelleias, quod utraq; lateri* DI, *sit parallela.* c *Circulus igitur* LMNOP, *circulo* ABCDE, *parallelus est, cum ille ducatur per rectas* NM, NO, *hic vero per rectas* BD, CE, *quibus illa parallelæ sunt ostensa. Non secus ostendentur parallelæ circuli* QRSTV, FGHIK. *Omnes ergo quatuor circuli parallelæ sunt.*

a 9. undecimi.

b 33. primi.

c 15. undecimi.



R S T

RVRSVS *quoniam iuncta recta* EF, OV, *cum ex scholio propos. 8. libr. 13. lateri* PK, *in pentagonis* AEKPF, TVKPO, *æquidistent*, d *parallelæ sunt*; *necnon & inter se æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant*, e *erunt & recta iuncta* EO, FV, *parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo* EFVO, *in uno plano est*, f *cum* EF, OV, *in eodem sint plano cum parallelis* EO, FV. *Est autem & in circulo*, g *propterea quod planum in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propos. 31 lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est* EFVO; *ac proinde cum omnia latera æqualia sint, subtendentia angules æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter* FO, *duplum potest lateris* FE. *ex scholio propos. 47. libr. 1. hoc est, recta iuncta* FG, *quod æquales sint* FG, FE, *subtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoque qualium partium* 1. *statuetur quadratum rectæ* EG, *talium* 2. *erit quadratum rectæ* FO, *& ambo quadrata simul earundem partium* 3. *Quibus* h *cum æquale sit quadratum iunctæ rectæ* OG, *quæ diameter sphæræ est.* (*Nam cum æquales sint iunctæ* FG, ON, *subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quod duabus parallelis* AB, ST, *parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta* OF, *ad* FG, *perpendicularis, &* OG, *diameter sphæræ*) *erit quoque quadratum diametri sphæræ* 3. *qualium* 1. *est quadratum rectæ* FG, *hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ* FG, *triplum erit.* i *Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ* FG, *ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni*; k *atque adeo vt diameter sphæræ ad rectam* FG, *ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem re-*

d 9. undecimi.

e 33. primi.

f 7. undecimi.

g 1. 1. Theod

h 47. primi.

i 12. tertiidec.

k 22. sexti.

tem recta F G, ad latus trianguli in eodem circulo F G H I K, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod F G, sit latus pentagoni. Igitur ex aequalitate perturbata erit, vt diameter sphaeræ ad latus trianguli aequilateri in circulo F G H I K, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appositæ formulæ apparet. Cum ergo in figura praecedentis propos. sit quoque vt diameter sphaera ad latus trianguli, hoc est ad iunctam rectam A B, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus A B C, K L M, illius figura vtrique circulo F G H I K, L M N O P, huius figura aequalis.

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta F G.	Lat. triang.
Lat triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta F G, subtendens angulum pentagoni A B G L F, ad A B, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt F G, latus pentagoni in circulo F G H I K, ad A B, latus pentagoni in circulo A B C D E, ita latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E: erit quoque vt latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphaera ad latus trianguli in circulo F G H I K, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proxime demonstratum est. Igitur ex aequo erit, vt diameter sphæra ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eod. in circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura praecedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæra ad E F, latus trianguli in circulo D E F, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus D E F, G H I, figura antecedentis propos. vtrique circulo A B C D E, Q R S T V, huius figura aequalis. Quare circuli A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo F G H I K.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo A B C D E.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram A S, a nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum A B C D E, omnes eius anguli solidi cadant in quinta puncta aliorum trium circulorum parallelorum, & quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & trian-

& triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo A B C D E, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

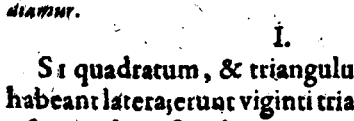
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & libr. 13. & 14. demonstrauimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in una eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora constituxisse, cum post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper à minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quã octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum sit lateris quadrati A, & latus D E, lateris eiusdem quadrati æquale: Erit-que rectangulum C E, octuplum quadrati A, a cum sit, vt C D, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A; ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum sit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo triangul ad eius basem demissa, hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi G H, hoc est, altitudini trianguli, B, b vigecuplum est trianguli B: Et autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 42. libr. 1. rectangulum F H, quippe cum basis F G, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est, rectangulum F H, maius esse rectangulo C E. c Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus D E, potentia sesquitertium est eius



a 1. *sext.*

b 1. *sext.*

c 11. *quarti decimi.*

plurib.

perpendicularis, hoc est, lateris G H: Latus autem F G, ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25 ad 16. quod F G, sit 10. & C D, 8. hoc est, F G, 5. & C D, 4. Erit maior proportio F G, ad C D, quam D E, ad G H. Est enim maior proportio 25. ad 16. super nouempartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertias, quod maior sit fractio $1\frac{9}{16}$ quam $1\frac{1}{3}$ a Fiat vt F G, ad C D, ita D E, ad H K, eritque maior quoq; proportio D E, ad H K, quam ad G H: b ac proinde maior erit G H, quam H K. Ducta ergo K I, ipsi F G, parallela, erit vt I K, ipsi F G, aequalis ad C D, ita D E, ad H K. c Igitur erit I H, rectangulum rectangulo C E, aquale: ideoque E H, maius, quam C E. Quod est propositum.

a 12. sexti. b 10. quinti. c 14. vel 15. sext.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

d QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæræ descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti aqualia sunt: Duo vero eadem quadrata aqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæra descripti, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. libr. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæra æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæræ. Quod est propositum.

d 20. quartidecimi.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basin Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basin octaedri, & cubi ducta.

NAM e quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra: erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumque solidum sta intra sphæram constituatur, vt triangulum vnius trianguli alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri: cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro sphæræ ad basin Icosaedri deducta maior erit perpendicularis ex eodem centro ad basin Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri aqualis sit perpendiculari cubi: f quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoque aqualiter à centro distent: erit quoq; perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.

e 18. tertii decimi.

f 11. quartidecimi.

IV.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula aquilatera super semidiametro sphæra maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæræ semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis aquilateris super semidiametro sphæra constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæra maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæra semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæra descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATum quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod huiusmodi fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, a *vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum:* b *est autem latus cubi latere Icosaedri maius: maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.*

a 11. quartidecimi.
b 18. tertiidec.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæra in vnam basin Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basin cubi demissa, vt in 5. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est: Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæra in vnam basin Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæra in vnam basin cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. libr. 14. demonstrauimus, illud solidum

dum Icosaedro sit aquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum quam cubus. Quod est propositum.

III.

Cubus Octaedro maior est.

Quoniam est, a vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autē latus cubi semidiametro sphæræ maius (Nam b cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæræ) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum. a 17. quartidecimi. b 18. tertiidec.

IV.

Octaedrum Tetraedro maius est.

Quoniam basis octaedri minor est base Tetraedri, c quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basin octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3 ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior, d cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basin Octaedri cadente, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basin Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum ex scholio propos. 20. libr. 14. illud solidum octaedro sit aquale, hoc vero Tetraedro: erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. c 14. quartidecimi. d 14. quartidecimi.

Aliter. Quoniam est, e vt latus Octaedri ad latus tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex aqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri (Nam f quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla; g ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. e 12. quartidecimi. f 18. tertiidec. g 10. quinti.

Aliter. Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet,

ut rectangulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{3}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

a 32. quarti decimi. *Aliter. a Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, quæ cubi latere maior est,* b 27. quarti decimi. *minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam.) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.*

Eodem prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri deniq; superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

c 6. quarti decimi. d 18. tertiidec. *Quoniam enim c est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, d vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.*

Superficiem vero Icosaedri minorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate 4. ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

e 27. quarti decimi. *Deinde e quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri maior.*

f 14. quarti decimi. *Deniq; f quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.*

Vides igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo mi-

g 18. tertiidec. *nus latus. Nam g vt supra demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, vt hic demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra de-*

scripta

cripta, sint. latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo superant, a 18. *vt supra ostensum est, ita contrario ordine eorundem superficies conuexa, atq; soliditates se mutuo superant; vt hoc loco demonstrauimus.* a 18. *vndecimi.*

Caterum praetereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4 Mathematicarum collectionum: soliditates videlicet quinque corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphara constructa, longe aliter se habere, quam à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius sit.

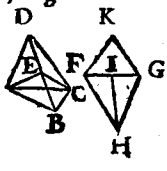
INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS duarum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hyspsiclis praeceptore.

I.

Angulum inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

Sit pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppositis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares sint ad B D, communem sectionem planorum A B D, C B D, in quibus existunt (*b* Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis A E C, basium A B D, C B D, continebunt, ex defin. 6. li. 11. Huic ergo æquale exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur F G H: triangulum æquilaterum super rectam F G, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunq; pyramidis propositæ, ipsi nimirum A B D, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, constituatur super F G, triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc est, vtrique perpendiculari A E, C E, cum perpendiculares H I, A E, C E, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem esse angulo inclinationis A E C, basium A B D, C B D. Cum enim latera K F, K G, æqualia sint lateribus E A, E C: & basis F G, basi A C: (*c* Æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico insuper angulum inclinationis A C E, acutum esse. *d* Cum enim latus A D, vel illi æqua-

b 8. *primi.*



c 8. *primi.*

d 12. *quarti.*

æquale AC, sesquitertium sit potentia vtriusque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriusque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul quadrata rectarum AE. CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus sit quadratis simul laterũ AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in scholio prop. 13. lib. 2. demonstrauimus.

COROLLARIVM.

Facile hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sũt AE. CE, subtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erũt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & latera pyramidis eosdem subtendentia sint æqualia

II.

Angulum inclinationis duarum octaedri basium, vnius ad alterum, reperire.

Exhibeatur octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, adlatus AE. triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; sectum in G, rectæ ducantur BG. DG. quæ cum perpendiculares sint ad AE, communem sectionem planorum ABE, ADE. in quibus existunt (quod in triangulis BGA. BGE. anguli ad G. æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis basium ABE. ADE. per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in planoquolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum super rectam HI. lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE, æquale, in quo ducta KL. perpendiculari ad HI. constituatur super recta MN. quæ æqualis sit diametro octaedri BD. hoc est, diametro quadrati ABCD. ex AB. latere octaedri descripti, triangulum OMN. habens vtrumque latus MO. NO. perpendiculari KL. æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG DG, in triangulis æqualibus æquales sint Dico angulum MON æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE. ADE.

a 6. primi.

b 8. primi. Cum enim latera OM. ON. æqualia sint lateribus GB. GD. & basis MN. basi BD: b æquales erunt anguli MON, BGD Dico propterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum.

Cum

a Cum enim diameter octaedri B D, dupla sit potentia lateris A B: b latus vero A B, potentia sesquitertium rectæ B G: qualium partium 8, ponetur quadratum diametri B D, talium 4 erit quadratum lateris A B, earundemq; 3. quadratum rectæ B G; ideoq; ambo simul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris B D, in triangulo G B D, maius est quadratis simul laterum G B, G D; Ac propterea angulus G B D, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

a 14. tertiidec.
b 12. quarti decimi.

COROLLARIVM.

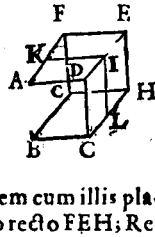
HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, D G, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est B D; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales.

c 8 primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, invenire.

SIT cubus A B C D E F G H, in quo secetur latus D E, bifariam in I, neq; non & latera illi opposita in quadratis A E, E C, communelatus illud D E, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur I k, I L; d quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus E F, E H, quod & k F, I E, inter se, nec non & I E, L H, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoq; e angulos rectos ad latus D E, efficiant, continebunt k I L, angulum inclinationis basium A E, E C, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ I k, I L, parallelæ existentes rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, f angulum k I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in alio quo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



d 3. primi.
e 29. primi.
f 10. vndecimi.

COROLLARIVM.

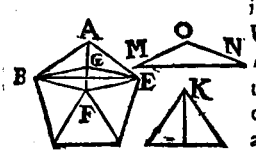
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicuo concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, invenire.

ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidibus Icosae-

dri, cuius basis pentagonum ABCDE, ex quinq; Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diuisso itaque latere AF, bifariam in G, & cantur ex triangulorum ABF, AEF; latus AF, cõmune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectę BG, EG, quę cum ex demonstratis in probl. 2. huius scholij, perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus duruntur, comprehendent BGE angulum inclinationis basium ABF, AEF. per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quotis exhibebimus ęqualẽ, hac arte, Accipiatur triangulũ æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtẽdenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumq; latus MO, NO, perpendiculari KL; æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualib. sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basiũ ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; *a* Aequales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum Cum enim BG, angulum rectũ faciat *AGB*, *b* erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemq; *modũ* AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaq; recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ *AB*, *AE*, rectas OM, ON, prorsus includant. *c* Angulus ergo O, maior erit angulo BAE: Ac hinc obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales; per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintã. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE.



COROLLARIVM.

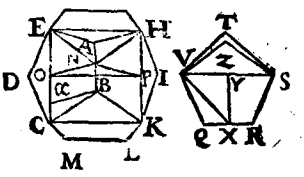
Non obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, FG, subtendanturq; à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & rectæ: illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales erunt.

ANGV-

V.

Angulum inclinationis duarum basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

Cum per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15 quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnū latus coeuntiū; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundū angulos EAH, CBK.



His porro pentagonis inscriptum sit quadratum cubi EC-KH, cuius quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorū D, B, I, A. Diuiso autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, secantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelæ, ex scholio propos. 8. *lib.* 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis basiū ABCDE, ABKLH. Cui æqualem in quouis plano hac arte cōstruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc est, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta subtendatur VS, æqualis existens rectæ EC, eum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia sint, angulosq; contineant æquales. Diuisa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpendicularis ad VS, cum VS, sit parallela ipsi QR, ex schol. propos. 8. lib. 13. Ac postremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem esse angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX, cum latera EA, AN, æqualia sint lateribus HA, AN: item lateribus VQ, QX, angulosq; comprehendant æquales. Æquales erunt & bases NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV: ideoque & residui ex rectis: anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales sunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP: hæc non & angulis VXY, VYX, trianguli VXY (sunt n. EON, HPN, VYX, ostensi recti) Et latus NE lateribus NH, VX æquale demonstratum; Æqualia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis

late-

lateribus P H: Item lateribus X [illegible] Quare rectæ ZV, ZS æquales existentes ipsi XY, rectis NO. NP. æquales erunt. Iã vero, quia OE. PH. æquales sunt, ac parallelæ; erit quoque recta coniuncta OP. æqualis & parallela ipsi EH, ideoque æqualis ipsi EC. hoc est, rectæ VS. Quam ob rem, cum latera ZV. ZS. lateribus NO. NP. æqualia sint; basis item VS. basi OP; æqualis erit angulus VZS. angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta Bα. ipsi NO, parallela: cũ sit quoq; NB. ipsi Oα. parallela. ex scholio propos. 8. li. 13. Parallelogrammum erit NOα B. ideoque recta Bα. ipsi NO. æqualis. Quia vero BC. latus pentagoni oppositum angulo Cα B, qui rectus est (æqualis nimirum interno CON) maius est latere Bα. hoc est, recta NO. vel vtraq; ZV. ZS. quę ipsi NO. ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV. TS. maiores duab. rectis ZV. ZS. Cadit igitur punctũ Z. intra triangulũ TVS. ita vt rectæ TV. TS. rectas ZV. ZS. includant omnino: Atque proinde angulus VZS. ideoque illi æqualis ONP. maior est angulo pentagoni T. Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP. ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

Pater igitur ex his, omnes inclinationes basium *Dodecaedri æquales* esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum, *contineantur* binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt NO, NP, subtendanturque à rectis, quę cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certe, quæ rectis subtendẽtibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi *est* recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni EAH, subtendit, æqualis: Erũt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos cõtinent, æquales sint: necnon & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.

Elementi decimisexti Finis.