Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Collegij Societatis JESV Ingolstadij Ao 1603.

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRA-tionibus, accuratisque scholiis illustrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate IESV.



FRANCOFVRTI
Ex officina typographica Nicolai Hoffmanni, sumptibus IONÆ RHODII.

M. DC VII.



1927 a 182/1

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verùm antè ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorúmque maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idq; adeò, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suu numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quàm solidorum, si Geometria Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non raro pleraq; laterum sunt illa linea, quæ à Græcis ἄλογοι, à Latinis Irrationales appellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certè inter se sunt incommensurabiles, atq; adeò sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absq; his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum ea rei Geometricæ inserviunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principijs, definit initio vnitatem, docetq; eam esse, secundum quam vnumquodq; eorum, quæ sunt, vnum

Vnum esse dicitur. Nam secundum Vnitatem Vnum lapidem, Vnum animal, Vnum corpus, &c. dicere solemus. Caterùm Vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quadam ex Vnitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt Vnitates eum constituentes: Ita vt Vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo Vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. Vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoq; numerus 100. ex centum Vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cùm eos vna eademq; mensura, nimirum Vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cùm plurima earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissimè lib. 10. ostendetur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cùm hæc solùm propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latiùs explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cùm illum singuli ki mettantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur, vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cùm 6. metiatur 42 per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IV.

PARTES autem, cùm non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cùm eum non metiatur, nisi per suas Vnitates, pars ipsius dici non debeat; auto tamen congruenter q; partes poteris appellare, quod quinq; contineat Vnitates,

tes, quarum qualibet decimaoctava pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquidò constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantùm, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hac definitio quarta, qua partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quacunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorũ numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Itaq; si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta, Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cùm vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc verò per 10. Idem tudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solùm eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verùm etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, qua maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantùm eam, qua maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quòd omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cùm ipsum metitur, partes verò, cùm non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim proposita duabus magnitudinibus inæqualibus, necessariò minor aut pars, aut partes est maioris, cùm ea persæpe sint incommensurabiles, vt apertè liber decimus demonstrabit, atq; adeò minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solùm in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Rectè igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, his autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX verò maior minoris, cùm maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solùm numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodò numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeò vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si verò maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris

non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur: Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes aequales, cùm eorum dimidia sint 2, 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR verò, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

ONNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certè quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14 36 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicuè colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeò bifariam diuidi posset. Nam huius impar is 11. dimidia pars essent quinq; vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. ita quoque par numerus 24 pariter par nuncupabitur, cùm eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6 metitur eundem per numerum imparem 3. &c.

CÆTERVM si rectè duæ proxima definitiones expendantur, perspicuum erit fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cùm eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4 pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3 pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum

surdum, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cùm eum non tantum metiatur par 6 per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neque pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. Verum etiam par 6. per parem 4. Sed aptè vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maximè diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui à quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, sed altera prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quib. non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifestè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum verò, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonstratque omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros verò, qui dimidios impares habet, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros demique, qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, alios que similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici rectè pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER verò impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem vnitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola Vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neq; pariter impar, neq; impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos sola Vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

SICVT numerus ille, quem sola Vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos praeter Vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, praeter Vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola Vnitas, mensura communis illos metitur. quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem vero isti 2.4. tamen nullus istorum vtrumque metitur, sed sola Vnitas vtriusq; est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter se dicentur, quod praeter Vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique Vnitas, & quivis numerus, dici possunt, licet impropriè, numeri inter se primi: quia sola Vnitas Vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem praeter Vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterq; horum numerorum 3.5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cùm eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, praeter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIV.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos praeter Vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodũ & numerus ille, quem praeter Vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur; licet per se sumptus, Primus vocetur.

NVME-

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties cõpositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. ϑnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoq; ϑicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6 octies sumpserimus, toties scilicet, quot ϑnitates in multiplicante 8 continentur, procreauerimusque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut ϑicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procrearíve ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantiũ habet ad ϑnitatẽ. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est ϑnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium ϑnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quã alter multiplicantium ad ϑnitatem habet. Itaque Multiplicatio siue ductus ϑnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC ϑides ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hæc alia docens quid sit numerum diuidere numerum: quippe qua necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in his, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum sumptus fue-

rit numerus 8. qui octo suis Vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis Vnitatibus indicat diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad Vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis Vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso contineatur; continebit numerus productus Vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad Vnitatem, quam diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio Vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A. per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad Vnitatem D; Ex definitione autem diuisionis, ita quoque se habet A, ad B, vt C, ad Vnitatem D; perspicuum est, numerum ex C, in B, genitum esse numerum A; cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, Vnitatem.

A, 48. B. 8. C. 6. D. 1.

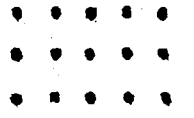
HÆC omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante Vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad Vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad Vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus ½ *multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit com-*

vit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. *Vnitates, procreatusque fuerit numerus* 10. *Quia enim Vnitas per sui semissem duntaxat est in* $\frac{1}{2}$. *sumendus est numerus* 20. *per semissem quoque sui, qua est* 10. *Ita quoque vicissim numerus* 20. *multiplicare dicetur numerum* $\frac{1}{2}$. *si* $\frac{1}{2}$ *sumptus fuerit Vicies, toties scilicet, quoties Vnitas est in* 20. *productusque fuerit idem numerus* 10. *Vbi Vides eandem esse proportionem procreati numeri* 10. *ad* $\frac{1}{2}$. *quam habet alter numerus multiplicans* 20. *ad* 1. *Vel ita esse* 10. *ad* 20. *Vt* $\frac{1}{2}$ *ad* 1. *Sic etiam* $\frac{1}{2}$. *&* $\frac{1}{3}$. *se mutuo multiplicare dicentur quando* $\frac{1}{2}$. *sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum* $\frac{1}{3}$ *tertiam partem Vnitatis tantum continet: Vel quando* $\frac{1}{3}$ *sumptus fuerit per sui semissem, quia &* $\frac{1}{2}$. *semissem tantum continet Vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur* $\frac{1}{6}$. *qui numerus tertia pars est numeri* $\frac{1}{2}$. *siue* $\frac{2}{6}$. *& semissis numeri* $\frac{1}{3}$. *siue* $\frac{2}{6}$. *Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusque ad finem lib.* 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$ *dimidere dicetur numerum* 10. *cum sumptus fuerit numerus* 20 *indicans, dimidentem numerum* $\frac{1}{2}$. *Vicies continens in diuiso numero* 10. *ita Vt eadem proportio sit procreati numeri* 20. *ad* 1. *quæ numeri diuisi* 10. *ad dimidentem* $\frac{1}{2}$. *Sic quoque* $\frac{1}{2}$. *dimidere dicetur* $\frac{1}{6}$ *quando sumptus fuerit numerus* $\frac{1}{3}$ *indicans, dimidentem numerum* $\frac{1}{2}$. *non totum contineri in diuiso* $\frac{1}{6}$. *sed tertiam eius partem. Nam cum numerus* $\frac{1}{2}$. *idem sit qui* $\frac{3}{6}$. *liquido constat tertiam huius partem, nimirum* $\frac{1}{6}$. *contineri in* $\frac{1}{6}$. *Caterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib.* 9. *demonstrabimus, Vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisione que fractorum diximus, planiora fient.*

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas Vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum contineant, non se eius, ac recta linea angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. *explicauimus. Vt*

numeri

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius ϑnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius ϑnum latus sex ϑnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras, Euclides solum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatemve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem ϑnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. necnon 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

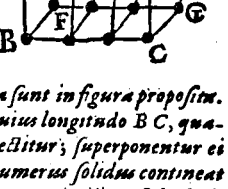
QVIA verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero ϑnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, ϑnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ ϑnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam ϑnitatem producunt.

XVII.

CVM verò tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabi-

pellabitur numerus 24. solidus, numeri verò 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius Vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; Vnus quidem longitudinem, alius verò latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor Vnitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium Vnitatum.



At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. Vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. Vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro basi, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas Vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura propositi. Si enim basis sit B C G F, octo Vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor Vnitates, & B F, latitudo duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. Vnitates, eiusque altitudo B A, Vnitates tres. Similiter si basis sit A B F E, sex Vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet Vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem B C, habens quatuor Vnitatum. Si denique basis sit A B C D, 12. Vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor continet, & latitudo A B, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis E F G H, constabitque totus numerus solidus Vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt A E, vel B F. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.

DENIQVE & Vnitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non propriè, quia eius latera sunt tres Vnitates, ipsam Vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

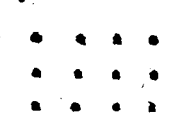
DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam; quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æquālis est, hoc est, qui secundum ℧nitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita ℧t omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, ℧ocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius ℧nitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque ℧nitates, ideoque æqualiter æqualis erit.

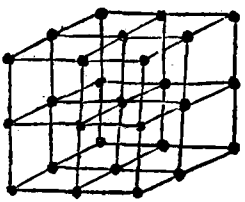


ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix verò quadrata ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

CVBVS verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoq; illum numerum ℧ocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius ℧nitates in longum, latum, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita ℧t omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, sive profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. sive ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius ℧nitates in formam solidam reducta referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres ℧nitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



QVILIBET verò trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi,

cundi, & tertius quarti, æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiusmodi sunt omnes numeri inæquales inter se collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto esse corruptam, cum manca sit, atque imperfecta, comprehendit solum proportionales numeros in proportione multiplici, submultiplicive, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æquè multiplex est*; *in submultiplici verò, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est*; *& in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, ut vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere possumus, quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari, superpartiente, multiplici superparticulari, & multiplici superpartiente. In his enim omnibus, primus numerus secundi, & tertius quarti, neque æquè multiplex est, neque eadem pars, neque eadem partes*; *sed primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel semel, vel aliquoties, & eandem insuper illius partem, easdemve partes; ut perspicuum est ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. ubi omnes proportiones rationales copiosè explicuimus. Itaque hi numeri* 12. 4. 9. 3. *proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex sit, nimirum triplus. Item hi* 4. 12. 3. 9. *est enim primus secundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rursus proportionales sunt hi numeri* 6. 8. 9. 12. *quod primus secundi, & tertius quarti eadem partes sint, videlicet tres partes quartæ. Denique &* 7. 6. 14. 12. *&* 7. 4. 14. 8. *&* 11. 5. 22. 10. *&* 12. 5. 24. 10. *sunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus secundum, & tertius quartum, semel, & insuper eandem partem, videlicet sextam*; *In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas*; *In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet*; *In ultimo denique primus secundum, & tertius quartum, bis, & præterea easdem partes complectitur puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, non sit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes*; *vel denique primus secundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque insuper illius partem, vel eadem partes*; *nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.*

QVO-

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus conferantur, quod primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aqualiter, & insuper eandem partem, Vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, Vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, Vel partes easdem: Et è contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, Vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam si de proportione æqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto æqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad æquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, Vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales esse. Cum enim æquales numeri sint eiusdem, Vel æque multiplices, Vel eadem pars, Vel eadem partes: Vel certe eundem æqualiter contineant, eandemque insuper illius partem, Vel partes: Item cum idem numerus æqualium sit Vel æque multiplex, Vel eadem pars, Vel eadem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, Vel partes; perspicuum est, æquales numeros ad eundem, Vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eandem habentes eandem proportionem, sunt illius Vel æque multiplices, Vel eadem pars, Vel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemque insuper eius partem, Vel partes; Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum Vel æque multiplex, Vel eadem pars, Vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem Vel partes, secundum hanc eandem definitionem, manifestum est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, Vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad

quem

quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si rectè hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}. \frac{3}{8}. \frac{1}{2}. \frac{1}{4}.$ quia primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}. \frac{3}{8}.$ & posteriores quoq; ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}. \frac{1}{4}.$ Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{5}. 4\frac{2}{1}. 1\frac{1}{4}. 2\frac{5}{10}.$ cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis. Vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{1}{8}\frac{0}{8}. \frac{2}{8}\frac{8}{8}.$ & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}. \frac{1}{4}\frac{0}{4}.$ atque ita de cæteris.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quælibet duo illius latera quibuslibet duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HÆC porrò similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, sive in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tam duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerumque, quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$. 6. & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. qua eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora verò numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes sua partes simul sumpta (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumpta conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si verò minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur; partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partib. sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici posset, sive eum metiatur, sive non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnulla alia, quibus proximè succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. produ-

producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia verò, vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{2}$. metiri dicitur numerum $13\frac{1}{2}$. per $5\frac{1}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{1}{4}$. gignit $13\frac{1}{2}$.

XXIV.

PROPORTIO numerorũ est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partẽ, vel partes.

SI numerus 10. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudo vel, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 10. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVÆ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aquè multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, aqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartũ, triplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundũ: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiosè explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNCIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædē partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV. QVO-

IV.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum metitur.

NAM Vnitas sumpta totties, quot sunt in numero proposito Vnitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per Vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerũ ex suis Vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus seipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per Vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans, producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, totties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, Vnitates;

A .... B . . .
C .....

perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per Vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B, producere ipsum C.

A .... B ...
C .....

Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum BD. Cum enim A, metiatur ipsos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo BC, in partes BE, EC, ipsi A, aequales & ipso CD, in partes CF, FG, GD, eidem A, aequales; erit numerus BD, compositus ex omnibus partibus BE, EC, CF, FG, GD, ipsi A, aqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum BD, metitur. Quod est propositum.

A ....
B..... E .... C .... F .... G .... D

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum CD. Dico eundem A, metiri quoque numerum CD, quem B, metitur.

A ...
B .....
C ..... E ..... D

Cum enim B, metiatur ipsum CD, erit CD, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo CD, in partes CE, ED, ipsi B, aequales; metietur A, ipsos numeros CE, ED, quandoquidem numerum B, tam numero CE, quam numero ED, aqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum CD, ex CE, ED, compositum. Quod est propositum.

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum BC, & ablatum BD. Dico eundem A, metiri quoque reliquum DC. Cum enim A, metiatur & BC, &

BC, & BD: erit tam BC, quam BD, ipsius A, multiplex, aut certè BD, ipsi A, æqualis erit. Diuiso ergo tam BC, quam BD, in partes ipsi A, æquales: erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipsi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipsi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum DC. Quod est propositum.

A ...
B ..... D ... C
B ..... D C
B ... D C

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

SINT duo numeri propositi inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties potest, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, esse inter se primos, hoc est, solam vnitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H, communi mensura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars sit ipsius AE, vel certè ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) *a* metietur quoque H, ipsum AE: At H, metitur quoque totum AB. *b* Igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipsum CF. *c* Igitur & H, ipsum CF, metietur; Ac præterea, cum & totum CD, metiatur, *d* metietur quoque reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipsum EG; *e* metietur etiam H, ipsum EG: Metiebatur autem & H, totum EB. *f* Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrem, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

A .....E . G . B
C ... F .. D
H -----

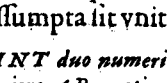
a 11. *prop. num.*
b 12. *prop. num.*
c 11. *prop. num.*
d 12. *prop. num.*
e 11. *prop. num.*
f 12. *prop. num.*

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propositionem, hoc modo,

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta fit vnitas.

SINT duo numeri inter se primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB,



a 11. pro num. *numerum FD, metitur; & FD, ipsum EG, a metietur quoque GB, ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum metiatur, b metietur quoq; nu-*
b 10. pro num. *merum EB, ex EG, GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum CF,*
c 11. pro num. *c igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsum*
d 10. pro num. *FD, positus sit metiri: metietur d quoque ipsum CD, ex CF, FD, compositum. At verò CD, metitur ipsum AE. e Igitur & eundem*
e 11. pro num. *AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; f metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB,*
f 10 pro num. *compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

EODEM modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsq; non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractũ metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, es-
g 1. sept. *sent propositi numeri inter se primi, g vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.*

EX his facilè dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem me-
h 1. sept. *tiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, h vt Euclides demonstrauit: Si verò reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superioris huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB,*

ue GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

LVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad vnitatem deueniretur, *a* numeri AB, CD, essent inter se primi; quod est contra hypothesin. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico FD, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD.

A .....E.....B
C . :.... F . . D
G -----

Quod enim vtrumque metiatur, ita ostendemus. Quia FD, metitur ipsum EB, & EB, ipsum CF; *b* metietur quoque FD, ipsum CF, atque adeò cùm & seipsum metiatur, *c* metietur & totum CD, ex CF, FD, compositum. At CD, ipsum AE, metitur. *d* Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cùm FD, metiatur quoque ipsum EB; *e* metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

a 1. sept.
b 11. pro num.
c 10. pro num.
d 11. pro num.
e 10 pro num.

QVOD autem FD, sit maxima mensura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipsum AE, *f* metietur quoque G, ipsum AE. *g* Igitur & residuum EB: At verò EB, metitur CF. *h* Metietur ergo & G, eundem CF. *i* Igitur & residuum FD; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quàm FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima est mensura numerorum AB, CD.

f 11. pro num.
g 12. pro num.
h 11. pro num.

QVOD si minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cùm & seipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

i 12. pro num.

A .....B
C ..... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros, metiri quoq; maximam eorundem communem mensuram.

HOC elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD: Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eadem ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ dicta sunt, facilè cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad

A . . . . . *propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter*
B . . . . . *se primi: Qui si fuerint inter se primi, non e-*
C . . . . . *runt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.*

SI verò A, & B, fuerint inter se compositi, a sit

a 2. sept. A . . . . . *eorum maxima mensura communis inuenta D,*
B . . . . . *qua si metiatur & numerum C, perspicuum est,*
C . . . . . *tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum*
D . . . *habeant numerum D, communem mensuram.*

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi.

A . . . . . *Si enim dicantur esse inter se compositi, ita*
B . . . . . *vt habeant numerum communem mensuram;*
C . . . . . *metietur eiusmodi communis mensura numerum*
D . . . *D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesin. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C,*

b 2. sept. A . . . . . *inter se compositi. b Inuenta enim numero-*
B . . . . . *rum C, & D, maxima mensura communi E;*
C . . . . . *cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A,*
c 11. prop. D . . . . E . . *& B; c metietur quoque E, eosdem A, & B.*

Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quàm tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in

quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, & de tribus numeris datis dicimus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. iij.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. *Sit* D, maxima mensura numerorum A, & B; *si* ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C, Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. *Si* verò D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cùm enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quæcunq; illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. *a* *Sit* eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram cõmunem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorũ mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipsos A, & B, *b* metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A .....
B ....., D ....
C ..... E.. F ....

a 2. *sept.*

b 11. *pro num.*

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. *Si* enim fieri potest, sit F, maior quàm E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quàm E, numeros A, B, C, metitur; Atq; adeò E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC etiam colligitur ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademq; in cæteris est ratio.

PARI

PARI ratione, pluribus numeris datis, quàm tribus, non primò inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua verò omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

iiij. THEOR. 2. PROPOS. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primũ A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

a 2. *sept.* SED iam A, non metiatur ipsum B, *a* inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. *b* Quia igitur C, pars est ipsius B, cùm ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F; ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

A . . D . . E . . F
b 3. *defi.* B .....
C . .

v. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterq; vtriusq; simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est vel A, ipsius B C, vel D, ipsius E F.

A . . . . .
B . . . . . G . . . . . C | D . . . .
E . . . . H . . . . F

Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo

tudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quòd eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, simul vtriusque B C, & E F, simul, quæ est A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, $A, \frac{2}{9}$ *numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars est, ac proinde vterque simul A, D, vtriusque B C, E F, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius B G: si nimirum B C, E F, dividantur in partes* $B, \frac{2}{9}G, \frac{2}{9}C$ $D, \frac{7}{7}$ $E, \frac{7}{7}H, \frac{7}{7}F$ *B G, G C; E H, H E, ipsis A, D, æquales, &c.*

QVOD si quando contingat, numerum fractum dividi non posse in partes æquales propositas, propterea quòd numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquivalens, & cuius numerator in propositas partes dividi potest. Vt si fractio $\frac{5}{9}$ secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}, \frac{15}{27}, \frac{20}{36}$, quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}, \frac{5}{18}$. secunda in has tres $\frac{5}{27}, \frac{5}{27}, \frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adsunt integra, revocanda prius erunt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $4\frac{2}{7}$. secandus sit in tres partes, reducemus eũ prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales sunt $\frac{31}{21}, \frac{31}{21}, \frac{31}{21}$. Atque hac in sequentibus quoque propositionibus observanda sunt, quando fractionibus accommodantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.

EODEM modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas,

nitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicuè in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A.		*D.*			*A.*		*D...*
B. G. C		*E. H. F*			*B. G. C*		*E... H...F*

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum D E, F G, H I, singuli singulorum, eadem pars, Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numeroru̇ DE, FG, HI, simul eandem esse partem, quæ est A, ipsius D E. Diuisis enim numeris D E, F G, H I, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quàm numeri H I. Quia igitur A, & D K, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & F L, erunt A, B, simul æquales ipsis D K, F L, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & H M; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis D K, F L, H M, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis K E, L G, M I, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in D E, F G, H I, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum D E, F G, H I, simul, quæ A, ipsius D E.

A.		*B..*		*C...*		*A.*	*B.*	*C.*
D. K. E.		*F.. L.. G*		*H... M...I*		*D. K. E*	*F. L.. G*	*H. M. I*

IDEM sequitur, si loco vnius numerorum A, B, C, sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	B, $\frac{1}{2}$	C, $\frac{1}{4}$
D 1 K 1 E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{1}{4}$ M $\frac{1}{4}$ I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponimus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hîc est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ibi etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æquè multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quàm est A, multiplex ipsius D. Cùm enim tam sit multiplex A, ipsius D, quàm est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quàm est multiplex A, ipsius D.

A . . . . .
D . . . . .

A . . . . .
D . . . . .

SI numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æquè multiplices; quàm multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

QVOD si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

A . . B . . . C . . . . . | A . . B . . C . .
D . . E . . F . . . | D . . E . . F .

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Dico vtrumq; numerum A B, & D E, simul vtriusq; numeri C, & F, simul easdē partes esse, quæ est A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes

A . . . G . . . B | D . . . . H . . . . E
C . . . . . | F . . . . . .

tes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partiũ in numero DE; propterea quòd eædem partes est numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur; quæ pars est AG, numeri
a 5. sept. C, eadem est DH, numeri F; a erit vterque AG, DH, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ AG, ipsius C, vel DH, ipsius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, simul eadem pars vtriusq; C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, simul vtriusque numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EADEM hac propositio locum habet in numeris fractis, & nõ eum demonstratione: & hoc exemplum demonstrat.

$A, \frac{1}{9} G, \frac{1}{9} B$ $C, \frac{7}{9}$ $\quad$ $D, \frac{2}{7} H, \frac{2}{7} E$ $F, \frac{6}{7}$

SED & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim est demonstratio, si modò pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; & hic perspicuum est.

$A \ldots K \ldots B \mid C \ldots L \ldots D \mid E \ldots M \ldots F$
$G \ldots\ldots \mid H \ldots\ldots \mid I \ldots\ldots$

vij. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem

eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD.

A....E..B
G....C.....F..::D

Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC: a erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cùm AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD, erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendũ. a 5. sept.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{2}$ *E*, $\frac{3}{5}$ *B*,
G, $\frac{4}{5}$ *C* $\frac{6}{8}$ *E* $\frac{4}{5}$ *D*

LOCVM etiam habet hac propositio, ſna cum eius demonſtratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum eſt, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamſi ablata ſit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel denique in integris & ablatis, & reliquus ſit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A. E... B | *A... E. B* | *A. E. B.*
G ..... C.. F ..... D | *G.. C..... F.. D* | *G.. C.. F.. D*

CÆTERVM & ex his theorematis quinto lib. 5. ſimile hoc demonſtrabimus, tam in numeris integris, quàm in fractis.

SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æquè multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus AB, totius CD. Cùm enim AB, ipſius CD, ſit æquè multiplex, atque AE, ipſius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, qua ablatus CF, ablati AE. b *Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, qua totus CD, totius AB, Ac proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipſius FD, vt AB, ipſius CD, eſt multiplex.*

A....E.....B
C..F..D

b 7. sept.

QVOD ſi ex CD, ablata fuerit vnitas CF, vel reliqua ſit vnitas FD. Vel denique in integris & ablatis ſit vnitas CF, & alia reliqua FD, idem demonſtrabitur. Et hæc exempla commonſtrant.

A ...E..... | *A....E..B* | *A....E....B*
C..F..D | *C..F.D* | *C. F. D*

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AE, erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD, & AE, in partes AK, KE, numeri CF, erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quàm IH, ipsius CD, quæ tam AK, quàm KE, ipsius CF. Cùm ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quàm IH, pars ipsius CD, maior tàm numero AK, quàm KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE, erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cùm totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, a 7. sep. erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quàm IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quàm MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eædem partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia verò si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt; Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A ..... K ..... E .... B
C ..... F ..... D
G ..... L .. I ..... M .. H

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{19}$ K, $\frac{2}{19}$ E, $\frac{6}{19}$ B
C, $\frac{6}{19}$ F, $\frac{6}{19}$ D
G, $\frac{2}{19}$ L, $\frac{2}{19}$ I, $\frac{2}{19}$ M, $\frac{2}{19}$ H

IN numeris fractis eadem hac propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

NON

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabit hic reliquum numerum EB, alicuius numeri eadem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF, ibi verò perspicuum erat reliquum EB, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

ix.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, B, C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut eadem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partiũ numeri EF. Quia verò BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quàm EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF, [a] ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HE, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . .
B . . . G C
D . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

[a] 5. vel 6. sept.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis propositio hac, vna cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

$A, \frac{7}{11}$
$B, \frac{7}{11}$ $G, \frac{7}{11}$ C
$D, \frac{14}{22}$
$E, \frac{14}{22}$ $H, \frac{14}{22}$ F

QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, qua numeri alicuius pars sit, qua alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, qua secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A.
B. G. C
D . . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DF, numeri F, ſintque A, B, C, ipſis DE, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quàm GB, eadem pars ipſius C, quæ tam DH, quàm HE, ipſius F. *a* Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes AG, ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. *b* Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſque, DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . . . .

a 29. ſept.

b 5. vel 6. ſept.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ *G*, $\frac{2}{15}$ *B*
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{7}{10}$ *H*, $\frac{7}{10}$ *E*
F, $\frac{9}{10}$

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totum CD. Cùm enim ſit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; *c* erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemque inſuperillius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius

A . . . . . E . . . . . B
C . . . . . F . . . D

c 10. def.

ipsius CF, æquè multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æquè multiplices ipsorum CD, CF. *a* Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æquè multiplex erit. *b* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. a 7. sept. b 20. def. fin.

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, *c* erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; *d* Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . . D
A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

c 7. vel 8. sept. d 20. def. fin.

CONTINEAT tertiò AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. *e* Reliquus igi-

e 8. sept.

A . . . . . E . . . B | A . . . . . E . . . . . B
C . . . F . . D | C . . . . . F . . . . . D

tur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. *f* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

f 8. sept.

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandū.

A . . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

$A, \frac{6}{9}E - \frac{1}{10}B$ | $A, \frac{14}{21}F \frac{8}{29}B$
$C, \frac{4}{9}F - \frac{2}{10}C$ | $C, \frac{3}{21}F \frac{10}{29}D$

LEMMA.

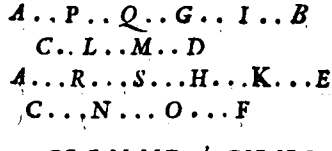
QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqua-

qualiter contineat, eademq; insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius MB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partiũ numeri CD, multitudini partiũ numeri CF, æqualis, quod GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoq; multitudo partium numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorũ æquè multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certè numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atq; adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

A..N..O..G..B
C..I..K..D
A...P...Q...H...E
C...L...M...F

CONTINEAT *deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterue, &c. easdemque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè*

æquè multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo,



diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certè numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; At q; adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primò propositum.

I AM verò sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eædem partes. Dico e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt ea multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, superueritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem vel partes. Quod secundò est propositum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A,B,C,D,E,F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico esse quoq; omnes A,C,E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt

A.... C.. E... B..... D.... F..... est A, ad B. Sint enim primũ A,C,E, minores quàm B,D,F. Quoniã igitur, propter eandem proportionẽ,

a 20. def. *a* eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F, *b* erit quoque vterque A,C, simul vtriusque B,D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; *c* erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B.

b 5. Vel 6. sept.

c 5. sept.

d 20. def. *d* Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æquè multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E;

e 5. sept. A..... C.... E..... Atque adeò vt prius, *e* erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, B.... D.. F... C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoq; & è contrario omnes A, C, E, simul omniũ B, D, F, simul, & A, ipsius B, æquè multiplices. *f* Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem sem-

f 20. def.

ſemper demonſtratio, vt hic appareat, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A...C.....E.....	A...C...E.....	A...C...E...
B. D.. F...	D. D. F..	B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. *a* Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C: ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, *b* erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ ipſius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. *c* Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

A.....C....E.....
B..... D... F.....

a 20. *de fin.*
b 6. *ſept.*
c 20. *de fin.*

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, etit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C ... E .....
B.... D ... F.....

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propoſitio hac vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiv.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſſim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes. *d* Viciſſim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: *e* Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.... C.....
B.... D.....

d 9. *vel* 10. *ſept.*
e 20. *de fin.*

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam

quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, vel partes.

a 9. vel 10. sept. A ..... C ... / A ..... D .... a Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, vel partes: Atq; adeo è contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æquè multiplex erit, vel certè, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes.

b 20. de fin. b Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æquè

A ... C ..... / B ... D ..... multiplex; vel certè A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certè, per lemma pro-

c 9. vel 10. sept. pos. 11. huius lib. eædem partes. c Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, vel partes. d Ac proinde eadem propor-

d 20. de fin. tio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æquè multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes; Atque

A ..... C .... / B ..... D ... adeo, è contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe, per lem-

e 9. vel 10. sept. ma propos. 11. huius lib. eædem partes. e Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, conti-

f 20. de fin. nebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. f Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales

A ... C .... / B ... D .... numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt; g Erit vt

g 20. de fin. A, ad C, ita B, ad D.

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam G. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqua-

A .... C... / B .... D... lium numerorum C, & D, vel æquè multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes; h erit vt A,

h 20. de fin. ad C, ita B, ad D.

SINT septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint

iores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales. a Quoniam igitur, ob eandem proportionem A, ipsius B, & C, ipsius D, æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certè A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum. a 20. 4 fin.

A ..... C .....
B ... D ...

SCHOLIVM.

QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicuè ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod mirór) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis supernanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. XV.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, ſitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita D, ad E;

a 13. ſcp.

A ..... D.....
B ..... E .....
C .... F ...
G.....H.....

a erit viciſſim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob cauſam, cum ſit, vt B, ad C; ita E, ad F; erit viciſſim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni B, ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, vt mox oſtende-

b 13. ſcp.

tur.) b Ac proinde viciſſim, vt A, ad C, ita D, ad F.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

A . D...
B.. F.....
C... F .....
G . G...

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco pluriumplures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem ſunt inter ſe quoque ſint eadem, quales

A ..... B ..... C ....
D..... E..... F:..

ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eadem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri ſiue fracti, ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æquè

æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certè B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. a *Quare numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum.* a 20. de fin.

HOC idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xvj.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æquè. Dico viciſſim vnitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æquè metiri. Diuiſo enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatũ numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æquè vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipſum E I, atque vnitas G H, ipſum I K, & vnitas H C, ipſum K F; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, ſimul numerorum E I, I K, K F, ſimul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compoſitus numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compoſitum æquè metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A. D.
B. G. H. C E.. I.. K.. F

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æquè metitur, atque numerus D, numerum E F, erit vnitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, nu-

B C, numeri E F; Ac propterea ♁nitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

H Æ C propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si ♁nitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur ♁icissim æquè ♁nitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & b13.sep. *secundus integer quartum fractum; a sed solum eandem habebit rationem ♁nitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

E.
A . . . B . . . .
D . . . . . C . . . . . .

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim
b15.def. vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; *b* erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeo vnitas E,
c15.sep. numerum A, & numerus B, numerum C, æquè metietur. *c* Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æquè. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A,
d15.def. facit D: *d* erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æquè metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æquè. Æquè igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo sese multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, ♁nitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, ♁nitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, ♁nitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E.
A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt primus, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, aequè metiri. At verò, si numerus B, ipsum A, multiplicet, a etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum aeque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, aequè metitur, atque vnitas E, ipsum B.

E. A . . . B . . . . C . . . . . a 15. de fin.

QVOD si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; *b* erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, aequè metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit, *c* Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, *d* & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

F. A . . . B . . C . . . . D ..... E ..... b 15. de fin. c 20. de fin. d 13. sep.

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR.

xix. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; *a* fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; *b* erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

a16. sep.

A .... B .....
C ...
D ..... E .....

b17. sep.

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & precedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunq; numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F, c erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiant F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

c17. vel 18. sep.

A ...
B . C ... D ....
E ..... F ..... G .....

xix. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT

SINT quatuor numeri proportionales A,B,C,D, vt quidem A, ad B, ita C,ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F,ex B,secundo in C,tertium. Dico numeros E,F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; *a* erit, vt C,ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A,& B, in C,fiunt G, & F; *b* erit quoque, vt idem A,ad B, ita G,ad F. Quare, per lemma propos.14. habebit G, ad E,& F,eandem proportionem; eam videlicet quam habet A, ad B; Ac proinde E,& F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin.20. scripsimus.

A ...
B ..
C .....
D ....
E .....
F .....
G .....

a17.sep.
b18.sep.

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B,secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B,ita C,ad D. Fiat enim rursus G, ex A,in C. Quia ergo ex A, in C,D,fiunt G, E; *c* erit vt C,ad D, ita G,ad E, vel ad F, ipsi E,æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem,vt ad defin.20. docuimus. Rursus,quoniam ex A,& B,in C,fiunt G,& F; *d* erit quoque, vt A, ad B, ita idem G,ad eundem F. Quare proportiones A, ad B,& C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B,ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c17.sep.
d18.sep.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos.locum habere in numeris fractis, sive omnes fracti sint,sive non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis,quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi,habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis,æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propos.16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si,

qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C, ad D; (siue E, numerus integer sit, siue fractus; siue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9. ostendemus, si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quam E, ad B: ac proinde A, maior erit, quam E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quam ex E, in

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

19. sep. *eundem D: a At qui fit ex E, in D, aqualis est ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.*

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, primi ad B, secundum, quam C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (siue E, numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare

b 19. sep. *maior erit proportio A, ad B, quam E, ad B: b At ita est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.*

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc apposito exemplo appareat. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad

A ..... E .....
B ....
C ...
D ..

D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; mator fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quam ex D, secundo in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quam ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam est demonstratum:

stratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod erat propositum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xx.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erũt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur.

Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . .

Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur. a 19. sep.

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. b 16. sep.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamsi numeri A, B, C sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si maior fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium.

Item si minor fuerit proportio primi ad secundũ, quam secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se; minor proportio erit primi ad secun-

A . . . . . | A . . . .
B . . . . . D . . . . . | B . . . . . D . . . . . .
C . . . . . | C . . . . . .

dum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius æqualis, & habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, aut minor, &c. Vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æquè metiri ipsos E, F, maiorem quidem A B, ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt A B, ad C D, ita E, ad F; *a* erit vicissim, vt A B, ad E, ita C D, ad F. Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E, F; *b* erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. *c* Erit ergo, vt A G, ad E, ita C H, ad F; *d* & vicissim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

a 13. *sep.*
b 20. *def fin.*
c 20. *def fin.*
d 13. *sep.*

A .. G .. B
C ... H ... D
E .....
F .....

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continuè proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundum, tertium, vt in hoc appositio exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri continuè proportionales quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem

tas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primoſque duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit proportio A B, ad

A ... K ... B C .. L . D E .... M .... F
G ..... H ..... I .....

C D, quæ C D, ad E F, ſiue non; ita vt non poſſint reperiri alij numeri ipſis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, vt A B, ad C D, & ſecundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis A B, C D, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio verò 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt A B, ad C D, & H, ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, metiri æquè. Cum enim ſit vt A B, ad C D, ita G, ad H, a erit vicißim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum a 13. ſep.
ſit vt C D, ad E F, ita H, ad I, b erit quoque vicißim, vt C D, ad H, ita b 13. ſep.
E F, ad I. c Quare A B, ipſius G, & C D, ipſius H, & E F, ipſius I, c 20. da
erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. fin.
Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D;
E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot
in C D, & in E F, atque adeo A K, ipſius G, & C L, ipſius H, eadem
pars. d Erit ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H; e & vicißim vt A K, d 20. de
ad C L, ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemque modo erit, vt C L, fin.
ad F N, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, c 13. ſep.

E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quam A B, C D, E F. Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, aquè metietur. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint

A	*B*	*C*
D	*E*	*F*

alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F, aquè metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, aquè metientur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, aquè metiatur, ac B, ipſum E, metientur aquè omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

CÆTERVM hæc propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fracto, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Alia autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, aquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt, ſemel hoc loco monuiſſe.

xix. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri: & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim

A		*H*
B	*D*	
C	*E*	
G	*F*	

enim fit vt A, ad B, ita E, ad F; *a* erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, *b* erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D. Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. *c* Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F. a 19. sep. b 19. sep. c 19. sep.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui à permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum à nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, d erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, e erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

A ..... C ...
B .... D ..

d 13. sep. e 13. sep.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo esse ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit ut AB,

a33.sep. *A ..... C ... B*
D .... F .. E

ad CB, ita DE, ad FE; a erit vicissim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, ut totus AB, ad

b11.sep. *totum DE, b ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad*
c13.sep. *DF, ut CB, ad FE. c Vicissim ergo erit quoque AC, ad GB, ut DF, ad FE. Quod est propositum.*

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, ut CB, ad AC, ita FE, ad DE. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

LI.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, ut AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, ut AB, ad BC, ita DE,

d13.sep. *ad EF;* d *erit vicissim, ut AB, ad DE, ita*
e12.sep. *A ..... B ... C*
f13.sep. *D .... E .. F*

BC, ad EF; e *Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, ut BC, ad EF:* f *Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, ut DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.*

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo ut BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

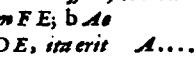
DEINDE sit rursus, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, ut BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoq; per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; a *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* b *Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* c *Vicissim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod erat propositum.*

a 13. sep. b 11. sep. c 13. sep.

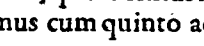


RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum; Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F: & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex aqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH, & vt BG, ad C, ita EH, ad F, erit ex aqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

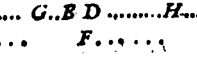


EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24 lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebũt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F, erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex aequalitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cùm rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex aequalitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.



ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cùm enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D: & vt A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex aequalitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH: & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex aequalitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.



DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoq; illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunq; numeros proportiones habuerit, quas idem alius

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoq; idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunq; numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K. Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cùm enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoque vt AC,

A . . . . B . . . . . C . . . . . D	F . . G . . . H I
E	K . . . . .

primus cum quinto, ad E, secundum, ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunq; AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, vtpote ad FI. Cùm enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atq; ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM verò his demonstratis, ostendentur nouem vltimæ propositiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuêre; si pro magnitudinibus, intelligantur numeri siue integri, siue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur iidem modi hoc lib demonstrati: vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illa quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eadem q; prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR.

xxj. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; *a* metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æquè; atque adeò secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cùm vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æquè metiatur; *b* metietur & vicissim æquè vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur: *c* metietur quoque vicissim æquè vnitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeò, cùm idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....B
C-----D
E----

a 21. sep.

b 15. sep.

c 15. sep.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerū, præter vnitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturq; C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At verò ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B: *d* fit, vt D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. *e* Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E: Atq; adeò,

A.....B
C-----
D----E----

d 9. pronun.

e 18. sep.

adeò, cùm D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quàm A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunque numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorũ in minoribus numeris reperiatur. Si enim non sunt minimi, erũt aliqui alij minores ipsis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionũ. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, aquè, per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus: atque adeò secundum vnum eundem numerum, qui sit G: ita vt D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties vnitas est in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipsum A, aquè metitur: a metietur quoque vicissim aquè vnitas numerum a 15. sept. *D, & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, aquè, atque vnitas ipsos E, F: Atque idcirco A, B, C, cùm habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: sed ipsi A, B, C, minimi sunt.*

IAM verò sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communis mensura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipsum A, quoties vnitas est in D: & ipsum B, totiès quoties vnitas est in E: & ipsum C, toties quoties vnitas est in F. Quoniam igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D, E, F: fit vt D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad pro-

ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus: Atque adeò, cùm D, E, F, minores ſint quàm A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

xxiiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B: & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C: metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: &

a11. *prop.* A..... B..... C, ipſum A: *a* metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cùm habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quilibet metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxv. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quemlibet primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi: ſit eorum cõmunis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniã igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in

b9. *prop.* E..... F..... F; *b* ſit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D: *c* & contra E, ipſum F, multi-

c16. *ſep.* plicans producat eundem D. Genitus eſt autem idem D, ex A, in B. Igitur cùm ex E, primo in F, quartum, fiat idem numerus, qui

d19. *ſep.* ex A, ſecundo in B, tertium; *d* erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt;

e25. *ſep.* & E, ipſum C, ponitur metiri; *e* erit E, ad A, primus; Atq; adeò

f23. *ſep.* E, & A, cùm ſint inter ſe primi, *f* in ſua proportione minimi e-

g21. *ſep.* runt. *g* Aequè igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, minimus E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cùm E, metiatur vtrumq; B, & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quemlibet primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvj.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in seipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniã igitur A, & D, ad B, primi sunt, *a* erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C. .....
D ....

a 26. *septim.*

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cùm enim vterque A, & B, primus sit ad G; *b* erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cùm vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; *c* erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A ..... B...
E.....
C... D..
F.....

b 26. *septim.*

c 26. *septim.*

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviij.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoq; primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cùm enim A, B, sint inter se pri-

A... B..
C..... D....
E..... F.....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

mi,

a 27. sep. tim. mi, a erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atq; eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeò geniti duo C, D, primi inter se erunt.

b 27. sep. RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, b erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; c Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cùm A, & C, primi sint ad B, d erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademq; ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E; ad vtrumque B, F, primus est; e erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, f erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: nec non & H, ad A. g Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cùm vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

c 28. sep. tim.

d 26. sep. tim.

e 28. sep. tim.

f 26. sep. tim.

g 28. sep. tim.

A . . B . .
C . . . . . D . . . .
E . . . . . F . . . . .
G, 81. H, 16.
I, 243 K, 32.

xxix THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterq; simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & vtrumque simul A C, primum esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; h metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cùm eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad B C, ostendemus eundem esse primum.

h 12. prop. num.

A . . . . . B C
D - - - - -

SED iam vterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; h metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cùm eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eo-

i 10. prop. num.

mi. Eodemque argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. *Si* duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit: per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos, licet B, compositus sit. *Si* enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos præter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Nō erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . B . . . . . .
C . . . .

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuò multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B, si non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur verò ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertiū; *a* erit vt D, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad E, quartum. *b* Quia verò primus D, ad A, primus est, cùm eum non metiatur; *c* erunt D, & A, in sua proportione minimi. *d* Quare æquè metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A; metietur saltem ipsum B: Eodemq; modo si D, non

A . . . . B . . . . .
C . . . . . .
D . . . E . . . . . .

a 19. *sep.* *b* 31. *sep.* *c* 23 *sep.* *d* 21. *sep.*

metiatur ipsum *B*, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quoque ad vnum ipsorum A, B, compositum esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quoque inter

A,.. B....
C.....
D.....

se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vterq; A, & B, ad D, primus. a *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cùm D, ponatur vel metiri ipsum G, vel certè ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cùm non sit primus ad vtrumque.*

a 26. septim.

xxx. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si verò compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: si primus, cùm metiatur ipsum *B*; & B, ipsum A; *b* metietur quoq; C, primus ipsum A. Si autem C, compositus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur

b 11. pro sun.

A.....
B.....C...

infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atq; adeò ad primum, qui cùm metiatur omnes præcedentes, *c* metietur quoq; compositum A. Quod est propositum.

c 11. presum.

ALITER. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A. *d* metietur quoq; C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cùm B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus

A.....:
B... C--

d 11 pro sun.

rus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certè aliquem primum eum metiri. Cùm enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: si verò compositus; a metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eũ aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A..... a 31. sep.

PROBL. 3. PROPOS. 35. xxxiiij.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, siue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi, per ea quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si verò non sunt inter se primi, b inuenta sit maxima eorũ communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F G; c fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A.....B....C.....
D..
E... F..G....
H--- I---- K----
L -----

b 33. sep.

c 9. prop. nun.

QVOD verò E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sint minimi; erunt aliqui alij ipsis minores minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æquè, vt ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito, d fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; e & vicissim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; f erit, vt E, primus ad H, secundum,

d 9. prop. nun.

e 8. prop. nun.

f 19. sep.

dum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior, quàm H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atq; adeò cùm L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt si proponātur continuè proportionales A, B, C, D, E,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non, reperiemus duos in eadem proportione minimos; si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum E, F, G,

A . . . B . . . . . C . . . . . | A . . . . B . . C . . . . .
D . . . | D . .
E. F. . G . . | E. . F. G . . . .

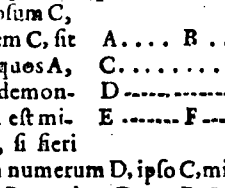
per hanc propositorum esse vnitatem; quando scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, aqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

xxxvj. ## PROBL. 4. PROPOS. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseq; mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse mini-

minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; *a* metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, *a 7. pro nun.*



metitur. Quòd autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, *b* tam ex A, in F, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium, *c* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cùm ponantur primi inter ſe, *d* & ob id, in ſua proportione minimi) *e* æquè metiuntur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; *f* erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atq; adeò C, minimus eſt omnium, quos metiuntur. *b 9. pro nun.* *c 19. ſep.* *d 23. ſep.* *e 21. ſep.* *f 17 ſep.*

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. *g* Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, *h* fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cùm tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; *i* metietur tam A, quàm B, ipſum E. Quòd verò E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, *k* fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, *l* erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cùm ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, *m* metientur ipſos H, & G, æquè, nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F, *n* erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cùm D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt, metietur etiam E, numerus numerum *g 35 ſep.* *h 19. ſep.* *i 17. pron.* *k 19. pro nun.* *l 19. ſep.* *m 21 ſe ptim.* *n 17 ſe ptim.*

rum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem, atq; adeò E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum, Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem esse minimū, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

xxxv. THEOR. 33. PROPOS. 37.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D. sitq; alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C D, metiri. Si enim E, ipsum C D, non metitur, ablato E, ex C D, quoties

A.. B...
C.....F-----D
E.....

potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerum, si fieri potest, F D, minorem se, ita vt E, metiatur ablatū C F. Quoniam igitur tam A, quàm B, ipsum E, metitur, & E, ipsum C F; a metietur quoq; tam A, quàm B, ipsum C F. Itaq; A, & B, cùm metiantur totum C D, & ablatum C F; b metientur & reliquum F D. Est autem F D, minor quàm E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. *pro num.* b 12. *pro num.*

xxxvj. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. c Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiàn-

c 36. *sep.*

mẽtiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest; A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem.

A . . . B . . . . C . . . . . .
D . . . . . .
E . . . . . .

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immo, cùm A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; *a* metietur quoq; D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. a 32. sep.

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. *b* Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostenderur. Cùm A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; *c* metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quòd autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniã igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; *d* metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeò cùm C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quàm E; nõ erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immò cùm C, & D, metiantur ipsum F; *e* metietur quoq; eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

b 36 sep.

A . . B . . . C . . . . .
D . . . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .

c 11. prop. num.

d 37. sept. prim.

e 37. sept. prim.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitq; F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E metiri. Si enim non metitur, metiantur eius partem D G, reliq-

A . . B . . . C . . . . relinquatq; numerum G E, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum D G,
D ..... G ---- E a metientur quoq; A, B, C, eundem
F ..... DG; Acproinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; b metien-
a 11. pro-nun. b 12 pro-nun. tur & reliquum G E, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Metitur igitur F, ipsum D E.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

xxxvij. ## THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æquè metitur; a & viciſſim vnitas æquè ipsum B, & C, ipsum A, metietur: atque adeò eadem pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A. Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . B . . . C . . . .

a 15. sep.

xxxviij. ## THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cùm B, pars denominetur à C, sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æquè.

A . . . . . B . . . C . . . . .

d 15. sep. d Viciſſim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 41. xxxix.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C, Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; *a* minimusque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, *b* habebit G, partes à D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur à D, E, F. Quod verò G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, *c* metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

D . . A, *Secunda* a 38. sep.
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H ----------

b 39. sep.

c 40. sep

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æquè vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G. d *Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I K, L, ipsum G, æquè, atque adeo vnitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ à D, E, F.*

A . . D .. I .....
B, Tertia E . . . K . . . .
C, Quarta F . . . . L . . .
G . . . . . .

d 15. sep.

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM verò, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas par-

mus partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus.

Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I,

G	A, D ..	
H	B, E ...	
I	C, F	
K ---------- M ------ L		
N ---------- P ------ O		

a 11. pro num. *& reliquos multiplices ipsius G; a metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G.* b *Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E,* b 39. septim. *F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.*

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; c 40. septim. *c metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi aqualem.* d 12. pro quin. *d Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.*

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor verò quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, e 40. septim. *C, e metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G,* f 12. pro num. *ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo aqualem. f Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B. C. da-*

tas;

tas; Ac propterea I, tertium eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendus ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur.

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G: erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partiu, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ita vt K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; a Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I; b erit, vt H, ad L, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma

a 15. def. fin.

b 17. ſeptim.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ. 14. huius lib. & H, ad I, ita Vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine pradicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

SI verò plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hæc aliam à 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, ut manifeſtum eſt.

QVOD ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omniũ eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, & erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: *b* Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. *c* Igitur tam A, ipſum E, quam D, ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... E ---
B ..... F -----
C ..... G -------
D ..... H ---------

a 14. *ſep.*
b 23. *ſep.*
c 21. *ſep.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe

A..... E---
B..... F-----
C..... G------
D..... H--------

C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, sit extremi A, & D, inter se primi sint, sive A, B, C, D, sint continuè proportionales, vt vult Euclides, sive non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersa sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

ij. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, se ipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; *b* erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos: *e* sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; *d* Erunt & C, E, extremi, inter se primi. *e* Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A. F. 8. G. 12. H. 18. I. 27. K. 16. L. 24. M. 36. N. 54. O. 81.

a 17. sept.
b 17. sept.
c 24 sept.
d 29. sept.
e 21. sept.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, eadem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. *g* Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I,

f 18 sept.
g 24. sept.

G, & I, ex B, in E, a erunt & F, I, extremi, inter se primi. b Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt. a 29. sup. b 1. def.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex ijs, qua ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi sint, ostendetur, vt prius. c 18. sup.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A . . B . . .
C . . . D . . . . . E . . . . . .
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N. 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continuè proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea vterque sit æqualiter æqualis æqualiter: ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub aliis denominationibus, quæ in

quæ in Algebra solent explicari: Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

NEQVE verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propos. tradita, non autem in quibuslibet tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunque propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorsus sunt ijs, qui per hanc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuentis, non essent inuenti, minimi, quod est contra hanc propos. Si verò dati maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi, quod est contra hypothesim. Quod clarissimè ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: sumptisque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam necessario A, ipsi F, æqualis erit; atque ita, cum sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B, ipsi G, æqualis: Eademque ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erunt. Eademque ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor quam F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt, quod est absurdum, & contra hanc propos. Si verò A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non sunt, quod est contra hypothesim. Cum ergo A, minor non sit, aut maior, quam F; æqualis omnino erit, ideoque vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositum.

A --- B ---- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L, M, N, medij ex A, in G, H; I, vel ex B, in F,

B, in F, G, H. vt ex demonſtratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM verò tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continuè proportionales ſunt, ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continuè proportionalium ſint vltimi tot continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris data rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continuè proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & K, extremos numeros trium numerorum continuè proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At verò F, & I, extremos quatuor continuè proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continuè proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe qua ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorem data proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, qua denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis eſt ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur octo numeri minimi in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt primus, qui minimum denomi-

mantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, à 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porrò hac arte non possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continuè proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

iij. PROBL. 2. PROPOS. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometrice demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

SCHOLIVM.

HÆC propositio intelligenda est de numeris minimis continuè proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continuè, inueniri

ueniri non possent, ex precedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Imò si diuersa sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuatè in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conuersum, quoad numeros continuè proportionales. Etenim numeri quotcunque continuè proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt uelut hic demonstratum est. At verò primum theorema, prout spectat ad numeros non continuè proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continuè proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper proposito 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. *a* Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æquè metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, *b* A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. *c* Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æquè metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ----- K ----- L -----

a 36. septim.

b 9. prop. nun.

c 18. septim.

a 21. sept. proportione: a ipsi æquè metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æquè metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ----- K ----- L -----

b 37. sept. B, & C, ipsum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi, F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps

c 36. sept. proportionales in datis rationibus. c Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, cõstat. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æquè metiantur; erit vt prius, quemamodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione;

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L ---- M ------ N ---- O -----

d 21. sept. d ipsi metientur æquè L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æquè metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M.

e 37. sept. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

f 36. sept. SED iam E, non metiatur ipsum I. f Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æquè

æquè metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipſos H, G: & C, D, ipſos G, I, metiantur æquè.

Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque eſt K, ad N, cum E, F, æquè ipſos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namq; non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, *a* ipſi æquè metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æquè, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeo cum B, & C, ipſum P, metiantur, *b* metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò oſtenſum eſt, eſſe vt G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atqui idcirco, cum metiatur G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q; *c* quod E, F, in ſua proportione minimi æquè metiantur Q, R, eiuſdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipſum Q; *d* metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

A, 9. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O ----- P ---- Q ---- R -----

a 21. ſept.

b 37. ſeptim.

c 21. ſeptim.

d 37. ſeptim.

QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S, ad T;

inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si verò S, ipſum N, non metiatur, *e* ſumemus

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

e 36. ſept.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P, & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties verò S, eundem O, metitur, toties T, ipſum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & conſequens, licet proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, ſi ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; poſterioris verò E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F. Qua-

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 8.

a 17. ſeptim.

F. Quare A, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. *a* Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur. *a* 27. *de fin.*

EODEM argumento oſtendemus, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, *b* erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E, *c* Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat.

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3. *b* 17. *ſeptim.*
c 27. *de fin.*

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſpiam vllum metietur.

SINT continuè proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè inſequẽtem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipſum B, non metiatur, neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quod vero nec alius quiſpiam illorum vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. *d* Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero eſt vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. *e* Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; non metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium à ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtrabimus, neque

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.
d 2. *octa. vii.*
e 3. *oct.*

A quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si igitur sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quod enim nullius proxime insequentis multiplex sit, constat. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autem A, ipsius B multiplex; neq; B, ipsius C; neq; C, ipsius D; neq; D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C, & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; a neque alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus.

A 6. oct.

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur; & quicumque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C: & C, ipsum D: & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorū quemlibet sequentium metiatur,

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D, a *metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur,* b *metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.* a 11. pro num. b 11. pro num.

SED iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cùm enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, multiplex: erit & B, ipſius C, & C, ipſius D, & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè inſequentis multiplex eſt. A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex, metietur è contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea è contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propoſitionem ſextum, & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum à ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur: Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex; neq; primus ſecundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quiſque nullum à ſecundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, primus ſecundum B, dicatur metiri; metietur quoque, A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunque alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cùm neque primus, neque alius quiſquam vllum à ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

IAM verò A, primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo B, ſit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namque A, primus multiplex eſſe dicatur B, ſecundi, multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet ſequentium, ex ijs, quæ ſecundo theoremate huius ſcholij demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neq; alius quiſquam vllius à ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius B, multiplex erit. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

vij. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & A, primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri: a neq; alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atq; idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 26. def. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio præcedentis propos. demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cuiuslibet à secundo sit multiplex, primus quoq; secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex, neq; alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholij præcedentis. Quod est contra hypothesim.

viij. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A,B, medij proportionales continuè C, D; sitq; vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidē numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo b. def. vt A, ad B, atque adeò vt E, ad F, ita G, ad K. b Quare cùm G, & K,

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

& K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum; *a* ac propterea in sua proportione minimi; *b* æquè metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æquè metiantur, singuli singulos.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

a 23. sep.
b 21. sep.

c Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continuè proportionales. Igitur & E, L, M, F, continuè proportionales sunt; Atque idcirco, cùm multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B, tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

c 9 prop. huius.

SCHOLIVM.

NON solùm ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B, verùm etiã eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hac propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem: Cùm enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis verò inter numeros sola vnitate differentes; superbipartientes denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros dupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eadem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Namque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros sola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solùm numerus, qui ab vtro-

que

que vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, (siue C D, vnitas sit, & A B, ternarius, siue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quàm A B, maior verò quàm C D, vnitate quoque:

A . . G . B	A ..... G . B
E . H . F	E ..... H . F
C . D	C ..... D

Dico E F, non esse medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, vt E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, aquali, vt reliqua sit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipsi C D, aquali, vt relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque vt A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cùm A G, E H, ipsis E F, C D, aquales sint, ex constructione. Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proximè demonstrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ, quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt sit A B, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad A B. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipsum A B. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque senarium A E. Igitur D, metitur totum A E, & ablatum A E: a ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem B E. Quod est absurdum.

A ..... B . E	
D . . D ...	
C.	

a 11. prænun.

CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E: b ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem E B, metietur. Quod est absurdum.

A ....E . B	
D	
C .	

b 11 prænun.

EX quibus fit, neque illud internallum Musicum, quod in duplæ proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgò dicitur, octaua; neque illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus,

Tonus, seu vulgò, secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones aquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12 hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariā diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cùm ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc verò in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hîc proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inaquales. Ita quoque Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cùm enim per ea quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorum verò proportio sit duplicata proportionis laterū; fit, vt proportio quadrati ex diametro descripti, ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cùm ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, qua de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continuè proportionales C, D. Dico totidem cadere continuè proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, a sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec a 2. 8.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; *a* erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia verò, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans verò ipsum G, fecit K, *b* metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: *c* Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Aequè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. *d* Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cùm manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans verò ipsum I, faciat N; *e* metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundē F: *f* Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Aequè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. *g* Proportionales ergo sunt continuè, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cùm tam multitudo E, G, K, quàm F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

a 1. oct.
b 7. prænun.
c 1. prænun.
d 20. def.
e 7. prænun.
f 5. prænun.
g 20. def.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

THEOR.

THEOR. 8. PROP. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumq; A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, & B, & vnitatem.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

Quoniã igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D, D, ad E; & E, ad A; æquè metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: *a* Metitur autẽ vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. *b* Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicãs autẽ D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaq; cùm C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; *c* erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; *d* erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; *e* erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremò, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cùm C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, *f* erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proin-

a 3 prop. num.
b 9. prop. num.
c 17. sep.
d 17. sep. prim.
e 18. sep.
f 18. sep.

proinde tot medij proportionales cadant inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cùm multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX hic constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum, & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continuè proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, qua tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.

I.

SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatã eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continuò ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

B, quidem & vnitatem, numerus A: At inter F, & vnitatem numerus E: a cadet quoque inter B, & F, vnus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot numerum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione

a10. oct.

tionē A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatum rationis A, ad E, & sic de cæteris.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continuè proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continuè proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K. & ex A, in K, fiat L; & eti A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremò ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erūt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 9. huius lib. Eadem q. ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; nec non & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiusdem, ex defin duplicata est ratio A, ad G. Quare cùm sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quod cum B, N, quàm F Q, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G,

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E,81. I,1.
D,54. Vnitas. H,2.
C,36. 1. G,4.
B,24. F,8.
A, 16.
N,576. K,256. Q,64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis E, ad A; quod tam B, N, O, quam A, K, L, sint ab Vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodem quoque modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F. Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, propterea quòd tam A, K, L, quàm F, Q, R, continuè proportionales sunt ab Vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F; ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, sunt continuè proportionales ab Vnitate ex scholio propos 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in Vnitatem, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est Vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multò generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. *Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.*

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, verò & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter

inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G. 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H: Atque adeò cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L: a cadet quoq; vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi. a 8. 8.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vltimitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, caduntq; tam inter A, & C, quàm inter B, & C, tres numeri continuè proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt. &c.

Ex hoc etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

THEOR. 9. PROPOS. 11. xj.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratũ, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipsum D, multiplicans fecit E,

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

a17.sep. A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. ex constructione: a erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione: & multiplicans seipsum,

b17.septim. b ex defin. quadrati, fecit B, quadratum: b erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continuè proportionalis cadit E. Quia verò, ex eo quod A, E, B, continuè proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cùm hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medij proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeò inter se sunt compositi. Similiter cùm sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cùm & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum verò E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

xj. THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continuè proportionales cadere:

dere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E: & D, seipsum multiplicans faciat F: At C, & D, se mutuò multiplicantes faciant G: Multiplicantes verò G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum & D, multiplicans fecit E, & G: *a* erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cùm D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F: *b* erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea q; E, G, F, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H: *c* erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cùm D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans verò ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; *d* erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B; *e* Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D: Atq; adeò inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam verò, ex eo quod A, H, I, B, continuè sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cùm sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

a 17. sept.
b 17. septim.
c 17. septim.
d 17. septim.
e 18. septim.

SCHOLIVM.

HIC quoq; manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immò & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atque adeò inter se compositi sunt.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

Similiter cùm sit A, ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, métietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suũ B: immò & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A, posteriorum verò triũm H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

xij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primùm positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoq; proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT continuè proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F, multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G, H, I, faciãt K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continuè esse proportionales. Multiplicantes enim A, & B, se mutuò faciant N; & B, C, se mutuò multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P. 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

R, 8. Simili modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, N, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continuè proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; *b* erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cùm C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea q; & E, O, F, continuè proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cùm D, N, E, in eadem ratione sint continuè proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeò D, E, F, continuè proportionales sunt.

a 17. *septim.*

b 17. *septim.*

DEIN-

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; ex-
runt ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem
ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad *B*, proportiona-
les. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerũt Q, & H; *a* erit quo- a 18. ſe-
que, vt A, ad *B*, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportiona- ptim.
les in ratione A, ad B. *S*imiliter, quia *B*, multiplicans E, O, F, fecit
H, R, *S*; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7. H, R, *S*, propor-
tionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem
modo cùm B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; *b* erit vt B, ad C, b 18. ſe-
hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H, R, S, I, proportio- ptim.
tionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cùm G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continuè ſunt proportionales.

NON diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continuè proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

IAM quoq; numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionem totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeris G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M.

A, 2,	B. 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continuè proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quàm B, E, H, L; & C, F, I, M, continuè ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continuè ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I, eſſe proportionales continuè in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At verò K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorũ; ſecundo verò loco,

procreatos, in triplicatu, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantùm tres numeri continuè proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quàm tres. Sint namq; numeri plures, quàm tres A, B, C, D, continuè proportionales, qui seipsos multiplicantes faciant E, F, G, H; postea verò multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M. & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, a ex demonstratis, proportionales sunt. Item F, G, H, cùm illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in seipsos: hi verò ex B, C, D, proportionalibus quoque in seipsos. Erunt E, F, G, H, continuè proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M, & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. F. 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

a 13. oct.

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B, b metietur quoque A, primus secundum E. Quare cùm sit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

b 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quòd A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cùm C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus

tus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, *a* metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

a 7. 8.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. XV.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; *b* metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

b 14. 8.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; *c* metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

c 14. 8.

THEOR. 15. PROPOS. 17. XV.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neq; latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D;

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

a 15. oct. a metietur quoq; A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus

b 15. oct. A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A.

c 14. & 15. oct. *c Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit: metietur latus D, la-

d 14. & 15. oct. *tus C. d Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur, Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.*

A, 36. B, 9.
C, 6. D, 3.

A, 64. B, 8.
C, 4. D, 2.

AT verò si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cu-

e 16. & 17. oct. *bum. e Igitur neque latus D, latus C, metietur.*

A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3.

Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

A, 125. B, 8.
C, 5. D, 2.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit

f 16. & 17. oct. *multiplex, non metietur D, latus latus C. f Igitur, nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A, & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B, sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt A, 12. G, 18. B, 27.
E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, C, 6. D, 2. E, 9, F, 3.
ad F. Et quia D, multiplicans C, & E; fecit A, & G, *a* erit A, ad G, vt C, ad E, hoc est, vt D, ad F. Similiter a 17. *sequia* E, multiplicans D, & E, fecit G, & B; *b* erit quoque G, ad B, vt *ptim.*
D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel b 17. *se-*
D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G. *ptim.*

QVIA verò, cum A, G, B, sint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum G, E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, idest, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit

A ad G,

A, ad G, & C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius verò illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam verò D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; *a* erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; *b* erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, *c* erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; *d* erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. *e* Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continuè ſunt proportionales in

a 17. *ſept.*
b 17. *ſeptim.*
c 17. *ſeptim.*
d 17. *ſeptim.*
e 18. *ſept.*

les in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continuè proportionales cadunt.

QVONIAM verò, cum A, M, N, B, ſint proportionales continuè; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos ſimiles ſolides A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

Ex ijs, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiam eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoq; C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem: quod ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur: (Cum enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L, metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K, metitur autem K, ipſum B, quod B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M: Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I. a Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, & quam E; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur verò & F, G, H, ipſum N; (Cum enim factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quod A, factus ſit ex I, in E; metetur etiam K, ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeo F, G, H, ipſum N, metientur.) Necnon & ipſum B, nimirum la-

a 11. pro mm.

A, 30. *M*, 60. *N*, 120. *B*, 240.
I, 6. *L*, 12. *K*, 24.
C, 2. *D*, 3. *E*, 5. *F*, 4. *G*, 6. *H*, 10.

A, 30. *M*, 60. *N*, 120. *B*, 240.
I, 6. *L*, 12. *K*, 24.
C, 2. *D*, 3. *E*, 5. *F*, 4. *G*, 6. *H*, 10.

rum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, & quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducatur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium; ſive primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſive denique ſecundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam, propoſitis quotus numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter ſe permutent. Qua quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

SINT primum tres numeri dati

A, 3. *B*, 5. *C*, 8.
D, 15. *E*, 120. *F*, 24. *G*, 40.

A, B, C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E. procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur.

a 15. def. fin. *Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E,* a *erit ut E, ad D, ita C, ad* ☉*nitatem: Sed ut C, ad* ☉*nitatem,* b *ita quoque eſt F, ad A; quod* b 15. def. fin. *A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A: Vt autem* c 15. def. fin. *D, ad B,* c *ita eſt A, ad* ☉*nitatem; propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, ut E, ad B, ita F, ad* ☉*nitatem:* d *atque ideirco numerus ex E, in* d 19. ſeptim. *☉nitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, producto ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.*

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; e *erit ut E, ad D, ita C, ad* ☉*nitatem: Sed ut C, ad* ☉*nitatem,* f *ita etiam eſt G, ad B, eo quod G, factus eſt ex B, in C. Igitur erit, ut E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A,* g *ita eſt B, ad* ☉*nitatem, propterea quod D, factus eſt ex A, in B. Igitur ex æquo erit, ut E, ad A, ita G, ad* ☉*nitatem;* h *ac proinde numerus factus ex E, in* ☉*nitatem, id eſt, ipſe-*

met nu-

met numerus E, aqualis erit numero genito ex A, in G, producto ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita ut prater primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersa producentes eundem semper numerum. Quoniam enim ut in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DEINDE quia ut in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

TERTIO quoniam, ut in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille sit aqualis proximè ostensus primo producto, erit & hic aqualis eidem, quod est tertium.

QVARTO quia, ut in tribus ostensum est, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

QVINTO quoniam, ut demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, &

in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille sit ostensus tertio loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem aqualis. Quod est quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextum.

SEPTIMO quia, vt in tribus ostendimus, idem numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in A; constat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proximè ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & ille, quod est septimum.

OCTAVO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est octauum.

NONO quia, vt demonstratum est in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A, producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, aqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est decimum.

A, 1. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod est vndecimum.

EODEM

EODEM argumentandi modo extendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerum ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C, *a* metientur D, & E, ipsos A, & C, æquè: metiantur per F. Similiter æquè metientur ipsos C, & B: metiantur per G. *b* Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: *c* Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B, *d* erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus, cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. *sept.*
b 9. *prop. num.*
c 9. *prop. num.*
d 17. *sept.*

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres, E, F, G,

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, me-
a 20. 6. dius cadit proportionalis F; *a* erunt E, & G, plani similes: sint
simil. ipsius E, latera H, I, ipsius vero G, latera illis proportionalia K, L.
b 21. *se-* Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, *b* æquè me-
ptim. tiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis, metiantur per M.
c 21 *sep.* Eodemque modo, *c* quia E, F, G, minimi æquè metiuntur

A,	24.	C,	72.	D,	216.
E,	1.	F,	3.	G,	9.
H,	1.	I,	1.	M,	24.

B, 648. E, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; *d* ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; &

A,	8.	C,	12.	D,	18.
E,	4.	F,	6.	G,	9.
H,	2.	I,	2.	M,	8.

B, 27. N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione
d 9. *pro* mutua suorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplica-
pos. tione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, mul-
e 18 *se-* tiplicantes F, faciunt C, & D, vt ostendimus; *e* erit C, ad D, vt M,
ptim. ad N: *f* Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quod
f 17 *sep.* N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoq; H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera, H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, & I, eius latera, licet impropriè, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodem prioris exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, eamque sine vlla exceptione demonstret.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxii

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; *a* erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324. a 20. 8. Euc.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiii

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continuè, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; *b* erunt A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125. b 21. 8. Euc.

SCHOLIVM.

HÆC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inveniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamvis non quibuscunque lateribus unius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus unius proportionalia sint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium unus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum unus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atq; omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, ut duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4 & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, imò omnino negare, posteriorem habere alia duo latera huic proportionalia, hoc est, inter se quoq; æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori propor-

tionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur aliæ latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione illa concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter utramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab unitate continuè proportionales, eritque conuertendo A, ad D, ut D, ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nimirum unus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, nimirum unus, qui sit E. Quoniam igitur unitas & E, C, numeri sunt continuè proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
uni-. tas.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, æquè, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus;

a 11. oct. *ex hypothesi; a cadet inter A, & D, quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia verò est ex æquo, ut A, ad C, ita D, ad F; & permutando, ut A, ad D, ita C, ad F; b cadet quoque inter C, & F, unus*

A, 36. B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
D, 9. E, 12. F, 16.
L, 64. K, 8. I, 4.

b 8. oct. *proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur*

c 7. oct. *C, ultimum; c metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita ut H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem*

d 11. oct. *multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. d Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ut C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.*

c 10. oct. *ALITER. c Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita ut sit D, ad*

sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, a erunt D, H, E, continuè proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius proportionalis H, b cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continuè proportionales; c idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

A, 36.	B, 48.	C, 64.		
H, 6.		I, 8.		
D, 3.	E, 12.	F, 4.	G, 16.	a 20. septim.

b 8. octau.

c 20. septim.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum tam inter numerum D, quam vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine aquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. à nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.	
F, 16.			H, 100.	
E, 4.		G, 10.		
vni-.		tas.		

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, aequè, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi; d cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex aquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; e cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, f metietur

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.	
K, 32.			M, 500.	
I, 16.			L, 250.	
E, 8.	F, 20.	G, 50.	H, 125.	
P, 1000.	O, 10.	N, 5.		

d 12. octau.

e 8. octau.

f 8. octau.

tietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. a *Itaque eum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.*

a 12. oct.

xxij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; *b* cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; *c* cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continuè proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & B, tertius, quadratus *d* Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

b 11. oct.
c 8. oct.
d 22. octaui.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, *e* essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, *f* esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & 0. quod est absurdum. *g* Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32, &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cum tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.

e 24. octaui.
f 24. oct.
g 11. oct.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim *h* caderet inter eos medius proportionalis. *i* Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum à nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

h 11. oct.
i 8. oct.

xxiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus nu-

bus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum, sitque A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D: a cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F: b cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continuè proportionales, & A, primus est cubus: c erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. oct. b 8. oct. c 23. oct.

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, d essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

d 25. octauj.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; e cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

e 18. oct.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. f *Quoniam enim inter quadratos C,*

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.

f 11. oct.

D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt
a 8. oct. *A.* 8. *B,* 18. *C, ad D, ita A, ad B;* a *cadet quoque medius pro-*
b 29. oct. *C,* 16. *D,* 36. *portionalis inter A, & B,* b *Quare A, & B, plani similes sunt.*

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

XXV. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,
c 19. oct. B, sunt solidi similes; c cadent inter eos duo medij proportionales, qui sunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18,	H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum
d 12. oct. *A,* 16. *B,* 54. *sit A, ad B, vt C, ad D;* d *cadant autem inter*
e 8. oct. *C,* 64. *D,* 216. *C, D, cubos duo medij proportionales;* e *cadent*
f 21. oct. *quoque inter A, B, duo medij.* f *Sunt ergo A, & B, solidi similes.*

EX his omnibus perspicuè infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse
g 18. oct. *similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani,* g *caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales. Nam*
h 8. oct. h *alias caderent quoq; duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in scholio prædicto traditum est;*

inter

inter quos certum est, non posse recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

SIMILITER nec duo quivis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cùm non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodò Vnitatem, & seipsum, quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cùm ex horum mutua multiplicatione producantur, qua constat non esse proportionalia. Quivis verò numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantùm habet duo Vnitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cùm ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; a cadet inter illos Vnus medius proportionalis, vel duo. Cùm ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cùm nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod absurdum est. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. a 21. & 19. oct.

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; b essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proximè ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes. quod absurdum est, & contra hypothesin. Verum hoc ostensiuè quoq; sic demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitq; A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cùm A, & B, ponantur plani similes, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint C, Vnitas, & numerus D, ipsi A, aqualis, quòd nullus alius numerus, prater C, Vnitatem, & numerum D, ipsi A, aqualem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F. c Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. c Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum, aqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit autem ex C, Vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. d Quare D, ipsum F, metietur: e Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F. f Igitur

A, 3. B, 48. C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

b 31. sept.
c 19. sept.
d 4. prop. 7.
e 4. prop. 7.
f 11. prop. 7.

tur & D, id est, A, illi aqualis, eundem B, metietur, quod est propositũ.

HINC perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorũ minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, nõ essent inter se primi, sed compositi, quod est cõtra hypothesin.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitq; A, minor primus. Dico A, ipsum C, metiri. Nam cùm A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, aqualis, quòd nullus alius numerus, praeter vnitatem, & numerum D, ipse A, aqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. a Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum aqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. b Quare D, ipsum G, metietur. c Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. d Igitur & D, hoc est, A, illi aqualis, eundem B, metietur, quod est propositum.

A, 3.	B, 24.
B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2. G, 6.	

a 19. sep.

b 4. prom.

c 4. prom.

d 11. prom.

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi, quod est contra hypothesin.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem: vel certè duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erunt illi ipsi per ea, quae tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter verò non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20.

e 26. oct. Si enim essent plani similes; e haberent proportionem, quam qua-

f 24. oct. dratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, f esset & 20. quadratus, quod est absurdum, ponitur enim non quadratus.

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter

g 27. oct. verò non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent so-

h 25. oct. lidi similes, g haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cùm igitur 27. cubus sit, h esset & 40. cubus. quod est absurdum: ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani ſimiles A, B, ſe mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, *a* erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cùm ſint plani ſimiles, *b* vnus medius cadit proportionalis. *c* Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt ſint continuè proportionales D, E, C. Itaq; cùm tres D, E, C, continuè ſint proportionales, ſitque primus D, quadratus, ex conſtructione; *d* erit quoq; C, tertius, quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

a 17. ſep.
b 8. oct.
c 8. oct.
d 22. oct.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

DVO numeri A, B, ſe mutuò multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; *e* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *f* At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. *g* Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; *h* Ac propterea

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

e 17. ſep.
f 11. oct.
g 8. oct.
h 20. oct.

pterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuò multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theorematu non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuò multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuò multiplicãtes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cùm enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; a *erit C, ex eis productus, quadratus.*

A, 4. *B*, 25. *C*, 100.

a 1. nomi.

II.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum; sit q. *A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cùm enim A, & B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum:* b *erunt A, & B, similes plani:* c *atque adeò inter eos vnus medius cadet proportionalis; videlicet D.* d *Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

A, 9. *D*, 12. *B*, 16. *C*, 144.

b 2. nomi.
c 18. oct.
d 22. oct.

III.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, non quadratum; sit q. *A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur quadratus est B, numerus.*

A, 4. *B*, 20. *C*, 80.

IV.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuò multi-

multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cùm producatur ex A, in B, sitq; A, quadratus, esset & B, ex theor. 1. huius scholij; quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim G, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: *a* metietur C, ipsum D, per C: *b* Metietur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata à C; Ac proinde *c* vt vnitas ad C, ita C, ad D: Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; *d* metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; *e* ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeò inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. *f* At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, seipsum multiplicans fecerit B; *g* metitur verò & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; *h* Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cùm inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; *i* cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cùm ergo quatuor numeri A, E, F, B; sint continuè proportionales, & A, primus sit cubus, *k* erit quoque E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus seipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. D, 4. E, 16. C, 2. F, 32. Vnitas. B, 64.

a 17. prænum. b 5. prænum. c 20. def. d 7. prænum. e 20. def. f 7. prænum. g 5. prænum. h 10. def. i 8. oct. k 23. oct.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; *l* eritque D, cubus. Quoniam verò A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, *m* erit vt A, ad B, ita D, ad C. *n* At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. *o* Igitur & inter

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

l 3. nonæ. m 17. septim. n 12. oct. o 8. oct.

e 3.oct. inter D, & C, duo medij proportionales cadent; a Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; b qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, e erit vt A, ad B, ita D, ad C; d At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent; f Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

b 3. nonæ. c 17. sep. d 12. oct. e 8. oct. f 22. oct.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

SCHOLIVM.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facilè demonstrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; g *& multiplicatus B, cubus erit, quod nõ ponitur.*

A, 8. B, 20. C, 160.

g 5. nonæ.

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, h *& factus cubus C, cubus erit. quod est contra hypothesin.*

A, 8. B, 17. C, 136.

h 4. nonæ.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cùm A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeò æqualis æqualiter æqualis sit, ve perspicuum est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; a erit

A, 8. B, 64. C, 512.

erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum. a 5. nona.

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco addunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: b *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* c *Quoniam verò est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* d *cadent quoq; inter A, & B, duo medij proportionales.* e *Atq; adeò existente B, cubo, & A, cubum erit. Verùm nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est.*

b 12. oct. c 17. sep. d 8. oct. e 23. oct.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cùm enim A, sit compositus, *f* metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, *g* multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cùm ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus, numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

f 13. def. g 9. prænum.

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2. E, 3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autē est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinq; intermittētes omnes.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum verò F, cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

rum M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metie-
a 5. pro- tur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: a Metitur
mum. autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, me-
b 9. pro- tietur; b Atq; adeò A, multiplicans A, ipsum B, producet. Qua-
mum. re B, quadratus est. Quia verò tres deinceps proportionales sunt
c 22. oct. B, C, D, & est B, quadratus; c erit & D, quadratus. Eadem ratio-
ne assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cùm D, sit
d 22. oct quadratus, d & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum in-
termittentes.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C, æquè metietur vni-
e 5. pro- tas numerum A, & numerus B, numerum C. e Metitur autem v-
mum. nitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, f at-
f 9. pro- que adeò B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Qua-
mum. re cùm A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans verò B, fa-
ciat C, vt est ostensum, erit C, cubus. Quia verò quatuor deinceps
g 23. oct. proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, g erit & F, cubus.
Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionali-
h 23. oct. bus F, G, H, I, cùm F, sit cubus, h & I, cubus erit, atq; omnes
semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proximè numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes verò qui proximè sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctauo, vigesimoquarto, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM

NAM primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate: Numeri denique tertij ordinis quinq; semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui verò post vnitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus vnitati quadra-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

tus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quòd enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, *a* iam demonstratum est. Quòd verò & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cùm tres *a* 8. nō.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

continuè proportionales sint A, B, C; sitque A, quadratus; *b* erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continuè proportionalibus C, D, E, cùm C, sit quadratus; *c* & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continuè proportionales. *b* 22. oct. *c* 22. oct.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quòd enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermitten-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

tes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, *d* iam est demonstratum. Quòd autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cùm sit vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: *e* Metitur autem vnitas numerum A, per ipsius summet A. Igitur & A, ipsum B, per seipsum metietur; *f* Atq; adeò cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit. *g* Quare B, cubus est. Quoniam verò quatuor continuè proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, *h* & D, cubus erit. Eadem ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cùm B, cubus sit: *i* & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt: Non secus demonstrabimus, omnes cubos *d* 8. nō. *e* 5. præ. nun. *f* 9. præ. nun. *g* 3. nō. *h* 23. oct. *i* 23. oct.

esse, si plures continuè proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicuè hoc ipsum ex demonstratu colligitur. Nam si proximus vnitatis sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua verò parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM totæ propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C, sunt q. A, B, quadrati; erit & C, quadratus,

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, sunt q. A, C. quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: At q. ita deinceps: cùm ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multi-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

a 3. noni. b 4. noni. c 4. noni.

plicans facit B; a erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt q. A, B, cubi; b erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio A, multiplicans C, facit D, sunt q. A, C, cubi; c erit quoq. D, cubus. At q. ita de cæteris, cùm ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.

X. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati nō sit quadratus, Dico nec alium vllum esse quadratū, præter tertium ab vnitate, & vnū intermittentes omnes, hoc est, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos alius est quadratus, sit quadratus E.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

a Cùm ergo & D, sit quadratus; sitq; vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo, vt E ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: b sed B, tertius ab vnitate est quadratus, c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse.

a 8. nouæ.
b 8. nouæ.
c 24. octa.

SED iam A, proximus vnitati nō sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. d Cùm ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quòd tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: e Sed C, est cubus, cùm sit quartus ab vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesin. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; g cùm & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubū C, ita C, ad A; existente C, cubo, h erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

d 8. nouæ.
e 8. nouæ.
f 25. octa.
g 8. nouæ.
h 25. octa.

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum; præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cùm aliquando tertius ab vnitate, aliquando verò quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post vnitatem, cubus quidem, non au-

tem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul, & quadratum; cubum quidem, a quod primo existente cubo, omnes cubi sint, b quadratum verò, quod tertius sit ab vnitate.

a 9. noni.

b 8. noni.

SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul, & quadratum; c Cubum quidem, quod quartus sit ab vnitate: quadratum verò, d quod primo existente quadrate, omnes sint quadrati.

c 8. noni.

d 9. noni.

SIT postremò A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cùm enim primo non existente

Vnitas. A, 1. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096. G, 16384.

e 10. noni.

f 10. noni.

quadrato, e nullus alius quadratus sit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, f nullus alius sit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodò septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul. Vt liquidò constat ei, qui rectè propositionem hanc & ocluum huius libri expenderit.

23. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunq; numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cùm enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) g æquè metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum

g 20 defin.

ſum G: a Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igi- a 5. pre-
tur & C, numerus numerum G, per D, metietur: Eadem ratione num.
metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c.
Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cùm ſit ex æquo vt A, ad
G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igi-
tur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fue-
rint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus à minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerũ, per quem minor maiorem metitur; propterea quòd eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, me-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

tietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter G, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate: Si verò minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à maiore diſtat, quantum minor ab vnitate, propterea quòd ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, b *produ-* b 9. pre-
citur ille, quem metitur. Ergo C, ſeipſum multiplicans gignet F, cùm num.
F, tantum abſit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xj.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; nõ metitur ipſum A: c erit E, cùm primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, c 31 ſep.

a 3. pra. nun. A, & E, inter se primi erunt. Metiatur E, ipsum D, per F, *a* atque adeò E, multiplicans F, faciat D. Quia verò & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A,

b 19. sep. primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. *b* Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cùm

c 23 sep. ergo A, & E, sint inter se primi; *c* ac proinde in sua proportione

d 21 sep. minimi; *d* metietur æquè A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E,

e 9. pra. nun. ipsum C, per G, *e* atq; adeò E, multiplicans G, faciat C. Quia verò & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B,

f 9. pra. nun. *f* atq; adeò A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium.

g 19. sep.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

g Erit igitur vt A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum.

h 23. sep. Quapropter cùm A, & E, sint inter se primi; *h* ac propterea in

i 21. sep. sua proportione minimi; *i* Metietur æquè A, ipsum G, & E, ipsum

k 6. pra. nun. B. Metiatur E, ipsum B, per H: *k* ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atq; idcirco A, seipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. appareret. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium,

l 20. def. & ex A, medio in seipsum, *l* Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cùm ergo E, & A, inter se

m 23. sep. ptim. primi sint; *m* ac proinde in sua proportione minimi; *n* æquè metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesin.

n 22. sep. ptim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metietur ergo E, ipsum A. Eodé argumento ostendemus quoscũq; alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoq; ipsum A; Eademq; erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico &

o 31. sep. E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; *o* erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicans facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat,

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

p 27 sep. ptim. *p* erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis

q 26. sep. ptim. propos. *q* erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præce-

r 26. sep. ptim. dentis propos. *r* erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesin. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur

tur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est, quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est album, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hîc est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoq; simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturq; se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim huius demonstrationis expendisset, vel certè, si expendit, eam in memoriam reuocasset, quandoquidem ipso longè prior Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus. a 12. nō.

CÆTERVM ex demonstratis perspicuum est, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. a *Cùm enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes;* b *quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris;* c *manifestum est, quod & ille omnes metiatur.* b 11. noni. c 11. prim.

xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui verò post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continuè proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; d metietur quoq; ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed com-

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 624.
E---- H---- G---- F----

d 12. nō. 33. sēp.

posiţus; e atque adeò eum aliquis numerus primus metie-

e 33. sēp.

tur, quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quàm A, metiatur E; cùm E, metiatur extremum D; a metietur quoq; ille alius primus eundem D; b atq; adeò & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quàm A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtiq; E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; c & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, meritur,) metietur D, per E, d Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam verò E, metitur D, per F, e metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum; f metietur & A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; g atque adeò eum aliquis numerus primus metietur. quē rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quàm A, metiatur F, cùm F, metiatur D, extremum; h metietur quoque ille alius primus eundem D; i atque adeò & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipsum F, metitur. Iam verò quoniam E, metitur D, per F; k fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; l Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & non primum, sed compositū, quem solus A, primus metiatur: quemadmodū id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimū.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E---H---G---F---

a 11 pro. b 12. noti. c 8 pro. d 11. noti. e 8. pro. f 12. noti. g 33 sep. h 11. pro. i 12. noti. k 9. pro. l 19. sept.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; m & vicissim aliquis ipsorum A, B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. n Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G,

m 8. pro. n 11. noti.

go G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; *a* metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C, *b* metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus, *c* ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum, *d* metietur quoque ille alius primus eundem C, *e* atque adeo & ipsum A, vnitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metietur. *f* Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. *g* Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H, diuersum esse ab A, quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

a 8. *prop. num.*
b 12. *num.*
c 33. *sep.*
d 11. *prop. num.*
e 12. *num.*
f 9. *prop. num.*
g 19. *sept.*

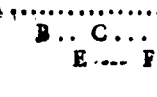
NAM si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A; *h* Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem, quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. *i* Iam vero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertium, & ex A, medio in se ipsum. *k* Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

h 8. *prop. num.*
i 9. *prop. num.*
k 20. *sept.*

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus numerus E, diuer-



sus à B, C, D, ipsum A, per numerum E. Quia, igitur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipsum F, faciet A. b Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A: Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 9 primus.

b 32. septimo.

SCHOLIVM.

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. c 2. oct. *Sit enim H, non primus, sed compositus: & sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E.*

A, 16.	B, 24.	C, 36.	D, 54.	E, 81.
M, 8.	N, 12.	O, 18.	P, 27.	
	I, 4.	K, 6.	L, 9.	
H ---	F, 2.	G, 3.		

Quoniam igitur, vt constat ex modo procreãdi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A, sit ex F, in M, metitur autem H, ipsum A, erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum. si verò ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio eiusdem propos. 32. lib. 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si verò ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

DEINDE metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habemus propositum. si verò ad N, quæ quidem fit ex F, in K, erit H, eodem

modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum, si verò ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si verò ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum. si verò ad L, cum L, gignatur ex G, in se, compositus quoq; erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRÆTEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si verò ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad H, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si verò ad L; cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad H; Si verò H, primus sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quadam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometricè ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclides in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quot-

quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri AB, & C, quorum AB, diuidatur in AD, DE, EB; Fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK, hoc est, toti numero GK, ex GH, HI, IK, composito. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; a metietur AB, ipsum F, per C, hoc est, AB, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione AD, ipsius GH; & DE, ipsius HI; & EB, ipsius IK, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, qua AB, ipsius F. Quia uero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus AB, totius GK, eadem pars est, qua AD, ipsius GH; erit quoque AB, totus totius GK, pars eadem, qua AB, ipsius F; b Ac proinde inter se æquales erunt F, & GK. Quod est propositum.

A ... D .. E . B C .. F ..... G ..... H .... I .. K

a 1. prom.

b 4. prom.

I I.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

NVMERVS enim AB, diuidatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi AB; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex AB, in AC, & in CB, quod est propositum.

D .....
A ....C .. B

IDEM demonstrabitur, si AB, in plures partes, quam in duas secetur, & ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex AB, in singulas partes AC, CD, DB.

E .....
A ....C .. D . B

I I I.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui

illi, qui ſub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis ſit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex AC, in AB; vel (quod idem eſt) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex AC, in CB, & ex D, hoc eſt, ex AC, in AC, quadrato ſcilicet ipſius AC. Quod eſt propoſitum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IV.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Eſt autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . C . . . . B

V.

SI numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, enim AB, ſecetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum ſub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel BC, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CE, per 4. theorema, aqualis sit quadratis partium CD, DB, ℞na cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero vero comprehenso semel sub CD, DB, ℞na cum quadrato ipsius DB, aqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, ℞t si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, ℞na cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius CB, aqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, ℞na cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB, hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, aqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, aqualis erit quadrato ipsius CD, ℞na cum numero qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, ℞na cum quadrato ipsius CD, aqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.

A ..... C ... D .. B

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim AB, secetur in partes aquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam ℞no, nimirum ex AD, in adiectum BD, ℞na cum quadrato dimidij numeri CB, aqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam ℞no hoc est, quadrato ipsius CD. Cum enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, aqualis sit quadratis partium CB, BD, ℞na cum numero bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratis partium CB, BD, ℞na cum numero sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BC, BD, hoc est, quadrato ipsius BD, aqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; fit ℞t si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato partis BD, ℞na cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, aqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, ℞na cum numero facto ex AD, in BD; hoc est, numerus factus ex AD, in BD, ℞na cum quadrato ipsius CB, aqualis sit quadrato ipsius CD. Quod est propositum.

A .... C .... B .. D

SI nume-

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vna cum numero,

A ..... C .... B

qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim

numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compo-

A .... C ... B ... D

siti ex AB, & BD, siue dicta parte CB, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum AB, BD, vna cum numero qui fit bis ex AB, in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum AB, CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC; fit, vt si pro quadratis numerorũ AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cũ quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

SI nume-

IX.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos esse quadratorum, qui ex AC, dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri AD, æqualis sit, ex

A..... C... D.. B

4. theorem. quadratis numerorum AC, CD, & ына cum numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, & ына cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, & ына cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC, & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, & ына cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero composito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, & utrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, composito ex CB, dimidio, & adiecto

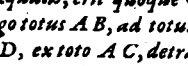
A .... C .... B .. D

BD. Cum enim quadratus ipsius AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, & ына cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, & ына cum

una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales sunt quadrati numerorum CB, CD; & quadrato ipsius CB, æqualis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, una cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc est, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

IAM verò theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, ut numerus aliquis in duas partes dimidatur, ita ut numerus planus, qui ex toto in unam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, ut ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita ut numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, æqualis est quadrato numeri medij AC; a erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque ut AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est ut AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum; b erit quoque ut totus AB, ad totum AC, vel ut detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, æqualis, ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est ut AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoq; CD, maior quàm AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit æqualis; erit etiam ut AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, ut totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum; c erit quoq; ut totus AC, ad totum CD, vel ut detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, æqualis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit ut CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, æqualis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit dimidi in infinitum. Non ergo numerus AB, dimidetur ita, ut planus numerus ex toto in unam partium factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

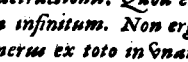


a 2c. sexti.

b 11. sexti.

c 11. sexti.

ALITER. Quoniam numerus AB, in C ita divisus est, ut is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, una





cum quadrato ipſius A C, quintuplum erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, vna cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, vna cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

VERVM hoc idem clarius demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.

xvj. THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirum A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem verò ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C. a Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; b erit & vterque D, E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compoſitus ex D, E, quam ipſe D, ad E, primus ſit; c erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam vno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E; d Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

a 24. ſeptim. b 30. ſeptim. c 26. ſeptim. d 27. ſeptim.

DEINDE quia, vt prius, e vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D, E; efficitur, (cum tam compoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D,) f numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt,

e 30. ſeptim. f 26. ſeptim.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

sunt, *a* atque adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi. a 27. *sept.*

POSTREMO quia, vt prius, *b* vterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est: atque adeo è contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E, *c* erit quoque qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus; *d* Ac proinde idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqual. est, per 4. theorem. antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt ostensum est. *e* Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostensum est; *f* erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

b 30. *sept.* *prim.*
c 26. *sept.* *prim.*
d 27. *sept.* *prim.*
e 20. *sept.* *prim.*
f 30. *sept.*

A, 9.		C, 16.	
	B, 12.		
D, 3.		E, 4.	

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continuè proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se, atque adeo eos aliquis numerus com-

A, 8.		C, 18.	
	B, 12.		
E----		F, 2.	
	G, 3.		
H----			

munis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continuè proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipsorum F, G, vel certè compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri.

A, 8. *B*, 12. *C*, 18. *D*, 27.
E - - - *F*, 2. *G*, 3. *H* - - - -

Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; a *metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia verò H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8.* b *metietur quoque H, medios B, C: ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus:* d *metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi.* e *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.*

a 11. pro num.
b 11. pro nun.
c 10. pro num.
d 12. pro num.
e 3. oct.

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D: f *metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia verò H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per* g *coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C,* g *metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum* h *B, metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8.* i *metietur etiam H, alterum ipsorum A, D.* k. *Igitur & reliquum. Sunt ergo, A, D, extremi inter se compositi.* l *Sed & primi inter se sunt Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.*

f 11. pro num.
g 11. pro nun.
h 12. pro nun.
i 11. pro nun.
k 12. pro nun.
l 3. oct.

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos esse ad B, primos: nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

xvij. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, *a* atque adeo in sua proportione minimi: *b* ipsi æquè metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, seipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A ..... a 23. *sextim.*
B ..... *sextim.*
C ..... b 21. *septim.*

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continuè proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi, *c* minimi in sua proportione.

d Igitur æquè metiêtur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; *e* atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, *f* metietur quoque ipsum D. Metitur verò & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

c 23. *septim.*
d 21. *septim.*
e 11. *prænum.*
f 11. *prænum.*

PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter

a 16. 8. se sunt, aut non. Si sunt inter se primi, per-
A, 4. B, 7. spicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C, per D. Dico ipsis A, B, inueniri
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. posse tertium proportionalem, imò ipsum D, esse tertium proportiona-
b 9. prop. lem. Cum enim A, metiatur C, per D, b fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui ex medio B, describitur;
c 20. sept. c Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur
d 12. sept. est, vt A, ad B, ita B, ad D; d erit
A, 6. B, 4. D ---- C 16. numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio
e 7. prop. in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; e metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

XX. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt
A, ad B. Multiplicans B,
A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216. ipsum C, faciat D. Aut igi-
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72. tur A, ipsum D, metitur, aut nō. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, imò ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum
f 9. prop. enim A, metiatur D, per E, f fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio continetur; g Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est
g 19. sept. E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

SED

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo

quatuor numeri A, B, C, E, A, 4. B, 6. C, 9. E ---- D, 54.
proportionales sunt, a erit A, 3. B, 4. C, 10. E ---- D, 40. a 19. sep-
numerus contentus sub ex- timi.
tremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; b metietur A, ipsum D, per E: b 7. pre
sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inue- num.
niri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 1/3. hoc modo. 3. 8. 21 1/3. Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus 21 1/3. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 1/3. per diuisorem 3. Vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se, c erunt 3. 8. 21 1/3. continuè proportionales. c 20. sep-
timi.

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertium genitus diuidatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 1/3. hoc modo 9. 6. 20. 13 1/3. Cum enim diuisis 120. per 9. fiat 13 1/3. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis 13 1/3. per diuisorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. d Igitur d 19. sep-
quatuor numeri 9. 6. 20. 13 1/3. proportionales sunt. *timi.*

EX his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumpto enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federi-

cus Commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi, Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicuè in his numeris non continuè proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9 sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis aliis infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT *trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex aquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi,* a *& ob id minimi.* b *Igitur metientur aquè ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At verò & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E ----

a 23. septim.

b 21. septim.

HÆC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Imò hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D,

B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quàm tribus A, B, C, cùm non magis hoc constet in illis, quàm in his. Quapropter cùm ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquidò constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione illa exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertius. Hoc verò non posse fieri, facilè demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintq; A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quem admodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atq; adeò vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E----

Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quem admodum B, ad C. Quare apertissimè falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM verò membrum perspicuè & apertè ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus. a 17. nonii.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxj.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros.

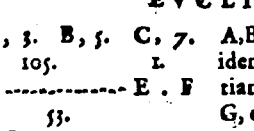
b Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. Sit primùm primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5. 30. 1

D---------- E . F

b 38. sept. prim.

SED iam non sit primus D F. *c* Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, c 33. sept. prim.



A,B,C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui vnus ipsorum A,B,C; metiantur autem A,B,C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractũ D E, a metietur quoque E F, reliquum, numerus vnitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorũ A,B,C. Eademq; via plures inuenientur quàm A,B,C,G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

a 11. pro xim.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

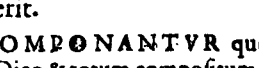
PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A,B,C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est, vel certè G, qui ipsum D F, metitur. Atq; eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinq; primis alium sextum inueniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

xxij. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B, & F, ipsius B C; & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper sit proportio dupla) b erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem A B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.



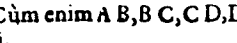
b 11. sep.

xxiij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COM.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorũ multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, D E, sint impares: differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. *a* Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. *b* Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

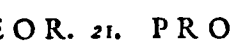


a 21. nona.
b 21. nona.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiij.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum, A D, compositum, imparem esse. Cùm enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. *c* Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. *d* Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cùm impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.



c 12. nona.
d 21. nona.

SCHOLIVM.

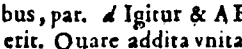
PAR I ratione, Impar numerus par numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cùm ex defin. Impar à pari differat vnitate. e *Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cùm à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.*

e 21. nona.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiv.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor.



Sit primùm dimidia pars. Cùm igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia, erit & A C, numerus par.

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidia

dias partes habent, ex definitione, sit D B, dimidia pars ipsius A B, & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cùm sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando vt A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, vt A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cùm bifariam diuidatur, (quòd D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A..... C..D...E..... B
A.....D... C.. E.. B

SCHOLIVM.

FACILIVS demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile, hoc modo. Si A C, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate A D, erit reliquus D C, par. a *Igitur compositus D B, par quoque erit: ac proinde, addita vnitate A D, totus A B, impar fiet, quod est absurdum, cùm par ponatur.*

a 23. noni.

xxvj. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; *b* erit & reliquus A D; par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....C . D....B

b 24. noni.

xxvij. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur; Reliquus par erit.

EX impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; *c* erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A....C.....D.B

c 24. noni.

xxviij. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX

EX impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC impari esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cùm detrahatur CB, par; *a* reliquus DC, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A . D . . . . C . . . . . B

a 24. nona.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cùm B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; *b* Atque adeò par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . . . .
C . . . . . .

b 21. nona.

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A.
Quare cùm tam A, quàm B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsi B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. *c* Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . .
C . . . . . .

c 23. nona.

COROL-

COROLLARIVM.

A . . . B . . .
C . . . . . HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

A . . . C . . . . METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar
B . . . . . sit; a erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cùm
a 29. hui. ponatur par. Est ergo C, par.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

A . . . C . . . . . METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; b erit
B . . . . . B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cùm impar ponatur. Est ergo C,
b 28. hui. impar.

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoq; demonstrabimus theorema 11. lib. 2 numeris non posse accommodari: id quod etiam in scholio propos. 14 huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraq; pars A C, C B, impar est; aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contrà, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraq; pars A C, C B, par.

A ------ G ---- B
D --- E --

c 22. hui. Sit primùm vtraq; pars A C, C B, impar, c ideoq; totum numerus A B, par. d Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui verò ex A C, in
d 28. hui. se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cùm ergo numerus ex A B, in C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.

DEINDE sit A C, impar; & C B, par, ideoq; ex scholio propos.
e 28. hui. 23. huius lib. totus A B, impar. e Quia ergo numerus ex A B, impare in partem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum.

TERTIO sit A C, par, & C B, impar; ideoq; ex scholio propos.
f 29. hui. 23. huius lib. totus A B, impar. f Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis. quod absurdum est.

QVAR-

QVARTO sit ℧*traq*ꝫ *pars AC, CB, par. Inuentis igitur, ex scholio propoſ. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione AC, ad CB;* a *erunt D, E, inter ſe primi: ac proinde ambo pares non erunt, ſed* ℧*terq*ꝫ *impar,* ℧*unus impar, & alter par. Et quia eſt,* ℧*t AC, ad CB, ita D, ad E;* b *erit conuertendo,* ℧*t CB, ad AC, ita E, ad D: Et componendo,* ℧*t AB, ad AC, ita totus DE, ad D: c Eſt autem,* ℧*t AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod numerus factus ex AB, in CB, aqualis ponatur quadrato medij AC. Igitur erit quoq*ꝫ ℧*totus DE, ad D, ita D, ad E,* d *ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, in E, aqualis erit quadrato ipſius D. Totus ergo numerus D, E, ſectus eſt in partes D, E, quarum* ℧*troque impar eſt,* ℧*una impar, & altera par; ita* ℧*t numerus factus ex toto DE, in partem E, aqualis ſit quadrato alterius partis D, quod fieri non poſſe, tam demonſtratum eſt in numero AB, quando* ℧*traq*ꝫ *pars AC, CB,* ℧*el impar eſt,* ℧*el* ℧*na impar, & altera par. Conſtat ergo propoſitum.*

a 24. ſe. *ptim.* b 26. ſe. *ptim.* c 20. ſep. d 20. ſe. *ptim.*

THEOR. 28. PROPOS. 30. xxxiij.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoq; ipſius B, metiri. Metiatur A, ipſum B, per C. Erit ergo ex ijs, quæ in antecedente propoſ. ex Campano demonſtrauimus, numerus C, par. Atq; adeò dimidiam partem habebit. Itaque cùm A, metiatur B, per C, *e* metietur quoque C, ipſum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam verò eſt vt C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B. Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, vt oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſius C, dimidij ipſius B, pars ab eodem A, denominata. *f* Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . . C . . . .
B . . . . . .

e 8. *prop. ſum.* f 40. *ſ. ptim.*

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiiij.

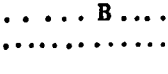
SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoq; primũ eſſe. Si enim A, C, nõ ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D, qui neceſſariò impar erit. Nã ſi ſit par, cùm metia-

A . . . . B . . . . .
C . . . . . D . . .

tur

a 28. nonu. tur imparem A; a erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar



parem C, metiens, (est enim b 30. nonu. C, par, cùm dimidium habeat B.) b metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solùm ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, c primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c. c 31. nonu.

THEOR. 30. PROPOS. 31. xxxv.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantum.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantùm. Quòd enim sint pariter pares, perspicuum est.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

Nam exposita vnitate, cùm A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. d Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cùm omnes sint pares, vtpote dupli à binario: metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione. d 11. nonu.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantùm, liquidò etiam constat. Cùm enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continuè proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; e nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cùm sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par est tantùm. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat. e 13. nonu.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint enim A, B, C, D, E, F, à bi-

à binario dupli, qui ex hîc demonſtratis omnes ſunt pariter pares tantùm. Dico nullum alium eſſe pariter parem tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò ſi ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantùm inueniri, nullo relicto. Si enim fieri poteſt, ſit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cuius pars dimidia ſit H. Erit igitur H, numerus par, (Nam ſi dicatur impar, cùm ſit ipſius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipſum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod eſt abſurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cuius rurſum dimidia pars ſit I. Erit igitur rurſum I, par numerus: (Nam ſi dicatur impar, cùm ſit ipſius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipſum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod eſt abſurdum: ponitur enim pariter par tantùm) atq; ita deinceps erit ſemper dimidia pars numerus par, donec ad Vnitatem deueniamus. Sit ergo iam ipſius I, dimidia pars Vnitas, ita vt ſit I, binarius. Igitur H, G, ſunt à binario I, dupli: Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipſorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non eſſe. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius pariter par eſt tantùm, præter eos, qui à binario ſunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I ---- H ---- G ----

THEOR. 31. PROPOS. 33. [xxxj.]

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar eſt tantùm.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum impatem. Dico A, eſſe pariter imparem tantùm. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt. Quòd autem idem A, ſit pariter impar tantùm, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſius A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantùm; ipſe erit quoq; pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. *a* Igitur ſit A, ex D, in E: ſed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium; *b* Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipſum B, metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo A, pariter par. Ergo

A . . . . . :
B . . . . . C . :
D ----- E ---

a 9. prænum.

b 19. ſept.

pariter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quòd enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparem. Quòd autem illi soli sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, prater duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium prater ipsos, esse pariter imparem tantùm; sed vel esse pariter parem tantùm, vel certè pariter parem & pariter imparem.

Impares	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantũ	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

xxxvij. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidiũ habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat

A . . . . . parem, metietur cum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Aliàs si per imparem metiretur, a cùm impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem; atque adeò vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

a 29. no

SCHO-

SCHOLIVM.

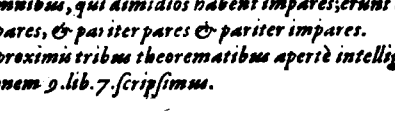
FACILE ex his inuenietur omnes numeros, qui & pariter pares sunt, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

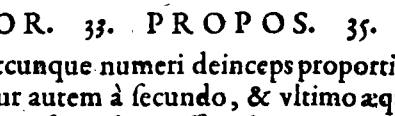
PORRO ex proximis tribus theorematibus apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxviii

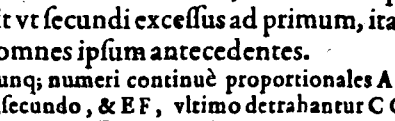
SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunq; numeri continuè proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo, A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G;





erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, &



H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; a Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. 5. ptim

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summa quotcunquè numerorum continuè proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & vltimo dematur, fiatq; vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus dimidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo appositò si primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3 secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo, si secundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186 fiet numerus 2186. qui si dimidiatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summa inuenta 1093, procreabitur summa omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

xxxix. ## THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quo- a 1 E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, vltimũ faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt nu-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ----- 262. H, 124. I, 248. F ------ 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ----- P ----

meri A, B, C, D, tot sumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I;
a 19. septim. erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; *a* Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in
b 7. prop. mun. E, tertium: Factus est autem F; ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; *b* ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius

F, ipſius I, duplus erit. Quare E,G,H,I,F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K,L, primo E, æquales, ſintq; reliqui exceſſus M,N. *a* Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul; Eſt autem M, æqualis ipſi E. (Cùm enim G, duplus ſit ipſius E, ablatuſq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E G,H,I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A,B,C,D, numeris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, ſimul. Quare cùm vnitas, & omnes

a 35. nono.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G-----62. H,124. I,248. F----496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O-----P-----

numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipſum F; (Cùm enim F, factus ſit ex E, in D; *b* metietur D, ipſum F; *c* atq; adeò eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, *d* qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cùm I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, *e* metientur quoque eundem F, numeri E,G,H, *f* qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cùm æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

b 7. pronum.
c 11. pronum.
d 11. pronum.
e 11 pronum.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; *g* atque adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium: *h* ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A,B,C,D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, *i* vltimum D, nullus alius, præter A,B,C, metitur: & O, ponitur nõ idem, qui aliquis ipſorum A,B,C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neq; igitur E, ipſum P, metietur. Cùm ergo E, primus ſit, *k* erunt E, & P, inter ſe primi; *l* ideoque in ſua proportione minimi: *m* Ac proinde æquè metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. *n* Nullus verò alius præter A,B,C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B,C,D, tot ab E, ſumantur dupli E,G,H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; *o* Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis

g 9. pronum.
h 19. ſeptim.
i 13. oct.
k 31. ſeptim.
l 23. ſept.
m 21. ſeptim.
n 23. oct.
o 19. ſeptim.

fuit ei, qui ex P, in Q. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H,
a 19. septim. a, atque adeò erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I, Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in duplà proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotas, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facilè ex subiecto exemplo percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 1. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat Quotientes D, E.
A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16. *Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet*

A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: a *erit* ℣t *B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod erat propositum.* a 19 *septim.*

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse ℣t *B, ad C, ita G, ad F. Et* ℣t *C, ad D, ita H, ad G: Et* ℣t *D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proximè demonstrato. Cùm enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G, erit* ℣t *B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, diuidentes A, faciant G, H: erit* ℣t *C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit* ℣t *D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod erat propositum.*

A, 48.
B, 3. *C*, 4. *D*, 8. *E*, 6.
F, 16. *G*, 12. *H*, 6. *I*, 3.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, ℣t *D, ad E, ita I, ad H: Et* ℣t *C, ad D, hoc est,* ℣t *D, ad E, ita H, ad G: Et* ℣t *B, ad C, hoc est,* ℣t *C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod erat propositum.*

A, 15.
B, 1 *C*, 2. *D*, 4. *E*, 8.
F, 15. *G*, $7\frac{1}{2}$. *H*, $3\frac{3}{4}$. *I*, $1\frac{7}{8}$.

IV.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitq; vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A,

A, 3.	B, 6.	C, 20.	*B, C, sigillatim, ita H, ad E F, G, sigillatim. Cum enim sit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, simul ad B, ita E, F, simul ad F: Vt autem B, ad C, ita est F, ad G. Igitur ex aquo, vt A, B, simul, ad C, ita erit E F, simul ad G: Et componendo, vt A, B, C, simul, hoc est, vt D, ad C, ita E, F, G, simul, hoc est, H, ad G.*
E, 6.	F, 12.	G, 40.	
D, 29.	H, 58.		

QVIA igitur est, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex aquo, vt D, ad B, ita H, ad F.

DENIQVE quia est, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex aquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod est propositum. Eademq; ratio est de pluribus.

V.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

NAM, vt in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summa priorum ad primum, quæ summa posteriorum ad primum: ac proinde vtriusque proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diuisione antecedentis termini per consequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, si vtraq; summa seorsum per primos numeros, quæque per suum, diuidatur. Eademque ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. diuisio fiat. Constat ergo propositum.

VI.

SI summa quotuis numerorum continuè proportionalium per eos sigillatim diuidatur; Et Quotientum summa per ipsos Quotientes; Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis semper ijdem primi Quotientes ordine conuerso.

SINT continuè proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorum summa E, per ipsos diuisa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum summa K, per eos diuisa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine conuerso, hoc est, F, & O, eosdem esse: Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandem continuam proportionem habent conuerso ordine, quam numeri A, B, C, D. Et quotientes L, M, N, O, conuerso ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc est, eandem eodem ordine, quam numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cum ex diuisione antecedentis termini per consequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuisione E, per A, qui ex diuisione K, per I. Cum ergo Quotientes sint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod est propositum.

A, 1.	*B*, 2.	*C*, 4.	*D*, 8.		
			E, 15.		
F, 15.	*G*, $7\frac{1}{2}$.	*H*, $3\frac{3}{4}$.	*I*, $1\frac{7}{8}$.		
			K, $28\frac{1}{8}$.		
L, $1\frac{7}{8}$.	*M*, $3\frac{3}{4}$.	*N*, $7\frac{1}{2}$.	*O*, 15.		

VII.

SI summa quotuis numerorum continuè proportionalium per eos sigillatim diuidatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, vel denique (si Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A, B, C, D, E, F, quorum summa G, per ipsos sigillatim diuisa faciat

Quotientes H, I, K, L, M, N,	*A*, 1.	*B*, 2.	*C*, 4.	*D*, 8.	*E*, 16.	*F*, 32.
quorum summa O. Dico			*G*, 63.			
	H, 63.	*I*, $31\frac{1}{2}$.	*K*, $15\frac{3}{4}$.	*L*, $7\frac{7}{8}$.	*M*, $3\frac{15}{16}$.	*N*, $1\frac{31}{32}$.
			O, $124\frac{1}{4}$.			

summa O, æqualem esse numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt continuè proportionales conuerso ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vt I, ad H. a Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes conuerso ordine, hoc est, summa O, diuisa per H, facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L. a 19. seu 1.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè pro-

portionales A, B, C, D, E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diuidatur faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum ſumma M. Dico ſummam M, aqualem eſſe numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in ſeipſum. Quod enim aqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex M, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde verò

A, 1. *B*, 2. *C*, 4. *D*, 8. *E*, 16. *F*, 31.
G, 31. *H*, 15 1/2. *I*, 7 3/4. K, 3 7/8. *L*, 1 1/31. *M*, 60 7/31.

220. ſeptim. *quia tres numeri H, I, K, continuè proportionales ſunt, a erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M, aqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur. quod eſt propoſitum.*

HINC fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius latus, ſiue radix, eſt medius terminus.

ITAQVE ſi inueniendi ſint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorum ſumma aqualis ſit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis aqualiter diſtant: accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim diuidatur; erunt Quotientes quaſiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum ſumma ſit numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumque ſumma per eos ſigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quaſiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atque mirabile ſanè eſt, poſſe reperiri quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma aqualis ſit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis aqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis; & denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſe ipſum multiplicato.

SIC etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma aqualis ſit numero producto ex vno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunque, eorumque ſummam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quaſitos, vt oſtenſum eſt: quia videlicet eorum ſumma aqualis eſt numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma aqualis ſit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5, eorumque ſumma 11. per vtrumque diuidatur. Nam Quotientes 1 5/6 & 2 1/5 ſunt numeri quaſiti. Habent enim

propor-

proportionem ſeſquiquintum datum, & tum eorum ſummam, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{5}$.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem, & numerator C, ſit Vnitas. Dico ita eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim Vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quod minutia A B, diuidatur in tot minutias minutia C B, æquales, quot Vnitates ſunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. a *Igitur eadem pars eſt Vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutia A B; ac proinde eſt, vt Vnitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum.*

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

a 29. de ſim.

QVONIAM verò minutia ſunt fractiones, ſiue particulæ vel Vnitatis, vel alterius cuiuſpiam numeri, (Neque enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant, eas reſpectu ſolius Vnitatis eſſe accipiendas; propterea quod falſo putant, earum demonſtrationes non poſſe omnes explicari in numeru integris, ſed ſolum in Vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſuis etiam numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarum demonſtrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes, quas afferimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. *&* $\frac{1}{11}$. *particulæ, verbi gratia, huius numeri integri* 44. *Et quia eius* $\frac{1}{11}$. *eſt* 4. *&* $\frac{6}{11}$. *ſunt* 24. *perſpicuum eſt, ita eſſe* 4. *ad* 24. *vt eſt numerator* 1. *ad numeratorem* 6. *Vel ita* 24. *ad* 4. *vt* 6. *ad* 1.

HANC porrò propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. *in Vniuerſum de quibuſcunque duabus minutiis eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat Vnitatem.*

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denominatorem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunque A, B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet: quippe qua tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat.

A, 3.	C, 1.	D, 3.
B, 5.	B, 5.	B, 5.

a 1. huius. a *Quoniam igitur est vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum, quod est propositum.*

A LITER. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota ipsius B, denominata, propterea quod tot minutia ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quotes vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, & ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem

A, 1.	C, 1.	
B, 5.	C, 30.	

b 20. de fin. *pars erit vnitas A, numeri B, qua minutia A B, integri C.* b *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod est propositum.*

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutia A B. c *Et quia est vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proximè demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod est propositum.*

A, 3.	D, 1.	C, 1.
B, 5.	B, 5.	C, 30.

c 1. huius.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{2}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

d 2. huius. *SIT qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam.* d *Quoniam enim est, vt A, ad B, nume-*

B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad suum integrum C, erit permutando, vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cum enim aquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, qua tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30 significat, qua quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IV.

DATÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibuslibet minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ AB, CB, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam AB. ad minutiam CB, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. a Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam b cum sit, vt C, ad B, ita minutia CB, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB,) erit ex aquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam CB, quod est propositum.

A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

a 2. huius.

b 2. huius.

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{6}{7}$ sunt 24. & $\frac{3}{7}$ sunt

& $\frac{3}{4}$. sunt 12. Vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, vt est F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, a *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B,* b *ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H;* c *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam C D, (Nam* d *cum sit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam C D. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D. quod est propositum.*

a 18. septim.
b 2. huius.
c 18. septim.
d 2. huius.

F, 10. A, 2. B, 3. H, 15. ⋈ G, 12. C, 4. D, 5.

F, A B. H. Integrum. G. C D.

SI duæ minutiæ $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutia ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT

SINT duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum A B, C D, vt est H, ad summam numerorum F, G. a *Quoniam enim est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H, (nam* b *vt minutia C D, ad integrum, ita est C, ad D.* c *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quod G, ipsum D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G, quod est propositum.*

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

A B, C D. Integrum. F, G, H.

a 5. huius. b 2. huius. c 18. septim.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *particulæ numeri 30. earum* $\frac{2}{3}$. *sunt 20. &* $\frac{4}{5}$. *eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.*

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; d *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E,* e *ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, vt C, ad B. quod est propositum.*

D, 105. E, 35. A, 5. A, 5. B, 7. C, 12.

d 17. septim. e 5. huius.

DVÆ minutiæ $\frac{\Sigma}{7}$. $\frac{\Sigma}{2}$ *sint particulæ numeri integri 42. earum* $\frac{\Sigma}{7}$. *sunt 30. &* $\frac{\Sigma}{2}$ *eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.*

VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. a *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.*

a 2. huius.

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. b *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

b 2. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem esse minutiam AB, quam CD. c *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AC, ad integrum, quam minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quam minutia CD, quod est propositum.*

c 2. huius.

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

VERVM sit iam minutia AB, maior, quam minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quam minutiæ CD, minoris ad idem integrum. d *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod est propositum.*

d 2. huius.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *integer numerus sit 24. cuius tam* $\frac{3}{4}$. *quam* $\frac{9}{12}$. *sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *At* $\frac{2}{3}$. *eiusdem numeri 24. sunt 16. Vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoque minutiam* $\frac{3}{4}$. *maiorem esse minutia* $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem nu-

tem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse.
Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: A, 6. C, 2. B, 9. D, 3.
ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum. a 8. huius.

SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. b *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.* b 8. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D, c *ac propterea maior erit minutia A B, quam C D. quod est propositum.* A, 6. C, 3. B, 9. D, 5. c 8. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quam C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. d *Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum.* d 8. huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$ $\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi videt minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At verò minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorem esse minutia $\frac{7}{9}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator eidem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; e *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* f *Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* g *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* h *Igitur minutia C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.*

E, 10. F, 9. A, 1. C, 3. B, 3. D, 5. G, 15.

e 18. sept. f 8. huius. g 18. septim. h 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. *reducendum ad minutiam cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, aqualis. Dico minutiam B C, vnitati A, aqualem esse.* a *Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia B C, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, aqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id est, vnitati, erit aqualis. quod est propositum.*

A, 1. B, 6. C, 6.

a 2. huius.

DEINDE sit integer numerus A, revocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, aqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia A D, tot vnitatibus aqualis, quotes vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, itu B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, b *ipsa inter se aquales erunt. Quare cum minutia A D, sit integro A, aqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoque minutia B C, eidem integro A, aqualis. quod est propositum.*

A, 7. D, 1. B, 42. C, 6.

b 8. huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: Vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam C B, A D, duplam esse minutia A B. Cum enim minutia A B, C B, eundem habeant denominatorem; c *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia C B, minutia A B, dupla erit. quod est propositum.*

A, 3. B, 8. C, 6. B. 8. A. 3. D, 4.

c 4. huius.

RVRSVS quia minutia A B, A D, eundem habent numeratorem; d *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia A D, minutia A B, dupla erit. quod est propositum.*

d 7. huius.

DEINDE dimidianda sit minutia A B. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A. Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam A C, D B, dimidium esse minutia A B. Cum enim minutia A B, A C, eundem habeant numeratorem; e *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad mi-*

A, 6. B, 11. A, 6. C, 22. D, 3. B, 11.

e 7. huius.

ad minutiam. Cum ergo B sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutia A B, dimidium. quod est propositum.

RVRSVS cum minutia A B, D B, habeant eundem denominatorem; a *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutia A B, dimidium. quod est propositum.* a 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, sive vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim vt sus H, ex C, in B. b *Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum est E:* c *Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quod A, B, ipsum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H.* b 2. huius. c 18. septim.

F, 6.	H, 9.			
A, 2.	C, 3.	E, 1.		d 2. huius.
B, 3.	D, 4.	E, 24.		
G, 12.	K, $\frac{1}{2}$.			e 17. septim.

Rursus d *quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrum E:* e *Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G. Erit quoque vt C D, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit data minutia A B, minutiæ C D; cum eius valorem respectu integri E,*

A B.	F.
C D.	H.
E.	G.

exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad
a 2. huius. integrum E. a Cum ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem suum integrum E; aequales erunt minutia simplices K, & F G: ac proinde cum minutia K, aequalis sit data minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia F G, aequalis data minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod est propositum.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

b 13. huius.

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

SIT primum A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F. b Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, respectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F. quod est propositum.

DEINDE sit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita vt C D, sit minutia minutiæ E F, & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, data minutia minutiarum aequalem esse. c Nam minutia G H, aequalis est minutiæ A B, minutiæ C D, respectu minutiæ E F, tanquam integri cuiusdam. d Item minutia I K, aequalis est minutiæ G H, (hoc est, minutiæ A B, minutiæ C D.) minutiæ E F, respectu integri, cuius E F, est minutia, & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis constituta, aequalis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

c 13. huius.

d 13. huius.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

DATIS

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducendæ sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum: denominatorem verò denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; *& L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per* K, *ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H,* a *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* b *ac proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit, F,* c *metietur C, ipsum F, per D:* d *Metietur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominatæ, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, suntq; numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* e *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum* K; *(quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus* K,) *constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus* K, *qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero* K, *denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per* K; *totiesq; nimirum sumptus, quoties vnitas est in* K, *numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.*

G, 24.		K, 8.	
A, 2.	F, 12.	C, 3.	
B, 3.		D, 4.	
H, 36.		L, 9.	
C, $\frac{1}{4}$.	F, $\frac{1}{2}$.	M, $\frac{1}{8}$.	

a 17. *septim.*
b 8. *huius.*
c 7. *prænun.*
d 5. *prænun.*
e 13. *huius.*

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutiam A B, C D, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quantum æqualis eſt numero F, facto ex C, ſecundo in B, tertium, a *erit vt A, primus ad C, ſecundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem.* b *Quare minutia A B, C D, æquales ſunt. VEL ſic.* c *Quoniam eſt vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod eſt propoſitum.*

a 19. ſeptim.
b 9. huius.
c 5. huius.

E, 24. F, 24.
A, 2. C, 8.
B, 3. D, 12.

SED ſint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum d *erit vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem.* e *Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quantum, qui ex C, ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL ſic.* f *Quoniam eſt, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales, quod eſt propoſitum.*

d 9. huius.
e 19. ſeptim.
f 5. huius.

DEINDE ſit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque A B, maiorem eſſe minutia C D. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignetur F, ex minore numero quam A, in D, minorum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quantum, & ex C, ſecundo in B, tertium, g *erit vt G, primus ad C, ſecundum, ita B, tertius ad D, quartum: Eſt autem maior proportio A, ad C, quam G, ad C; quod A, maior ſit quam G.* h *Igitur maior quoq; erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia A B, maior erit, quam minutia C D. VEL ſic.* i *Quoniam eſt, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, maior quam F; erit quoque minutia A B, maior quam minutia C D. Quod eſt propoſitum.*

g 19. ſeptim.
h 9. huius.
i 5. huius.

E, 24. F, 21.
G. 1 3/4 A, 2 C, 7
B, 3. D, 12.

VERVM

VERVM sit iam minutia AR, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB, quam minutia CD, a *erit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G.* b *Idem ergo numerus fiet ex G, prima in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quam ex G, in D; propterea quod A, maior est quam G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quam F, ex C, in B, genitus. VEL sic.* c *Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Est autem AB, minutia maior quam minutia CD, erit quoque E, maior quam F. quod est propositum.*

a 9. huius.
b 19. septim.
c 5. huius.

ATQVE hac est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiã ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, A, 11. C, ∞ *ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD,* B, 12. D, ∞ *minutia AB, sit æqualis.* d *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sunt que C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* e *sunt autem & minimi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.*

d 8. huius.
e 23. septim.

SI verò A, B, non sint inter se primi; f *sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* g *producentur A, B, ex C, in D, E.* h *Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E,* i *ac propterea minutia AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.*

f 2. septim.
g 9. prodim.
h 17. septim.
i 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum



C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, a fiet D, ex B, in E: Factus est autem
a 9. prænun. idem D, ex A, in C. b Igitur erit, ℣t A, primus ad B, secundum, ita
b 19. septim. E, tertius ad C, quartum; c ideoq; minutia A B, E C, æquales erunt,
c 8. huius. quod est propositum.

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia
d 8. huius. ergo minutia A B, E C, æquales sunt; d erit ℣t A, ad B, ita E, ad C. e Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B,
e 19. septim. secundo in E, tertium, ℣idelicet numerus D,
f 7 prænun. factus ex A, in C. f Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.



XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator verò maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator
g 8. huius. A, & denominator B. g Quoniam enim est, ℣t A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, ℣t numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad ℣nitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.



HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator verò, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerũ diuidentem, qui maior est. Verbi gratia.
h 19. huius fin. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. h Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita ℣t totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ A B, C B, eiusdem denominationis.

nationis Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, esse summam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutia eundem habent denominatorem; a erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam C B. b Vt autem C, ad D, ita quoque est minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex aquo erit, vt A C, simul ad D, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam D B. Cum ergo A, & C, simul aquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutia A B, C B, simul aquales minutia D B. quod est propositum.

A, 3	*C*, 4	*D*, 7.	
B, 10.	*B*, 10.	*B*, 10.	

a 4. huius.

b 4. huius.

DEINDE sint addenda duo minutia A B, C D, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam E F, esse summam ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam. c Quoniam enim est, vt integrum ad summã duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F: d Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, aqualis erit minutia E F, ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum.

A, 2	*C*, 3	*E*, 17.	
B, 3	*D*, 4	*F*, 12.	

c 6. huius.

d 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duo minutia eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, aquales, vt ex demonstratione propos 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarum A B, C D, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reducta sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM verò datis pluribus minutijs; addenda primùm erunt duo prima: deinde hac summa cum tertia coniungenda, atque hac summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutia seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutia huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. Vnitates, qua faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. colligitur est summa $1\frac{1}{2}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

IT A etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{2}{2}\frac{1}{7}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB detrahenda sit minor CB, sintq; primum ha minutia eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutia ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, reliquam esse post detractionem minutia CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex C, & D. Minutia ergo AB, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis propos. ostensum est. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB quod est propositum.

A, 7. C, 3. D, 4.
B, 10. B, 10. B, 10.

DEINDE minutia AB, CD, habeant diuersos denominatores, detrahendaq; sit minor CD, ex maiore AB. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat E, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, esse reliquam post detractionem minutia CD, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H: b vt autem A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque vt F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicans C, D, facit E, H, c erit vt C, ad D, ita E, ad H: d Vt autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque vt E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est vt E, primus ad H, secundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: e Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia GH, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul ad H, secundum, ita minutia CD, GH, tertius

A, 3 C, 2. G, 7.
B, 4. D, 5. H, 20.

a 17. septim.
b 2. huius.
c 17. septim.
d 2. huius.
e 2. huius.

tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul, ad H, ita est F, ipsis E, G, aequalis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrum. Cùm ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A E, ad integrum, ita minutia C D, G H, simul ad idem integrum: ac propterea aequales erunt minutia A B, & minutia C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod est propositum.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duæ minutiæ eiusdem denominationis minutijs datis æquales, & ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

IAM verò si dentur integra vnà cum minutijs, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quod si minutia detrahenda, maior sit quàm ea, à qua fieri debet subtractio, a reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquum erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunq; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15 & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. a11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{1}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutia huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{1}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. ultimum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, b *Eritq; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia verò C, multiplicans A F, facit E H;* c *erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F;*

H, 60. G, 40.

A, 2. C, 3. E, 8. b 5. huius.
B, 3. D, 5. F, 15.

c 17. sept.

erit

a 17. sep. A. G. E. F. B. H. a erit ut E, ad B, ita G, ad F. Ex aequalitate igitur perturbata, ut hic apparet, erit ut A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: b Et ut A, ad B, ita

b 2. huius. est minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque ut minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiae A B in minutiam C D. quod est propositum.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero unitas, ut fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositae minutiae per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiae propositae denominator; propterea quod unitas integro numero suppositae in denominatorem datae minutiae ducta eundem denominatorem datae minutiae non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$ *per* 5. *fient* $\frac{15}{4}$. *ut hic apparet,* $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{1}$. *Gignetur enim minutia* $\frac{15}{4}$.

c 11. huius. *SI vero integris minutiae adhaereant,* c *revocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhaerente, atque ex numeratore huius minutiae, & numeratore minutiae adhaerentis unus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint* $7\frac{2}{3}$. *per* $4\frac{1}{2}$. *fient ha duae minutiae multiplicandae,* $\frac{23}{3}$ $\frac{9}{2}$.

IAM ut multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, ut in additione, ac subtractione factum est, sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *minutiae huius numeri integri* 60. *ex quarum multiplicatione gignitur minutia* $\frac{8}{15}$ *Necesse est ergo, ut* $\frac{2}{3}$. *numeri* 60. *in* $\frac{4}{5}$. *eiusdem faciant numerum, qui constituat* $\frac{8}{15}$. *quadrati, qui ex* 60. *in se producitur: Id quod liquidò constat. Nam* $\frac{2}{3}$. *numeri* 60. *sunt* 40 *&* $\frac{4}{5}$. *eiusdem sunt* 48. *At ex* 40. *in* 48. *fit numerus* 1920. *qui efficit* $\frac{8}{15}$. *numeri* 3600. *hoc est quadrati ipsius* 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT dividenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita ut

A, 12.	C. 3.	E, 4.	*diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso*
B, 16.	D, 8,	F, 2.	*B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam E F, esse Quottentem diuisionis minutiae A B,*

A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; a *gignetur A, ex C, in E, & B, ex D, in F.* b *Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cùm sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. quod est propositum.*

A, 6.	*C*, 3.	*E*, 2.
B, 8.	*D*, 8.	*F*, 1.
A, 3.	*C*, 3.	*E*, 1.
B, 8.	*D*, 4.	*F*, 2.

a 9. pronum. b 21. huius.

D E I N D E numeri C, D, minutia C D, non metiantur numeros A, B, minutia A B. c *Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C D, minutiæ C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, Veluti proposit. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H, erit minutia G, H, Quotiens diuisionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.*

E, 24.	*A*, 2.	*K*, 12.	*C*, 3.	*G*, 8.
F, 36.	*B*, 3.		*D*, 4.	*H*, 9.
E, 90.	*A*, 6.	*K*, 15.	*C*, 3.	*G*, 30.
F, 135.	*B*, 9.		*D*, 5.	*H*, 27.

c 15. huius.

QVIA verò G, H, numeri minutiæ Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiusuis minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet, atq; in hoc apposito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeri A, B, metiuntur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiuntur per L, M: atque adeò tam

E, 48.	*A*, 8.	*K*, 6.	*C*, 2.	*G*, 4. *L*, 24.
F, 54.	*B*, 9.		*D*, 3.	*H*, 3. *M*, 18.

minutia GH, quam LM, Quotiens est minutia AB, per minutiam CD, diuisa.

IAM verò si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8 diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appositio prioris exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerū 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

8	1	16
1.	2.	1.
1	8	1
2.	1.	16.

QVOD si minutiæ adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis proposi diximus.

VERVM quia non facilè est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $2\frac{1}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, qua præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

3	7	21
4.	2.	8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{2}{7}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, dimissis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{1}{8}$. id est, minutiam $2\frac{1}{8}$. quæ proximè inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inferenda, sitq; primum sensus, addendam esse minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$ vnius septimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, &

	F, 24.			
A, 3.	C, 6.	G, 27.		
B, 4.	D, 7.	H, 28.		

rij, & composito numero G; supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam G H, æqualem esse minutiæ A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, addita ad minutiam C D. Quoniã enim A B, minutia vnius particulæ minutiæ C D, a *reducitur ad simplicem minutiã A H, cuius numerator idem est, qui A, productus* a 14. huius.
numerum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appositio exemplo apparet.

A, 3.	1	A, 3	
B, 4.	D, 7.	H, 28.	

Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem verò F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; b *erit vt C, ad D, ita F, ad H;* c *ac propterea minutiæ C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquã, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt initio propos. 29. ostensum est; hoc est, summam ex minutia A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, qua minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, qua ostensa est æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, simul. quod est propositum.* b 17. septim. c 8. huius.

IAM verò si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inferendæ, hoc est, si minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiã G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F,

P, 119.	M, 59.	K, 14.	
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoq; ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P: Atq; ita deinceps ducatur semper vltimus numerus conflatus in denominatorẽ proxi-

proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adiiciatur, donec nulla minutia superfit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, post hæc N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam vt in duabus minutijs ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, in minutiam G H, hoc est, æqualis est summa ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collecta. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, a facit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque; cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, b æqualis est minutiæ K L; c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm D, in K; L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cùm per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrabimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summa collecta ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K; producitur, denominator verò N; æqualis quoque erit eadem minutiæ M N, summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, d facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator verò idem numerus Q, ex B, in N, productus, e æqualis est minutiæ M N, f quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summa collecta ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator verò Q, vt initio propos. 20. monstratum est; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia A B, vnius

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. sep.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. sep.

Cuius particula minutia CD, cuius particula minutia EF, cuius particula minutia GH, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam GH, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, a reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, ut exemplum appositum demonstrat: b Minutia quoq; FH, æqualis est minutiæ CD; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (qua ex iis, qua ad initium propos. 20. ostendimus, æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH) & ex minutia AB; minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu. Quod est propositum.

E, 18. F, 24.

A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius.

A, 3 C, 6 E, 18
B, 4. D, 7. H, 28.

b 8. huius.

c 17. septimi.

QVOD si plures sint minutiæ inserendæ AB, CD, EF, GH, hoc est, minutia AB, minutia CD, minutia EF, minutia GH; & minutia CD, minutia EF, minutia GH; & minutia EF, minutia GH, addenda sint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, producto q; numero adderur numerus ex E, in G, procreatus, ut fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adiiciatur numerus ex C, E, G, factus, ut fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, ut fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus ultimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroq; procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum usq; locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui ultimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, ut

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

in priori sensu. Dico minutiam P Q, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, vt dictum est. Nam vt in duabus minutiis demonstratum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiarum E F, G H, id est, aequalis est summa collecta ex minutia E F, totius minutia G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutia E F, totius minutia G H, a *facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus;* b *aequalis est minutia K L;* c *quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K L, faciat numeros alterius huius minutia. Igitur cum minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, aequalis sit per ea, qua initio propos. 20. ostensa sunt, summa collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator vero est idem N; aequalis erit etiam eadem minutia M N, summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutia G H, & ex minutia C D, minutia C F, minutia G H. Rursus minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia G H,* d *facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, siue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem est idem Q, ex B, in N, procreatus,* e *aequalis est minutia M N;* f *quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutia. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum aequalis sit, ex iis, qua initio propos. 20. demonstratum sunt, summa collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem est Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q; aequalis quoque erit summa collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, minutia G H, & ex minutia C D, minutia E F, minutia G H, & ex minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia G H, quod est propositum. Eademque de pluribus est ratio.*

a 14. huius.

b 8. huius.

c 17. septimi.

d 14. huius.

e 8. huius.

f 17. septimi.

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4

B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L, 15.

DE PRO-

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in iis propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compositum proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse vere additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatave: Item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit verè totum quipiam, cuius partes sint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest; quod pars esset vel aqualis, vel maior toto. Nam cum hac compositio intelligenda sit, sive maior quantitas cum minore, sive minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. ostendimus, si positis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult. defin. 10. lib. 5. sed verè esset duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duab. proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. aqualibus, vt Euclid. interpretes putant, quis non videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorem esse proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem aqualem esse toti? Sic etiam, si, positis his tribus terminis non continuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt iidem auctores contendunt, esset quoq; pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5 pars toti foret aqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod cogunturomnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris vero 3. & 16.

Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportionem	24.	48.
24. ad 48 compositam esse ex proportionibus laterum, hoc est, ex proportione	12.	2. 3. 16.

12. ad 3 & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (si hac compositio est vera additio) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subduplæ 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. vere totum est, & eius partes componentes proportio quadruplæ 12. ad 3. & proportio suboctuplæ 2. ad 16. si alterutra harum ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſubocTupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quod ſi poſteriores numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. aqualis

24.	48.	*toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione aquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio*
12. 2.	12. 4.	

aqualitatis 12. ad 12. qua maior eſt quam totum, hoc eſt, quam proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totum non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. verè coacernatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, itа vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint aquales: ſi cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coacernatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, vt præditi auctores volunt, quamquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione triplæ, & quintuplæ confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſitæ eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in duplæ proportione minus eſſe, quã agens vt 6?

LIQVET ergo huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur poſitis tribus, quatuor aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius

propor-

proportionis, quam primi duo termini habent. Hac autem planius percipientur ex iis, quæ iam iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, minorum additio, subtractio, multiplicatio, ac divisio fieri debent per proportionum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, eiusmodi illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifestè colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue per proportionum denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coacervabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, suppositis primis vnitatibus cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos data proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summam colligantur. Prioris enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posterioris autem 256. ad 32. quarum vtraq; octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadripartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi primi sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$ reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.

3	5	12	40
1	5	4	8
8		256	
1		32	
18	3	54	6
7	2	21	4
57		342	
14		84	

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliqua fient proportiones quintupla, & dupla superquadripartiens septimas, vt hic perspicuum est.

8 × 3 / 1 × 1	256 × 12 / 32 × 4
5 / 1.	40 / 128.
57 × 3 / 14 × 2.	342 × 6 / 84 × 4
72 / 28	864 / 336

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est per proportionem duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur que ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3	2	6	12	10	120	3	8	24
1	1	1	4	5.	20.	2	5.	10.

9	16	144	6	4	480	24	2	48
6	10	60	20	12.	240	10	3.	30.

144	6.	864	1	6	6	1	6	6
60	9.	540	1	3.	3.	1	1	1

QVARTO & vltimo si proportio sextupla dividenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si divisoris termini permutentur, vt in divisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis.

IAM vero multiplicationem proportionum à nobis prascriptam, quam auctores additionem falso nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeo compositionem illam Euclidis vere esse multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, sive æquales, sive inæquales; ducatur A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex consequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, qua ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionib. duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C,

A,	6.	C,	12.		
B,	2.	D,	4.		
E,	72.	F,	8.		
	G,	24.			

A,	3	C,	6		
B,	2.	D,	5.		
E,	18.	F,	10.		
	G,	12.			

B, in C, fiunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F, b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex definitione Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum ha eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

a 18 septimi.

b 17. septimi.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam iidem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producetur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, me minus ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit?

A, 9.	*C*, 3.		*A*, 4.	*C*, 6.	
B, 1.	*D*, 1.		*B*, 2.	*D*, 3.	
E, 9.	*F*, 3.		*E*, 8.	*F*, 12.	
	G, 27.			*G*, 24.	

c 1. sept.

d 17. septimi.

Atque hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletino conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

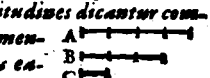
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.



BSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptum esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solida, tum plana, neque perfectè intelligi possunt, neque cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes nervos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planum reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes rectè intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Imò contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest,

abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quàm qui illarum omnino sit ignarus, propterea quòd ille demonstrationes ad vsum potest revocare, hic verò nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, qua in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cùm enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potiùs effusuri, quàm lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laborauimus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrorum, ac multiplicationē, qua sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quòd qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per seipsos, quando volunt, præsertim cùm iam hoc ipsum non multò antè à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accuratè.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit: declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura, C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas linea tam vnius palmi, quàm dimidiati palmi, quàm tertia pars vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidáue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt pro-

positione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurima alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarũ multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTÆ lineæ potentia commensurabiles sunt, cùm quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quæ nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illa, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam verò longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, alia sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; alia verò ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Linea ergo illa longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusque linea quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cùm huiusmodi lineas vna communis mensura metiatur, vt dictum est: At verò quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earũ quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine quàm potentia, hanc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt la-

Vt linea longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita & vt nulla linea dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint, quoniam quadratum ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, & in subiecta figura apparet: sicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F,



ita quoq; quadratum A G, quadrata C H, E I, metitur: Non autem, vt omnes linea potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multa enim linea sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quatamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes linea potentia incommensurabiles; sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes linea longitudine incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles potentia, cùm multa linea reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cùm tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias verò potentia solùm. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quadam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quadam verò potentia tantùm. Item quadam illi incommensurabiles longitudine tantùm, quadam verò longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur & alijs in locis. Non enim vult Euclides ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam eius verba hoc sonare videantur) hac ita se habere: sed solùm indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantùm, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa propositæ, ratione cuius alia commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητή; Latinis verò Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, alia verò cum illa comparata non semper nota sunt, quamuis singula seorsum sumpta existant certa quoque, ac nota; cùm qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

ET

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, Rationales.

DOCET lineas alias illi, qua Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunq; appellari quoq; Rationales, non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparata reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 10. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 10. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cùm potentia sit commensurabilis linea Rationali; (est enim tam numerus 10. quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM antecedenti defin. Euclides lineas illas, qua longitudine & potentia, vel qua potentia tantùm sunt commensurabiles proposita recta Rationali, appellauit Rationales; liquidò constat, eum hic eas dicere Irrationales, qua proposita recta Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantùm. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 10. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 10. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cùm non sit longitudine & potentia, sed longitudine tantùm Rationali linea proposita incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, qua certa penitus ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius alia superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem Rationalia.

OMNES plana superficies quadrato Rationalis linea proposita commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illud, sed quia cum eo collata reperiuntur ei vel commensurabiles, vel

Sed incommensurabiles: quemadmodum etiam linea, quæ Rationali linea quomodocunque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM verò lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia, quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac linea, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dicta.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Itaque si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si verò non fuerint quadrata, sed alia quacunq; figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum suprà ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cùm ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabitur q; in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras hac voces: longitudine & potentia, atque potentia tantùm: apponere ferè semper vocibus istis: commensurabiles ac incommensurabiles: *Vix autem, & rarissimè his*: Rationales, & Irrationales: *Rectè enim dicuntur lineæ commensurabiles longitu-*

dine

dine & potentia, vel potentia tantùm; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantùm: Minùs verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantùm, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantùm. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt variè, & obscurè in hoc 10. lib de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq;, nec non Rationalibus, Irrationalibusq; sint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cùm maior infinita non sit, minor verò infinitè possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONUNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cùm sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quòd frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quòd ad verbum huc possint transferri, mutato solùm voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

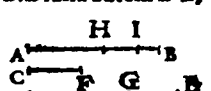
CÆTE-

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, & ad propos. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, & ut docuimus ad initium primi libri; curauimus, & ut duplex numerus in margine è regione propositorum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si vnus tantùm numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

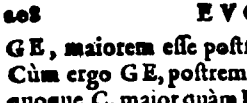
THEOR. 1. PROPOS. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITÆ sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quàm dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quàm C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit quàm AB, ita vt DE, sit multiplex ipsius C, proximè maior quàm AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quàm dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quàm dimidium HI; atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quàm AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidiũ, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, verò maius quàm dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cùm enim DE, maior sit quàm AB; si ex DE, dimidium auferretur, nec nõ & ex AB, dimidium, esset quoq; reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quàm dimidiũ, vel certè dimidium, & ex AB, maius quàm dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturque ex FE; dimidium FG, vel certè minus quàm dimidium, si FE, maior sit quàm duplex ipsius C; at ex HB, maius quàm dimidium HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, ma-

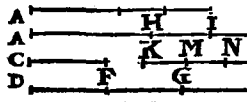


GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cùm ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quàm IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cùm ex maiori DE, ablatum sit DB, minus quàm dimidium, vel certè dimidiũ; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam verò AH, maior est quàm HB, vel certè illi æqualis sit, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quàm IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quàm KM. Rursus quia HI, maior est quàm IB, vel certè illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quàm MN, vel illi æqualis; atque adeò tota AI, maior, quàm tota KN.



Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quàm tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quàm AB. Multò ergo maior erit DE, quàm KL. Quare cùm sit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quàm multiplex est DE, ipsius C,) a erit quoque C, maior quàm IB. Ac proinde relicta est IB, minor quàm C. Quod erat demonstrandũ.

a 14. quinti.

SCHOLIVM.

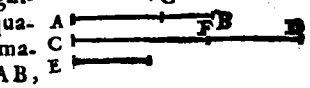
LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cùm de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

ij. ## THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVA-

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi A B, vel minor. Detracta aut F A B, ex C D, quoties potest, relinquat F D, se minorem, ita vt A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minorem G B, ita vt F D, metiatur ipsam A G; atque hoc semper fiat. *a* Relinquetur ergo tandem ex C D, vel A B, magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm A B, ablata ex C D, relinquat F D, se minorem, erit C F, ablata maior, quàm dimidia ipsius C D; aliàs si esset dimidia, vel minor quàm dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quàm dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cùm semper auferatur maius, quàm dimidium, *b* relinquetur tandem magnitudo quædam minor quàm E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur C F; *c* metietur quoq; E, ipsam C F: Metitur autem E, & totam C D. *d* Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G; *e* quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: *f* ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendũ.



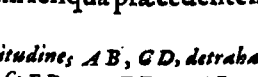
a 1. *decim.*
b 1. *decim.*
c 2. *prop. num.*
d 3. *prop. num.*
e 2. *prop. num.*
f 3. *prop. num.*

SCHOLIVM.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturque minor A B, ex C D, & reliqua sit E D, Item E D, ex A B, auferatur, relinquatur que F B, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquã reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D;



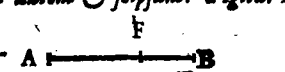
& E D, metitur A F; g *metietur quoque F B, ipsam A F; Metitur*

g 2. *prop. num.*

autem

a 1. prænun. b 2. prænun. c 1. prænun.

autem & seipsam. a Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipsam C E. b Igitur & F B, ipsam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipsam E D; c Igitur & F B, totam C D, metietur. Ostensa est autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, vtramq; A B, E D, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim A B, C D, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliquæ præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.



SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

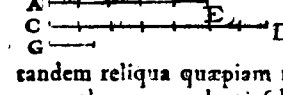
NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

ITAQVE facilè ex his dignoscemus, an duæ quælibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramq; magnitudinem propositam, vt constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, ostensum est, eandem reliquam F B, metiri vtramq; magnitudinem A B, C D. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximã earum communem mensuram inuenire.

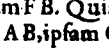
DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint A B, C D, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam A B, C D, commensurabiles sunt, fit vt si minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties potest, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractione, eandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis schol j Metiatur iam F B, reliqua præcedentem E D. Dico F B, esse maximam mensuram communem magnitudinem A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita osten-



ostendemus. Quoniã F B, metitur E D; & E D, metitur A F; *a* metietur quoq; F B, ipsam A F: At metitur F B, & seipsam. *b* Igitur F B, totam A B, metietur; *c* atq; adeò & ipsam C E, quam A B, metitur. Cùm ergo & ipsam E D, metiatur; *d* metietur quoq; F B, totam C D, Metitur ergo F B, vtramque A B, C D. Quare vtriusq; A B, C D, communis mensura est F B. *a* 2. prop. num. *b* 1. prop. num. *c* 2. prop. num.

QVOD autem F B, sit maxima earum communis mensura, dicta probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quàm F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarũ communis mensura, maior quàm F B. Quia igitur G, metitur vtramq; A B, C D; metitur autem & A B, ipsam C E, *e* metietur quoque G, ipsam C E: At metitur quoq; totam C D, *f* Igitur G, reliquam quoq; E D, metietur: Metitur autem E D, ipsam A F. *g* Ergo & G, ipsam A F, metietur. Quare cùm G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquã F B, maior minorẽ. *h* Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm F B, communis mensura est ipsarum A B, C D, Quare F B, maxima earum communis mensura est. *d* 1. prop. num. *e* 2. prop. num. *f* 3. prop. num. *g* 2. prop. num. *h* 3. prop. num.

QVOD si minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipsa A B, ambarũ maxima mensura communis: cùm & seipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.



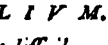
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

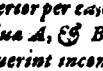
ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoq; maximam mensuram F B. Eademq; est ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

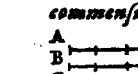
EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quòd nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.



SI verò A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura innomenta D; quæ si metiatur quoq; magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensuram D.



QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sint incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earũ maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinũ A, & B, per coroll. huius propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesin.



SI verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles. a *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* b *metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

a 3. dec.

b 12. prop. num.

SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quàm tres, sint commensurabiles, necne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

iiij. PROBL. 2. PROPOS. 4.

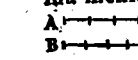
TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensurã communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. *c* Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximã esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quàm D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem, quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. *d* Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quòd enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; *e* metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.

c 3. dec.

d 3. dec.

e 2. prop. num.



QVOD

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quàm E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensurã communem.

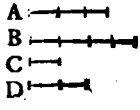
INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locum q; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua verò omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

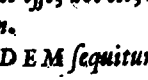
SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perspicuum est, cùm proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, compo-



nunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.



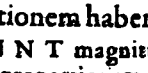
SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, standum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cùm non fatile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantùm est in quantitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cùm omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certè demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atq; numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.



a 3. *dec.*

SCHO-

SCHOLIVM.

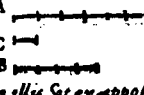
CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinũ commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, & rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum. Ha enim ſola communem recipiunt menſuram, atque adeò in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantùm commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem quam numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atque idcirco menſuram habent communem, ipſiſq; demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cùm ſint, communis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porrò eiuſdem huius theorematis liquidò conſtat, commenſurabilium magnitudinũ proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos & eas æquè, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam & demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

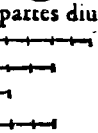
QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quamcunque communem earum menſuram, nihilominùs hoc theorema demonſtrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniãtur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, & ex appoſita figura apparet. Quoniam verò in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omniũ eandem cum ipſis proportionem habentium; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.



THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

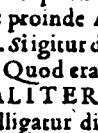
HABEANT duæ magnitudines A,B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinē quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, *a* ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsum F, metiatur, metietur quoque eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur: *b* Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. *Si* igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.



a 9. quinti.

b 1. def.

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æquè metiantur; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, *c* commensurabiles sunt. Quod est propositum.



c 1. def.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita

ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D. *a* Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C, ad D, sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.



a 13. *sexti.*

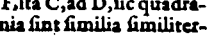
SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. 9.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum: *b* erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.



b 6. *decimi.*

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, sive longitudine & potentia, sive longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines. 0.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse.

a 5. decimi. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles; a erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

A
B

SCHOLIVM.

QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, & ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, & manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, & in demonstratione theorematis assumitur; imò nullo modo talem proportionem habere possunt, & in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non: sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.

A 49.
B 42.
C 36.
D
E
F

IDEM *sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco du-*

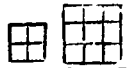
plica-

plicata, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ A B, C D, longitudine ſunt commenſurabiles; *a* erit A B, ad C D, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt A B, ad C D, vt E, numerus ad numerum F: *b* habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: *c* Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.



a 5. *decimi.*

b 20. *ſexti.*

c 11. *octa.*

ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectangulum B D, ſub rectis A B, C D. Et E, F, ſe mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdem propoſ. Quoniam igitur eſt



AB, ad

a 1. *sex.* AB, ad CD, vt E, ad F: *a* Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum, ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad

b 1. *sex.* F. *b* Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratū ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.



SIT secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine commensurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex BD,

c 20. *sexti.* vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: *c* Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem

d 11. *oct.* duplicatam lateris AB, ad latus CD. *d* Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ AB, CD,

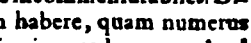
e 6. *decimi.* proportionem habeant, quam numeri E, F, *e* ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

f 1. *sex.* ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. *f* Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rursum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt supra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD. Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt supra ostendimus; ponitur que quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc est, vt

g 6. *decimi.* E, ad F; *g* ideoq; AB, CD, rectæ proportionem habentes, quā numeri E, F, cōmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositū.

SINT

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.



QVARTO, as postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod est absurdum, ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: *a* ipsa commensurabilia erunt; *b* Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

a 6. *decim.*
b 3. *def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commensurabiles sunt, *d* cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ex lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.

c 3. *def.*
d 6. *decimi.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse,

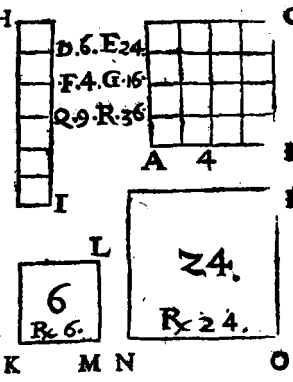
les esse, solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum
a 4. de fin. quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a potentia quoque incommensurabiles sunt, b cum earum quadrata incommensurabilia sint.
b 8. decimi. POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali propositæ comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ; (est enim recta AB, 2, & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde è contrario, quadratæ inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum linea, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadratæ in demonstratione descriptæ; (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadratæ illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis *AB*, expressa numero 4. cuius quadratum *AC*, continebit mensuras quadratas 16. Sint quæque numeri *D*, *E*, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem,
c 26. octaui. c vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus *F*, ad quadratum numerum *G*, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur

tuatur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati A C: quot numerum unitates in D, numero continentur; atque ipsi H I, quadratum aequale constituatur K L, cuius latus K M. Postremo per ea, quae in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum rectae K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratum F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratum numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem; continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, quarum 16. continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadratum K L, aequale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum N P, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt Rad. a 14. 8. cundi.



6. & Rad. 24. quae numeris exprimi nequeunt, cum 6 & 24. non sint numeri quadrati, eruntque linea Rationali A B, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. b *Quare longitudine commensurabiles sunt rectae K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate linea etiam illa longitudine commensurabiles, quae numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si consideretur eadem linea K M, N O, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineae Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si K M, diuidatur in duas partes aequales, diuidetur N O, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur haec in 6. &c. At verò hae partes nullo modo aequales sunt partibus lineae Rationalis A B, imò illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.* b 6. decimi.

RVRSVS,

RVRSVS, quia quadrata K L, N P, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas A C, quadratum Rationalis linea A B, resolvitur, quam vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam K L, æquale est sex huiusmodi mensuris, & N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata K L, N P, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, qua pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato linea Rationalis proposita. Quod si eadem quadrata K L, N P, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati A C, ex Rationali linea A B, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam si recta K M, dividatur in duas partes, & N O, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum K L, quatuor mensuras quadratas, & quadratum N P, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem linea secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensura nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum A C, Rationalis linea A B, resolvitur.

IDEM dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumq; lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali linea incommensurabiles sint, vt sit sensus: Quadrata quæ describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles linea Rationali proposita, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis linea conferantur, sæpenumero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sive hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, sive non, si comparentur cum quadrato

Rationa-

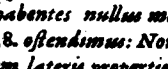
Rationalis linea, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi linea Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, qua quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis; vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod examen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. xβ x.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt, *a* habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerū, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. *b* Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt.



a 5. decimi.

b 6. decimi.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, *c* non habebit A. ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. *d* Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c 7. decimi.

d 8. decimi.

SCHOLIVM.

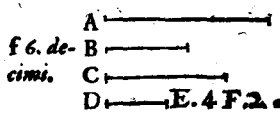
QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia

quarta longitudine commensurabilis, & ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, & in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secunda fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est a 3. def. *potentia ipsi B, a erunt earum quadrata commensurabilia, b ac propterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum.* b 5. decimi. *c Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex* c 22. sexti. *C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterque descriptæ) Igitur & quadratum ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum.* d 6. decimi. *d Quare commensurabilia erunt; e Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum* e 3. def. *sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.*

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea ipsa potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliqua duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, qua numeri ad numerum; f atq; adeo commensurabiles erunt. Si verò lineæ longitudine incommensurabiles sint, sive potentia commensurabiles existant, sive non; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt



f 6. decimi.

erunt, & constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, qua numeri ad numerum. a *Quare incommensurabiles* a 8. dec. *erunt. Quod est propositum.*

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores verò duæ, linea, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sint, b *habebunt ipsa proportionem, quam* b 5. de- *numerus ad numerum. Igitur & linea eandem cum ipsis ratiopem cimi. habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si verò plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque linea eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum.*

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sume-

mus quotcunq; numeros primos, A,3. B,5. C,7. D,11. E,13. *per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.*

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad

quadratum numerum, non rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpenumero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. *&* 48. *sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri* 4. *&* 16. *Itemque prior numerus latera habeat* 3. *&* 4. *proportionalia lateribus posteriori* 6. *&* 8. *vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta* 2. *&* 6. *non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis,* 3. *&* 16. *Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius, qua de re plura scripsimus in defin.* 21. *lib.* 7. *& in scholio propos.* 23. *lib.* 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

x. xj.

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 8. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerū quadratum.

A B, 10.
E
D C, 6.
F

Igitur

Igitur *a* rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, *b* ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt. a 9. dec. b 6. decimi.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. *c* Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum: *d* erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum. c 13. sexti. d 10. decimi.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab eam commensurata cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. eum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CÆTERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod recta A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim recta D, E, A, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A. Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. c *Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia. atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*

A ——— B, 10.
E
D ——— G, 6.

c 10. decimi.

IN codicibus vulgatis proponitur hæc undecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decimo demonstretur. Vt ex dictis apparet.

xij. viij. THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVÆ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, *a* habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, *b* sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, *c* inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

a 5. dec.

b 4. oct.

A D, 10. E, 8.
C F, 2. G, 3.
B H, 5. I, 4. K, 6.

c 6. dec.

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia

d 5. dec. *commensurabiles, d erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadratu ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad*

e 4. oct. *G. e Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad nu-*

f 6. dec. *merum K. f Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt, atque*

atque adeo linea A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia verò tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod erat propositum.

A ——————
C ——————
B ——————

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis sue longitudine, & potentia, sive potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraque B, C, ipsi A, hac ratione potentia erit commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis erit, sed C, quidem longitudine, at verò B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

THEOR. 10. PROPOS. 13. xij. 9.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensu-



rabilis ipſi A; cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.

a 12. decimi.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, b *oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles (cum hoc poſito, & traque B, C, ipſi A, commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis: erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C, potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito, & traque B, C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis.*

b 12. decimi.

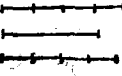
QVONIAM vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac ſeriem Theonis hoc loco; quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

xiij. viij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles; altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommenſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cum & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; c erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.



c 12. decimi.

SCHOLIVM.

HIC quoq;, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue lon-

sine longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, a essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantùm, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; b & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

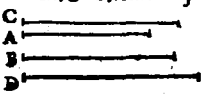
a 12. decimi.

b 12. decimi.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; c erit quoq; reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis; d erit & reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.



c 14. decimi.

d 14. decimi.

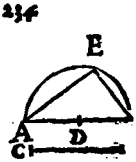
SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si verò A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; ut perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, nō inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oportetq; inue-





a 1. quarti.

nire, quo AB, plus possit quàm C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quàm C, quadrato

b 31. tertij. c 47. primi.

rectæ EB. b Cùm enim angulus E, in semicirculo rectus sit; c erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quàm AE, hoc est, quàm C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. Similiter

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad an-

d 47. primi.

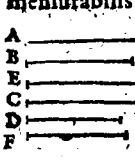
gulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, d quippe cùm quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.

xiv. xij.

THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quàm B, secunda quadrato rectæ E; & C, tertia plus possit quàm D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si verò E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; e erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothe-



e 22. sexti.

pothesin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; *a* Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. a 22. sexti.

SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantùm commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantùm ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16. XV. IX.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtriq; ipsarum A B, B C, commensurabilem esse. *b* Sit enim ipsarum A B, B C, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas A B, B C, metitur, *c* metietur quoq; D, totam A C, ex ipsis compositam. Cùm ergo D, metiatur A C, & A; erunt A C, A B, commensurabiles: Similiter cùm D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, B C, commensurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis erit.



b 3. decimi. c 1. praenum.

SED iam tota A C, ex A B, B C, composita commensurabilis sit alteri ipsarum A B, B C, nempe ipsi A B. Dico & A B, B C, inter se commensurabiles esse. *d* Sit enim D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; *e* metietur quoque D, reliquam B C. Quare cùm D, metiatur A B, B C; commensurabiles erunt A B, B C, inter se. Eodem argumento ostendemus A B, B C, esse commensurabiles, si A C, ipsi B C, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

d 3. decimi. e 9. praenum.

COROL-

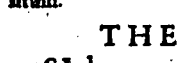
COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarũ, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cùm metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri



a 3. *def.* potest, nempe ipsi AB, & sit que D, communis mensura *ipsarum* AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB;

b 3. *pro.* b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cùm D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB: Eademque ratione neq; ipsi BC, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoq; AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles,

c 16. *de.* c erit quoque tota AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoq; AC, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ AB, commen-

commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo A C, ipsi B C, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum linea longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

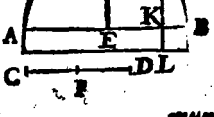
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

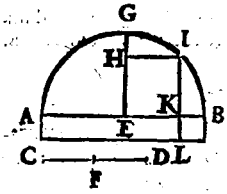
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6 quòd quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficiente q. figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficit q. figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur data rectæ inæquales A B, C D, quarum A B, maior sit, oporteat q. ad A B, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-



mum



mum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta C D, descripti. Sectis rectis A B, C D, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo E A, vel E B, semicirculus A G B; & ex E, perpendicularis ad A B, ducatur E G. Et quia tota A B, maior ponitur quàm tota C D, erit quoque A E, dimidia ipsius A B, hoc est, E G, ipsi A E, æqualis, maior quàm C F, dimidia ipsius C D. Posita igitur E H, æquali ipsi C F, agatur per H, ipsi A B, parallela H I; demittaturq; I K D, ad A B, perpendicularis, & sit K L, ipsi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammum A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata B L, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ C D. Quoniam enim K I, media proportionalis est inter A K, K B, vt in scholio propos. a *13. lib. 6. tradidimus;* a *erit rectangulum sub A K, K B, hoc est,* a17.*sexti.* *rectangulum A L, æquale quadrato ex K I, hoc est, quadrato ex* b34.*primi.* *E H;* b*(est enim K I, ipsi E H, æqualis, ob parallelogrammum E I,) hoc est, quadrato ex C F: Est autem quadratũ ex C F, quarta pars quadrati ex C D; quòd quadratum ex C D, per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum deficiensq; quadrato B L, æquale est quartæ parti quadrati ex C D, descripti. Quod est propositum.*

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data A B, & rectilineum quodcunq;, cui æquale ponatur quadratum ex C F, non maius quàm quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius sit latere A E. Educta ergo ad A B, perpendicularis E G, sit E H, æqualis ipsi C F. Deinde acta H I, parallela ipsi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus A K, K B,

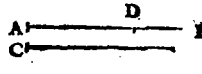
æquale

æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atq; adeò & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quàm quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quàm recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta AD, DB, inæqualia esse.



Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB, deficiensq; figura quadrata ex DB, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, DB, sit autem quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipsius AB, descriptum; atque adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atque rectæ AB, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD, DB. Quod est propositum.

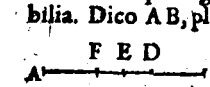
HOC facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ductaque HI, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis IK, vt partes factæ ex applicatione sint AK, KB; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cùm AB, in E, secta sit bi-

fit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij. xiij. THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, D B, faciatque segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã enim per 3. lemma præcedentis propos. A D, maior est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D, a erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadratum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B, Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D, (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cùm F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B, (quod quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B,



a 5. secundi.

ex AB: Ac proinde recta AB, plus potest quàm recta C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB. Quoniam rectæ AD, DB, longitudine ponuntur commensurabiles: *a* erit quoque tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis; (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius DB,) Igitur cùm vtraque AB, & composita ex DB, AF, longitudine sit commensurabilis ipsi DB, *b* erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm AB, composita ex AF, DB, tanquam vna, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quàm C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.



a 16. decimi.

b 12. decimi.

SED iam AB, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quàm C, quadrato rectæ FD. Quare cùm AB, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm vtraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositæ ex AF, DB; *c* erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeò cùm tota AB composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; *d* erunt ipsæ AD, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

c 12. decimi.

d 16. decimi.

THEOR. 16. PROPOS. 19. [xviij. xiv.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum

est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus



posse quàm C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ suprà constructis, similiter ostendemus A B, plus posse quàm C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; a erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: b erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B, erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quàm C, quadrato rectæ E D, longitudine sibi incommensurabilis.

a 17. de cimi.

b 14. de cimi.

IAM verò A B, plus possit quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt priùs, rectam A B, plus posse quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incom-

incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B, *a* erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac proinde cùm tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; *b* erunt & ipsæ A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. de cimi.

b 17. de cimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Mediæ transit in sequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantùm ipsi commensurabilis.

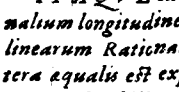
LEMMA II.

EX PROCLO. *Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solùm. Sunt autem & aliæ linea, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solùm commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales;*

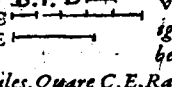
commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solùm: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsa Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si verò potentia inter se solùm sunt commensurabiles: dicuntur ipsa quoq; Rationales, potentia solùm inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei vtraq; est commensurabilis; Aut denique vtraque expositæ Rationali commensurabilis est solùm potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expositæ Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi D; ipsæ æquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ longitudine inter se commensurabiles, cùm habeant D, communem mensuram. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarum vna nempe E, æqualis est Rationali expositæ A.



IAM verò D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cùm ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ A.

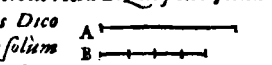


POSTREMO expositæ Rationali A, a inueniatur recta B, longitudine tantùm incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque

11. *dec.*

partes

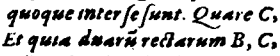
partes æquales, & sumatur C, compositæ ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solùm esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quòd B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeò & potentia; a Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarũ rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; b erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solùm potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationales expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia verò tantùm commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.



a 11. decimi.

b 14. decimi.

QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A. æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facilè hoc modo demonstrabimus. c Quoniam Rationales linea sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; d quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunq; inter se commensurabiles esse.

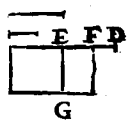
c 6. def. fin.

d 12. sexti.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex



quantacunque enim linea recta C D, *abſcindatur* C E, *ipſi A, æqualis, &* E F, *ipſi* B. *Deinde ſuper* C E; *deſcribatur quadratum* C G, *perficiaturq; rectangulum* G F, *contentum ſub* C E, & E F, *hoc eſt, ſub A, &* B. a *Quoniam igitur eſt vt* C E, *ad* E F, *hoc eſt, vt A, ad* B, *ita parallelogrammum* C G, *hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum* G F, *ſub A, &* B, *comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, vt quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.*

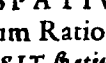
a 1. ſext.

EODEM modo erit, vt B, *ad A, ita rectangulum* F G, *ad quadratum* G C. *Quod eſt propoſitum.*

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. *Dico & A, Rationale eſſe. Sit namque* C, *quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur* B, *Rationale eſt,* b *erit ipſum Rationali* C, *commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi* B, *commenſurabile. Igitur A, &* C, *cùm commenſurabilia ſint ipſi* B, c *inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato* C, *ex Rationali linea expoſita deſcripta commenſurabile,* d *Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*



b 9. def.

c 12. decimi.

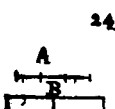
d 6. def.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

xix. xv. QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorũ, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus B C, C D, ſecundum aliquem prædictorum modorum, (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorum, quos in ſcholio 2. antecedentis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarum B C, C D, Rationali expoſitæ A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei vtraque commenſurabilis ſit aut longitudine, aut potentia tantùm. Dico B D, re-

BD, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm: *a* erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex A, commensurabile: *b* Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. *c* Igitur & BE, illi commensurabile, Rationale est. Quia verò BC, hoc est, EC, & CD, longitudine commensurabiles sunt, (pronuntur enim BC, CD, Rationales inter se longitudine commensurabiles,) *d* & est vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; *e* erunt quoque EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. BD, Rationali BE, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

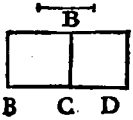


a 23. *def.*
b 8. *def.*
c 9. *def.*
d 1. *sext.*
e 10. *dedecimi.*

THEOR. 18. PROPOS. 21. xx. xvj.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, *f* ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali expositæ A, descripto; *g* Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: *h* Est autem vt BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, commensurabilis longitudine; *i* sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque ideirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

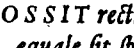


f 9. *def.*
g 12. *decimi.*
h 1. *sext.*
i 6. *def.*

LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

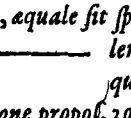


HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolùm commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantùm inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, a inueniatur C, longitudine tantùm incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantùm commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quòd ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quòd inuenta ſit potentia tantùm incommenſurabilis ipſi B, atque adeò ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potētia ſolùm commenſurabiles. Inuenta ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantùm commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.



a 11. decimi.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantùm incommenſurabilis b inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantùm incommenſurabilis C, maior aut minor quàm A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

b 11. decimi.

Quòd

Quòd enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraque B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis; a *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.* a 6. de fin.

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat ∀t *A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F,* ∀t *in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item* ∀t *B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique* ∀t *C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F,* ∀t *numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G,* ∀t *B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H,* ∀t *C, ad D. At* ∀ *ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G,* ∀t *A, ad C; similiterque quadratum ex E, ad quadratum ex H,* ∀t *A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H,* ∀t *B, ad D)* b *erunt ipsa inter se commensurabilia; ac propterea & recta ipsa potentia saltem commensurabiles. Extstente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri,* ∀t *ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* c *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensa sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.*

A, 5. E
B, 7. F
C, 3. G
D, 2. H

b 6. decimi.

c 9. decimi.

QVOD si propositis quotcunq; Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositæ duæ

A C, 10.
B D, 6.
F E, 7.

Rationales potentia tantũ commensurabiles A, B, quarum quadratum proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D, primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur) fiat vt D, ad E, ita quadratum linea B, ad quadratum linea F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E,

a 6. decimi. *a commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. ostendimus; (quod D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoque plani non similes, ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, pro-*

b 9. decimi. *portionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) b erunt recta B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, vt idem demonstrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.*

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non) Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi B D, æquale est, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demon-



21. sen. stratione propos. 20. diximus. c Et quoniam est vt E C, hoc est, B C, ad C D, vt B E, ad B D: Est autem B C, ipsi C D, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipsi B D, in-

BD, incommensurabile. *a* Quare cum BE, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A, sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; *b* erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, *c* Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis. a 29. *decimi.* b 14. *decimi.* c 10. *decimi.* 1. *defin.*

VOCETVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, *d* propterea quod media proportionalis est inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat. d 17. *sexti.*

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. e *Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, sexta.* e 17. *esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus: si dicamus eam esse lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantū inter se commensurabiles. Vel qua potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hac linea Media hoc loco appellatur.*

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint continuè proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, qua Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterq; descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum medium proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe

Medio

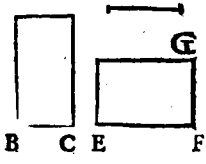
Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, & vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur rectangula sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuerse tamen omne spatiũ Medium aquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso aquale est, sta vt ipsum possit linea recta, qua Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt dua linea Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

xxij. xx. THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit exposita, siue expositæ commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum a 45. primi. applicetúrque ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilem. Quoniam enim A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duab. rectis Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et b 14. sext. quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D, æqualia erunt B D, & E G, b lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos,



gulos, nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; *a* Ac propterea quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F, ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum) Igitur *b* & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D: propterea que & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam enim E F, F G, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub E F, F G, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. *c* erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeo rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex E F, commensurabile est quadrato ex C D. (quod E F, C D, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles) Igitur cum quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex E F, at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommensurabile; *d* incommensurabilia erunt quadratum ex C D, & rectangulum B D. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt recta C D, ad rectam B C. *e* Incommensurabiles ergo sunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 22. *sexti.*
b 10. *decimi.*
c 1c. *decimi.*
d 13. *decimi.*
e 10. *decimi.*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale si ipsis B C, & A, f sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A, & C D, proportionales sint; g erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

f 11. *sexti.*
g 17. *sexti.*

HAC arte etiendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

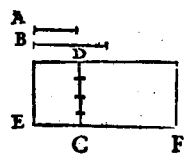
PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale,

tionale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, *a* ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; *b* erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem *c* applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. *d* Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. *e* Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. *f* Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commensurabiles, *g* Ac proinde recta B, potens rectangulum D E, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.
b 23. decimi.
c 45. primi.
d 1. sex.
e 10. decimi.
f 14. decimi.
g 22. decimi.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium, nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commen-

commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

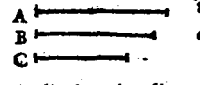
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Media longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuerse enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero recta quadam linea Media potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; a *erit vtraque B, C, Media A; commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erunt inuentæ A, B, Media longitudine commensurabiles; & A, C, Media potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.*



a 24. decimi.

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Media commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Media est commensurabilis; cum duæ Media dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inuenienda sint duæ Media longitudine & potentia incommensurabiles.

THEOR.

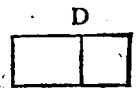
xxiv. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

CONTINEATVR rectangulum A D, ſub Mediis A C, C D, longitudine commenſurabilibus. Dico A D, Medium eſſe. Deſcribatur ex C D, Media quadratum B D, quod erit Medium. *a* Et quoniam eſt vt A C, ad C B, ita A D, ad D B: Sunt autem A C, C B, hoc eſt, A C, C D, longitudine commenſurabiles; erunt A D, D B, commenſurabilia. Quare ſpatium A D, Medio D B, commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. præcedentis propoſ. Quod ergo ſub Mediis longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 1. *ſex.*



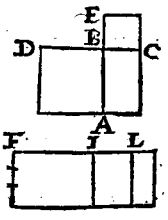
xxv. xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD ſub Mediis potentia tantum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehenſum ſub Mediis A B, B C, potentia tantum commenſurabilibus. Dico A C, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex A B, B C, quadrata A D, C E, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus, cum rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G, *b* ad quam applicetur rectangulum F H, quadrato A D, ex A B, deſcripto æquale; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C, æquale; & deniq; ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato C E, ex B C, deſcripto; eritque totum F M, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero A D, C E, Media ſunt, erunt & F H, L M, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales F G, K L, (*c* eſt enim & K L, Rationali F G, æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis) faciantque latitudines G H, K M, *d* erunt rectæ G H, K M, Rationales, ipſi F G, ſeu K L, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeo & ipſis æqualia rectangula F H, L M, commenſurabilia: *e* Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta G H, ad K M. *f* Igitur G H, K M, longitudine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare G H, K M, Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero F G, ſolum commenſu-

b 45. *primi.*



c 34. *primi.*

d 23. *decimi.*

e 1. *ſex.*

f 10 *decimi.*

mensurabiles potentia, cum ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; *a* Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Rationale est. Et quoniam est, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E, (quod D B, B C, ipsis A B, B E, sint æquales, vtraque vtrique) *b* & vt D B, ad B C, ita A D, ad A C; & vt A B, ad B E, ita A C, ad C E; erit quoque vt A D, ad A C, ita A C, ad C E, atque adeo A D, A C, C E, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt: *c* Habent autem rectæ G H, H K, K M, easdem proportiones, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales sunt; *d* propterea que rectangulum sub G H, K M, quadrato ex H K, æquale est. Est autem rectangulum sub G H, K M, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex H K, Rationale est; ideoque & recta H K, Rationalis erit: *e* & ob hoc ipsi F G, Rationali expositæ, hoc est, ipsi H I, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel solum potentia. Et si quidem H K, ipsi H I, longitudine sit commensurabilis, *f* rectangulum H L, sub Rationalibus H I, H K, longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, A C, illi æquale, erit Rationale. Si vero H K, ipsi H I, potentia solum commensurabilis sit, *g* erit rectangulum H L, sub Rationalibus H I, H K, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, A C, illi æquale, Medium. Est ergo A C, rectangulum sub Mediis A B, B C, potentia tantum commensurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. decimi.
b 1. sex.
c 1. sex.
d 17. sexti.
e 6. defi.
f 20. decimi.
g 22. decimi.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad H I, rectangulum ipsi A C, æquale, h *si tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis sumatur pro latere H K,* i *Nam rectangulum sub extremis H I, H K, æquale erit rectangulo sub mediis A B, B C.*

h 12. sexti.
i 16. sexti.

HAC eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM verò in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium; docebit Euclides propos. 28. quanam ratione inuenienda sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, qua Rationale comprehendant: Propos. verò 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquiret, qua spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex hîs, k *rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationales;* l *Sub duabus verò Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellarique Medium,*

k 20. decimi.
l 22. decimi.

& rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat, a rectangulum comprehensum sub duabus Mediis longitudine
a 25. decimi. commensurabilibus esse Medium; b Rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel
b 26. decim. Rationale, vel Medium.

QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe æquale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

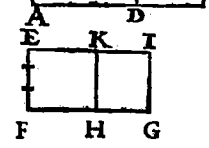
SIT enim rectangulum A C, comprehensum sub duabus Mediis A B, B C, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico A C, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas G H, K M, Rationales esse, & ipsi F G, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadratæ A D, C E, atque adeo ipsis æqualia rectangula F H,
c 1. sex. L M, incommensurabilia. c Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H,
d 10. ad rectam K M. d Igitur rectæ G H, K M, longitudine inter se sunt
decimi. incommensurabiles. Quare G H, K M, ostensa Rationales, sunt po-
e 22. tentia tantum inter se commensurabiles; e Ac propterea rectangu-
decimi. lum sub ipsis G H, K M, Irrationale est, quod Medium appellatur,
f 17. & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. f Potest autem
sexti. rectangulum sub ipsis G H, K M, recta H K; (Nam vt prius ostendemus, tres G H, H K, K M, esse proportionales) Igitur H K, Irrationalis est, & Media. Quare I K, Rationale non est: si enim Rationale
g 21. esset, g faceret ipsum ad Rationalem H I, applicatum latitudinem
decimi. H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est H K, Irrationalis, ac Media. Eodem
h 23. modo neque I K, medium est; si enim esset Medium, h faceret ipsum
decimi. applicatum ad Rationalem H I, latitudinem H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine incommensurabilem. quod est absurdum. ostensa est enim H K, Irrationalis, & Media. Itaque cum I K, neque Rationale sit, neque Medium; necesse erit neque A C, illi æquale, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi I K, quod sub Rationali, & Media continetur, cum H I, Rationalis sit, & H K, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur A B, B C, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod est propositum.

xxvj. xxij. THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPE-

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, *a* ad ipsam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata, *b* erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK, (*c* est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) *d* erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; *e* erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. *f* Igitur quadratum ex FH, incõmensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratum ex HG, (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) *g* atque adeo & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis *h* Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG. *i* At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, *k* erit quadratum ex FG, Irrationale, *l* ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.



a 45. primi.
b 23. decimi.
c 34. primi.
d 21. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.
h 17. decimi.
i 14. secundi.
k 10. defin.
l 11. defin.

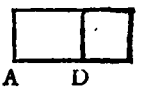
SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale. Quoniam enim AB, AC, Rationalia sunt; a *erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* b *atque adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB, compositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC, erit quoque idem AB, reliquo DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*

a 9. def. fin.
b 12. decimi.

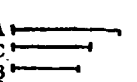


xxvij. o. PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, *e* inter quas media proportionalis sumatur C, *d* fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; *e* erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo *f* cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, suntque A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. *g* Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, *h* poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

c 13. sexti.
d 12. sexti.
e 22. decimi.
f 17. exti.
g 24. decimi.
h 17. sexti.

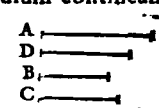


xxviij. o. PROBL. 5. PROPOS. 29.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPO-

EXPONANTVR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, *a* & inter A, B, media proportionalis inuenia- a 13.
tur D. *b* Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse *sexti.*
potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. b 12.
Quoniam enim A B, Rationales sunt potentia *sexti.*
solum commensurabiles: erit rectangulum
sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, *c* quod c 17.
illi æquale est, *d* Irrationale, quod Medium di- *sexti.*
citur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, d 22.
ad C, ita D, ad E, sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum *decimi.*
commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est.
Cum ergo D, Media sit, *e* erit & E, illi potentia solum commen- e 24.
surabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tan- *decimi.*
tum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoq; vt D, ad A, ita C, ad E. *f* Rectangulum igitur sub D E, æquale est ei, quod sub A, f 16.
C: Est autē quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commen- *sexti.*
surabilibus *g* Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub g 22.
D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum *decimi.*
cõmensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.



SCHOLIVM I.

IN iis quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quando quidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.	*C*, 12.
B, 4.	*D*, 8.
E, 24.	*F*, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. h ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem h 28. & 29. no-
vero, si impar multiplicet imparem, per spicuum est, quonam modo in- ni.
ueniri possint duo plani similes, quorum vterque par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. a *Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto B D, ex A B, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus A D, par. Quo diuiso bifariam in E; Dico numerum factum ex A B, in B D,* b *qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri E D, facere quadratum. Quoniam enim numerus A D, bifariam est diuisus in E, & ei additus D B; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato numeri D E, æqualis quadrato numeri E B. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D, & quadratus numeri D E, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex B E, gignitur. quod est propositum.*

a 24. & 26. noni.

A ..... E ..... D ..... B
C .....

b 1. noni.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, quando A B, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum excessus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumantur A B, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum B E, E D. quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex A B, in B D, non est quadratus. Si enim quadratus esset, c numeri A B, B D, hoc est, A B, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

c 2. noni.

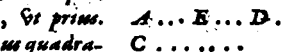
SCHOLIVM II.

IT A QVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus & primum, duos planos similes, quorum & vterque par, & vel impar sit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus est.

A ..... E ..... D ..... B
C .....

SI vero

SI vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius.



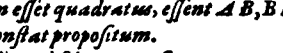
Nam similiter ostendemus quadratum ex BE, aequalem esse quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE, ED, est numerus factus ex AB, in BD, qui cum non sit quadratus, (Si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

HOC posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de caeteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes AB, & C, pares, vel impares, vt in lemmate praecedenti, fiatque eadem constructio, ita



vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, aequalis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipsius maius latere BF. Erit

ergo latus ipſius vel æquale numero BE, *vel maius.* (*Minus enim non erit, quoniam inter numeros* BE, BF, *ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur: Eſſet autem dictum latus inter ipſos mediũ, ſi maius poneretur quam* BF, *minus vero quam* BE.) *Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex* BE, *æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex* AB, *in* BD, *& ex quadrato numeri* DF; *cum eidem quadrato ex* BE, *ſit oſtenſus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE; *erit, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DF, *æqualis ei, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE. *Ablato ergo communi, eo ſcilicet, qui fit ex* AB, *in* BD; *erit reliquus quadratus ex* DF, *æqualis reliquo quadrato ex* DE; *Ideoque & latus* DF, *lateri* DE, *æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in ſe fit, æquale eſt numero* BE. *Sed neque maius. Sit enim ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero* BI, *qui maior ſit, quam* BE, *ita vt quadrato ex* BI, *æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex* BI, *latere maiore, maior eſt quadrato ex* BE, *latere minore; erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in ſe fit,* (*cum hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex* BI,) *maior quadrato ex* BE. *Eſt autem quadrato ex* BE, *oſtenſus in lemmate præcedentis æqualis numerus, qui fit ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex* DE: *Ablato ergo communi, qui fit ex* AB, *in* BD; *erit reliquus quadratus ex* DF, *reliquo quadrato ex* DE, *maior; ac proinde latus* DF, *latere* DE, *maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex* AB, *in* BD, *alter vero ex* DF, *in ſe, maius eſt latere* BE. *Sed neque æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex* BF.

A . H . I . E . F . G . D . B . C

SIT

SIT iam, si fieri potest, A..H..I..E.F.G...D.....B numerus qui fit ex AB, in BD, C.....
vnà cum quadrato ex DF, aqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus vnitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus est, (diuisus enim est AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablatæ vnitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, aqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, aqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, aqualis est ei, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, aqualis. Quare cùm HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant aquales numeros; a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipsi AB, aqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. septimi.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod sit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, aqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, aqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, aqualis, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, aqualis est ei, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex

IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF.

A..H..I.E.F.G...D.....B
C.....

Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

SCHOLIVM III.

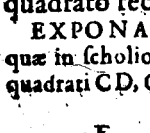
EX hoc facilè inuenientur duo numeri, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

xxiii. xvij. **PROBL. 6. PROPOS. 30.**

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi cõmensurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, nõ sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodeturq; AF, in semicirculo ABF, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB. *a* Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; *b* erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc est, recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, *c* erunt quadrata ex AB, AF, commensurabilia; atque adeò cùm quadratum ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB; descriptum, erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea q; & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF, atq; adeò commensurabiles saltem potentia.



C....E.....D

a 31. ter tij.
b 47. primi.
c 6. dec.

Quia

Quia verò quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cùm neque quadratus numerus C D, ad non quadratũ D E, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs & D E, quadratus esset, *a* vt in Arithmeticis est demonstratum, quod non ponitur) *b* erunt rectæ A B, A F, longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur A B, A F, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles.

a 74. 8ti. b 9. decimi.

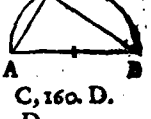
I A M verò, quoniam est vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A F; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratũ numerum C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B. (sicut enim C D, superat D E, quadrãto C E, ita etiam quadratũ ex A B, superat quadratum ex A F, quadrato ex F B.) *c* Quare rectæ A B, F B, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit, quàm minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

c 9. decimi.

PROBL. 7. PROPOS. 31. xxx. xviij.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectę lineę sibi longitudine incõmensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea A B, inueniantur q; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos numeros nõ quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus C D, ad neutrum ipsorum C E, E D, proportionem habebit, quam qnadratus ad quadratum, aliàs secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus: iuxta posteriorem verò, quilibet ipsorum C E, E D, quadratus quoque, *d* vt in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quàm A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales potentia solum commensurabiles. Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos.



C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C.....E... D

d 24. octaui



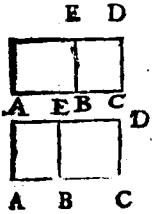
C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C.....E... D

propoſ. Quoniam verò rurſus, vt priùs, eſt per conuerſionem rationis, vt C D, ad C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B; Non habet autem C D, ad C E, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad quadratum ex F B, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. *a* Quare rectæ A B, F B, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſſit quàm minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod erat faciendum.

a 29. dec.

LEMMA.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, in rectum conſtitutæ, quarum A B, maior ſit. Dico eſſe, vt A B, ad B C, ita rectangulum ſub A B, B C, ad quadratum ex B C. Deſcribatur enim ex B C, quadratum B D, compleaturq; rectangulum A D; eritq; rectangulum A E, ſub A B, B C, contentum; quòd B E, ipſi B C, ſit æqualis;

b perſpicuum autem eſt, eſſe vt A B, ad B C, ita A E, ad B D. b 1. ſext.

EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua A B, minor eſt, quàm B C.

xxxj. xxiv. xxv. PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

c REPERTÆ ſint duæ Rationales A, B, potentia tantùm commenſurabiles: ita vt A, maior plus poſſit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolùm commenſurabiles; c 30. dec. quæ.

les, *a* erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. *b* Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoq; vt C, ad B, ita B, ad D; *c* Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; *d* poterit quoque C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias, C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.



a 22. decimi.

b 24. decimi.

c 17. sexti.

d 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt priùs, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

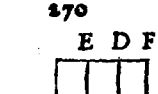
SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facilè iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immò rectas C, D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius libri.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres recta AB, BC, CD, in rectum constituta. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum

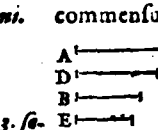


lum sub B C, C D. Describatur enim ex B C, quadratum B C D E, perficiaturq; rectangulum A F; Eritq; A E, contentum sub A B, B C; & C F, sub B C, C D; quòd B E, C D, ipsi B C, aquales sint.
a. 1. sexti. a Perspicuum autem est esse A B, ad C D, vt A E, ad C F. Quod est propositum.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

xxxij. xxvj. INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commensurabilibus, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus) c Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C; e Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D, f & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solùm commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solùm commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. g Quia verò D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; h erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, i quod Medium est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantùm commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; k poterit etiam



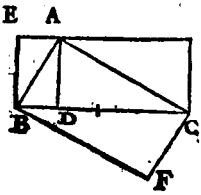
b 30. decimi. c 13. sexti. d 12. sexti. e 17. sexti. f 16. sexti. g 22. decimi. h 24. decimi. i 22. decimi. k 15. decimi.

lam D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem constituantur, vt priùs, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facilè apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C, & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum deniq; sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.



QVONIAM ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter C D, B D; a *erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.* a 17. 6. vti.

EADEM ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis est inter B C, C D.

RVRSVS quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

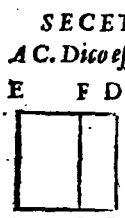
POSTREMO, b *quia triangula A B C, A B D, similia sunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* c *Quare rectangulum sub B C, A D, æquale est rectangulo sub A B, A C. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum sub B C, A D: Item rectangulum A F, sub A B, A C, contentū.* d *Quoniā igitur rectangulum C E, duplū est trianguli A B C, nec nō & rectangulum* b 8. sext. c 16. sexti. d 41. primi.

gulum A F, *eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula* C E, A F. *quod est propositum.*

LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales; erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta A B, *non bifariam in* C, *sitq; maior pars* A C. *Dico esse vt* A C, *ad* C B, *ita rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* A B, C B. *Describatur enim ipsius* A B, *quadratum* A B D E, *ducaturq;* C F, *ipsi* A E, *parallela; eritque* A F, *contentũ sub* A B, A C, *&* C D, *contentum sub* A B, C B; *quod* A E, C F, *ipsi* A B, *æquales sint.* a *Quoniam igitur est vt* A C, *ad* C B, *ita* A F, *ad* C D; *constat propositum.*



a 1. *sext.*

EADEM ratione erit, vt minor pars B C, *ad maiorem* C A, *ita* B F, *contentum sub* A B, B C, *tota, & minore parte, ad* C E, *contentum sub* A B, C A, *tota, & maiore parte.*

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, *angulum rectum constituentes* A B C, *secetur q; minor* B C, *bifariam in* D. *Dico rectangulum sub* A B, B C, *duplum esse rectanguli sub* A B, B D. *Compleatur enim rectangulum* A C, *sub* A B, B C; *ducatur q;* D E, *ipsi* A B, *parallela, eritq;* B E, *contentum sub* AB, *&* B D, *dimidia minoris.* b *Quoniam igitur* A C, *ipsius* B E, *duplum est, quòd & basis* B C, *dupla sit basis* B D, *constat propositum.*



b 1. *sext.*

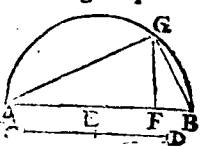
EODEM modo, si B C, *secta bifariam, sit maior, erit quod sub*

sub A B, B C, continetur, duplum eius, quod continetur sub A B, minore, & B D, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

PROBL. 10. PROPOS. 34. xxxiij. xxvij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.

REPERIANTVR duæ Rationales A B, C D, potentia solùm commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit quàm minor C D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secetur que C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C E, hoc est quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub A F, F B, continetur. Postremo descripto semicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad A B, perpendicularis, connectanturq; rectæ A G, G B. Quoniam igitur A B, plus potest, quàm C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad A B, rectangulum sub A F, F B, æquale quartæ parti quadrati ex C D, deficiens figura quadrata; *b* erit A F, ipsi F B, longitudine incommensurabilis. Est autem vt A F, ad F B, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub A B, A F, ad rectangulum sub A B, F B; Rectangulum verò sub A B, A F, quadrato ex A G, & rectangulum sub A B, F B, quadrato ex G B, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; *c* quòd angulus A G B, rectus sit in semicirculo A G B. Igitur quoque erit vt A F, ad F B, ita quadratum ex A G, ad quadratum ex G B, ac propterea cùm A F, F B, longitudine sint incommensurabiles; *d* erũt quadrata ex A G, G B, incommensurabilia. *e* Igitur rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali A B, Rationale est, *f* æqualeque quadratis ex A G, G B; erit etiam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub A F, F B, quod quadrato ex C E, æquale est factum, *g* æquale est quadrato ex F G, (propterea quòd angulus A G B, rectus est & F G, ad A B, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, C E, æqualia; ac proinde & rectæ F G, C E, æquales. Quare C D, dupla existens ipsius C E, dupla etiam erit ipsius F G. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub A B,



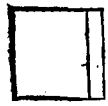
a 31. decimi.
b 19. decimi.
c 31. tertij.
d 10. decimi.
e 4. def.
f 47. primi.
g 17. sexti.

CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia sit
a 22. de cimi. minoris CD.) a Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiat q; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autem C, ad D, proportionem, quam quadratus ad quadratum; b *erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib.*



b 9. decimi.

c 1. sext. d 10. decimi.

c *Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur* d *cùm AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalu ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia verò AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus conflci posse Rationale. Quod est propositum.*

e 16. decimi.

f 9. def.

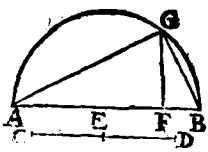
AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim vtrumq; AF, FB, Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia. e *Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB,* f *Rationale quoque est. Quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35. xxxiiij. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

a REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, b æquale existens quadratis rectarū AG, GB, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ ostensæ sunt potentia incommensurabiles, faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum verò sub ipsis contentū, Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. decimi.

b 47. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

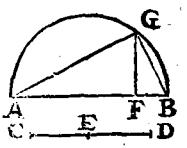
INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

c REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas AG, GB, potentia incommensurabiles esse.

c 33. decimi.

les esse. Et quia quadratum ex Media AB, Medium est, *a* & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm ex constructione, rectangulum sub AB, CD, Medium sit: erit quoque rectangulum sub AB, FG, hoc est, sub AG, GB, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam verò AB, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD: Est autem eidem CD, ipsa CE, longitudine commensurabilis; quòd illa huius sit dupla; *b* erunt AB, CE, longitudine incommensurabiles. Sed vt AB, ad CE, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, CE, hoc est, ad rectangulum sub AB, FG; hoc est, sub AG, GB. (sunt enim rectangulum sub AB, FG, & sub AG, GB, per 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia.) *c* Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub AG, GB. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

247. primi.



b 13. decimi.

c 10. decimi.

SCHOLIVM.

EX hoc verò problemate facilè illud absoluemus, quod ad propos. 24 huius lib. nos demonstraturos recepimus. nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabilia. quod non ponitur Quocirca si sumatur AB, potens compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB, inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

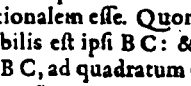
PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj. xxx.

SI duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales A B, B C, potentia solùm commensurabiles, inuentæ per 2. lemma propos. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniam enim A B, longitudine incommensurabilis est ipsi B C: & vt A B, ad B C, ita est rectangulum sub A B, B C, ad quadratum ex B C, per lemma propos. 31. huius lib. *a* erit rectangulum sub A B, B C, quadrato ex B C, incommensurabile. Sed rectangulo sub A B, B C, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commensurabile est quadratum rectæ A B; (omnia enim sunt Rationalia) *b* atq; adeò & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commensurabile est. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub A B, B C, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A B, B C. Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub A B, B C, & ex composito quadratorum rectarum A B, B C, hoc est, quadratum ex tota A C, (*c* Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vnà cum rectangulo sub A B, B C, bis) composito ex quadratis rectarum A B, B C, *d* incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale, quòd commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incommensurabile, *e* Irrationale est; atque adeò & recta ipsa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis A B, B C, potentia solùm commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.



a 10 *decimi.*

b 16. *decimi.*

c 4. *secundi.*

d 17. *decimi.*

e 10 *decimi.*

fin.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, f Irrationalis est, quæ Media vocatur. At verò compositæ ex ipsis, g Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.

f 22. *decimi.*

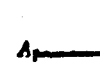
g 37 *decimi.*

xxxvij. xxxj.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

a 28. decimi. COMPONANTVR duæ Mediæ *a* superiùs inuentæ AB, BC, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia enim AB, est ad BC, vt rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propos. 31. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; *b* erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositū ex quadratis rectarū AB, BC. (Nam cùm AB, BC, potentia sint cōmensurabiles, *c* erunt ipsarū quadrata commensurabilia, *c* atq; adeò & compositū ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratū ex AC, *d* quod huic composito æquale est, *e* incommensurabile quoq; est rectangulo sub AB, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, commensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cùm hoc sit illius dimidium. *f* Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autem rectangulum sub AB, BC, Rationale. *g* Irrationale ergo est quadratum ex AC, *h* & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



b 10. decimi.

c 16. decimi.

d 4. secundi.

e 17. decimi.

f 13. decimi.

g 10. def. fin.

h 11. def.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.



CONTINEATVR *rectangulū* ABCD, *sub Rationali* AB, *& Irrationali* BC. *Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale,* i *faciet ipsum ad Rationalem* AB, *applicatum latitudinem* BC, *Rationalem. Quod est ab-*

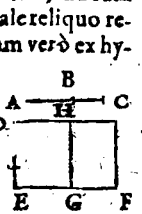
i 21. decimi.

est absurdum. ponitur enim B C, *Irrationalis. Non ergo* A C, *Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ *a* superiùs inuentæ A B, B C, potentia tantùm commensurabiles, quæ Mediũ contineant. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, *b* ad quam applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C; & composito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum D F, *c* æquale est duobus quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis sub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub A B, B C, continetur. Quoniam verò ex hypothesi, rectangulum sub A B, B C, Medium est; erit & rectangulum bis sub A B, B C, ei commensurabile, hoc est, H F, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; *d* erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorum ex Mediis A B, B C, Mediũ est. Igitur & D G, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (*e* est enim G H, Rationali D E, æqualis) *f* erunt eorum latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia A B, B C, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, B C, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex A B, incommensurabile rectangulo sub A B, B C, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex A B, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarũ A B, B C; & rectangulo sub A B, B C, commensurabile est, quod continetur bis sub A B, B C, cùm hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositũ ex quadratis rectarũ A B, B C, hoc est, rectangulum D G, incommensurabile rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, rectangulo H F. *g* Cùm ergo sit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; *h* erit E G, ipsi G F, longitudine incõmensurabilis: Ostensum autẽ iam fuit E G, G F, esse Rationales. Rationales igitur sunt E G, G F, potentia tantũ cõmensurabiles,



a 29. decimi. b 45. primi. c 4. secundi. d 16. decimi. e 34. primi. f 23. decimi. g 1. sexti. h 10. decimi.

a 37. decimi. a ac propterea & tota E F, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex A C, ipsi D F, æquale, Irrationale est. Quare & recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

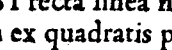
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantùm commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam. Hic verò lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantùm commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta A D, in B, non bifariam, sitq; maior pars A B; in qua sumatur B C, minori B D, æqualis, vt sit A C, excessus, quo A B, superat B D, hoc est, B C, ipsi B D, æqualem. Dico quadrata rectarum A B, B D, simul maiora esse rectangulo bis sub A B, B D, quadrato recta A C.



b 7. secundi. *Quoniam enim quadrata ex A B, B C,* b *æqualia sunt rectangulo bis sub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C, estq; B C, ipsi B D, æqualis: erunt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectangulo bis sub A B, B D, vnà cum quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora sunt, quàm rectangulum bis sub A B, B D, quadrato recta A C. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

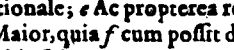
EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiij. THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur,

tinetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ *a* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Dico totam A C, esse Irrationalem. Quoniam enim rectangulum sub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub A B, B C, illi commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. *b* Incommensurabile ergo est rectangulum bis sub A B, B C, composito ex quadratis rectarum A B, B C. *c* Igitur & rectangulum bis sub A B, B C, vna cum quadratis ex A B, B C, hoc est, quadratũ ex A C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A B, B C. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; *d* erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; *e* Ac propterea recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia *f* cum possit duo quadrata ex A B, B C; & rectangulum bis sub A B, B C; compositum ex quadratis rectarum A B, B C, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub A B, B C. Quare cum compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale sit, rectangulum vero bis sub A B, B C, Medium; recte vocabitur A C, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. *decimi.*
b 10. *defin.*
c 17. *decimi.*
d 10. *defin.*
e 11. *defin.*
f 4. *secundi.*

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale aç Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ *g* superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, B C, Medium est; quod vero continetur bis sub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub A B, B C, semel continetur, Rationale ponatur, *h* erit compositum ex quadratis rectarum A B, B C, in-



g 35. *decimi.*
h 10. *defin.*



commensurabile, rectangulo bis sub A B, B C. a Igitur & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, vna cum rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, quadratum ex A C, incommensurabile est rectangulo bis sub A B, B C. Cum ergo rectangulum bis sub A B, B C, vt diximus, sit Rationale; b erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; c Ac proinde & recta A C, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

a 17. decimi.
b 10. defin.
c 11. defin.

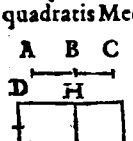
xlj. mxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. decimi.

COMPONANTVR duæ rectæ d superius inuentæ A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes compositū ex ipsarū quadratis Mediū, & rectangulum sub eisdem Mediū, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum. Dico totā A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, e ad quā applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A C; Et composito ex quadratis rectarū A B, B C, alterum æquale applicetur D G. Et quia quadratū ex A C, hoc est, rectangulum D F, f æquale est composito ex quadratis rectarum A B, B C, vna cum rectangulo bis sub A B, B C, erit reliquum H F, æquale rectangulo bis sub A B, B C. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, quam rectangulum sub A B, B C, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis sub A B, B C, nempe ipsum H F, (cum illi sit commensurabile.) Medium ponitur, g facient D H, H F, ad Rationalem D E, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum A B, B C, id est, rectangulum D G, incommensurabile ponitur rectangulo sub A B, B C: Eidem autem rectangulo sub A B, B C, commensurabile est ipsius duplum, nempe



e 45. primi.
f 4. secundi.
g 23. decimi.

quod

quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H K; *a* erunt & D G, H F, incommensurabilia. Quare *b* cum sit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; *c* erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles; Atqui E G, G F, ostensæ sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; *d* Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est; *e* ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. decimi. b 1. sex. c 10. decimi. d 37. decimi. e 11. defin.

LEMMA.

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

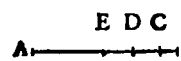
SECETVR recta A B, inaqualiter in C, & rursus inaqualiter in D, sintque priores partes A C, C B, magis inaquales, quam posteriores A D, D B. Dico quadrata ex A C, C B, simul maiora esse quadratis ex A D, D B, simul.



Diuisa enim A B, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub A C, C B, vna cum quadrato ex E C, æquale est quadrato ex E B: Item rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale est eidem quadrato ex E B; erit rectangulum sub A C, C B, vna cum quadrato ex E C, æquale rectangulo sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium E C, E D, cum quadratum ex E C, maius sit quadrato ex E D, erit reliquum rectangulum sub A C, C B, minus reliquo rectangulo sub A D, D B; ac propterea & rectangulum bis sub A C, C B, minus erit rectangulo bis sub A D, D B. Quoniam vero quadratum ex A B, g æquale est tam rectangulo bis sub A C, C B, vna cum quadratis ex A C, C B, quam rectangulo bis sub A D, D B, vna cũ quadratis ex A D, D B; erit rectangulum

f 5. secundi. g 4. secundi.

gulum bis ſub A C, C B, vna cum quadratis ex A C, C B, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, vna cum quadratis ex A D, D B.



Quare cum rectangulum bis ſub A C, C B, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub A D, D B, erunt reliqua quadrata ex A C, C B, maiora reliquis quadratis ex A D, D B. Quod eſt propoſitum.

S E D cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes A C, C B, magis inæquales ponuntur, quam partes A D, D B; erit A D, (quæ minor eſt poſteriorum) maior quam C B; (quæ priorum minor eſt) ac proinde cum A E, E B, æquales ſint, erit reliqua E C, maior quam reliqua D E. Itaque quia rectangulum ſub A C, C B, vna cum quadrato ex E C, a *æquale eſt quadrato ex E B: Item rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex D E, æquale eſt quadrato ex A E, hoc eſt, eidem quadrato ex E B; erit rectangulum ſub A C, C B, vna cum quadrato ex E C, æquale rectangulo ſub A D, D B, vna cum quadrato ex D E. Igitur vt prius, demonſtrabimus quadrata ex A C, C B, maiora eſſe quadratis ex A D, D B. Quod eſt propoſitum.*

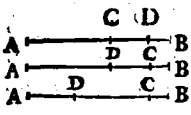
a 5. ſecundi.

xxxiij. xxxvj.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt vult propoſ. 37. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina ad D. Conſtat ergo A B, in C, non diuidi bifariam. Nam ſi bifariam diuideretur, eſſent A C, C B, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam ſecabitur A B, cum & A D, D B, Rationales ſint potentia tantum commenſurabiles. Secatur ergo A B, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes A C, C B, vel minus inæquales ſunt, q am partes A D, D B, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex A C, C B, vel minora



ſunt

sunt quadratis ex A D, D B, vel maiora. (Neque enim partes A D, D B, vbicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraq; vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis sub A D, D B, *a* quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex A B; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarũ A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (Cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus: eademq; ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. *b* Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi commensurabile, ex coroll. propos. 14. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. *c* Quare cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

a 4. *secundi.*

b 22. *decimi.*

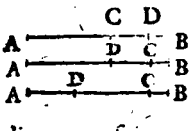
c 27. *decimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 44. xliij. xxxvij.

QVÆ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt A C, C B, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet

ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub A C, C B, ei quod continetur ſemel ſub A C, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub A D, D B. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus: perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ A C, C B. Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. a Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum A B, D B. b Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.



a 16. decimi.

b 27. decimi.

xliv. xxxviij

THEOR. 33. PROPOS. 45.

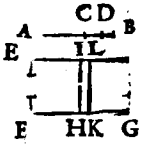
QVÆ ex binis Mediis ſecunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis ſecunda A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuiditur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex A C, C B, maiora eſſe

esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis EF, *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, *b* æquale est quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD DB, comprehensō. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipsius FH. Eadem ratione ostendemus FK, maiorem esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. *d* Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC, CB, ponatur Medium, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IG, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, *e* erit HG, Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL; longitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine, sunt incommensurabiles, & est vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, *f* erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; *g* erit & compositum ex ipsis vtriliber ipsorum, nimirum quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 14 huius libri,



a 45. primi.
b 4. secundi.
c 16. decimi.
d 23. decimi.
e 25. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi.



libri, rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, ipſi I G. Quocirca *a* cum ſit, vt E H, ad I G, ita F H, ad H G, *b* erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolum commenſurabiles. *c* Igitur F G, tota Irrationalis eſt quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum G. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, *d* vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

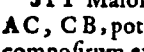
a 1. *ſex.*
b 10. *decimi.*
c 37. *decimi.*
d 43. *decimi.*

xlv. xxxix.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt A C, C B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulum vero ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius lib. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quę ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoq; ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulum ſub ipſis Medium. Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, vt in propoſitione 45. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarū A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cum vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoq; eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Mediū ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub A D, D B. *e* Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale; Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum



e 27. *decimi.*

vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47. xlvj.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. xl.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt A C, C B, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico A B, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri

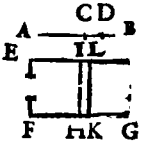


potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B. Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: a Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat. a 27. decimi.

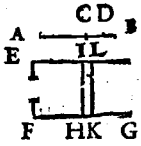
THEOR. 36. PROPOS. 48. xlvij.

BINA Media potens, ad vnum dunta xat punctum diuiditur in nomina. xlj.

SIT linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita vt A C, C B, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri.



Dico A B, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum



sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 43. ostendemusque vt ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est. Igitur Media E H, I H, applicata ad Rationalem E F, (est enim I H, ipsi E F, æqualis) *a* faciunt latitudines F H, H G, Rationales longi- *a* 23. *decimi.* tudine ipsi E F, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas F K, K G, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi E F. Quia vero compositum ex quadratis rectarum A C, C B, descriptis, hoc est, rectangulum E H, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub A C, C B, *b* 1. *sex.* nempe rectangulo I G; *b* estque vt E H, ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus: Sed ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, *c* iam ante demonstra- *c* 43. *decimi.* tum est. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitudine

dine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina linea, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit vtrumque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (aliàs enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (aliàs enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus aliæ tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedat incommensurabile, vt manifestum est.

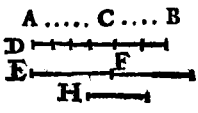
RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicit secundi ordinis quartum appellans; secundam, quintum; & tertiam, sextum.

xlviij. xlij.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ex iis quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus A C, non sit quadratus, ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad A C, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico F G, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex E F, F G, cum proportionem habeant, quam numeri A B, A C,



a 6. decimi. a commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, F G, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est E F, Rationalis. Igitur & F G, Rationalis est. Quia vero A B, ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, proportionē quam numerus quadratus ad quadratum. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, sit autem A B, maior, quam A C, erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propos. 14.

b 9. decimi

c 37. decimi.

posi. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est vt A B, numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit quoque, per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, videlicet ad excessum, quo antecedens A B, superat consequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac proinde rectę E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E F, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primã. Quod faciendum erat. a 9. decimi.

PROBL. 14. PROPOS. 50. xlix. xliij.
INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, *b* commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia vero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; *d* Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex E F: Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; sit autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque minus nomen F G, expositæ Rationali D, commensu-

b 6. decimi.

c 9. decimi.

d 37. decimi.
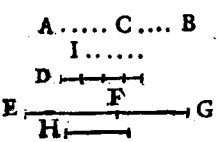
rabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam A C. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum.

l. xvij.



Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel sola vnitate ab A C, vel binario. (Vnitate quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad A C, quadratum facit. Vt si A C, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si A C, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, ad A C, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F. *a* Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, E F, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Quia vero I, ad A B, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *b* erunt D, & E F, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. *c* Erunt ergo quadrata ex E F, F G, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ E F, F G, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum E F, ostensa sit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad A C, hoc est, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *d* erunt E F, F G, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo E F, F G, Rationa-

a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 6. decimi.

d 9. decimi.

tionales potentia tantum commensurabiles; a Atque ideirco tota E G, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; Et vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit ex æqualitate vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E G: Non habet autem I, ad A C, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & F G, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; b ac propterea rectæ D, & E G, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; Est autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius quam quadratum ex E G. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum E F, F G, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit E G, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.
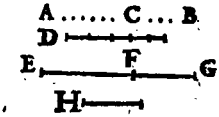
a 37. decimi.

b 9. decimi.

PROBL. 16. PROPOS. 52. Ij. xlv.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt compositus ex ipsis A B, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, cum Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, totam E G, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49 propos. quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionē rationis est, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H: Non est autem A B, ad C B, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex E F, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratū. c Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ E F, & H. Itaq; cum maius nomen E F, plus possit, quā minus F G, quadrato



c 9. decimi.

drato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen E F, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

liij. xlvj. **PROBL. 17. PROPOS. 53.**

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

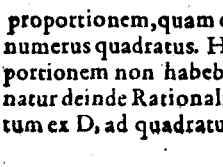
REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur F G, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. E G, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex E F, maius esse, quam quadratum ex F G: Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis est vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

liij. xlvij. **PROBL. 18. PROPOS. 54.**

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. a *Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos nō habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finem lib. 8. demonstrauimus.*) Sumatur alius numerus quicunq; I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius lib. & reli-

a 30. *septim.*

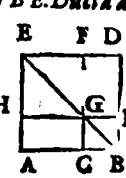


& reliqua fiant, vt in propoſ. 51. oſtendemuſque vt ibi, rectas D & E F, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam E G, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & F G, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit ergo maius quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49. per conuerſionem rationis, eſſe vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ad C B, atque adeò quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaq; cùm maius nomen E F, plus poſſit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutrum ipſorum nominum E F, F G, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat. a 29. dec.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta A B, vtcunque in C. Deſcribatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipſi B D, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; vtrumque autem rectangulorum D G, G A, comprehenſum eiſdem partibus: At verò rectangula C D, A I, ſub tota A B, & parte C B, contenta. Dico D G, medium proportionale eſſe inter quadrata F H, C I: At C D, medium eſſe proportionale inter quadrata A D, C I. Quoniam enim b *vt H G, ad G I, ita eſt tam F H, ad D G, quàm A G, ad C I; erit vt F H, ad D G, ita A G, ad C I:* c *Eſt autem A G, ipſi D G, æquale. Igitur erit quoque vt F H, ad D G, ita D G, ad C I; Atq; adeò D G, medium proportionale eſt inter quadrata F H, C I.*



b 1. ſext.

c 43. pri mi.

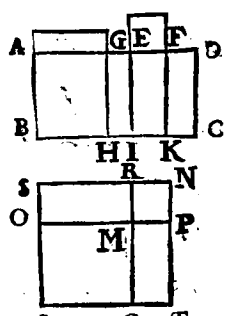
ex.sent. *RVRSVS quia est, a vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quàm AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoq; CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.*

liiij. xlviij.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum sub AG, GE, contentum, per 2. lemma propos. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; *b* in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducanturiam per puncta G, E, F, ipsis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. *c* Et parallelogrammo AH, æquale quadratũ fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, coniunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnam rectam lineam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnam rectam QR, vt demonstratum est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quòd anguli OMQ, PMR, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cùm rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint; ideoq; & tota OP, toti QR, *d* sit autem OP, ipsis SN, LT, & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoq; quadratum. QVQ-



b 18. *decimi.*

c 14 *secundi.*

d 34. *primi.*

QVONIAM verò rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF, *a* erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE, *b* Ac propterea & vt AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur est TM, ipsi EK. *c* Cùm ergo ipsi TM, æquale sit MS, *d* & ipsi EK, æquale sit FC, erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atq; adeò *d* recta OP, potest spatium AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

a 17. sexti. b xi. medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata b1. sext. LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur est TM, ipsi EK. c Cùm ergo ipsi TM, æquale sit MS, d & c 43. primi. ipsi EK, æquale sit FC, erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atq; adeò d 36. primi. recta OP, potest spatium AC, contentum sub AB, Rationali, & mi. AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

QVONIAM enim AG, GE, ostensæ sunt longitudine commensurabiles, *e* erit & tota AE, vtrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem AE, cùm sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atq; adeò cùm AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectę OM, MP, Rationales erunt.

e 16. decimi. f 20. decimi.

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG, & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, *g* eandem proportionem habentia, quam AG, EF, *h* incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. *i* Igitur rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, *k* cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. *l* Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

g 1. sext. h 10. decimi. i 10. decimi. k 1. sext. l 37. sexti.

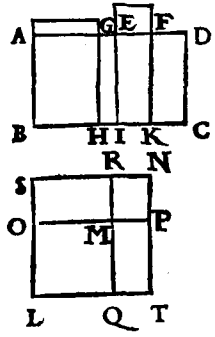
THEOR. 38. PROPOS. 56. lix. xlix.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineā, quæ potest spatium

tium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quàm ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua constituantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; *a* erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antetedēti propositione longitudine commensurabiles; *b* erit quoque tota AE, vtrique ipsarum commensurabilis. Quare cùm AE, maius nomē existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cùm ergo vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at verò AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; *c* erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quàm AB, GE, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. Igitur *d* rectangula AH, GI, Media sunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.



QVIA verò AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; *e* erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi verò AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles: Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, *f* incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt; *g* Ideoque & rectæ OM, MP, longitudi-

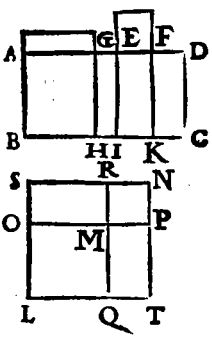
a 73. decimi. *b* 16. decimi. *c* 14. decimi. *d* 22. decimi. *e* 10. decimi. *f* 10. decimi. *g* 10 decimi.

tudine sunt incommensurabiles, *a* cùm eandem habeant pro- *a 1. sext.*
portionem, quam L M, M T. Cùm ergo ostensum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles, erũt O M, M P, Mediæ potentia solùm commensurabiles. Quoniam denique E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoque longitudine commensurabilis; *b* erunt etiam E I, b 12. *de*
E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cùm E I, Ra- *cimo.*
tionalis sit, erit & E F, Rationalis. *c* Quare E K, rectangulum, c 20. *de*
Rationale est; Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, *cimo.*
æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, Rationaleq; continentes; *d* atque adeò O P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs d 38. *de*
prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & *cimo.*
ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 39. PROPOS. 57. LVij.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex definitione, Rationales potentia tantùm cõmensurabiles; & A E, plus poterit, quàm E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum A E, E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam O P, posse spatiũ A C: Et vt in antecedenti propos 56. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantùm commensurabiles; propterea quòd A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipsi A B, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam verò E D, E F, sunt commensurabiles longitudine; est q; E D, ipsi A B, Rationali, hoc est ipsi E I, longitudine incommensurabilis; *e* erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommensura- e 14. *de*
bilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quòd E F, dimidia sit ipsius *cimo.*



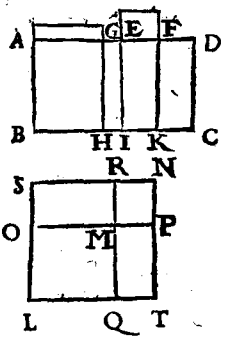
E D, Ra-

E D, Rationalis; & E I, expositæ Rationali A B, æqualis. Igitur E F,
a 22. de cimi. E I, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; a Ac propterea E K, Medium est: ideoque & M T, æquale ipsi E K, Medium est, quod sub Medijs O M, M P, continetur. Itaq; cùm O M,
b 22. de cimi. M P, Mediæ sint potentia solùm commensurabiles, contineant- que spatium Medium; b erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominib. tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

1 v i j. 1 j.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.



CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim A E, ipsius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus poterit, quàm E D, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique A E, ipsi A B, commensurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in
c 19. de cimi. propos. 55. c Erunt ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim A G, G E, longitudine incommensura-
d 10. de cimi. biles sunt; d erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeò & quadrata L M, M N, ipsis A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia verò A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B;
e 20. de cimi. erit & A E, Rationalis; e & rectangulum A I, sub ipsis contentũ, Rationale. Est autem A I, æquale composito ex quadratis L M, M N. Compositum ergo ex quadratis L M, M N. Rationale est.

ET quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, longitudine incommensura-

surabilis; Et est E F, Rationalis, cùm sit Rationalis E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. a Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illi æquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cùm O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis M T, Medium; b Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendū. a 22. decimi. b 40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59. lviij. liij.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Sunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus potest, quàm E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: & deniq; E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 55. c Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Et quia A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali A B; erunt A E, A B, Rationales potentia tantùm commensurabiles. d Quare rectangulum A I, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem A I, æquale composito ex quadratis L M, M N. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia E D, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali A B, cùm sit minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, commensurabilis longitudine, & Rationalis. e Quare E K, sub Rationalibus E I, E F, longitudine commensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & M T, sub O M, M P, contentum Rationale erit, cùm ipsi E K, sit æquale. Quamobrem cùm rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Medium; Rectangulum verò M T, sub ipsis contentum, Rationale; f Irrationalis erit tota O P: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contine-

c 19. decimi. d 22. decimi. e 20. decimi. f 41. decimi.

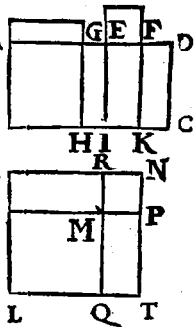
tineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

lix. liij.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commensurabiles, & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & denique neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit commensurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in superioribus, *a* eruntq; AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam verò ostendemus similiter, vt in propos. 55. rectàm OP, posse spatium AC. Item vt in propos. 58. rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, vt in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propos. 58. erit quoque MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine ipsi ED, hæc verò eidem commensurabilis; *b* erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles. *c* Igitur & AI, EK, incommensurabilia sunt. *d* cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis, *e* erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.



a 19. decimi.

b 13. decimi.

c 10. decimi.

d 1. sext.

e 42. decimi.

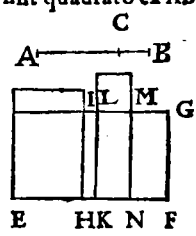
lx. liiij.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus,

bus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; *a* & ad Rationalem expositam D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cùm quadrata ex A C, C B, vnà cum rectangulo bis sub A C, C B, *b* æqualia sint quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per constructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipsis L K, G F, parallela agatur, M N: eritque vtrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. *c* Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, quòd tota A B, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; *d* quorum vtrique cùm etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit: quod cùm applicatũ sit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine cõmensurabilem.



RVRSVS quia A C, C B, Rationales sunt solùm potentia commensurabiles, *e* erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeò, & quod bis sub ipsis, cùm sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, *f* facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. *g* Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantùm cõmensurabiles; *h* Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primã esse.

QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B; erit quoq; L N, medium proportionale inter D H, I K, atq; adeò *i* cùm rectæ D I, L M, I L, eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K; erit quoq; recta L M, media proportionalis inter D I, I L. *k* Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commensurabilia sunt, quòd A C, C B, ponantur potentia commensurabiles;

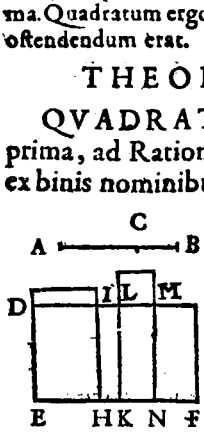
a 25. primi.
b 4. secundi.
c 37. decimi.
d 16. decimi.
e 22. decimi.
f 23. decimi.
g 13. decimi.
h 37. decimi.
i 1. sext.
k 17. sexti.

erunt & DH, IK, ipsis æqualia commensurabilia. *a* Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK, maius est, quàm LF, quòd & quadrata ex AC, CB, maiora sint, per lemma propos. 39. huius libri, quàm rectangulum bis sub AC, CB; erit & recta DL, maior quàm LG, *b* cùm DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam DL, maior est, quàm LG, & ad DL, applicatur rectangulum sub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI, IL, æquale quadrato ex LM) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commensurabiles, vt est demonstratum; *c* poterit DL, maior plus quàm LG, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm DG, ostensa sit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus posse, quàm LG, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. decimi.
b 1. sext.
c 18. decimi.

lxj. lv. THEOR. 44. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.



SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. Constituantur enim eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quòd sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes *e* Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. *f* Cùm ergo proportrea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium, quòd cùm applicatum sit ad Rationalem DE, *g* erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis.

d 45. primi.
e 38. decimi.
f 26. decimi.
g 23. decimi.

bilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est, erit & eius duplum, nempe L F, Rationale, quod cùm applicatum sit ad Rationalem L K, *a* erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; *b* erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cùm D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solùm commensurabiles; *c* ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam verò, vt in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quàm minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cùm ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quàm minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

a 21. decimi.
b 13. decimi.
c 37. decimi.

THEOR. 45. PROPOS. 63. lxiij. lvj.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Mediis secunda A B, cuius maius nomen A C, *d* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis secundam A B, componentes, *e* Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeò rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, & Media. *f* Cùm ergo propterea & totum D K, vtrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile, erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem D E, *g* erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, C B, Medium est; erit & eius duplum L F, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem L K; *h* erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, longitudine est incommensurabilis; estque vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propositionis 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, *i* erit quoque quadratum ex A C, rectangulo sub A C, C B, incommensurabile. *k* Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis

d 45. primi.
e 39. decimi.
f 16. decimi.
g 23. decimi.
h 23. decimi.
i 10. decimi.
k 16. decimi.

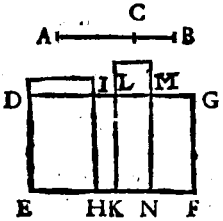
dratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex A C, C B, commensurabilia sint, quippe cùm rectæ ipsæ potentia ponantur cõmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub A C, C B. Igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, rectangulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habentes a longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm cõmensurabiles; b ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam verò vt in propos. 61. ostendemus D L, esse maius nomen, posseq; plus, quàm minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cùm D L, maius nomen plus possit, quàm L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum D L, L G, Rationali expositæ D E, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

a 10. de cimi.

b 37. de cimi.

lxiij. lxvij. THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



c 45. primi.

d 45. de cimi.

SIT maior A B, cuius maius nomen A C, c & ad Rationalẽ D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartam. Constituantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, d potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum verò sub ipsis, Mediũ; erit quoq; D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At verò L F, duplum eius quod sub A C, C B, continetur, Mediũ. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; e erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cùm L F, Medium sit applicatum ad Rationalem L K, f erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, D E, longitudine incommensurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitudine: hæc verò eidem D E, longitudine incommensurabilis; g incommensurabiles e-

e 21. decimi.

f 23. decimi.

g 13. decimi.

les erunt longitudine D L, L G: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L H, Rationales potentia tantùm commensurabiles; *a* ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam verò vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quòd rectæ A C, C B, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommensurabilia, *b* atque adeò & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam verò vt in propos. 61. ostendimus, D L, maior est, quàm L G, & ad D L, applicatum est rectangulum sub D I, I L, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles, *c* poterit D L, plus quàm L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cùm & ipsa D L, (maius nomen ipsius D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta, Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 37. decimi.
b 40. decimi.
c 39. decimi.

THEOR. 47. PROPOS. 65. LXIV. LVIIJ.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomen A C, *d* & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ A C, C B, componentes A B, potentem Rationale ac medium, *e* potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit D K, æquale composito ex quadratis rectarum A C, C B, Mediũ, & L N, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur, atque adeò ipsius duplum, L F, Rationale. Igitur Medium D K, applicatum ad Rationalem D E, *f* facit latitudinem D L, Rationalem, & longitudine Rationali D E, incommensurabilem: At verò Rationale L F, ad Rationalem L K, applicatum, *g* facit latitudinem L G, Rationalem longitudine ipsi L K, hoc est, ipsi D E, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum D L, L G, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali D E, illa verò longitudine incommensurabilis, *h* erunt D L, M G, longitudine incommensurabiles. Quare D L, L G, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, *i* Ac propterea D G, est ex binis nomi-

d 45. primi.
e 41. decimi.
f 23. decimi.
g 21. decimi.
h 13. decimi.
i 37. decimi.

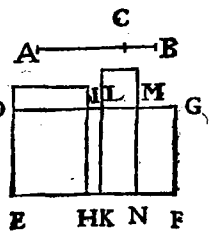
nibus. Iam verò, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M, & vt in antecedenti propos. DL, maius nomen esse, atq; posse plus, quàm L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen L G, ostensum sit expositæ Rationali D E, longitudine commensurabile; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

lxv. lix.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina Media potens recta A B, cuius maius nomen A C, a & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ A C, C B, componentes ipsam A B, potentem bina Media, b potentia incommensurabiles sunt, faciuntque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam D K, illi composito æquale, quàm L F, rectangulo bis sub A C, C B, æquale, Medium. Et quia Media D K, L F, applicata sunt ad Rationalem D E; c erunt eorum latitudines D L, L G, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. d Quoniam verò compositum ex quadratis rectarum A C, C B, incommensurabile est rectangulo sub A C, C B; eidem verò rectangulo sub A C, C B, commensurabile est rectangulum bis sub A C, C B, cùm hoc illius sit duplum; e Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, D K, incommensurabile rectangulo bis sub A C, B C; hoc est, ipsi L F; Ac propterea rectæ D L, L G, eandem rationem habentes cum D K, L F, f longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt D L, L G, potentia solùm commensurabiles; g Ac proinde D G, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus D L, esse maius nomen, posseq; plus quàm L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm ergo ostensum sit neutram ipsarum D L, L G, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus sexta. Quadratū igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum



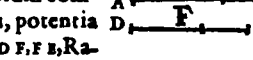
a 45. primi.
b 42. decimi.
c 23. decimi.
d 42. decimi.
e 13. decimi.
f 10. decimi.
g 37 decimi.

THEOR.

THEOR. 49. PROPOS. 67. lxvj. lx.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque A B, diuisa in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitq; recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B. a Fiat enim vt tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. b Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; c erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: d Sunt autem A C, C B, cùm sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad F E:



Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles; e erunt & D F, F E, potentia solùm commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; f Ac propterea D E, ex binis est nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; g poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt A B, sit ex binis nominibus prima; h erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cùm vtraque, & Rationalis, & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt A B, sit ex binis nominibus tertia; i erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

AT si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; k poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

a 12. sexti.
b 19. quinti.
c 10. decimi.
d 37. decimi.
e 10. decimi.
f 37. decimi.
g 15. decimi.
h 12. decimi.
i 13. decimi.
k 15. decimi.

quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantùm:) & DE, esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si AC, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & DF, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est, sed Rationali quidem commensurabilis longitudine: At verò DF, potentia tantùm, ex hypothesi. Immò verò, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt DE, illi potentia tantùm commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C, sitq; ei commensurabilis potentia tantùm DE, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq; esse in sua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, vt DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nã si potest fieri, sit vtraq; ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumq; maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis

a 12. decimi. *longitudine.* a *Quare & inter se longitudine commensurabiles erũt. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita AB, ad DE,*

b 10. decimi. b *erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraq; AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim vtrumq; nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq; adeò & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quàm CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, vt AC, ad CB, ita

c 15. decimi. *DF, ad FE,* c *poterit quoque DF, plus quàm FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus*

posita

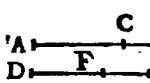
possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; a poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus ettam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB. a 15. decimi.

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illis commensurabilis sit.

THEOR. 50. PROPOS. 68. lxvij.

EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem. lxj.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, sitque ei recta DE, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem. *b* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *c* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine cõmensurabilis DE; *d* erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. *e* Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: *f* Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; *g* erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; *h* Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. *i* Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; *k* atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FD, ei



b 12. sexti. c 19. quinti. d 10. decimi. e 24. decimi. f 38. decimi. g 10. decimi. h 38. vel 39. decimi. i 10. decimi. k 18. decimi.

commensurabile, Medium, ex corollario propos. 24. huius lib.
a 39. decimi. a Ac propterea & D E, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine commensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

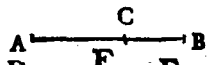
EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam D E, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi A E, qua est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

lxviij. lxij.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem habeant rationem, quam tota A B, ad totam D E.



b 10. decimi. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *b* erunt quoq; tam A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando vt A C, ad C B, ita
c 22. sexti. D F, ad F E, *c* erit vt quadratum ex A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compositum ex quadratis rectarum D F, F E, ad quadratum ex F E; Et conuertendo, vt quadratum ex C B, ad compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E; Et permutando vt quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E. Commensurabile est autem quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, quadrato ex F E, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *d* Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile est
d 10. decimi. c 40. decimi. f 9. def. fin. compositum ex quadratis rectarum D F, F E. *e* Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, componant Maiorem A B. *f* Igitur & hoc Rationale est.

RVRSVS quia est vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; Vt autem A C, ad C B, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, & vt D F, ad F E, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E, ex lem-

ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E: Et permutando vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum ſub A C, C B; ad rectangulum ſub D F, F E: Eſt autem quadratum ex A C, quadrato ex D F, commenſurabile, quod rectæ A C, D F, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum ſub A C, C B, rectangulo ſub D F, F E, commenſurabile eſt. *b* Eſt autem rectangulum ſub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum ſub D F, F E, illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quoniam vero eſt vt A C, ad C B, ita D F, ad F E, *c* ſuntque A C, C B, potentia incommenſurabiles, cum componant Maiorem A B; *d* Erunt quoque D F, F E, potentia incommenſurabiles. Itaque cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium, vt oſtenſum eſt; *e* erit tota D E, Maior. Maiori ergo commenſurabilis & ipſa Maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

a 10. *decimi.*
b 40. *decimi.*
c 40. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 40. *decimi.*

THEOR. 52. PROPOS. 70. lxii. lxiij.

RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

SIT (repetita figura antecedentis propoſ.) recta A B, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eiq; commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe potentem Rationale ac Medium. Conſtructis enim iiſdem quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B. commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, F E: *f* Eſt autem illud compoſitum Medium, cum rectæ A C, C B, componant ipſam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub A C, C B, *g* quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub D F, F E, atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt D F, F E, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; *h* erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

f 41. *decimi.*
g 41. *decimi.*
h 42. *decimi.*

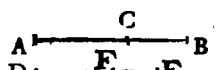
THEOR.

lxx. lxiv.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis D E, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & D E, esse bina Media potentem. Cõstructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum A B, C B, composito ex quadratis rectarum D F, F E, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub A C, C B, esse commensurabile rectangulo sub D F, F E. a Cum ergo tam compositum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum sub A C, C B, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius lib. tam compositum ex quadratis rectarum D F, F E, quam rectangulum sub D F, F E, Medium. Sed & D F, F E, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremo b quia compositum ex quadratis rectarum A C, C B, & rectangulum sub A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest; Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque compositio ex quadratis ipsarum; c erit D E, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.



a 42. decimi.

b 42. decimi.

c 42. decimi.

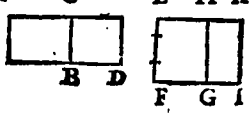
lxxj. lxv.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, vel maius quam C D, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo maius,

maius, *a* & exposita Rationali E F, applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B, & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, vt totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium, erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem E F, *b* erit E H, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis; *c* At vero H K, Rationalis, & eidem E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia E G, H I, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus; quod E G, Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Medium; *d* erunt E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles; *e* Ac propterea E K, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque E H, maior quam H K, *f* cum D H, H K, eandem rationem habeant, quam E G, H I. Iam vero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, *g* Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

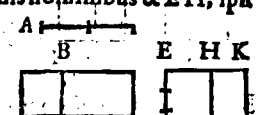


a 45. *primi.*
b 21. *decimi.*
c 23. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 37. *decimi.*
f 1. *sext.*
g 55. *decimi.*

SI vero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit E A, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & spatium A D, *h* Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

h 58. *decimi.*

SIT deinde A B, minus quam C D, & eadem constituantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, E K, ex binis nominibus & E H, ipsi E F, longitudine commensurabilis. Et quia A B, minus est quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rursus H K, maius nomen ipsius E K, quę est ex binis nominibus, plus quam E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit E K, ex binis nomini-



nominibus secunda; cum E H, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali E F, vt ostensum est. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus secunda E K, atque adeo & spatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compositum, *a* Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima.

a 56. *decimi.*

SI vero H K, plus possit quam E H, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atque adeo & spatium A D, *b* Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

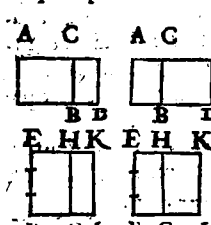
b 59. *decimi.*

lxxij. lxvj.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

SI duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommensurabilia A B, C D. Dico rectam quæ potest totum spatium A D, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Etit enim rursus A B, vel maius, quam C D, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias essent A B, C D, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia A B, C D, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia E G, H I, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum E G, H I, Media sint, applicenturque ad Rationalem E F,) *d* Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles; *e* ac propterea E K, ex binis nominibus est. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit vt in antecedenti propos. E H, maius nomen ipsius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quã H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum



c 10. *decimi.*

d 23. *decimi.*

e 37. *decimi.*

cum vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, a Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. a 57. decimi.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, b Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. b 60. decimi.

QVOD si AB, minus sit, quam CD, non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se commensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se easdem esse.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, c latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. c 23. decimi.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61. decimi.

ET quadratum eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, e latitudinem facit ex binis nominibus secundam. e 62. decimi.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, f latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. f 63. decimi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, g latitudinem facit ex binis nominibus quartam. g 64. decimi.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, h latitudinem facit ex binis nominibus sextam. h 65. decimi.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, i latitudinem facit ex binis nominibus sextam. i 66. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus: perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senariis.

IN primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis se-

dius secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum divisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis dividi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inventionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextæ.

IN quarto, quem absolvunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quanam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quartæ, vel quintæ, vel sextæ.

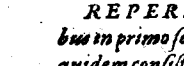
IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadratæ linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicatæ.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absolvitur, demonstravit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicavit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusvis lineæ Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.

SIT enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & dividatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel DB, æqualis sumatur E.



Dico E, mediam esse secundum Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & esse quoq; ex binis nominibus. Quoniam enim AC, superat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem recta DB; perspicuum est, dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commensurabilis est longitudine toti AB, cum hæc illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SE-

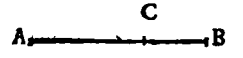
SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex aliis lineis irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus septem senariis de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. lxxiij. lxviij.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulũ sub AB, AC; Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; *a* erũt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. decimi.

b 16. decimi.

c 7. secundi.

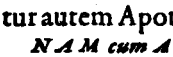
SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; a erit compositæ ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

a 37. decimi

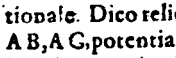


lxxiv. lxix.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia, b atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. c Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. d Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt: Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.



b 16. decimi.

c 7. decimi.

d 17. decimi.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI à

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, sint Media potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; a erit compositæ ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima. a 38. decimi

THEOR. 58. PROPOS. 76. lxxv.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. lxx.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; *b* erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumq; ipsorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis vtriq; commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub AB, AC, ex eotoll. propos. 24. huius lib. Medium. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. *d* Medium autem non superat Medium Rationali. Nón ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.



b 16. decimi

c 7. secundi

d 27. decimi.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

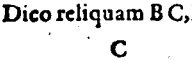
QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum
a 39. *commensurabiles, continentque Medium; a erit composita ex ipsis Ir-*
decimi. rationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius no-
men AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex ma-
iori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome secunda.

lxxvj. lxxj.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; b erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. c Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. d Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.



b 10. *decimi.*
c 7. *secundi.*
d 10. *defin.*

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ fa-
ciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod au-
e 40. *tem sub ipsis continetur, Medium: e erit composita ex ipsis Irratione-*
decimi. lis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC.

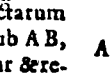
Aufer-

Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, & relinquatur Minor B C.

THEOR. 60. PROPOS. 78. lxxvij. lxxij.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; fit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, A C, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub A B, A C, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub A B, A C. Rationale; *a* erit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, incommensurabile rectangulo bis sub A B, A C. *b* Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C. Igitur & rectangulum bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, incommensurabile est rectangulo bis sub A B, A C. *c* Sunt ergo rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub A B, A C, Rationale sit; *d* erit quadratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub A B, A C, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. *defin.* b 7. *secundi.* c 17. *decimi.* d 10. *defin.*

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totũ efficiens.

CVM enim A B, A C, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; e erit compositum ex ipsis Irratio- e 41. *decimi.*

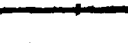
nalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est A B, minus autem A C. Auferatur igitur minus nomen A C, à maiori A B, vt B C, cum Rationali Medij totum efficiens relinquatur.

lxxviij. lxxiij. THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. *a* Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale est rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub A B, A C, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub A B, A C, continetur, sit commensurabile) quadrato ex B C. *b* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub A B, A C, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

a 27. secundi.



b 27. decimi.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI à maioti nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

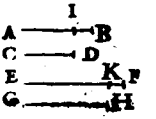
QVONIAM cum A B, A C, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum, erit compositum ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur minus nomen A C, ex maiori A B, vt relinquatur B C, cum Medio Medium totum efficiens.

LEM-

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitque IB, excessus inter AB, CD, aqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, aqualis. Eodem modo aqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint aquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, aquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.



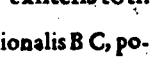
COROLLARIVM.

EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

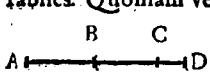
THEOR. 62. PROPOS. 80. lxxix. lxxiv.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalem nō congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; erit AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantū commensurabiles. Eodem



modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulū bis sub A D, B D; (superat enim compositū ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; *a* quod compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodem ex A B; *b* cum & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D, vna cum quadrato ex A B,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, D B. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrumque Rationale sit. (Nam cum A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata Rationalia, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtrique illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; *ex 9.* defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium Rationale est. *d* Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. *e* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Rationalis non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.



a 7. *secundi.*

b 7. *secundi.*

c 16. *decimi.*

d 22. *decimi.*

e 27. *decimi.*

lxxx. lxxv.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipsi congruat A C, Media toti A C, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C,

A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media est potentia solùm ipsi A C, commensurabilis; *a* erit & A C, Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt A C, B C, potentia tantùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositũ ex quadratis rectarum A C, C B, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumque sit Rationale. (cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D.) Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile est, atque adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. *c* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

a 24. *decimi.*

b 16. *decimi.*

c 27. *decimi.*

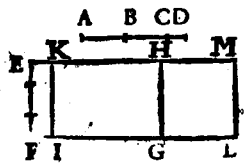
THEOR. 64. PROPOS. 82. lxxxj. lxxvj.

MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secunda A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantùm commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia

B D. Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, siquæ rectangulum sub A D, B D, Medium Exponatur Rationalis A E,
a 45. primi. ad quam applicetur rectangulum E G, æquale compositæ ex quadratis rectarum A C, B C, & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et deniq; aliud E L, æquale compositæ
b 7. sec. to ex quadratis rectarum A D, B D, *b* Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, vnà cum quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur sub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cùm enim B C, Media ponac 24. decimi. tur, *c* erit & A C, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia.

Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique eo-
d 16. decimi. rum; atq; idcirco & Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. *d* Igitur & E G, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cùm
e 23. decimi. applicetur ad Rationalem E F, *e* erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cùm applicetur ad Rationalem



f 23. decimi. K I, *f* erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius
g 10. decimi. lib. *g* erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G. (cùm enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commensurabiles;
h 16. decimi. erunt & earum quadrata commensurabilia. *h* Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplum, videlicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.
i 10. decimi. *i* Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationem cum E G, K G, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles. Quapropter cùm ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H,
k 74. decimi. potentia solùm commensurabilis ipsi E H, *k* erit E K, Apotome, & illi congruens K H. Similiter demonstrabimus E K, Apotomen esse, & illi congruentem K M. Non igitur Apotomæ vna tantùm congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis

existens

existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantùm congruere, a demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum. a 80 *decimi.*

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82.

MINORI vna tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. 77.

SIT Minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; at rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum sub AD, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autē excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. b Quare vnum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



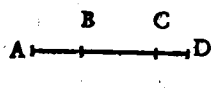
b 27. *decimi.*

THEOR. 66. PROPOS. 84. 83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensq;

cienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò ſub A C, B C, Rationale. Dico ipſi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò ſub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarũ A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cùm vtrumque ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi A B, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

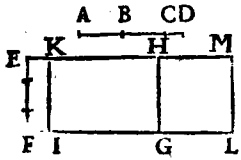


a 27. *decimi.*

lxxxiv. lxxix.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipſi verò congruens B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, facienſque & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Mediũ, & rectangulum ſub A C, B C, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, ita vt & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium ſit, & rectangulum ſub A D, B D, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium eſt; erit etiam E G, illi æquale. Medium,

dium. *a* Recta igitur E H, Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit & eius duplum K G, Medium. *b* Igitur & recta K H, Rationalis est, longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Et quoniam K G, commensurabile est rectangulo sub A C, B C, cùm illud huius sit duplum; at rectangulum sub A C, B C, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum A C, B C: *c* erit quoque K G, eidem composito, hoc est, ipsi E G, incommensurabile; ac propterea rectæ E H, K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem, *d* longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solùm commensurabilis ipsi E H; *e* erit E K, Apotome, & ei congruens K H. Non aliter ostendemus E K, esse Apotomen, & ei congruentem esse K M. Non igitur Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod est absurdum. *f* Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. de comm.
b 23. de comm.
c 14. de comm.
d 10. de comm.
e 74. de comm.
f 80. de comm.

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

SI

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

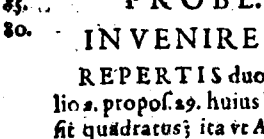
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

83. PROBL. 19. PROPOS. 86.

80. INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus A C, non sit quadratus; ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E F. Eritque E F, cùm commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad numerum A C, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, esse primam Apotomen.



a 6. dec. *a* Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo E F, ostensa sit Rationalis; erit & G F, Rationalis. Quia verò A B, A C, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. b 9. dec. *b* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantùm commensurabiles; c 74. dec. omn. *c* atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E F, plus quàm recta G F, quadrato ex H. Et quia est, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati.

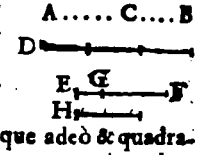
Igitur

igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; a Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 29. decimi.

PROBL. 20. PROPOS. 87. 86. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis G F, erítque G F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico E G, esse secundam Apotomen. Quoniam b enim quadrata ex G F, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ G F, E F, commensurabiles, saltem potentia Cùm ergo G F, sit ostensa Rationalis; erit quoque E F, Rationalis. Quia verò numeri A C, A B, atque adeò & quadrata ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; c erunt G F, E F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt G F, E F, potentia solùm commensurabiles; d Ideoque reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta E H, plus quàm G F, quadrato ex H Quoniam ergo est vt A C, ad A B, ita quadratũ ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: Ostendemus iam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi E F, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cùm tota E F, plus possit, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens G F, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit E G, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundã Apotomen. Quod erat faciendum.



b 1. decimi.

c 9. decimi.

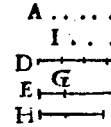
d 71. decimi.

PROBL. 21. PROPOS. 88. 87. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propositione 86. sumatur alius numerus I, vt in propositione 51. huius libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum

tum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. *a* Erúntque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, commensurabilia; atque adeò & rectæ D, & E F, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; *b* erunt rectæ D, & E F, longitudine incommensurabiles. Rursus hat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, ex eodem corollario propos. 6. huius lib. Dico E G, esse tertiam Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo E F, ostensa sit Rationalis, erit & G F, Rationalis; cùm illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia A B, A C, atque adeò & quadrata ex E F, G F, proportionem nõ habent, quam numeri quadrati; *d* Erũt rectæ E F, G F, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt E F, G F; põtentia solùm commensurabiles; Ac propterea cùm ex E F, auferatur G F, potentia illi solùm commensurabilis; *e* reliqua E G, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; & vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F: Non habent autem numeri I, & A C, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & G F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & G F, longitudine incommensurabiles Igitur neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H; Ostendemusque, vt in propos. 86 rectam H, esse ipsi E F, longitudine commensurabilem. Quapropter cùm tota E F, plus possit quàm congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex denn. E G, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.



a 6. decimi.
b 9. dec.
c 6. dec.
d 9. dec.
e 74. decimi.
f 9. dec.

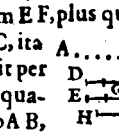
88. 89.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib.

ius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F; eritque propterea & E F, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H. Et quia est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex H. Cùm ergo A B, & C B, proportionẽ non habeant, quã numeri quadrati; [a] erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



[a] 9. dec.

PROBL. 23. PROPOS. 90. INVENIRE quintam Apotomen.

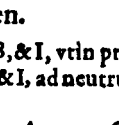
lxxxiii. lxxxiv.

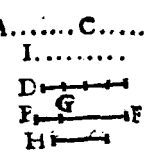
REPERTIS (repetita figura proximè antecedentis propositionis) duobus numeris A C, C B, vt in propositione præcedenti fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt A B, ad C B, ita quadratum E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91. INVENIRE sextam Apotomen.

xc. lxxxv.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeò neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D.





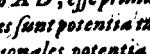
nali D. Possit iam E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi E F. Igitur cùm tota E F, plus possit, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextã Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

a 49. de cimi. *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.* a *Reperiatur prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen A C, & minus C B. Abscissa igitur ex A C, recta C D, qua æqualis sit ipsi C B: Dico A D, esse primam Apotomen. Quoniam enim A C, C B, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erunt etiam A C, D C,*

b 74. de cimi. *Rationales potentia tantùm commensurabiles.* b *Est ergo A D, Apotome. Et quia A B, plus potest, quàm C B, hoc est, quàm D C, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est A C, Rationali*



expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ. A D, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, & ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta, sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.

xcj. lxxvj. ## THEOR. 68. PROPOS. 92.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotomæ prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Apotomen esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solùm commensurabiles; & tota A E, longitudine commensurabilis Rationali A B; & deniq; eadem A E, tota plus poterit, quàm congruens D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc est, quartæ parti quadrati ex D E, applicetur ad A E, rectangulum æquale

c 18. de cimi. sub A G, G E, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17.

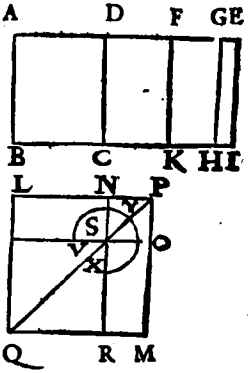
d 16. de cimi. huius lib. Et quia A E, plus potest, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: c erunt rectæ A G, G E, longitudine commensurabiles; d Ac propterea & vtraque toti A E,

longi-

longitudine commensurabilis erit: Est autem A E, Rationali A B, longitudine commensurabilis. *a* Igitur & vtraq; A G, G E, ipsi A B, longitudine est commensurabilis; atque ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis G H, E I, ipsi A B, parallelis, quæ ipsi B C, productæ occurrant in H I, *b* erit vtrumque rectangulum A H, G I, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraque D F, F E, longitudine commensurabilis est ipsi D E; & D E, longitudine incommensurabilis est Rationali A B; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cùm & A E, sit eidem A B, longitudine cõmensurabilis; *c* essent A E, D E, longitudine quoq; commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solùm potentia commensurabiles;) *d* erit etiam vtraq; ipsarum D E, F E, ipsi A B, longitudine incommensurabilis. Et quoniã vtraq; D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quare ducta F K, ipsi A B, parallela, *e* erit vtrumque rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Medium.

a 22. de cimi.

b 20. de cimi.



c 12. de cimi.

d 14. de cimi.

e 22. de cimi.

I A M verò ipsi A H, *f* fiat quadratum æquale L M, & ipsi G I, æquale fiat quadratum N O, communem habens cum L M, angulum L P M. *g* Erunt igitur quadrata L M, N O, circa eandem diametrum, quæ sit P Q. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum sub A G, G E, per constructionem, æquale est quadrato ex F E, *h* erunt tres rectæ A G, F E, G E, proportionales; *i* Ac propterea cùm A H, F I, G I, eandem cum ipsis habeant rationem; erit F I, medium proportionale inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, N O, illis æqualia. Est autem inter eadem L M, N O, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale L O. Igitur rectangula F I, L O, æqualia sunt: *k* Sed ipsi F I, æquale est D K, & ipsi L O, æquale est M N. Est ergo totum D I, toti gnomoni V Y X, cum quadrato N O, æquale. Est autem & totum A I, per constructionem, æquale quadratis L M, N O. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato T R, est æquale; Ac propterea recta T S, potest spatium A C. Dico T S, Apotomen esse.

f 14. secundi.

g 26. sexti.

h 17. sexti.

i 1. sext.

k 36. decimi.

Q V O N I A M enim spatia A H, G I, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt L M, N O, erunt quoque quadrata L M, N O, Ra-

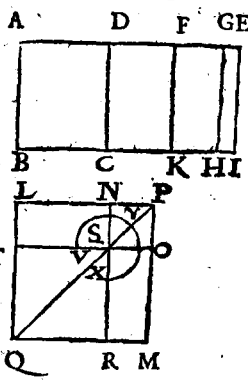
NO, Rationalia, atque adeò & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cùm vnum sit Irrationale, alterum verò Rationale. Igitur rectæ TO, SO, *a* eandem rationem habentes cum LO, NO, *b* longitudine incommensurabiles sunt; *c* Atque idcirco reliqua TS, Apotome est Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. *sext.* b 10. *decimi.* c 74. *decimi.*

XCII. LXXXVIJ. THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI *spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.*

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia construantur, vt in propositione præcedenti. *d* Erunque rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine commensurabiles; *e* Ac propterea & vtraq; toti AE, longitudine commensurabilis. Est autem AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi AB, longitudine, cùm DE, eidem AB, ponatur longitudine commensurabilis; *f* essent AE, DE, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantùm commensurabiles. *g* Igitur & vtraque ipsarum AG, GE, longitudine incommensurabilis est eidem AB. Est autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam AB, AG, quàm AB, GE, potentia solùm commensurabiles; *h* Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Medium est. Rursus quia vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est; &



d 18. *decimi.* e 16. *decimi.* f 12. *decimi.* g 14. *decimi.* h 22. *decimi.*

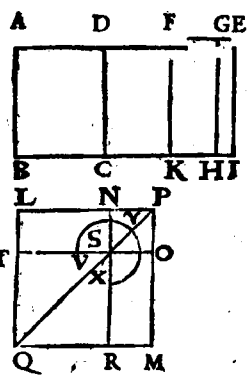
est; & ponitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoque vt in scholio propositionis 12. huius lib. ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis vtraque D F, F E; atque adeò & Rationalis. *a* Vtrumque ergo rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam. *a* 20. *de cimi.*

QVONIAM enim A G, G E, longitudine sunt commensurabiles, *b* erunt & A H, G I eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeò & L M, N O, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ T O, S O, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quòd quadrata L M, N O, Mediis A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse) Media sint. Et quoniam F I, atque adeò sibi æquale L O, Rationale est, propterea que Medio N O, incommensurabile; *c* erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantùm commensurabiles. Cùm ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; *d* erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat. *b* 10. *de cimi.* *c* 10. *de cimi.* *d* 75. *de cimi.*

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, A G, G E, longitudine inter se commensurabiles; *e* Ac propterea & vtraque toti A E, longitudine commensurabilis erit. Est autem A E, posita incommensurabilis longitudine Rationali A B. *f* Igitur & vtraque A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cùm ergo vtraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam A B, A G, quàm A B, G E, Rationales potentia solùm commensurabiles; *e* 16. *de cimi.* *f* 14. *de cimi.*



a 22. decimi.

b 14. decimi.

c 22. decimi.

rabiles; a Ac propterea vtrumq; rectangulum A H, G I, Medium erit. Rursus quia D E, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali A B; erit quoq; vtraq; D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis existens, b eidem A B, longitudine incommensurabilis. Cùm ergo vtraq; D F, F E, Rationali D E, commensurabilis sit Rationalis; erunt tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles; c atq; propterea vtrumque rectangulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Mediæ Apotomen secundam.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 76. decimi.

QVONIAM enim A H, G I, Media sunt ostensa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commensurabiles esse, d commensurabilia sunt; Erunt & quadrata L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, commensurabiles sunt, saltem potentia. At verò quia A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estq; ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis G E, ipsi verò D E, commensurabilis est longitudine F E; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & G E, F E, longitudine incommensurabiles; e ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam G E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incommensurabilia. Quare T O, S O, eandem rationem habentes, quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt T O, S O, potentia solùm commensurabiles. Et quoniam continent L O, Medium; (cùm enim L O, æquale sit ipsi F I, vt cõstat ex propos. 92. quod Mediũ esse ostendimus; erit L O, Medium.) erit T S, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatiũ contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

XCIV. LXXXIX. THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Ra-

DE, Rationales potentia ſolùm commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. *a* Erunt ergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus poteſt quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulum ſub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; *b* erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, *c* erit DI, atq; adeò & eius dimidium FI; Medium. Amplius cùm AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; *d* incommenſurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam verò ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe minorem.

a 10. de cimi.
b 20. de cimi.
c 22. de cimi.
d 10. de cimi.

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia F, Mediũ eſt oſtenſum; erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeò rectæ TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quapropter cùm TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitq; compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum verò ſub ipſis, Medium; *e* erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

e 77. de cimi.

THEOR. 72. PROPOS. 96. xcv. xc.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

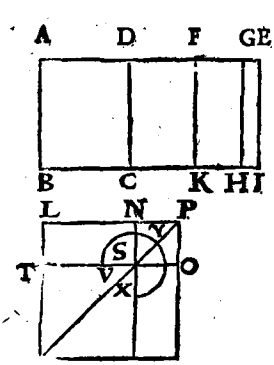
CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proximè antecedente) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & DE, Rationali AB, cõmenſurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo

rursus, vt in antecedenti propos. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incommen-
a 22. de cimi. surabilis est Rationali A B, vt in propos. 93. diximus; a erit rectangulum A I, Medium. Item quia D E, Rationalis est, & Ratio-
b 20. de cimi. nali A B, longitudine commensurabilis; b erit D I, atque idcirco & eius dimidium F I, Rationale. Rursus erunt, vt in præcedenti propos. A H, G I, incommensurabilia; poteritque, vt ostensum est in propos. 92. recta T S, spatium A C. Dico T S, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

QVONIAM enim ostensum est A I, Medium esse; erit & compositum ex quadratis L M, N O, rectorum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus F I, Rationale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, contentum, cùm illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demonstratum. Igitur cùm T O, S O, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum verò sub ipsis, Ra-
c 78. de cimi. tionale; c erit reliqua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

xcvj. xcj. THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma sexta A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, Rationali A B, commensurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua construantur, vt suprà. Erunt ergo rursus, vt in propos. 95. A G, G E, longitudine incõmensurabiles. Et quia tam

tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AE, longitudine incommensurabilis; *a* erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propos. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; *b* Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commensurabilia sint, *c* erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam vero demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

a 22. *decimi.* b 10. c 14. *decimi.*

QVONIAM enim AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoq; LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO, propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarū quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; *d* erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

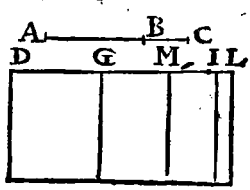
d 79. *decimi.*

THEOR. 74. PROPOS. 98. xcvij.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. xcij.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; *e* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totū DK, æquale sit composito ex quadratis rectarū AC, BC. *f* Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; si auferantur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam in

e 45. *primi.*



f 7. *secundi.*

riam in M, ductaque M N, ipsi D E, parallela, erit M K, æquale rectangulo sub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia; ideoq; commen-
a 16. decimi. surabilia. *a* Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale D K, Rationale. Quod cum applicetur ad
b 21. decimi. Rationalem D E, *b* erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationa-
c 23. decimi. lem G F; *c* erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Me-
d 10. decimi. dium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; *d* erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum com-
e 74. decimi. mensurabiles; *e* Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atque adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue propor-
f 17. sexti. tionales sunt. *f* Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia D H, I K, commensu-
g 19. decimi. rabilia sunt, *g* erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, mi-
h 18. decimi. nore, deficiensque figura quadrata; atque sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; *h* poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

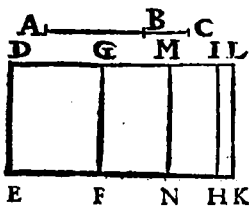
xcviij. cciij.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT

SIT Mediæ Apotome prima A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale: *a* Et ad Rationalem D E, quadrato ex A B, æquale applicetur rectangulum D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen ſecundam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ in antecedenti propoſ. ita vt rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod ſub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod ſub A C, B C, continetur ſemel. Quoniam igitur A C, B C, Mediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc eſt, illis æqualia, D H, I K, Media, & commenſurabilia; *b* ac proinde & totum D K, vtrique illorum commenſurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propoſ. 24. huius libri. Cum ergo D K, applicetur ad Rationalem D E, *c* erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, B C, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum G K, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, *d* erit G L, Rationalis longitudine commenſurabilis ipſi D E. Quia vero D K, Medium, id eſt, Irrationale, & G K, Rationale, incommenſurabilia ſunt; *e* erunt rectæ D L, G L, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *f* Ac propterea reliqua D G, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam D L, plus poſſe, quam congruentem G L, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum congruens G L, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome ſecunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam. Quod oſtendendum erat.



a 45. primi.
b 16. decimi.
c 23. decimi.
d 22. decimi.
e 10. decimi.
f 74. decimi.

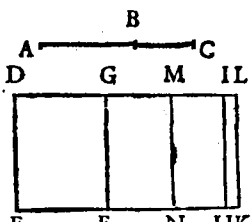
THEOR. 76. PROPOS. 100. XCIX.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam. XCIV.

SIT Mediæ Apotome ſecunda A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, contineatq; Medium: *g* Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe tertiam Apoto-

g 45. primi.

Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Oſtendemus iam, vt in
a 23. *decimi.* propoſ. præcedenti D K, Medium eſſe, & atque adeo rectam D L, Rationalem ipſi D E, longitudine incommenſurabilem. Et quia rectangulum ſub A C, B C, Medium eſt, atque ob id & eius duplum G K, *b* erit quoque G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quia vero A C, B C, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt A C, ad B C, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, B C, *c* erit quadratum ex A C, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. *d* Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C; quod quadrata ex rectis A C, B C, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub A C, B C, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub A C, B C. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, B C, hoc eſt, ipſi G K. *e* Atque adeo rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, potentia ſolum commenſurabiles; *f* Ac proinde reliqua D G, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus D L, totam plus poſſe, quam G L, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum D L, G L, Rationali D E, longitudine ſit commenſurabilis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.



b 23. *decimi.*
c 10. *decimi.*
d 16. *decimi.*
e 10. *decimi.*
f 74. *decimi.*

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia incommenſurabiles ſint, facientesque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationales; rectangulum vero ſub A C, B C, Medium: *g* & ad Rationalem D E, applicetur ſpatium D F, quadrato ex A B, æquale latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, illi æquale D K, Rationale eſt; *h* erit D L, Rationalis ipſi D E, lon-

g 45. *primi.*
h 21. *decimi.*

DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium est; *a* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium incommensurabilia sunt; *b* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles; *c* Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; *d* Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; *e* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. *decimi.*
b 10. *decimi.*
c 74. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 19. *decimi.*

THEOR. 78. PROPOS. 102. 61. xcvj.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: *f* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur enim eadem, quæ supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale DK, Medium est; *g* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum GK, Rationale est; *h* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt: *i* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensura-

f 45. *primi.*
g 23. *decimi.*
h 21. *decimi.*
i 10. *decimi.*

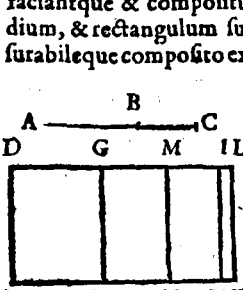
mensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; *a* Atque id-
a 74. decimi. circo reliqua D G, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrabimus D L, totam plus posse quam G L, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens G L, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

eij. xcrij.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C, Medium, incommen-
b 45. primi. surabileque composito ex quadratis ipsarum. *b* Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato, ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciēs D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quam rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; *c* Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum G K, commen-



c 23. decimi.

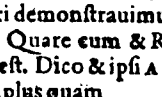
d 14. decimi. surabilia; *d* Erit & G K, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incom-
e 10. decimi. mensurabile; *e* propterea quę rectæ D L, G L, eandem habentes ra-
f 74. decimi. tionem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; *f* Atq; idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter vt propos. 101. totam D L, plus posse, quam congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 80. PROPOS. 104. ciij. xcviij.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB; *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; *c* Erunt quoque AC, DF, nec non & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, *d* reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, *e* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; *f* erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; *g* erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, *h* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

a 12. sexti.
b 12. quinti.
c 10. decimi.
d 74. decimi.
e 15. decimi.
f 12. decimi.
g 14. decimi.
h 15. decimi.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis

ineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta D E, commensurabilis sit ipsi A B, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis) & D E, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi A B. Non enim sequitur, si tota A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & D F, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expositæ, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero D F, potentia tantum ex hypothesi. Imò vero, si A B, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt D E, illi potentia tantum commensurabili, sit Apotome eadem ordine).

SIT enim A B, prima Apotome, secunda, quarta vel quinta, eique congruens B C, & sit D E, ipsi A B, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem E F, & partes A B, B C, ad partes D E, E F, eandem proportionem habere cum totis A C, D F. Dico nulla ratione D E, Apotomen esse ordine eandem ipsi A B. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam A C, tota, quam tota D F, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine: a atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt
a 12. decimi. A C, & D F. Quare cum sit vt A C, ad D F, ita A B, ad D E; b erunt
b 10. decimi. quoque A B, & D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque A B, D E, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraque congruens B C, E F, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & A B, D E, inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si A B, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam D E, quæ ipsi A B, potentia solum est commensurabilis, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt A C, ad B C, ita D F,
c 15. decimi. ad E F, c poterit quoque D F, plus quam E F, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt A C, plus possit, quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit quoque D E, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quamuis ordine non eadem ipsi A B: quia rur-
d 15. decimi. sus, cum sit vt A C, ad B C, ita D E, ad E F, d poterit quoque D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit A B, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.

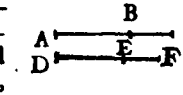
IN

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. c19. xcix.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen esse, & ipsi AB, ordine eandem. *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, *d* erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ, *e* erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniam enim est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles; *f* erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; *g* atque adeo & DE, Mediæ Apotomæ prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. *h* Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.



a 12. *sexti.* b 12. *quinti.* c 10. *decimi.* d 24. *decimi.* e 75. Col 76. *dec.* f 10. *decimi.* g 75. *decimi.* h 76. *decimi.*

cv.cxvj c.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Minorem esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; a erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratū ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quod rectæ BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. b Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, compositi ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium: Erit quoque rectangulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, sunt quæ AC, BC, potentia incommensurabiles; c erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub iisdem DF, EF, Medium; d erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. sexti.

b 10. decimi.

c 10. sexti.

d 77. decimi.

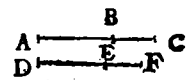
cvj. cxvij. cj.

THEOR. 83. PROPOS. 107.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT

SIT recta A B, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; at rectangulum sub A C, B C, Rationale: Sit autem D E, ipsi A B, commensurabilis quocunque modo. Dico & D E, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectæ D F, E F, potentia incommensurabiles. Igitur cum D F, E F, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; a erit D E, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



a 78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108. cviij. ciij.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoq; & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomodolibet commensurabilis. Dico & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile est compositū ex quadratis rectarum D F, E F, vt dictum est; & rectangulo sub A C, B C, commensurabile rectangulum sub D F, E F; Sunt autem compositum

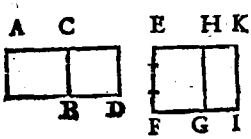
ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; a erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

a 79. decimi.

cviij. THEOR. 85. PROPOS. 109.

ciij. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, b ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est; c erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est, d erit HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque cum EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis, e erunt EK, HK, lõgitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles: f propterea que reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota EK, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc est, spatium AB, sibi æquale, g Apotome est. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota EK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc



b 45. primi.
c 21. decimi.
d 23. decimi.
e 13. decimi.
f 74. decimi.
g 92. decimi.

E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, *a* Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat. *a* 95. *decimi.*

THEOR. 86. PROPOS. 110. CIX.

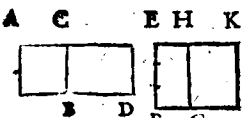
RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens. CIV.

DETRAHATVR à Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum spatium A B, potest, esse vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim construuntur, quæ supra. Et quia E I, Medio A D, æquale, Medium est; *b* erit E K, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Item quia H I, æquale Rationali C D, Rationale est; *c* erit H K, Rationalis ipsi E F, longitudine commensurabilis. Itaque cum H K, quidem ipsi E F, sit commensurabilis longitudine, at E K, eidem E F, longitudine incommensurabilis; *d* erunt H K, E K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles; *e* Ac proinde reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest, quã H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens H K, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma secunda E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, *f* Mediæ est Apotome prima. Si vero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens H K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc est, spatium illi æquale A B, *g* est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quam ob rem Rationali à Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat. *b* 23. *decimi.* *c* 21. *decimi.* *d* 13. *decimi.* *e* 74. *decimi.* *f* 93. *decimi.* *g* 96. *decimi.*

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX.

MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens. CV.

DETRAHATVR à Medio A D, Medium C D, quod incommensurabile sit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum spa-



tium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem quæ supra; quoniam EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia Media sunt, *a* erunt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia; *b* erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; *c* Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest; quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali BF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æquale; *d* Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *e* est ea, quæ cum Medio Mediũ totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

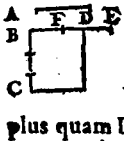
a 13. decimi.
b 10. decimi.
c 74. decimi.
d 94. decimi.
e 97. decimi.

cxj. evj.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest A, aliqua ex binis nominibus. Exposita autem Rationali BC, *f* applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est; *g* erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; *b* erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus



f 45. primi.
g 98. decimi.
h 61. decimi

nibus prima est, B F, F D, Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine sit commensurabilis eidem B C; a erunt quoque B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, sit longitudine commensurabilis parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B F, longitudine incommensurabilis est ipsi D E; (quod B E, D E, Rationales sint potentia solum commensurabiles) b erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solum commensurabiles. Quæ reliqua F D, c Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

a 12. decimi.

b 14. decimi.

c 74. decimi.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse eadem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, d latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. d 23. decimi.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen primam. e 98. decimi.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, f latitudinem efficit Apotomen secundam. f 99. decimi.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, g latitudinem efficit Apotomen tertiam. g 110. decimi.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, h latitudinem efficit Apotomen quartam. h 101. decimi.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, i latitudinem efficit Apotomen quintam. i 102. decimi.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, k latitudinem efficit Apotomen sextam. k 103. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.

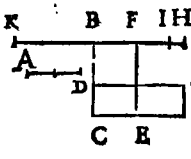
QVONIAM vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur,

ed Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, eas-dem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

exij. THEOR. 89. PROPOS. 113.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



à 45. primi.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; a & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F, Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis

binis nominibus. *a* Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A, atq; adeò rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt B E, C G; *b* erit vt B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D, ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D, maior quàm D C. Igitur & I F, maior est quàm F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; *c* & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. Ostenlum est autem esse vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles. *d* Igitur & F K, B K, potentia solùm commensurabiles sunt.

a 45. *primi.*
b 14. *vel* 16. *sexti.*
c 12. *sexti.*
d 10. *decimi.*

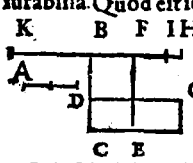
R V R S V S quia est vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, *e* erunt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, vt F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propos 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia verò C G, cùm Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem D C, applicatum *f* facit D G, latitudinem Rationalem ipsi D C, longitudine commensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K, ad F K. *g* Igitur vt quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, commensurabile est quadrato ex D C, (quòd rectæ B D, D C, sint Rationales potentia commensurabiles, cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) *h* Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K, ad quadratum ex F K; ita recta H K, ad B K. *i* Igitur longitudine commensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeò & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis. Igitur & H K, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & B K, ipsi H K, commensurabilis, Rationalis existit. Cùm ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solùm commensurabilis, erit quoque F K, Rationalis. Quare cùm F K, B K, Rationales sint, & potentia tantùm ostensæ commensurabiles, *k* erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.

e 12. *quinti.*
f 21. *decimi.*
g 22. *sexti.*
h 10. *decimi.*
i 16. *decimi.*
k 74. *decimi.*

Q V O N I A M verò ostensum est esse rectam H K, totam parti B K, longitudine commensurabilem, *l* erunt propterea & l 6. *def.*

B K, B H, longitudine inter se commensurabiles. Cùm ergo B H, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi D C; erit quoq; B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando vt B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modo D C, B K, ostensæ longitudine commensurabiles; a Erunt quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque cùm F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.

a 110. decimi.



ITEM quia demonstrauimus esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadẽ ratione cum B D, D C, nominib. ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO vel B D, plus potest, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest B D, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cùm sit vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; b poterit quoq; F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus potest quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidẽ B D, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si verò D C, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra ipsarũ B D, D C, sit Rationali longitudine cõmensurabilis; c erit quoq; neutra ipsarum F K, B K, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. decimi.

c 114. decimi.

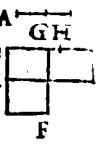
THEOR. 90. PROPOS. 114.

cxiij. o.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinẽ facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinẽ, quem ipsa Apotome.

SIT

SIT Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, *a* & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc ipsam B E, ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomæ ordine eandē. *b* Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale, eidem quadrato ex A, h.e. ipsi C E, latitudinem faciens B G. Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; *c* erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoq; E G, ad H, secundum proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in schol. propos. 10. lib. 6 conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad G E rectam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoq; H, reliqua ipsius B E, ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoq; vt B H, ad H E, ita E H, ad G H; atq; adeò H E, media proportionalis est inter B G, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, secundam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia verò fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cùm sint nomina Apotomæ B C, Rationales potētia tantùm commensurabiles. *d* Erunt quoq; B H, H E, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandē habentes rationem cum quadratis ex B H, H E, vt demonstrauimus, *e* longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoq; longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. 16. huius lib. At verò cùm B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; *f* erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeò Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia verò B H, H E, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantùm, & B H, Rationalis; erit quoq; H E, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solùm commensurabiles: *g* Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.

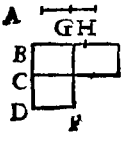


QVONIAM verò ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D, atq; adeò permutando B H, ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; *h* erit quoque

a 45. primi.
b 45. primi.
c 12. 6.
d 16. 6. & 1.
e 10. decimi.
f 21. decimi.
g 37. decimi.
h 10. decimi.

que HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

IMMO & in eadem proportione, cùm demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertium.



a 11. decimi.

POSTREMO vel BD, plus poteſt quàm CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, a poterit quoque BH, plus quàm HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quàm CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quàm HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si verò CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si verò neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; b erit quoque neutra ipſarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atque tertiis definitionibus, ipſa BE, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 14. decimi.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

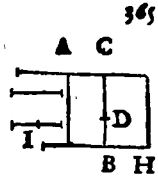
SI ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

CONTINEATVR ſpatium AB, ſub Apotoma AC, & ſub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commenſurabilia ſint nominibus CB, AB, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CB, ad AB. Poſſit autem recta F, ſpatium AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, c applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato

c 45. primi.

ex G,

ex e. *a* Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B, & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, vt C D, ad D B; atq; adeò vt C E, ad A E, & permutando, vt tota H I, ad totam C E, ita ablata B I, ad ablatam A E, *b* Erit ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, vt tota H I, ad totam C E; *c* Commensurabilis autem est longitudine H I, ipsi C E, quòd vtraque H I, C E, commensurabilis fuerit longitudine ipsi C D. *d* Igitur & B H, ipsi A C, longitudine est commensurabilis; *e* Atque idcirco & H C, ipsi B A, commensurabile erit, *f* cùm sit vt H B, ad A C, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale Rationale est. Igitur & B A, illi commensurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipsum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.



a 113. *decimi.*

b 19. *quinti.*

c 12. *decimi.*

d 10. *decimi.*

e 9. *decimi.*

f 1. *sext.*

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub A C, C E, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

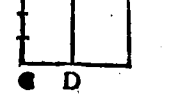
SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotoma nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori verò, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina C D, D B, nominibus C E, A E, potentia tantùm commensurabilia ponantur. Id quod facilè ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. cxv. cvij.

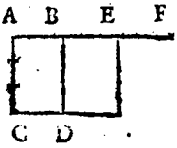
A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatiũ A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum,



tentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cùm quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, *a* latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66 98 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At verò quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

a 23. *decimi.*



QVOD si compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta BF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus BF, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cùm quadratum ipsius BF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

exviij. vij.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; *b* ac proptetea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G, Erit quoq; vt quadratum

b 5. *dec.*

dratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G. *a* (Cùm enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem *sint* & æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cùm sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cùm dimidium habeat, atq; adeò bifariam possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cùm seipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; *b* eò quòd impar imparem multiplicans imparem proereat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia verò EF, & G, in sua proportione minimi, *c* inter se primi sunt; & EF, ostensus est par; erit G, impar. (Si enim par esset, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque *primi* adeò non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH, *d* & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cùm quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cùm illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt suprà de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est. ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.



a 20. *huius.*
b 29. *nona.*
c 24. *sexti.*
d 11. *octaui.*

ALITER. Sit si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeò inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cùm enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeò & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex FF, duplus

duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex EF, a ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cùm ergo & G, seipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudine lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

a 14. octaui.



SCHOLIVM.

SED & affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. b *solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnũ intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solùm hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui verò 2. 8. 32. non quadrati. Quare cùm 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratũ, (c alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* d *Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.*

b 10. noui.

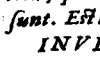
c 24. octaui.

d 9. decimi.

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CÆTERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, vt meritò omitti posset. Verùm quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus,



inuenientur & aliæ quàm plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ AC, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad C, ita est figura rectilinea quauis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem,

milem, similiterq; positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; a erunt rectilinea illa figura super A, & B, incommensurabiles. a 10. decimi.

RVRSVS b quoniam circuli; quorum diametri A, B, proportionem habent, quam quadratum ex A, & B, descripta: Quadratum autem hac, cùm sint figura rectilinea similes, similiterq; posita, proportionem habent, quam recta A, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. c Habebunt quoque circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam recta A, C. Sed recta A, C, incommensurabiles sunt longitudine. d Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. b 2. duo decimi. c 11. quinti. d 10. decimi.

IAM verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura rectilinea similes, similiterq; descripta super A, B, e habebunt pyramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilinea illa figura. Quare cùm rectilinea illa figura incommensurabiles sint, & ut modò est demonstratum; f incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata. e 5. 6. vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

QVOD si coni, vel cylindri æquè alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, g habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cùm ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, h Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solùm linea, & superficies incommensurabiles, verùm etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum. g 11. duodecimi. h 10. decimi.

EADEM autem ratione, si recta A, & B, longitudine commensurabiles sint, i ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, nec non & ipsarum circulos, commensurabiles esse, k atque adeò & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modò eandem habeant altitudinem, & perspicuum est. i 10. decimi. k 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus seu libris abundè de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, usurpauit; In subsequentibus verò tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissimè in libro decimo deinde exposuit, et constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissimè disseritur, perfectius posset cognosci. Nunc tandem aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioq; vocabulo stereometria est appellata.

EXPLICAT autem primùm, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam verò secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem seu crassitudinem, altitudinémve, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantùm habens, linea; quæ verò longitudini latitudinem adjecit, superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

POR-

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hac enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quòd punctum omnis est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hac enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum verò propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quòd & linea illius sit expers: Ita quoq;, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consulunt, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum ob superficiem, qua longa & lata exiſtit; profundum verò seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hac ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neq; verò alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quòd triplex tantùm dimensio possit assignari, vt perspicuè in commentarijs, quos in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

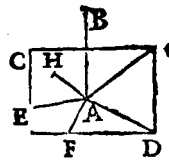
II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

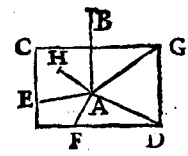
QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies verò lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cùm enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

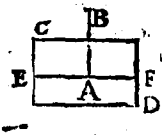


VT linea recta A B, plano C D insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum C D, cùm rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes plano ipsam tangũt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in vnam partem, quàm in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cùm angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque



deinceps BAH, rectus, ideoque illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt rectè concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, nemo strandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

VT autem recta quapiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuò secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc rectè colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnā: quia si duæ linea componant vnam rectā lineam, non necessariò efficitur, lineam, qua cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim AB,



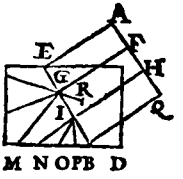
insistat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos constituere; atque idcirco non esse rectam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cùm AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominùs tamen ipsa cum EF, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucidè demonstrabitur propos. 4. huius lib.

IV.

PLANVM ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

INSISTAT planum AE, plano CD, ita vt linea AQ, sit in sub-

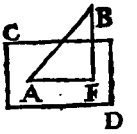
sublimi, hoc est, extra planum subiectum CD, at EB, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB, qua, & demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem sumptis quotcumque punctis G, I; ex ipsis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur linea FG, HI, ad planum alterum CD, recta fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quàm in alteram, sed aequabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cùm angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoq; illi aequalis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique à lineis FG, HI, anguli aequales. Quare planum AB, aequabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contrà, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.



V.

RECTÆ lineæ ad planum inclinatio est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum verò A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; erit q; necessariò angulus EAE, acutus, a cùm in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ



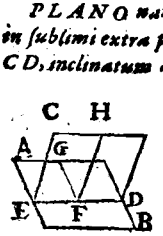
17 pri mi.

A B, ad dictum planum C D; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineæ A B, ad planum C D, quantus est dictus angulus acutus B A E.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO namq; A B, insistat planum C D, ita ut pars ad C, sit in sublimi extra planum A B, & pars ad D, in ipso plano A B, sitque C D, inclinatum ad A B; & communis eorum sectio sit D E. Si igitur ad D E, communem sectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; F G, quidem in plano A B, & F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani C D, ad planum A B, ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometra angulum C F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, siue is acutus sit, siue rectus, obtususve: quanquam propriè solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius aquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus verò recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus G F H, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cùm dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hac definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atq; adeò à recto magis recesserit.

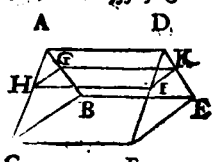
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTEL-

INTELLIGE, in quamcunq; partem, etiam infinitè, producantur: hoc est, siue ad dextram, siue ad sinistram: & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana nō conuenient, quamuis producantur infinitè ad dextram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius basis BCFE, auferatur q; fastigium AGHDKI. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cùm producta ad partes GH, KI, conueniant in fastigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem linea in eodem plano existentes ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quacunq;, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea verò recta, vel sunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, si nimirum in eodem existant plano; vel tandem nec sunt parallela, neq; vnquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum posita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cùm in eodem sint plano. Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.



IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterū circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit, vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quòd ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cùm illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

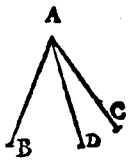
ÆQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figura solidæ non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuò huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem verò æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuò congruent: ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quàm duarum linearum, quæ se mutuò contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVÆ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus B A C, contentus duabus lineis A B, A C, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea A D, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarũ planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes nõ debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ A B, A C, A D, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis B A D, D A C, compositus. Quod si A D, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt A B, A C, iam non componetur angulus planus totus ex B A D, D A C, immò circa punctum A, tres plani consistent anguli B A D, D A C, C A B, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.



ALITER.

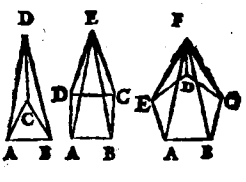
SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

HÆC definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti rectè intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano est, in quo rectæ A B, A D, & angulus D A C, in plano, in quo rectæ A D, A C; angulus denique C A B, in plano, in quo rectæ A C, A B, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque verò satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porrò solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis: Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his verò perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. *lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera verò curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.*

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.

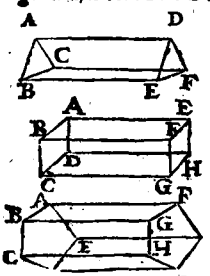


VIDELICET figura solida à planis A B C, A B C D, A B C D E, ad puncta D, E, F, constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, à quo omnia tenduntˌ, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel trian-

triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, praeter basin, triangula sunt A B D, A C D, B C D: Quadrangula vero A B E, A D E, B C E, C D E: Pentagona denique A B F, A E F, B C F, C D F, E D F.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.



FIGVRÆ scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula A B C, D E F: vel quadrangula A B C D, E F G H: vel pentagona A B C D E, F G H I K, &c. Parallelogramma vero A C F D, A B E D, C B E F: vel A B F E, A D H E, C D H G, C B F G: vel A B G F, A E K F, D E K I, D C H I, B C H G; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud est, quam columna quadam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figura indicant.

EX his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurima demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum

opposito-

oppositorum, eo quod tali prismati solum demonstratio illa conueniat. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Imò in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communis omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. *lib* 12 *apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.*

XIV.

SPHÆRA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi linea circumuoluta: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHÆRA est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de Vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

AXIS

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC, circa latus quiescens AB, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quadam figura, qua continetur duabus superficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæ igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus propè verticem A, rectus est. Cum enim latera

latera AB, BC, ponantur æqualia; a erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquivaleant uni recto, eo quod ABC, rectus est, erit unusquisque angulus BAC, semirectus. Eodemq; modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto BC, ut in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; b erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circumducto BC, ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC, c erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo uni recto æquivaleant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

a 5. primi.

b 18. primi.

c 18. primi.

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem, qua & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, ut ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto,

puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cæpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

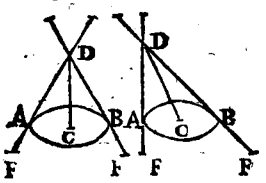
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentariis, quæ in Apollonium scripsit.

SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaque D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur eousque in circuli A B, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, à quo cæpit moueri: describit superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C.

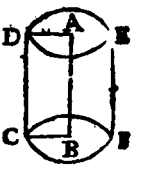


Conum vero appellat figuram contentam circulo A B, & ea superficie, quam D B, sola describit. Coni verticem punctum D. Axem D C. Basim A B.

ſum A B, circulum. Quod ſi D C, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumaſſumptâ figura.



VELVTI ſi rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quieſcens A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, deſcribunt; & altera curua, eaque connexa, quam latus C D, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta A B, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri ſunt circuli à duobus aduerſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

QVALES ſunt circuli à lateribus A D, B C, oppoſitis deſcripti.

EVCLIDES porrò ſolum cylindrum rectum hoc loco definit, eiusue videlicet axis rectus eſt ad vtramque baſim; atque de hoc ſolum in lib. 12. eſt diſputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata ex aliis Geometris ſimus propoſituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, qua Euclides de cylindro recto demonſtrauit, viſum eſt prius ex Sereno Antinſenſi definire cylindrum vniuerſe, vt completitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur ſcribit Serenus ad initium primi libri de ſectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſeſe æquidiſtantes & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & ſimul circumferatur recta linea diametrorũ terminos

ex ea-

ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cæpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

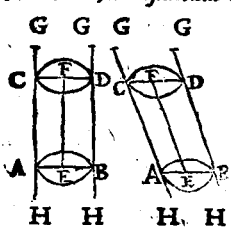
AXIS, recta linea, quæ per circulorũ centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentẽ ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidistantes A B, C D, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque A B, C D: Iunctaque recta A C, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri A B, C D, circa centra E, F, in planis circulorũ semper æquidistantes, vna cum recta A C, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri caperunt; describetur à linea A C, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; qua & augetur in infinitum, cum recta A C, ipsam describens in infinitum, producitur. Cylindrum vero appellat figuram A B D C, circulis A B, C D, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola A C, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos A B C D. Axem, rectam E F, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam A C. Quod si axis E F, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

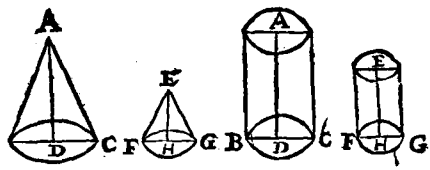


XXIV.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTI

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo cona A B C, E F G; Item duo cylindri; in conis autem axes A D, E H, & basium diametri B C, F G; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis A D, ad axem E H, ita B C, diameter basis ad F G, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula A D B, E H F, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, nec non rectangula A B, E F, quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt A D, ad E H, ita B C, ad F G; Sit autem vt B C, ad F G, a ita dimidia B D, ad dimidiam F H: erit quoque vt A D, ad E H, ita D B, ad H F: & permutãdo vt A D, ad D B, ita E H, ad H F. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum aquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erunt: Triangula quidem, b propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia aqualem, & circum aequales angulos latera proportionalia, aquiangula sunt, c ideoq; latera omnia circa angulis aquales habent proportionalia atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, d eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, D B, sunt aqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



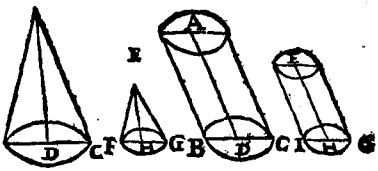
a 15. quinti.

b 6. sext.

c 5. sext.

d 34. primi.

QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, aquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri A B C, E F G: In conis autem axes sint A D, E H, & basium diametri B C, F G; similiter & in cylin-



cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt A D, ad E H, ita B C, ad F G, existentque anguli inclinationum A D B, E H F, tam in conis, quam in cylindris aequales inter se, dicentur & coni inter se, & cylindri quoq; inter se se similes; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula A D B, E H F, quam rectangula A B, E F, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in recto cono, cylindroque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli A D B, E H F, ponuntur aequales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis aequalibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis aequalibus, & aequilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis aequalibus, & aequilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis aequalibus, & aequilateris, & aequiangulis contenta.

XXIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis aequalibus, & aequilateris contenta.

HAEC sunt quinq; corpora, quae regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, aequalia sint, aequilatera, & aequiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymaeo quinque mundi corpora, quae simplicia à philosopho nuncupantur, nempe Caelum, Ignem, Aërem, Aquam, atq; Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphaera Ioannis à sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autem propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea sic depingere, vt vera eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprio in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet fa-

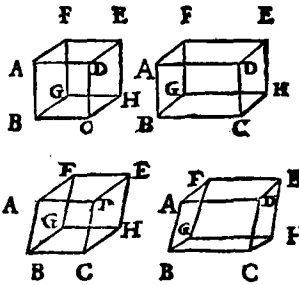
bet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt contenta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur prop. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitque quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi,

quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

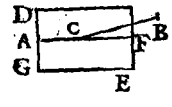
NON est necesse, vt anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus anguli figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

VERVM dua hæ postremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusque mutuis corporum regularium copiose agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTÆ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

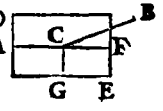
SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ A B, pars quidem A C, in subiecto plano D E, pars vero C B, in sublimi, ita vt omnia puncta partis A C, in plano D E, iaceant, puncta vero omnia partis C B, supra planum D E, existant, vel infra. Erit igitur in plano D E, ipsi A C, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe C F. Quamobrem duæ rectæ A B, A F, commune habent segmentum A C. quod est absurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

HÆC est communis demonstratio interpretum. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, rectæ A C, esse aliquam rectam in plano D E, in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ A B, partem quidem A C, esse in plano D E, partem vero C B, in sublimi, vtique negabit, rectæ A C, in plano D E, dari

D E, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam C B, in rectum & continuum positam esse fatetur ipse A C. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, qua ex aequali suae intersecet lineas, hoc est, qua rectè, & aequaliter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si A C, in plano D E, producatur vsque ad F, erit C F, recta recta A C, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometricè, in plano videlicet D E, ipsi A C, ilari posse aliam rectam, quae cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat A B, esse quoque rectam, eiusque partem A C, in plano D E, partem vero C B, in sublimi esse positam. a Ducatur enim in plano D E, ipsi A C, perpendicularis C G; & in eodem plano ipsi G G, perpendicularis C F. Dico C F, esse ipsi A C, positam in continuum & rectum. Cum enim A C, & F C, in eodem plano D E, cum recta C G, duos rectos angulos constituant A C G, F C G, ex constructione; b erunt A C, & F C, in directum & continuum posita. Quamobrem etiamsi quis contendat A B, esse rectam, cuius quidem pars A C, in plano D E, subiecto, pars autem C B, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano D E, erit alia recta, nempe C F, quae cum A C, vnam rectam constituat lineam; atque adeo duae rectae A B, A F, segmentum commune habebunt A C. Quod est absurdum.



a 11. primi.

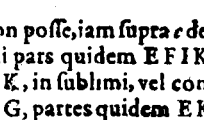
b 14. primi.

HINC fit omnes partes cuiusuis rectae lineae, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duae rectae lineae se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

RECTÆ lineæ A B, C D, se mutuo secent in E, & in E B, E D, sumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta F G, vt fiat triangulum E F G. Dico triangulum E F G, in vno esse plano; Item rectas A B, C D, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli E F G, pars quædam, nimirum E H I G, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua F H I, in sublimi, vel contra; Existent quoq; rectarum E F, G F, partes quidem E H, G I, in vno plano, partes vero H F, I F, in sublimi, vel contra: quod fieri non posse, iam supra c demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem E F I K, in vno plano credatur esse, pars autem G I K, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum E G, F G, partes quidem E K, F I, in



c 1. vndecimi.

FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, a vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

a 1. vndecimi.

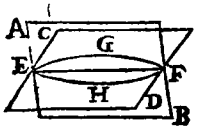
QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG: b in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstrauimus Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atq; triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

b 1. vndecimi.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



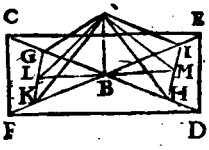
ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroq; plano existit, constat propositũ: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

iv. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in

bus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; *a* erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; *b* & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales. *c* Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.



a 2. *Vndecimi.*
b 15. *primi.*
c 4. *primi.*

RVRSVS *d* cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. *e* Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

d 15. *primi.*
e 26. *primi.*

PRÆTEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, *f* erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

f 4. *pri.*

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIM, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; *g* erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

g 8. *pri.*

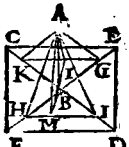
ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; *h* erunt quoque bases AL, AM, æquales.

h 4. *pri.*

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; *i* erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erũt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq;



i 8. *pri.*



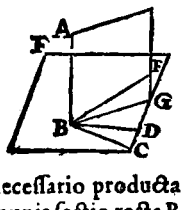
ratione oſtendetur, rectam A B, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere, etiamſi inter puncta, G, I, & K, H, ductæ ſint, dummodo rectæ G I, K H, iungantur: vel certe literæ diſponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem ſunt literæ, & tamen L M, non ducitur à ſiniſtra in dextram, vt in priori figura, ſed à ſuperiori parte verſus inferiorem. Quocirca recta A B, plano C E D F, quod per rectas C D, E F, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in vno plano eſſe.

a 2. Vndecimi. a Cum enim quælibet duæ in vno ſint plano, propterea quod productæ ad partes B, ſe mutuo ſecent in B; ſint B C, B D, in plano F C; Et ſi fieri poteſt, recta B E, non ponatur in eodem plano, ſed in ſublimi.



b 2. Vndecimi. b Quoniã vero duæ rectæ A B, B E, in vno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B, ſint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E, ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt.

c 3. Vndecimi. c Sit ergo eorum communis ſectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D;

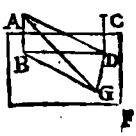
d 4. Vndecimi. d erit propterea & plano F C, per ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipſam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli A B E, A B G, exiſtentes in plano A G, per rectas A B, B E, ductæ æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in vno plano F C, exiſtentibus, non erit B E, in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint anguloſ; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli ABD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoq; ipsis contenti ABD, GDB; æquales, nempe recti; a erunt bases æquales AD, & EB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, b erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam verò ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. c Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: d Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cùm anguli interni ABD, CDB, sint recti; e erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

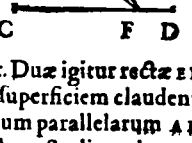


a 4. primi.
b 8. primi.
c 5. vndecimi.
d 2. vndecimi.
e 28. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraq; sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarũ, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra; secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, f quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cùm habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



f 3. vndecimi.

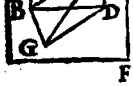
SCHOLIVM.

HÆC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodo in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

viij. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: *a* Sunt autē duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturq; æquales BG, CD. Coniungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione; & anguli quoq; ipsis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti; *b* Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & basis est communis CH; *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuò secantibus in B, (si namq; producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existēt; *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; *e* propterea quòd rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cùm puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cùm AB, recta sit ad rectas BG, BD; *f* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat ostendendum.



a 29. primæ.

b 4. primi.

c 8. primi.

d 4. undecimi.

e 7. undecimi.

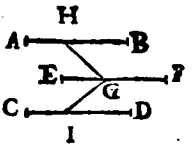
f 4 undecimi.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eo-

in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuò in G; *a* erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cùm sint parallelæ AB, EF, & EF, sit recta ad planum per GH, GI, ductũ; *b* erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cùm sint parallelæ CD, EF, sit autem EF, recta ad planum per GH, GI, ductum; *c* erit etiam CD, recta ad idem planum; *d* Atq; proinde rectæ AB, CD, cùm rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.



a 4. Undecimi.
b 8. Undecimi.
c 8. Undecimi.
d 8. Undecimi.

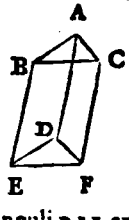
SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cuius sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30 propos. 2. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; *e* erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cùm BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD, *f* erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales; *g* Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modò demonstrauimus; *h* Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

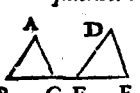


e 33. primi.
f 9. Undecimi.
g 33. primi.
h 8. primi.

SCHO-

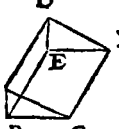
SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ rectæ in eodem sunt plano cum duabus posteriorib⁹. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano, sitq; AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallelæ. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturq; recta BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint priùs in vna recta BF. Quoniam igitur parallelæ sunt



a 29. primi. AB, DE, a æquales erunt anguli ABC, DEF, interni & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, b 32. primi. æquales sunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. b Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.

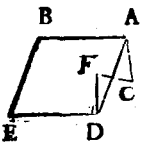
NON sint iam BC, EF, in vna recta linea constituta. Ductis c 33. primi. rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; c erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eò quòd AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD, d 30. primi. parallelæ existentes & æquales, d inter se parallelæ erunt & æquales; e Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaque cùm duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, & basis



e 33. primi.

f 8. primi. BC, basi EF, f erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.

CÆTERVM vt conclusio huius theorematis rectè ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sive omnes sint in eodem plano sive non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione se mutuò secent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam aliàs conclusio vera non erit.



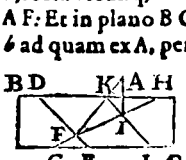
SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non sunt æquales, cùm ille sit acutus, hic verò obtusus. Hoc autem ideo euenit, quòd AD, CF, se mutuò secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quòd eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT à puncto A, in sublimi ad subiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta vtcunq; D E, *a* ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F: Et in plano B C, per F, ad D E, perpendicularis ducatur G H, *b* ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, esse perpendicularem ad planum subiectum B C. *c* Ducta enim in plano B C, per I, ipsi D E, parallela K L, cùm D F, ad *d* rectos angulos sit duabus F A, F H, ex constructione, *e* ac proinde recta ad planum per F A, F H, ductum, *f* erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H, ductum recta *g* Quoniam verò A I, in eodem est cum rectis F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A: rectus; atque adeò A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. *h* Igitur A I, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam diximus. Quod faciendum erat.



a 12. primi.
b 11. primi.
c 12. primi.
d 31. primi.
e 4. 9. undecimi.
f 8 9. undecimi.
g 12. 9. undecimi.
h 4. 9. undecimi.

SCHOLIVM.

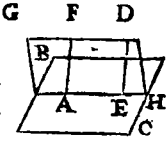
QVOD si quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ A F, ad D E, ducta perpendicularis, i erit ipsa A F, ab initio ad D E, ducta perpendicularis, ad subiectum planum B C, perpendicularis, cùm perpendicularis sit ad vtramque D E, G H.

i 4. 9. undecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

DATO plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. *k* Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, *l* ducatur per A, ipsi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectâ esse ad planum datum B C. Cùm enim D E, A F, parallelæ sint; & D E, recta ad planum B C, ex constructione: *m* erit quoque A F, ad idem planum B C, recta. Itaq; dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

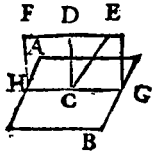


k 11. 9. undecimi.
l 31. primi.
m 8. 9. undecimi.

THEOR.

xiij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



SIT datum planum A B. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planũ A B, & per C D, C E, a quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum F G, secans planum A B, per rectam lineam G H. Cùm igitur E C, D C, rectæ sint ad planum A B; erunt per defin. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datũ est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

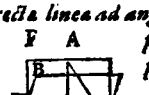
a 12. Vndecimi.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cùm igitur duæ D C, E C, rectæ sint ad idem planum A B; b erunt ipsæ inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. Vndecimi.

SCHOLIVM.

EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ recta linea ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum B C, si fieri potest, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E, c quæ in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cùm igitur A D, A E, rectæ sint ad planum B C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D E. Quod est absurdum: d cùm sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.



c 2. Vndecimi.

d 17. primi.

ALITER. Si A D, A E, recta sunt ad planum B C, ipsæ e erunt inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

e 6. Vndecimi.

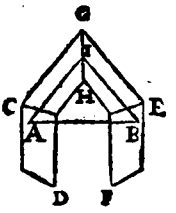
xiv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E, e & faciant communem sectionem rectam lineam G H; In qua sumpto puncto vtcunq; I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur

e 3. Vndecimi.

igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin.3. huius lib.duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. a Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



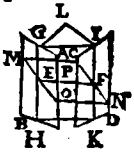
a 17. primi.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoq; recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK, erunt q; anguli GEF, HEF, recti per defin.3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atq; adeò & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; b cùm tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo, si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cùm EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta c quoq; erit EF, c 4. vnde-ad planum CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.



b 1. vndecimi.

decimi.

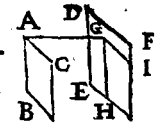
THEOR. 13. PROPOS. 15.

XV.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusque dii vnd in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, decimi. esse parallela. Ex A, a enim deducatur ad planum EF, perpen c 31. pri dicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. b Deinde in mi.

plano



plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ ſunt ipſi DE; a erunt & AB, GH, inter ſe parallelæ; b Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB, AC, c recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. d Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 29. Undecimi. b 29. primi. c 4. Undecimi. d 14. Undecimi.

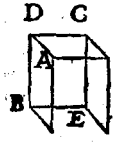
SCHOLIVM.

QVOD ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non ſunt ducenda aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; oſtendemus, vt prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunque duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, e agatur CE, ipſi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato AB. Cùm enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibusq; in alio cum illo plano parallelæ ſint, f parallela erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.



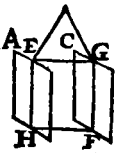
e 31. primi. f 15. Undecimi.

xvj. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur: communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GF, eſſe lineas

neas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F secante. Conueniant igitur in puncto I. a Quia ergo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in vno quoq; est plano, videlicet in C D, producto; conueniens etiam plana A B, C D, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 1. 6n. decimi.

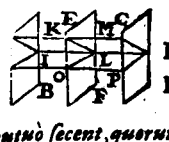
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, & hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana A B, C D, plano E F, parallela. Dico & A B, C D, parallela esse. Secantur enim omnia tria plana plano G H, sintq; communes eorum sectiones rectæ G I, K L, M H. Secentur rursus alio plano N H, sintq; communes eorum sectiones rectæ N I, O L, P H, hac tamen lege, vt duo plana secantia G H, N H, se quoque mutuò secent, quorum sectio communis sit linea recta H I. Quia igitur parallela plana A B, E F, secantur plano G H, b erunt communes sectiones G I, K L, parallela. Eodem modo parallelæ erunt M H, K L, c atque adeò parallelæ erunt inter se G I, M H. Non aliter ostendemus, parallelas esse N I, P H. Itaque cùm I G, I N, se mutuò tangentes in I, parallelæ sint rectis H M, H P, se tangentibus in H, existentibusq; in alio plano; d erunt plana A B, C D, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.



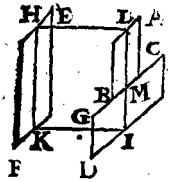
b 16. 6n. decimi.
c 9. 6n. decimi.
d 15. 6n. decimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano E F, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum E F, linea recta perpendicularis, occurrens plano A B, in puncto H, & plano C D, in puncto I. Quoniam igitur linea H G, recta est ad



planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta
a 14. &n *HI, sit recta ad plana AB, CD; a parallela inter se erunt plana*
decimi. *AB, CD. Quod est propositum.*

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, &num rectam constituunt lineam, &lius ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, &num planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI.

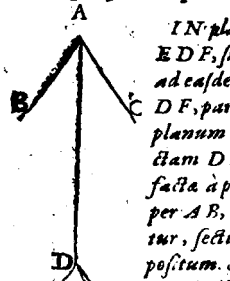


b 16. &n decimi. *Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF, b erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallela erunt IM, HK. Quam ob rem cùm recta LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantq; in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsa erunt in rectum & continuum posita, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, &num planum efficient;* c *propterea*
c 1. &n decimi. *quòd recta LI, in &no iaceat plano. Quod est propositum.*

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, &l inter se parallela erunt, &l certè si producta conueniant, &num planum conficient.

PORRO conuersum quoque propos. 10. facilè demonstrabimus hoc loco, &idelicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modò ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.



IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitq; AB, ipsi DE parallela; & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoq; esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, sint communes sectiones facta à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. d *Hinc enim efficitur, sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namq; planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat sectiones AC, DG,* e *quæ parallela erunt.* f *Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angulo*

d 16. &n decimi.
e 16. &n decimi.
f 10. &n decimi.

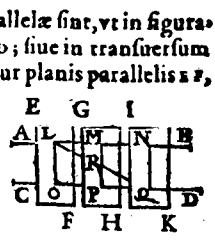
EDF

EDF, aequalis erit. quod est absurdum, cùm totum sit totum, & alter pars.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xvij.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ occurrens plano GH, in R. puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, *a* Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, *b* erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. *c* Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. 9m. decimi.

b 16. 9m. decimi.

c 2. sexti.

SCHOLIVM.

QVOD, si data recta AB, CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet: Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.



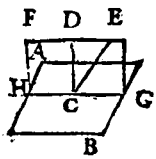
d 16. 9m. decimi.

SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia cùm triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa trian-

e 2. 9m. decimi.

xiij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



SIT datum planum AB. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planũ AB, & per CD, CE, a quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cùm igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datũ est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

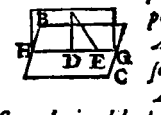
a 2. Vndecimi.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cùm igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; b erunt ipsæ inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. Vndecimi.

SCHOLIVM.

EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ recta linea ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, c qua in vno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cùm igitur AD, AE, recta sint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod est absurdum: d cùm sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.



c 2. Vndecimi.

d 17. primi.

ALITER. Si AD, AE, recta sunt ad planum BC, ipsa e erunt inter se parallela, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

e 6. Vndecimi.

xiv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E, e & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto vtcunq; I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur

e 3. Vndecimi.

igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin.3. huius lib.duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. a Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conuenient. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



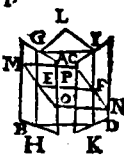
a 17. primi.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, Videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoq; recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, factaq; communes sectiones cum ductis planis rectas GH, IK, erunt q; anguli GEF, HEF, recti per defin.3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare recta EG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atq; adeò & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; b cùm tota recta HGL sit in vno plano, nempe in AB producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo, si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, facient alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cùm EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta c quoq; erit EF, ad planum CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.



b 1. Vndecimi.

c 4. Vndecimi.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

XV.

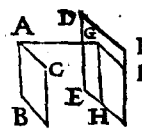
SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusque duobus in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, a enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. b Deinde in

a 11. vndecimi.

b 31. primi.

plano



plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ ſunt ipſi DE; *a* erunt & AB, GH, inter ſe parallelæ; *b* Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB, AC, *c* recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. *d* Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 9. undecimi. b 29. primi. c 4. undecimi. d 14. undecimi.

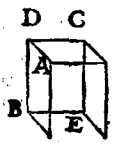
SCHOLIVM.

QVOD ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non ſunt ducenda aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; oſtendemus, vt prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunque duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, agatur CE, ipſi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibuſq; in alio cum illis plano parallelæ ſint, parallelæ erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.



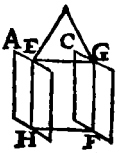
e 31. primi. f 15. undecimi.

xvj. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur: communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GF, eſſe lineas

neas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F secante. Conueniant igitur in puncto I. a Quia ergo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in vno quoq; est plano, videlicet in C D, producto; conueniens etiam plana A B, C D, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secantur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 1. 6n. decimi.

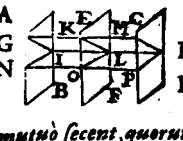
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, & hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana A B, C D, plano E F, parallela. Dico & A B, C D, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano G H, sintq; communes eorum sectiones rectæ G I, K L, M H. Secentur rursus alio plano N H, sintq; communes eorum sectiones rectæ N I, O L, P H, hac tamen lege, & vt duo plana secantia G H, N H, se quoque mutuò secent, quorum sectio communis sit linea recta H I. Quia igitur parallela plana A B, E F, secantur plano G H, b erunt communes sectiones G I, K L, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt M H, K L, c atque adeò parallelæ erunt inter se G I, M H. Non aliter ostendemus, parallelas esse N I, P H. Itaque cùm I G, I N, se mutuò tangentes in I, parallelæ sint rectis H M, H P, se tangentibus in H, existentibusq; in alio plano; d erunt plana A B, C D, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.

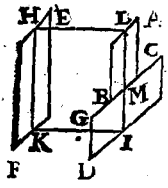


b 16. 6n decimi. c 9. 6n decimi. d 15. 6n decimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano E F, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum E F, linea recta perpendicularis, occurrens plano A B, in puncto H, & plano C D, in puncto I. Quoniam igitur linea H G, recta est ad



planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta
a 14. 6n *HI, sit recta ad plana AB, CD; a parallela inter se erunt plana decimi. AB, CD. Quod est propositum.*

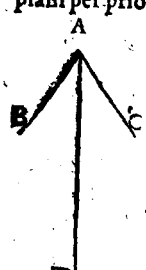


QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI.
b 16. 6n decimi. *Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF, b erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallela erunt IM, HK. Quam ob rem cùm recta LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantq; in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsa erunt in rectum & continuum posita, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendi-*
c 1. 6n decimi. *mus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient; c propterea quòd recta LI, in vno iacent plano. Quod est propositum.*

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certè si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuersum quoque propos. 10. facilè demonstrabimus hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modò ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.



IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitq; AB, ipsi DE parallela; & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoq; esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, sint communes sectiones facta à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. d *Hinc enim efficitur, sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namq; planum per AC, AD, ductum non*
d 16. 6n decimi. *facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat*
e 16. 6n decimi. *sectiones AC, DG, e quæ parallelæ erunt.* f *Igitur*
f 10. 6n decimi. *angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angulo*

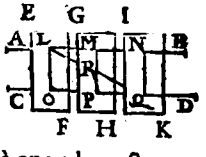
EDF

EDF, æqualis erit. quod est absurdum, cùm totum sit totum, & alter pars.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xvij.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R. puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, *a* Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, *b* erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. *c* Quam ob rem erit vt LM, ad MN, ita LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



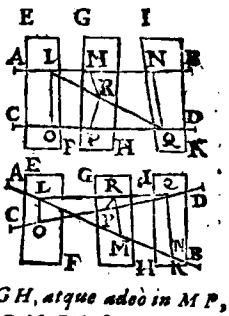
a 2. vndecimi.

b 16. vndecimi.

c 2. vndecimi.

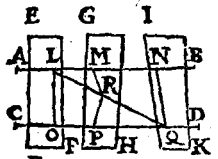
SCHOLIVM.

QVOD, si data recta AB, CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.



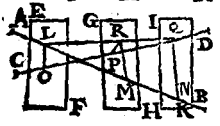
d 16. vndecimi.

SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia e cùm triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, e 2. vndecimi. *sit in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa*



triangula in ϑno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ A B, C D, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesin.) erunt rectæ R M, R P, in diuersis illius planis triangulorum; ac proinde ϑnã rectam non constituent; aliàs in ϑno essent plano. quod est absurdum.

21. ϑn-decimi.



EADEM hac propositio locum habet, si dua recta A B, C D, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc R M P, semper erit ϑna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quando A B, C D, in ϑno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quàm tria, rectas A B, C D, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorum L O Q, L N Q, rectas lineas constituent, si recta A B, C D, in ϑno sint plano; non rectæ autem, si non sint in ϑno plano: quemadmodum de rectis M R, R P, dictum est.

EX demonstratione porrò perspicuum est, si quotlibet linea in ϑno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearũ inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ A B, C D, in postrema figura quomodocunq; in ϑno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis L O, R P M, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum C D, R M, pertinet.) Q N. Dico segmenta L M, M N, eandem proportionem habere, quam segmenta O P, P Q. Iun-

b 2. sext *cta enim recta L Q, b erit vt L R, ad R Q, ita tam O P, ad P Q, ob triangulum L O Q, quàm L M, ad M N, ob triangulum L N Q. Igitur erit, vt O P, ad P Q, ita L M, ad M N. Eadem q; ratio est de pluribus. Vt autem rectè demonstratio procedat in quibusuis duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis ϑnius recta ad vltimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus A B, C D, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ A B, ad Q, vltimum punctum rectæ C D. Idemq; seruatum est in figuris huius propos. 17.*

xviij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta A B, ad planum C D, recta. Dico omnia plana per rectam A B, ducta, esse recta ad idem planum C D. Ductum enim

c 11. pri-mo. sit per A B, planum E F, secans planum C D, per rectam lineam F G. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta F G, c ducatur in pla-

in plano E F, ipſi A B, parallela H I. Quoniam igitur A B, I H, parallelæ ſunt, & A B, ponitur recta ad planum C D; a erit quoque I H, ad idem planum C D, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionē F G, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano E F, ipſi A B, ducentur parallelæ, erunt ad planum C D, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem F G, perpendiculares. Quare rectum erit planum E F, ad planum C D, per defin. 4. huius libri. Similiq; argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam A B, ducta, ad planum C D, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.



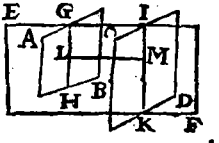
a 8. 9m. decimi.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana A B, C D, ad planum E F, recta, facientia ſectiones G H, I K, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano enim E F, ducatur ad G H, perpendicularis L M, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum A B, recta erit: b *eademq; perpendicularis erit ad I K, ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoq; C D, recta erit. Quia igitur L M, ad vtrumq; planum A B, C D, recta eſt,* c *ipſa parallela erunt.*



b 29. primi.

c 14. 9m. decimi.

SED iam parallela ſint plana A B, C D; ſitque A B, rectum ad planum E F. Dico & C D, rectum eſſe ad idem planum E F. Sint enim communes ſectiones plani E F, & planorum A B, C D, recta G H, I K; d *quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano E F, ad rectam G H, linea perpendiculari L M; erit hæc, ex defin 4. huius lib. ad A B, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ 14. huius lib. eadem L M, ad planum C D, recta quoq; erit.* e *Quare planum E F, per rectam L M, ductum ad planum C D, erit rectum; ideoq; vicißim planum C D, ad planum E F, erit quoq; rectum. Quod eſt propoſitum.*

d 16. 9m. decimi.

e 18. 9m. decimi.

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

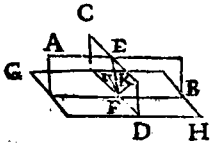
SIT data recta F G, in plano C D, & in figura huius propoſ. operetaq;

teatq; per F G, planum ducere, quod ad planum C D, rectum sit. Ex
a12. Vndecimi. *quouis puncto B, recta F G, a erigatur ad planum C D, perpendicularis B A, & per rectas A B, F G, planum ducatur E F.* b *quod ad planum C D, rectum erit. Quod est propositum.*
b18. Vndecimi.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuò secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana A B, C D, se mutuò secantia per lineam rectam E F, ad planum G H, recta. Dico communem illorum sectionem E F, rectam quoque esse ad idem planum G H. Aut enim E F, ad B F, D F, communes sectiones planorum A B, C D, cum plano G H, recta est, aut non. Si recta est E F, ad B F, D F, *e* recta quoque erit ad planum G H, quod per ipsas ducitur. Si verò E F, concedatur recta ad alteram rectarum B F, D F, tantùm; sit ea recta ad B F. Quoniam igitur planum A B, ad planum G H, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur perpendicularis, ad planum G H, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si E F, concedatur recta ad D F. Erit enim & tunc E F, ad planū G H, recta ex defin. 4. huius lib. cùm perpendicularis ponatur ad D F, communem sectionem plani C D, cum plano G H, ducaturq; in plano C D, ad planum G H, recto. Si deniq; E F, ad neutram B F, D F, esse credatur recta; *d* ducatur ex F, in plano A B, ad B F, cōmunem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F I; Item in plano C D, ad D F, communē eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F K. Quoniam igitur planum A B, rectum ponitur ad planum G H, erit quoq; perpendicularis I F, quæ in plano *A B*, ad *B F*, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur, recta ad planum G H, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit K F, ad idem planum G H, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum G H, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non
e13. Vndecimi. posse suprà *e* demonstratum est. Quare *E F*, recta erit ad planum G H. Si duo igitur plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



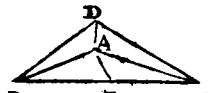
c4. Vndecimi.
d11. primi.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis

planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quoslibet duos maiores esse reliquo: Si verò duo tantùm sint æquales, & tertius reliquis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si unus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto *a* fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniungantur-que rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; *b* erunt bases BC, BE, æquales. *c* Quia verò latera DB, DC, maiora sunt latere BD; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quàm CE. Cùm igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior basi CE; *d* erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multò maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 23. primi.

b 4. primi.

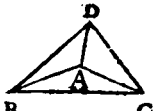
c 20. primi.

d 25. primi.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xxj.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, verò sub CDA, ADB, BDC. *e* Quoniam verò duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. *f* Hi autē tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus



e 20. 6m decimi.

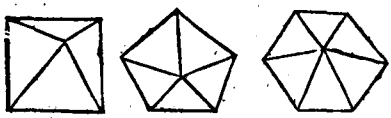
f 32. primi.

rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vnà cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB,
a 32. primi. a (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorúmve, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum



b 32. primi. *triangulorum, (b cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis aequales) bis tot rectis erunt aequales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis aequales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, qua ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cùm omnes anguli horum triangulorum propè basin maiores sint angulis basis; (propterea, quòd propè basin constituantur anguli solidi,*
c 20. vn decimi. *quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem propè basin, minoribus quàm quatuor rectis. Cùm ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.*



VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine recta BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet ba-
d 32. primi. *sim pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum solidum A. d Quia verò omnes anguli*

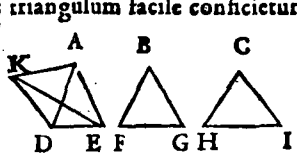
quinq;

quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, aquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, aquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum tuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis aquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis. a 20. 11dec.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

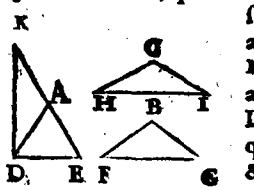
SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, *b* ex ipsis triangulum facile conficietur. b 22. primi.



Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. *c* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus: quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; *d* erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; *e* erit & basis EK, maior basi HI: *f* Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa c 23. primi. d 4 primi. e 24. primi. f 20. primi.

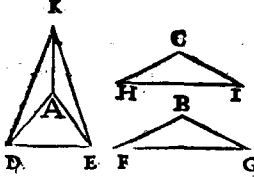
oſtenſa ſit æqualis rectæ F G; erunt quoque D E, F G, maiores quam H I. Quod eſt propoſitum.

CADAT deinde A K, in rectum & continuum ipſi A E; quod quidem accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque A K, ipſi A D, æqualis rurſum, & conſectatur recta K D. *a* Erit, igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. *b* Quoniam vero rectæ E D, D K, maiores ſunt recta K E; & K E, æqualis eſt rectis C H, C I, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoq; E D, D K, maiores duabus C H, C I: *c* Hæ autem maiores ſunt, quam H I. Igitur multo maiores erunt E D, D K, quam H I. Cum ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoque D E, F G, maiores quam H I. Quod eſt propoſitum.

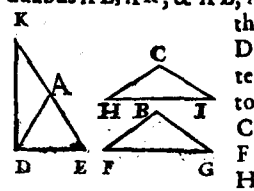


a 4. pri.
b 20. primi.
c 20. primi.

CADAT poſtremo A K, ad partes A E, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis E A D, D A K, nec recta ſit E A K; quod demum eueniet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturque rurſum A K, ipſi A D, æqualis, & ducantur rectæ K D, K E. *d* Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. *e* Quoniam vero duæ D E, D K, maiores ſunt duabus A E, A K, & A E, A K, æquales duabus C H, C I, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoq; D E, D K, maiores quam C H, C I: *f* Hæ autem maiores ſunt, quam H I. Igitur multo erunt maiores D E, D K, quam H I. Cum ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoq; D E, F G, maiores quam H I. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus D E, H I, maiores eſſe, quam F G, ſi angulus D A K, angulo C, fiat æqualis; Item F G, H I, maiores, quam D E, ſi angulo C, ad F B, conſtituatur angulus æqualis, &c. *g* Quare ex tribus rectis D E, F G, H I, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonſtrandum.



d 4. pri.
e 21. primi.
f 20. primi.
g 22. primi.



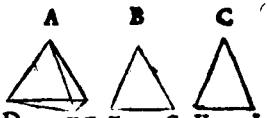
h 4. pri. ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; *h* erunt quoque baſes D E, F G, H I, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius

i 4. pri. minor; *i* erunt quoque duæ illorum baſes æquales, *k* & baſis tertij vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus, ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales; *l* erit quoque baſis D E,

k 24. primi.
l 24. primi.

omnium

omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. *a* Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; *b* erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; *c* erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: *d* Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.



a 23. *primi.*

b 4. *pri.*

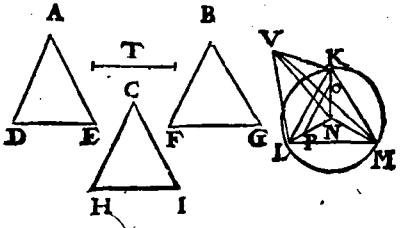
c 24. *primi.*

d 20. *primi.*

PROBL. 3. PROPOS. 23. xxiij.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

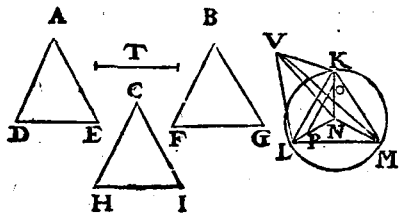
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponãtur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque bases DE, FG, HI. *e* Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulũ KLM, sitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. *f* Describatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum N,



e 22. *Eudox.*

f 5. *quarti.*

trum N, à quo ducantur rectæ N K, L N, N M. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe A D, A E, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum K L M; quod quidem fier, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur A D, A E, maiores non ecedantur, quam N K, N L, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera A D, A E, trianguli A D E, æqualia sunt laterib. N K, N L, trianguli N K L; & basis D E, basi K L, æqualis: a erit angulus A, angulo K N L, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N K, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt A D, A E, ipsis N K, N L. Dico quod neque minores. Si enim minores sint A D, A E, quam N K, N L, abscindantur N O, N P, ipsis A D, A E, æquales, ducaturque recta O P. Quoniam igitur est vt N K, ad N O, ita N L, ad N P, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera N K, N L, trianguli N K L, secta proportionaliter; b ac proinde O P, ipsi K L, parallela erit. c Quare anguli N O P, N P O, angulis N K L, N L K, æquales erunt, & triangulum N O P, triangulo N K L, æquiangulum. d Igitur erit vt N K, ad K L, ita N O, ad O P. Est autem N K, maior quam N O. e Igitur & K L, hoc est, D E, quæ æqualis est ipsi K L, maior erit, quam O P. Quocirca cum latera A D, A E, trianguli A D E, sint æqualia lateribus N O, N P, trianguli N O P, & basis D E, maior basi O P, f erit & angulus A, maior angulo O N P. Eadem ratione angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N K, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt A D, A E, quam N K, N L; sed neque æquales. Igitur maiores.



a 8. primi.

b 2. sex.

c 29. primi.

d 4 sex.

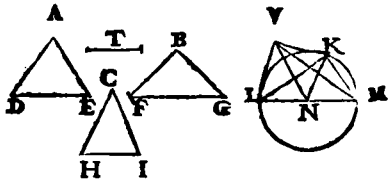
e 14. quinti.

f 25. primi.

CADAT deinde centrum N, in latus L M; quod tum continget, quando triangulum K L M, angulum L K M, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur A D, A E, dicantur esse æquales ipsis N K, N L; erunt quoque

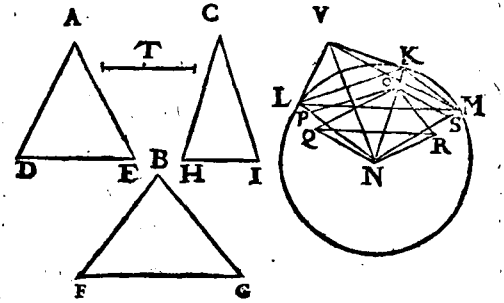
B F, B G,

BF, BG, æquales eiſdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Poſita autẽ fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur



BF, BG, æquales quoque ſunt rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF, BG, quam FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, *b* cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores. a 20. primi. b 20. primi.

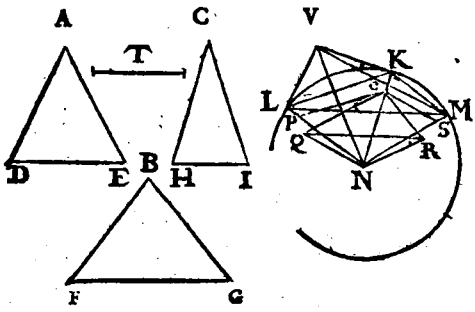
CADAT poſtremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtuſus, vt ex coroll. dicto propoſ. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicãtur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis; *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem



ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis; *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quam NK, NL; ſi abſcindantur NO, NP, ipſi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. *e* Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æqua-

c 8. pri. d 8. pri. e 23. primi.

les ipſis



les ipſis AB, AE, & connectantur OQ, OR; caderque OQ, infra OP, propterea φ per puncta O, P, Q, tranſit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta, cum æquales ſint
a 29. primi. rectæ NO, NP, NQ. a Quare cum angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtenderur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem;
b 4 pri. b erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus:
c 24. primi. c erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſunt lateribus NQ, NR,
d 25. primi. trianguli NQR; & baſis FG, maior baſe QR; d erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR Non ergo minores ſunt AD, AE, quã NK, NL; ſed neq; æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat; poſſit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadra-
e 12. φndec. rum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. e Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque
f 47. primi. eadem erit, ex def. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM. f ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtruction,

tione, eisdem quadratis rectarum K N, N V, æqualia erunt inter se quadrata rectarum V K, & A D. Ac propterea æquales erũt rectæ V K, A D. Rursus quia latera V N, N K, trianguli V N K, æqualia sunt lateribus V N, N L, trianguli V N L; & anguli ipsis contenti V N K, V N L, recti; *a* erit basis V K, æqualis basi V L; Atq; eadem ratione rectæ V M. Quare tres rectæ V K, V L, V M, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta V K, æqualis rectæ A D. Tres ergo rectæ V K, VL, V M, æquales sunt rectæ A D, & ob id, rectis A E, B F, B C, C H, C I. Quamobrem, cum latera V K, V L, trianguli V K L, æqualia sint lateribus A D, A E, trianguli A D E; & basis K L, basi D E: *b* erit angulus K V L, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum L V M, angulo B; & angulum K V M, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis K V L, L V M, M V K, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

a 4. *pri.*

b 8. *pri.*

THEOR. 21. PROPOS. 24. XXIV.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum A B E F, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris A C, C F, F H, H A, A F, B E, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cum enim parallela plana B G, C F, secentur plano A C; *c* Erunt communes sectiones A B, C D, parallelæ. Similiter cum plana parallela A F, B E, secentur plano A C; erunt communes sectiones A D, B C, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera A B C D. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ A B, B H, parallelæ sint rectis D C, C E, & non in eodem plano, sed in oppositis; *d* erunt anguli A B H, D C E, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi B G, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi C F. *e* Quoniam vero A B, ipsi D C, in parallelogrammo A C; & B H, ipsi C E, in parallelogrammo B E, æqualis est; erit vt A B, ad B H, ita D C, ad C E; Ac propterea vt B H, ad H G; ita C E, ad E F, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum B G, C F, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris A H, D E, *f* cum latera A B, B H, trianguli A B H, æqualia sint lateribus D C, C E, trian-



c 16. *Vndec.*

d 10. *Vndec.*

e 34. *primi.*

f 34. *primi.*

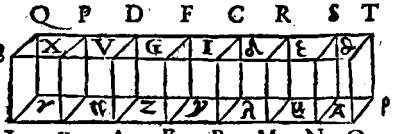
a 10. 11dec. CE, trianguli DCE; a & angulus ABH, angulo DCE, æqualis vt ostensum est; b erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se.
b 4. pri. c Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.
c 34. primi.

xxv. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, sumanturq; in AB, protracta quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypothesi; ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, d habebitq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. e Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AK, KL, æqualia sunt; & similia quoq;, f cum anguli vnius sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelogramma AY, KZ, Lα. Cum igitur æqualia quoq; sint, & similia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AE, FD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus planis LX, Lα, LQ, solidi KLQP: g Sunt autem tria in vnoquoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c.

d 24. 11dec.



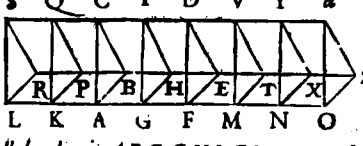
e 36. primi.
f 29. primi.
g 24. 11dec.

Igitur

Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD; Et quam multiplex est basis OG, basis BH, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BC, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis maior est basi, solidum quoq; solido maius est; & si minor, minus; in quacunq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinem, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY, ad basin CY, & vt basis AY, ad basin BY, & vt basis DG, ad basin CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma ABCDEF, cuius plana aduersa sint triangula ABC, DEF, secenturque plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ, & ex AF, protracta vtrinq; capiantur quotcunq; rectæ AK, KL, ipsi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZa; parallela planis ABC, GHI, FED, per schol. prop. 15 huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI, a erunt communes sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI secantur plano AH; b erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelo-



a 16. Vndec.

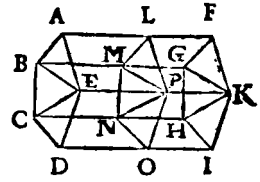
b 16. Vndec.

grammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammum oſtendatur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, aqualia ſunt lateribus GI, GH, trianguli GHI;
a 34. primi. *a cum AC, ipſi GI, & AB, ipſi GH, ſit aquale:* b *& anguli CAB, IGH, ſunt quoque aquales, eo quod recta CA, AB, parallela ſunt rectis IG, GH, & non in eodem plano;* c *Erunt triangula ABC, GHI, aquialia inter ſe, & aquiangula.* d *Quare latera circa aquales angulos proportionalia habebunt: atq; idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum*
b 10. Vndec. c 4. pri. d 4. ſex. *ABCIHG, contentum duobus planis oppoſitis ABC, GHI, aqualibus & ſimilibus, atq; parallelogrammis AI, IB, BG, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO, LRSIHG, OZaIHG. Quoniam vero parallelogramma AI, KC, LQ aqualia ſunt, & ſimilia; nec non AH, KB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana priſmatis ABCIHG, aqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. aqualia erunt priſmata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione aqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO. Quare quam multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG, & quam multiplex eſt baſis OI, baſis FI, tam multiplex erit priſma PZaIHG, priſmatis FEDIHG. Quia vero ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, prima magnitudinis) aqualis eſt baſi OI, (multiplici baſis FI, ſecunda magnitudinis,) aquale quoque eſt priſma LRSIHG, (multiplex priſmatis ABCIHG, tertia magnitudinis,) priſmati OZaIHG, (multiplici priſmatis FEDIHG, quarta magnitudinis;) propterea quod baſibus LI, OI, exiſtentibus aqualibus, aqualia quoq; ſunt & ſimilia omnia plana priſmatis LRSIHG, omnibus planis priſmatis OZaIHG: Si autem baſis LI, maior eſt baſe OI, priſma quoq; priſmate maius eſt, & ſi minor, minus, in quacunq; multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt baſis AI, prima magnitudo ad baſin FI, ſecundam magnitudinem, ita priſma ABCIHG, tertia magnitudo ad priſma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt eſt baſis AH, ad baſin FH, & vt baſis CH, ad baſin DH. Quod eſt propoſitum.*



SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, cuius oppoſita plana ſint polygona, nempe pentagona, ſecenturque plano LMNOP. Dico rurſus vt eſt baſis CM, ad baſin NG, ita eſſe ſolidum ABCDELMNOP, ad ſolidum LMNOPFGHIK. Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoque priſma in totidem priſmata, quo-

ta, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. a *Vt autem BP, ad* a 5. sext. *MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut GN, ad NH: & ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter se.* b *Vt autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia.* b 12. quinti. *Igitur erit ut prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, ut basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.*



POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in utramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, c *propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum,* d *ac proinde angulos æquales* Vndec. *comprehendunt, &c. Vnde, ut prius, ostendetur prismata ex una parte inter se æqualia, nec non & prismata ex altera parte, &c.* c 18. 11. d 10. Vndec.

COROLLARIVM.

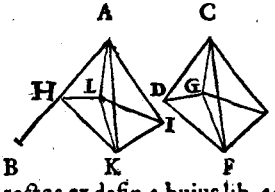
EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvj.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. *e* Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, Vndec. connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, *f* fiatque angulus HAI, f 23. angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. primi.

Rursus in plano per A H, A I, ductum constituatur angulus H A L, æqualis angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto existit; & a 12. recta A L, rectæ C G, æqualis. *a* Ex L, vero ad planum, in quo sunt 9ndec. tres A H, A I, A L, erigatur perpendicularis L K, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta x A. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis H K, H L, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia sint lateribus C D, C G, trianguli C D G, & anguli H A L, D C G, æquales, per b 4 pri. constructionem; *b* Erunt bases H L, D G, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui æquales sunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli A L I, æqualia sint lateribus C G, C E, trianguli C G E, c 4. pri. per constructionem; *c* æquales quoq; erunt L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia sunt lateribus G D, G F; & anguli H L K, d 4. pri. D G F, recti ex defin. 3. huius lib. *d* erunt & bases H K, D F, æquales.



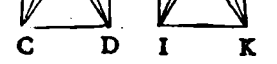
Quare cum & latera A H, A K, trianguli A H K, sint æqualia lateribus C D, C F, trianguli C D F, ex cõstructione. (cum enim A L, L K, latera lateribus C G, G F, æqualia sint ex constructione, comprehendantq; angulos æquales, nimirum e 4 pri. rectos, ex defin. 3. huius lib. *e* erunt bases A K, C F, æquales.) *f* Erunt f 8. pri. quoque anguli H A K, D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, sunt æqualia lateribus G E, G F, & anguli I L K, E G F, recti g 4. pri. ex defin. 3. huius lib. *g* Erunt bases I K, E F, æquales: Cum igitur & latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F, trianguli C E F, h 4. pri. sint æqualia ex constructione; *h* Erunt quoq; anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli plani H A I, H A K, K A I, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, angulum solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendendæ erunt omnibus angulis planis recta in uno eodemque existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figuram planam polygonam constituant, pyramisque quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulus soli-

in solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilibet tribus angulis planis contineatur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

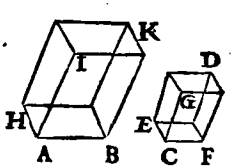
VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendenda sunt anguli planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resolvatur BCF, FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et deniq; angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27. xxvij.

ADATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, a 26. eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt est CF, ad CG, *b* sic fiat b 12. AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt *sexti.* CF, ad CE, ita AB, ad AH. Post hæc, perficiatur parallelepipedũ AK, completis nimirũ parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur



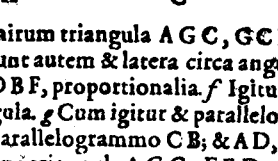
plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. *a* Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 24. undec.

XXVIIJ. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, *b* & æqualis ipsi AE, cum sint parallelogramma CE, GE; *c* erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. *d* Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. *e* Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED, DBF, proportionalia. *f* Igitur similia quoque erunt dicta triangula. *g* Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF, propterea que prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, rectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



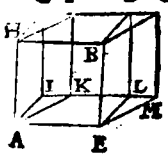
b 34. primi.
c 9. vndecimi.
d 33. primi.
e 24. vndec.
f 6. sex.
g 24. vndec.

XXIX. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana

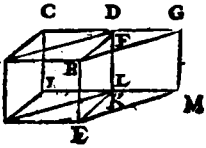
plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, EG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æqualia sint parallelogramma AE, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; *erunt*, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo BD; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales. (*f* Nam cum rectæ, IE, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM,) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

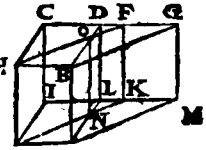


a 35. *primi.*
b 34. *primi.*
c 4. *sexti.*
d 24. *undec.*
e 26. *primi.*
f 4. *pri.*

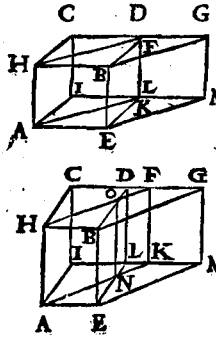
SCHOLIUM.

HÆC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, & ex demonstratione liquet. Unde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit; vel Ultra L, eodem modo demonstrabuntur, & in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. Unde & prisma, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.





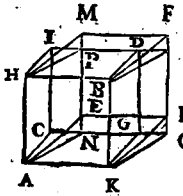
IN tertio verò casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, aqualia; quibus si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, aqualia fient. Vnde, vt prius, aqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB, à quibus si auferatur prisma commune KLNODF, (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO,) remanebit solidum comprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, aquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se aqualia.



XXX. THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia.



Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarũ CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiunganturq; rectæ AN, KO, HP, BQ. *a* Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. *b* Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoq; parallelogrammum est HPQB Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQR. *c* Quamobrem parallelepipe-

a 34. primi.
b 33. primi.
c 29. primi.

lelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

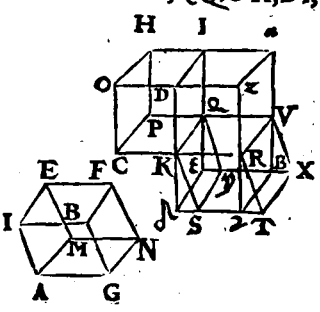
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum. a Cùm igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum. a 29. vel 30. vndecimi.

THEOR. 26. PROPOS. 31. xxxj. xxxij.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases cõstituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primùm insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitq; KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, I ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod,

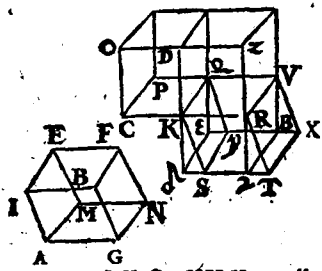


ad altitudinem perpendicularis KQ, constructur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt paraHelo-

gramma K T, L G, æqualia & similia; Rursus quia latera K Q, K S, æqualia sunt lateribus L E, L A, & anguli Q K S, E L A, recti, per defin. 3 huius lib. eo quod K Q, L E, rectæ ponantur ad plana K T, L G, erunt & parallelogramma Q S, E A, æqualia & similia. Eodem modo cum latera K R, K Q, æqualia sint lateribus L B, L E, & anguli Q K R, E L B, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma K V, L F, æqualia & similia. Quare cum tria plana, K T, Q S, k V, parallelepipedi Q S T V, æqualia sint & similia; a tribus planis L G, E A, L F, parallelepipedi A E F G, b tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda Q S T V, E A G F; inter se æqualia.

a 24. 11 dec. b 24. 11 dec.

CONVENIANT rectæ D k, T S, productæ in δ; & I Q, X Y, in s, compleaturq; parallelepipedum Q δ γ V. Item H I, β V, protractæ conueniant in æ; & O D, γ R, in Z, perficiaturq; parallelepipedum I k R æ. Quoniam igitur parallelepipeda Q S T V, Q δ γ V, eandem habent basin k V, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela k V, δ X, & insistentes ipsorum lineæ k S, k δ, R T, R γ, Q Y, Q s, V X, V β, collecantur in eisdem rectis δ T, s X, c ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum Q S T V, parallelepipedo E A G F, æquale: Igitur eidem parallelepipedo E A G F, æquale erit parallelepipedum Q δ γ V.



c 29. 11 dec.

d QVONIAM vero parallelogramma k T, k γ, æqualia sunt inter se; & K T, æquale est ipsi L G, erit & k γ, ipsi L G, hoc est, ipsi C D, æquale; cum bases L G, C D, ponantur æquales. e Quare erit, vt C D, ad D R, ita k γ, ad D R: f Vt autem C D, basis ad basin D R, ita est solidum C H I k, ad solidum k I æ R; cum parallelepipedum C H æ R, secetur plano I k, planis oppositis, C H, æ R, parallelo: Et eadem ratione vt k γ, ad D R, ita est solidum Q δ γ V, ad solidum I k R æ; cum & parallelepipedum I δ γ æ, secetur plano k V, oppositis planis D æ δ β, parallelo. g Igitur æqualia erunt parallelepipeda C H I k, Q δ γ V, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum I k R æ, nimirum eandem, quam habent bases æquales C D, k γ, ad eandem basin D R. Quare cum parallelepipedum Q δ γ V, sit ostensum æquale parallelepipedo A E F G; æqualia quoq; erũt parallelepipeda A E F G, C H I k. Quod est propositum.

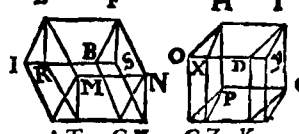
d 35. primi. e 7. quinti. f 25. 11 dec. g 9. quinti.

SINT iam neque insistentes lineæ A M, G N, L E, B F, ad basin A B, neque C P, k Q, O H, D I, ad basin C D, perpendiculares:

Et à

Et à *a* punctis E, F, M, N, demittantur E R, F S, M T, N V, ad planum, in quo basis A B, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis C D, perpendiculares H X, I Y, P Z, Q *a*. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ R S, S V, V T, T R: Item rectæ X Y, Y *a*, *a* Z, Z X, vt fiant parallelepipeda E T V F, H Z *a* I, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantq; insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. *b* Sed parallelepipedum E T V F, æquale est parallelepipedo A E F G, cum hoc eandem cum illo habeat basin E N, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum H Z *a* I, æquale est eadem ratione parallelepipedo C H I K; cum hoc eandem cum illo basin H Q, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

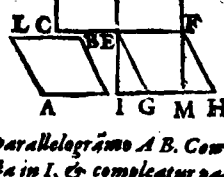
a 11. Vndec.



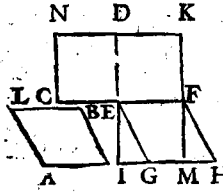
b 29. vel 30. Vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes linea ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sunt enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes linea ad bases A B, C D, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, recta L B, & recta E G, recta L A, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammũ E H, quod æquale erit, & simile parallelogrãmo A B. Conueniat autẽ H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammũ I K. Iam vero intelligantur super bases E H, I F, E K, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super A C, C D, constructis; sintq; insistentes linea perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super E H, æquale esse ac simile solido super A B, ex defin. 10, huius lib. cum plana illius æqualia



sint



a 29. Undecimi.

sint & similia planis huius, per constructionem. a *Sunt autem & aequalia parallelepipeda super E H, I F, cùm habeant basin eandem, cuius infimum latus E F, erectam super planum I K; Item plana basi opposita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus I H, atque insistentes lineas E G, F H, E I, F M, &c. in eisdem rectis lineis I H, &c. Igitur aequale erit parallelepipedum super I F, parallelepipedo super A B.* b *Quoniam verò parallelogramma E H, I F, aequalia sunt; & E H, aequale est ipsi C D: aequalia erunt I F, C D.* c *Erit igitur, vt I F, ad E K, ita C D, ad E K;* d *Est autem vt I F, ad E K, ita solidum super I F, ad solidum super E K, quod solidum super I K, secetur plano super E F, erecto parallelo planis super D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita solidum super C D, ad solidum super E K, cùm solidum super C K, secetur plano super D E, erecto parallelo planis super C N, F K, erectis. Quare erit vt solidum super I F, ad solidum super E K, ita solidum super C D, ad solidum super E K.* e *Ac proinde aequalia erunt parallelepipeda super I F, & C D. Ostensum est autem parallelepipedum super I F, aequale parallelepipedo super A B. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda super A B, C D. Quod est propositum.*

b 35. primi.

c 7. quinti.

d 25. Undecimi.

e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque haec propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, fient aequalia abscissum, & alterum. Cùm ergo & totum ponatur aequale alteri; aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

f 31. Undecimi.

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis aequalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

xxxiij.

THEOR. 27. PROPOS. 32.

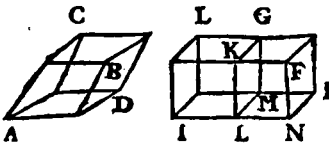
SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiusdem altitudinis super bases A B, E F. Dico esse solidum ad solidum, vt est basis ad basin. g Super rectam enim E K, constituatur parallelo-

g 45. primi.

gram-

grammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, qui sit æqualis angulo E N F. Cõstituent autem parallelogramma E F, I K, totum



parallelogrammum vnum F I, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi E F G H, producantur ad partes E G, perficiaturque totum vnum parallelepipedum I F L H; *a* erunt parallelepipeda A B C D, I K L M, æqualia, cùm habeant æquales bases, per constructionem A B, I K, & eandem altitudinem, ex hypothesi. *b* Quare erit vt solidum I K L M, ad solidum E F G H, ita solidum A B C D, ad idem solidum E F G H: *c* Est autem solidum I K L M, ad solidum E F G H, vt basis I K, hoc est, illi æqualis basis A B, ad basin E F. Igitur & solidum A B C D, erit ad solidum E F G H, vt basis A B, ad basin E F. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

a 31. Undecimi.
b 7. quinti.
c 25. Undecimi.

SCHOLIVM.

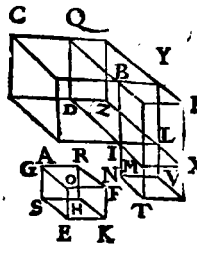
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori æqualis, & ducatur planum basi parallelum, d erit q. vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. e Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.

d 32. Undecimi.
e 9. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvj.

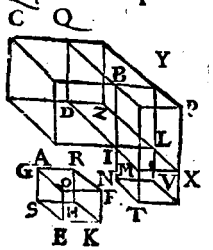
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes A B, E F, in quibus latera homologa sint A I, E K. Dico proportionem parallelepipedi A B C D, ad parallelepipedum E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorũ A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & sit I L, æqualis ipsi E K, vel G R; Item D I, ad M, & sit I M, æqualis ipsi H K, vel G O; Item B I, ad N, & sit I N, æqualis ipsi K F, vel G S. Deinde completis parallelogrammis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam verò latera I L, I M, æqualia sint lateribus G R, G O; *f* & anguli contenti æquales, cùm angulus I L M,



f 15. primi.

L I M, sit æqualis angulo A I D, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo E k H, seu R G O; erunt parallelogramma I X, G F, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia L N, R S; item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T, parallelepipedi T X I V, similia sunt, & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi E F G *H*: *a* Sunt autem tria cuiusq; similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10 huius lib. Rursus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorũ A B C D, E F G H, est vt A I, ad E k, hoc est, ad I L, ita D I, ad H k, hoc est, ad I M; & B I, ad F k, hoc est, ad I N. *b* Vt autem A I, ad I L, ita est parallelogrammum A D, ad D L; Et vt D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; & vt B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit vt A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. *c* Sed vt A D, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q: & vt basis D L, ad basin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P; & vt basis B L, ad basin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, vt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Ac proinde quatuor quantitates sunt continuè proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoq; proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc est, ad E F G *H*, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad secundam D L Y Q, ex defin. 10. lib. 5. *d* Vt autem A D C B, ad D L Y Q, ita est basis A D, ad basin D L; *e* Et vt A D, ad D L, ita est recta A I, ad I L, hoc est, ad E k. Igitur proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E k. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum Quod erat demonstrandum.



a 24. 6 *vndec.*

b 1. *sex.*

c 32. *vndec.*

d 32. *vndec.*

e 1. *sex.*

COROLLARIVM.

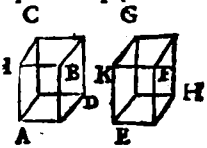
EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 34. xxxiv.

ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia. xxxv.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse vt AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum insistentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita vt AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. ostendimus. Quare erit, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.

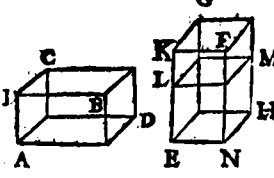


QVOD si altitudines AI, EK, inæquales fuerint; sit EK, maior, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF; a erit vt EHGF, ad solidum EHML, ita EHGF, ad idem solidum EHML: b Vt autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL. Et vt solidum EHGF, ad solidum EHML, ita est eadem ratione basis KM, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: c Sed vt KN, ad LN, ita est rectangulum EK, ad rectangulum EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.

a 7. quinti.

b 32. undecimi.

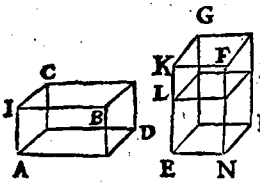
c 1. sexti.



SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. d Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

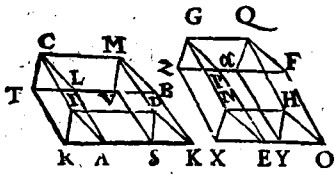
d 31. undecimi.

QVOD



QVOD si altitudo E K, maior fuerit, abscindatur E L, ipsi A I, æqualis, & per L, ducatur planum L M, parallelum basi E H. Quia igitur ex hypothesi est, vt basis A D, ad basin E H, ita altitudo E K, ad altitudinẽ A I, hoc est, ad E L, ipsi A I, æqualem; *a* Vt autem basis A D, ad basin EH, ita est solidum A D C B, ac solidum E H M L, cùm altitudines A I, E L, æquales ponantur. *b* Et vt E K, ad E L, ita est K N, ad L N; *c* Vt autem basis K N, ad basin L N, ita est solidum E H G F, ad solidum E H M L, cùm solida E H G F, E H M L, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur K N, L N; erunt enim hac ratione inter plana parallela K N, G H; Erit vt solidum A D C B, ad solidum E H M L, ita solidum E H G F, ad idem solidum E H M L; *d* ideoque æqualia erunt solida A D C B, E H G F.

a 32 *&* 34 *undecimi.* *b* 1. *sext.* *c* 32. *&* 34 *undecimi.* *d* 9. *quinti.*



SED proponantur iam parallelepipeda A B C D, E F G H, æqualia, quorũ insistentes lineæ A I, K D, B M, L C; E N, O H, F Q, P G, nõ sint perpendiculares ad bases A B, E F. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planũ basis A B, perpendiculares I R, D S, M V, C T; ltẽ à punctis N, H, Q, G, ad planum basis E F, perpendiculares N X, H Y, Q Æ, G Z; connectanturque rectæ R S, T V, R T, S V; X Y, Z Æ, X Z, Y Æ: Erunt que perpendiculares R I, X N, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, vt basis A B, ad basin E F, ita esse altitudinem X N, ad altitudinem R I. *e* Cùm enim æqualia sint solida A B C D, E F G H, ex hypothesi, sit autem A B C D, æquale solido R V C D, quòd habeant eandem basin C D, eandemque altitudinem R I; & E F G H, eadem ratione, æquale solido X Æ G H: Erunt & parallelepipeda R V C D, X Æ G H, æqualia. Quare cùm habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases C D, G H, erit, vt iam demonstratum est, vt basis C D, ad basin G H, hoc est, vt basis A B, ad basin E F, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

e 29. *vel* 30. *&* 31 *undecimi*

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt priùs; Cùm sit vt basis A B, ad basin E F, ita altitudo X N, ad altitudinem R I; *f* sit autem A B, ipsi C D, & E F, ipsi G H, æqualis; erit quoque vt basis C D, solidi R V C D, ad basin G H, solidi X Æ G H, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Quare cùm X N, R I, sint insistentes lineæ

f 24. *&* 34 *undecimi.*

næ perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt, vt iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. a Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idemque oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius verò non. Quam ob rem, Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum. a 29. vel 30. vndecimi.

SCHOLIVM.

OMNIA hac, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædicta hypotheſes ſeruentur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtentia. b *Quare æqualia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.* b 29. 30. vel 31. vndecimi.

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis adijciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis. c *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt baſis ad baſin;* d *atq; adeò priſma ad priſma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certè vt triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.* c 32. vndecimi. d 15. quinti.

PRÆTEREA, ſi duobus priſmatis prædictis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, e *quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia,* f *cùm eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.* e 33. vndecimi. f 15. quinti.

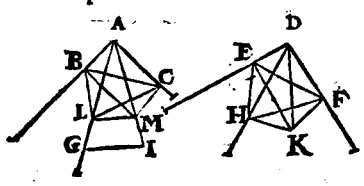
DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cum priſmatis. g *Quare cùm baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciproca; & baſes priſmatum eadem ſint, vel certè triangula earum dimidia* h *eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciproca.* g 34. vndecimi. h 15. quinti.

xxxvij. THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales B A C, E D F, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ A G, D H, ita vt angulus B A G, angulo E D H, & angulus C A G, angulo F D H, sit æqualis: à sumptis autem punctis G, H, in rectis A G, D H, demittantur ad plana, in quibus anguli B A C, E D F, existunt, perpendiculares G I, H K, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ I A, K D. Dico angulos G A I, H D K, esse æquales inter se. Nam si A G, D H, sunt inæquales, auferatur à maiori A G, ipsi D H, æqualis linea A L, & ex L, in plano trianguli A G I, ducatur ipsi G I, parallela L M. Quoniam igitur parallelæ sunt G I, L M, & est G I, ad planum anguli B A C, recta; *a* erit quoque L M, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas

a 8. vndecimi.



A B, A C, D E, D F, perpendiculares M B, M C, K E, K F, & connectantur rectæ B C, B L, L C, E F, E H, H F. Et quia L M, recta est ad planum anguli B A C, ipsa rectum angulum efficiet cum recta A M, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. *b* Quare quadratum rectæ A L, æquale erit quadratis rectarum A M, M L; *c* Est autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum A C, C M, cum & angulus A C M, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A C, C M, M L: *d* At quadratis rectarum C M, M L, æquale est quadratum rectæ C L, cum angulus C M L, rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A C, C L; *e* Ac proinde angulus A C L, rectus erit. *f* Rursus quia quadratum rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A M, M L: *g* Est autem quadratum rectæ A M, æquale

b 47. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.
e 48. primi.
f 47. pr.
g 47. pr.

æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: *a* At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; *b* propterea queangulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera AL, DH, æqualia; *c* Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; *d* erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DEF, æquales: cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; *e* erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, sunt recti; *f* erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: *g* Quia vero quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK; & basis LM, basi HK, æqualis; *h* erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

a 47. primi.
b 48. primi.
c 26. primi.
d 4 pri.
e 26. primi.
f 4. pri.
g 47. primi.
h 8. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis

extremis linearum sublimium ad plana angulorum primò positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani B A C, E D F, ponuntur æquales & sublimes æquales A L, D H, constituunt angulos æquales L A B, H D E. Item L A C, H D F: demonstratum fuit, demissas perpendiculares L M, H K, esse æquales.

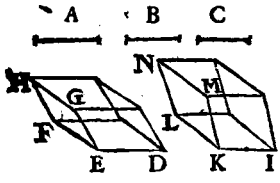
xxxviij.

THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Constituaturq; angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque D E F, D E G, F E G, ita vt recta D E, ipsi A; & E F, ipsi B, & E G, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis D F, F G, G D, perficiatur parallelepipedum D H: quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur

a 26 &n decimi.



contineri, aut ex ipsis fieri. *a* Deinde ad rectam I K, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solido angulo E, ex tribus angulis planis I K L, I K M, L K M, qui æquales sint tribus D E F, D E G, F E G, ita vt rectæ I K, K L, K M, æquales sint mediæ lineæ B. Completis verò parallelogrammis I L, L M, M I, perficiatur parallelepipedum I N, quod contineri dicitur sub linea B, se ex ipsa describi. Dico solidum D H, æquale esse solido I M. Cùm enim sit vt D E, ad I K, ita K M, ad E G, (quod D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli

b 14. sexti. D E G, I K M, æquales: *b* Erunt parallelogramma D G, I M, æqualia, propterea quòd latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam verò anguli plani D E G, I K M, sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales E F, K L, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primò positis, ex constructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium D G, I M, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum D H, I N, si bases sint D G, I M, inter se æquales, per co-

c 31. &n decimi. roll. propos. præcedentis. *c* Quare parallelepipeda D H, I N, cùm habeant bases D G, I M, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

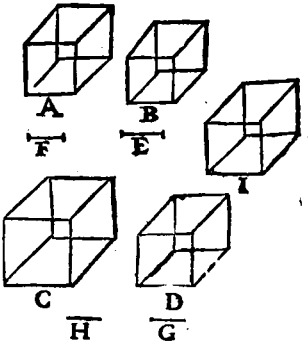
SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea de-

rea descripto: erunt tres recta continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, & dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto à media B. Dico tres A, B, C, esse continuè proportionales. Nam velut primus, ostendentur eorum altitudines ex F L, demissa esse æquales. Quare cùm & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases D G, I M, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Qua bases cùm angulos habeant æquales D E G, I K M, ex constructione: a habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, ut D E, ad a 14. *sexti. I K, ita K M, ad E G. Quapropter cùm D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumptæ sit æqualis; Erit quoque ut A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum.*

THEOR. 32. PROPOS. 37. XXXIX.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia, similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim per scholium propos. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B. Et vt C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

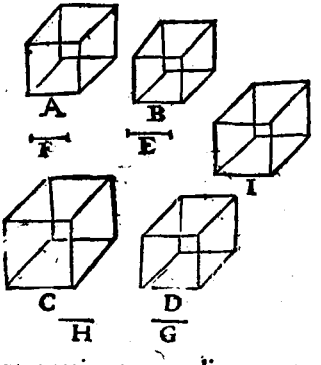
SINT iam è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoq; proportionales. *b* Tribus enim rectis b 12. *sexti.*

a 27. Vndec. A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, *a* super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita

b 9. quinti. ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. *b* Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac proptrea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectã D. Dico esse quoq; vt

c 33. Vndec. solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. *c* Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectã B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt



d 33. Vndec. solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D, *d* Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B. & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIVM.

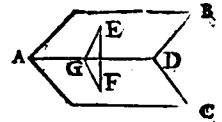
EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidum sumatur bis, habebuntur quatuor recta proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demõ-

stratum est. Cum igitur solidum secundæ linea æquale sit solido tertiæ linæ; & linea secunda æqualis tertiæ linea; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hac propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia sunt triangula, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. a *Cum igitur, prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; quinti. perspicuum est, quod proponitur.* a 15.

THEOR. 33. PROPOS. 38. xiij.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC, sitq; eorũ communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, *b* & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4 huius lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, *c* cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. b 12. primi. c 17. primi.

SCHOLIVM.

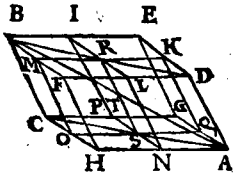
HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem, d *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, EG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.* d 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxj.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & soli-

di parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorũ sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuò secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, & SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, ttianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidiæ rectarum æqualium AG, CH, & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cùm sint parallelogramma AS, HS,) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales, d Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: e Ac propterea AS, CS, vnam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, f ipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. g Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia verò AC, BD, parallelæ sunt; h erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuò secabunt, in puncto videlicet T. i Cùm autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: k Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuò secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.



a 34. primi
b 29. primi
c 4. primi
d 13. primi
e 14. primi
f 9. Undecimi
g 33. primi
h 7. Undecimi
i 29. & 15. primi
k 16. primi

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuò bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt; vt hic demonstratum est, rectam RS.

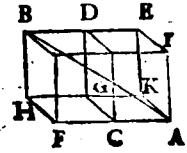
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum:

e entrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri AB, quod ſit G. Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planum CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum.

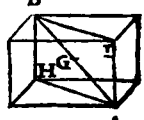


a 17. Vndec.

a Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcunq; proportionaliter; ſecatur autem BA, bifariam in G; ſecabuntur quoque latera aduerſorum planorum AH, BI, atque adeo & baſes AH, BI, bifariam. b Cum igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH, ita ſolidum AD, ad ſolidum CB, erit parallelepipedum AB, ſectum bifariã plano CD, per centrum G, ductũ.

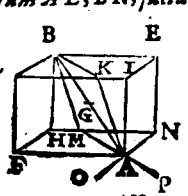
b 25. Vndec.

TRANSEAT ſecundo planum ſecans AI, BH, per diametros BI, AH, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelepipedum per centrum G, imò per totam diametrum AB, c cum AB, in plano ſit parallelarum AH, BI. d Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.



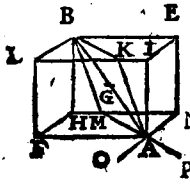
c 7. Vndecimi. d 25. Vndec.

TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit aduerſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, ſecantur plano AKBM; e erunt communes ſectiones AM, BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AL, BN, facta à plano AKBM. Quare parallelogrammum eſt AKBM; f ideoque tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ; g ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK. h Cum igitur OAP, æqualis ſit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.) i Erunt baſes KL, MN; inter ſe, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & ſimilia erunt triangula BKL, AMN, k eum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, recta MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, eſt æqualis, vt oſtendimus; erit & reliqua IK, reliqua HM; & reliquus an-



f 34. primi. g 10. Vndec. h 15. primi. i 4. pri. k 4. ſex.

gulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, aqualis. (Est enim tota LI, toti NH, aqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis aquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, aqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, aqualia; & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum $BKIE$, & aquilaterum, & aquiangulum est quadrilatero $AMHF$; Ac propterea aquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo aqualia erunt & similia triangula BHM, AIK, & quadrilatera $AKLF$, $BMNE$; cum inter se sint & aquilatera & aquiangula. Quapropter solidum contentum planis $AKLF$, $FHMA$, $AKBM$, MHB, BKL, $LBHF$, aquale erit solido contento planis $BMNE$, $EIKB$, $BMAK$, KIA, AMN, $NAIE$, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & aqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano $AKBM$, per centrum G, bifariam.



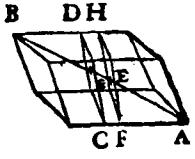
POSTREMO planum secans CD, neq; aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK, esse aquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectantur que recta AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, a inter se sunt parallelæ; b Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. c Et quoniam anguli BDC, angulo alterno ACD, aqualis est: d Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem aqualis; & latus BG, lateri AG, aquale, quod AB, bifariam secetur in G, centro; e Erit & latus DG, lateri CG, aquale. Cum ergo per ea, quæ ad prop. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, aqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; f & angulus BGD, aqualis angulo AGC; g Erit & basis BD, aqualis basi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, aqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli



a 9. vndecimi.
b 7. vndecimi.
c 29. primi.
d 15. primi.
e 26. primi.
f 15. pr. 4 primi.
g 4 primi.

trianguli A C M; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem totus D B L, toti C A N, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum B I, A H. Igitur & reliquus K B L, reliquo M A N, erit æqualis. Quoniam igitur latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia ſunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis; 2 Erit & 2 4 pri. baſis K L, baſi M N; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis B K L, A M N, æquales addantur anguli B K D, A M C, fient toti anguli D K L, C M N, æquales. Quare quadrilaterum B D K L, quadrilatero A C M N, & æquilaterum eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula connumerent ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota L I, toti N H, eſt æqualis, erit & reliqua I K, reliquæ H M, æqualis. Eademque ratione reliqua D E, reliquæ C F, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum D E I K, æquilaterum eſt quadrilatero C F H M: Sed & æquiangulum; cum anguli D E I, E I K, æquales ſint angulis C F H, F H M, propter ſimilitudinem parallelogrammorum B I, A H; & anguli E D K, I K D, angulis F C M, H M C, æquales, quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni L K D, B D K, angulis N M C, A C M. Igitur quadrilatera D E I K, C F H M, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia & quadrilatera A C K I, B D M H; Item D E N M, C F L K, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis C K L F, F H M C, C K D M, M H B D, D K L B, B H F L, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido contento planis D M N E, E I K D, D M C K, K I A C, C M N A, A I E N; cum biſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur A B, ſectum eſt per centrum G, plano C D, bifariam.

SED ſecetur iam parallelepipedum A B, plano C D, bifariam. Dico planum C D, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum C D, ſecat diametrum A B, dividere diametrum A B, bifariam. Si enim diameter A B, in G, non dividitur bifariam, dividatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum F H, plano C D, parallelum, ſecabitur parallelepipedum A B, bifariam plano F H, vt demonſtratum eſt.



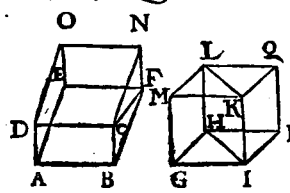
Ponitur autem & biſariam ſecari plano G D; Igitur ſolida C B, F B, cum ſint dimidia parallelepipedi A B, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, dividet diametrum A B, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonſtrandum erat.

THEOR.

xlj. THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitq; parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. a Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum; æqualia erunt parallelogramma AC, GP. b Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (c Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum adversorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.



a 34. *primi.*

b 31. *Vndec.*

c 32. *Vndec.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim tam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

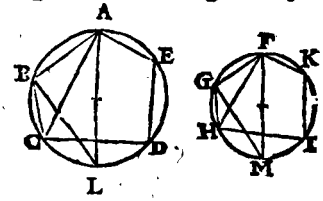
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et ſolidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; *a* erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: *b* Eſt autem angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, *c* nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; *d* erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. *e* Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG *f* Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ. Quæ itaque



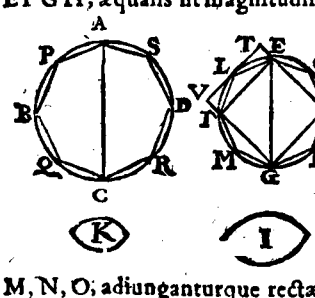
a 6. *ſex.*
b 21. *tertij.*
c 31. *tertij.*
d 32. *primi.*
e 4 *ſex.*
f 22. *ſexti.*

itaque in circulis polygona similia, inter se sunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGκ. Si enim
a 7. quinti. esset æqualis, *a* haberet circulus ABCD, *ad circulum* EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac proptrea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet κ, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & κ, simul. Inscribatur in



circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidiũ est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, *in punctis* L, M, N, O; adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque
b 41. primi. rectis HE, GF, productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si a circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH: & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG,
c 1. def. &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; c relinquitur tandem

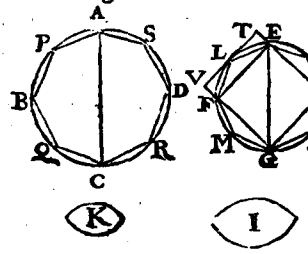
eandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum E F G H, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta E L, L F, F M, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus E F G H, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonū E L F M G N H O, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo A B C D, polygonum A P B Q C R D S, simile polygono E L F M G N H O. Quod quidem facile fiet, si semicirculi A B C, A D C, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ A B, B C, C D, D A, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia A B C D, in quot distributa est circumferentia E F G H. Nam iunctis rectis A P, P B, B Q, &c. erit figura inscripta similis figuræ E L F M G N H O, vt patet. a Quoniam igitur est polygonum A P B Q C R D S, ad polygonum E L F M G N H O, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E H, hoc est, per hypothesim, vt circulus A B C D, ad I: Est autem polygonum A P B Q C R D S, minus erit circulo A B C D. b Igitur & polygonum E L F M G N H O, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo E F G H. a 21. duo decimi. b 14. quinti.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum E F G *H*, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam maior circulus A B C D, habere eandem proportionem, quam habet quadratū diametri minoris E G, ad quadratū maioris diametri A C; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet, prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo E F G H. Cum ergo ponatur circulus A B C D, ad I, esse vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G; erit & conuertendo I, ad circulum A B C D, vt quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C. Ponatur vt I, ad circulum A B [illegible] ita circulus E F G H, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo E F G H, erit maior quoque erit circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo A B C D. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. c 14. quinti.

Quam-

Quamuis autem circulus A B C D, maior est, & E F G H, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli E F G H, ad quadratum diametri circuli A B C D, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circulo A B C D, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri A C, ad quadratū diametri E G, eandem habere proportionē, quam habet circulus A B C D, ad magnitudinem circulo E F G H, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandē habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinē posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; a sit autem vt circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, siue circulus A B C D, circulo E F G H, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.



a 7. quinti.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangulam habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum A B C, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturq; rectæ

rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; huius vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, nec non eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter; *a* erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. *b* Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ; *c* erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB, *d* proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, Hκ, rectis AB, AC, sunt parallelæ; *e* erunt anguli IHκ, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIκ, ABC; & Hκl; ACB. *f* Quare latera trianguli Hκl, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum *HIK*, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIk, DkH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HI*K*D, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, *sexti* constituta; ipsa [illegible] æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqu[illegible]nt & similia triangula AHG, HDk, cum



a 2. *sexti.*
b 9. *undecimi.*
c 10. *undec.*
d 4. *sexti.*
e 10. *undec.*
f 4. *sexti.*
g 21.

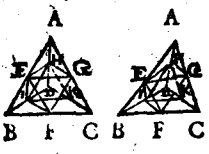
similia sint ostensa triangulo A D C, & constituta super æquales rectas A H, H D. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula A E G, H I K, cum similia sint ostensa triangulo A B C, & super rectas posita A E, H I, a quæ æquales sunt, ob parallelogrammum A E I H. Non secus æqualia erunt & similia triangula E H G, I D K, cum sint ostensa similia triangulo B D C, & habeant rectas H E, D I, b quæ æquales sunt, ob parallelogrammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi. RVRSVS, c quia rectæ E H, H G, G E, æquales sunt, & parallelæ rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B, F G H I, B F G E; erunt triangula E H G, B I F, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: d Sunt autem & parallelæ cum E H, H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ sint rectis B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur solidum B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G, B I F, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum C F G H I K. e Cum enim rectæ F C, C G, G F, æquales sint, & parallelæ rectis I K, K H, H I, ob parallelogramma C F I K, C G H K, F G H I; erunt triangula C F G, H I K, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: f Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, per quas ducitur planum C F G, parallelæ sint rectis K I, K H, per quas planum K I H, ducitur. Igitur solidum C F G H I K, contentum duobus triangulis C F G, K I H, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H, prisma est. Quoniam vero prismata E B F G H I, C F G H I K, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K; & parallelogrammum E B F G, basis illius, duplum est trianguli C F G, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. g Ipsa inter se æqualia erunt.

d 25. vndec.



e 34. primi.

f 25. vndec.

g 40. vndec. DENIQVE quia prisma E B F G H I, maius est pyramide E B F I, totum parte; Est autem pyramis E B F I, æqualis & similis pyramidi A E G H, nec non pyramidi H I K D, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata E B F G H I, C F G H I K, pyramidibus A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis A B C D, excedent, hæ vero à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor ve-

nor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares A B C, E F G, duæ pyramides A B C D, E F G H, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, k, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ I L, L k, k N, N O, O M, M N, L M, M I; P R, R Q, Q T, T V, V S, S T, R S, S P, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in A I L M, M N O D; E P R S, S T V H; & in bina prismata æqualia I B k L M N, C k L M N O, P F Q R S T; G Q R S T V; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ A I L M, M N O D; E P R S, S T V H; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide A B C D, ad omnia prismata generata in pyramide E F G H, illis multitudine æqualia, vt est basis A B C, ad basin E F G. Cum enim sit vt B C, ad C k, ita F G, ad G Q, eo quod vtraque linea diuisa est bifariam; sint autem triangula A B C, L k C, similia similiterque posita; Item triangula E F G, R Q G, ex coroll. propos. 4. lib. 6. *a* Erit quoque vt triangulum A B C, ad triangulum L k C, ita triangulum E F G, ad triangulum R Q G. Et permutando, vt A B C, ad E F G, ita L k C, ad R Q G. Vt autem L k C, ad R Q G, ita est prisma C k L M N O, ad prisma G Q R S T V, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma I B k L M N, ad prisma P F Q R S T, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet I B k L M N, ad vnum prisma P F Q R S T *b* ita sunt duo prismata I B k L M N, C k L M N O, ad duo prismata P F Q R S T, G Q R S T V. Igitur erunt quoque, vt basis A B C, ad basin E F G, ita duo prismata in pyramide A B C D, ad duo prismata in pyramide E F G H. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in



a 22. sexti.

b 12. quinti.

pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad binas prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LK, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, a ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

a 12. quinti.



LEMMA.

QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, b *secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.*

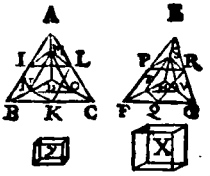
b 17. undec.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis A B C D, E F G H, quarum bases triangula A B C, E F G. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur vt basis A B C, ad basin E F G, ita pyramis A B C D, ad solidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide E F G H. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis E F G H, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide E F G H, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata P F Q R S T, G Q R S T V; *a* quæ maiora sunt dimidio pyramidis E F G H: Item à reliquis pyramidibus E P R S, S T V H, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; *b* relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis E F G H, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis E F G H, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide E F G H, maiora solido X. Diuidatur pyramis A B C D, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides A I L M, M N O D, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. *c* Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide A B C D, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide E F G H, vt basis A B C, ad basin E F G, hoc est, vt pyramis A B C D, ad solidum X. Sunt autem omnia prismata in pyramide A B C D, minora, quam tota pyramis A B C D; *d* erunt quoque omnia prismata in pyramide E F G H, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide E F G H.



SIT deinde solidum X, pyramide E F G H, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis A B C D, ad solidum X, vt basis A B C, ad basin E F G: Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem A B C D, vt basis E F G, ad basin A B C. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem A B C D, ita pyramis E F G H, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide E F G H; *e* erit & pyramis A B C D, maior solido Y. Quare erit, vt basis E F G, ad basin A B C,

a 3. *duo decimi.*
b 1. *duo decimi.*
c 4. *duo decimi.*
d 14. *quinti.*
e 14. *quinti.*

ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; a 9. quinti. a sit autem pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existētes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque b 9. quinti. *erat ad totam pyramidem.* b *Pyramis ergo constituta æqualis erat toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.*

COROLLARIVM.

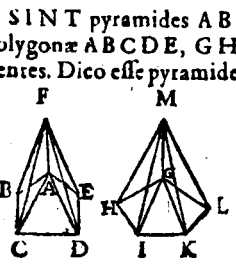
HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur è conuerso, pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

VI. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin.



Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. c Quia vero est, vt basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt basis ABCD, ad basin

c 5. duo decimi.

basin A C D, ita pyramis A B C D F, ad pyramidem A C D F: a Sed rursus est vt basis A C D, ad basin A D E, ita pyramis A C D F, ad pyramidem A D E F. Igitur ex æquo vt basis A B C D, ad basin A D E, ita pyramis A B C D F, ad pyramidem A D E F. Componendo ergo erit vt basis A B C D E, ad basin A D E, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem A D E F. Simili argumento erit vt basis G H I K L, ad basim G K L, ita pyramis G H I K L, ad pyramidem G K L M; & conuertendo vt basis G K L, ad basin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. b Rursus quoniam est, vt basis A D E, ad basin G K L, ita pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erunt quatuor bases A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, in eisdem proportionib. cum quatuor pyramidibus A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit vt basis A B C D E, ad basin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

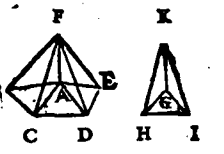
a 5. duo decimi.

b 5. duo decimi.

A B C D E	A B C D E F
A D E	A D E F
G K L	G K L M
G H I K L	G H I K L M

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygona latera habent multitudine aqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. c *Quoniam verò est, vt basis A B C, prima quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem:* d *Erit vt basis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis A B C D, prima quantitas, ad basin G H I, se-*



c 5. duo decimi.

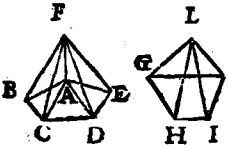
d 24. quinti.

eundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem, & ut modo est ostensum:

a 5. duo decimi. *a & ut basis A D E, quinta quantitas ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A D E F, sexta quantitas ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem;* *b 24. quinti.* *b Erit etiam basis A B C D E, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D E F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, ut demonstratum est, sit ut basis polygona A B C D E, ad basin triangularem G H I, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K; Erit quoque conuertendo, ut basis G H I, ad basin A B C D E, ita pyramis G H I K, ad pyramidem A B C D E F. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum enim basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, & undecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygono, eiusque pyramide, ut ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere à triangulo, eiusque pyramide, ut dictum est.*



SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K L, quarum bases sint polygona, sintque plura latera in una basi quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resoluto enim polygono A B C D E, in triangula A B C, A C D, A D E, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia uero, ut iam est demonstratum, est ut basis A B C, triangularis prima quantitas, ad basin G H I K, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem; & ut basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem; *c 24. quinti.* *c Erit etiam ut basis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis A B C D, prima quantitas, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem, & proxime demonstratum est; Et est quoque, ut basis A D E, quinta quantitas, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A D E F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem,*



& ut ante

vt ante, est ostensum; a *Erit etiam vt basis A B C D E, prima quanti-* a 24.
tas cum quinta, ad basim G H I K, secundam quantitatem, ita pyra- quinti.
mis A B C D E F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi A B C D E.

H A N C autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quotumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.

Q V O D non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

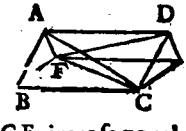
PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vj.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma A B C D E F, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia A B F, D C E. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe A C, in A B C D; C F, in B C E F; F D, in A D E F. *b* Quoniam igitur triangula A B C, A D C, b 34. æqualia sunt; *c* estque vt basis A B C, ad basin A D C, ita pyramis A B C F, ad pyramidem A D C F, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum A B C D, demissam; Erunt & pyramides A B C F, A D C F, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, E F D C, super æquales bases A D F, E F D, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum A D E F, demissa. Est autem pyramis A D C F, eadem pyramidi A D F C, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi A D C, & triangulis A D F, A C F, D C F; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi



primi. c 5. duo decimi.

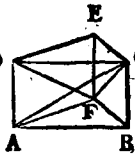
ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, vt perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF, in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, a vt demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hac illi sit æqualis, imo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum.

a 7. duode.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, DF, erit, vt demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis ADBH, ad prisma ABEEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; b Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BGDF, simul tertiam



b 12. quinti.

tiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aequales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basim, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt aequales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione aequales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, aequalis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basim ABCD, constituta, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertia partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes ha pyramides aequales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

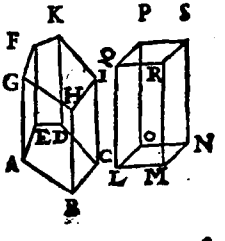
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis aequalem. Nam eiusmodi pyramis, aequalis est pyramidi illi, qua eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem tam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem. Videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases, inter se sunt, vt bases.

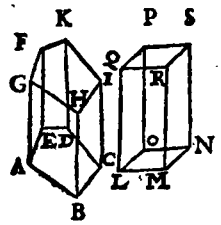
QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & aequalia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero linea recta: non non de parallelepipedis, qua nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, sine bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius basi reperiantur, quam in basi alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases



sint

sint figura multilatera. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, linea recta ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases; Ac proinde per coroll. præd. huius propos. qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. a *Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basim, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basim, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.*

a 15. quinti.



CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM II.

VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quæscunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLIVM II.

CÆTERVM tum ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basim, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate tuli basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertia partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex

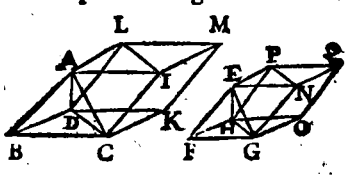
corolla-

uerſario prædicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialteram: Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiam partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit vlo priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hæc enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemque altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam priſmata, &c.

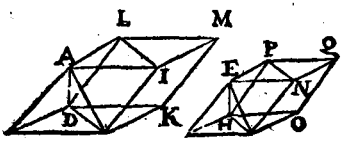
THEOR. 8. PROPOS. 8. viii

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares A B C D, E F G H, ita vt baſes A B C, E F G, ſint ſimiles, & reliqua triangula vnius ſimilia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G. Extendantur enim plana triangulorum A B C, C B D, D A B, perficianturque parallelogramma B I, B K, B L. Deinde ducantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta K M. Erit igitur completum parallelepipedum B M, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cum plana ſolidi B M, ſint parallela, vt facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob ſimilitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, ſunt æquales, eſtque vt A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, ſimilia. Eodem modo cum anguli A B D, E F H, ſint æquales, ſitque vt A B, ad B D, ita E F, ad F H: Item anguli D B C, H F G, æquales, & vt D B, ad B C, ita H F, ad F G: erunt & parallelogramma A L, B K, parallelogrammis F P, F Q, ſimilia.



a 24. undec. similia. a Sed tam tria B I, B k, B L, parallelepipedi B M, reliquis tribus oppositis D M, A M, C M, quam tria F N, F O, F P, parallelepipedi F Q, reliquis oppositis tribus H Q, E Q, G Q, b sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum B M, similia



b 24. undec.

sunt sex planis solidum F Q, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniam vero ductis rectis L I, P N, c prismata D B C I L A, H F G N P E, habent eandem

c 25. quinti.

proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q, eorum dupla; & pyramides A B C D, E F G H, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi B M, ad parallelepipedum F Q, sit triplicata proportionis homologorum laterum B C, F G; erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

d 12. quinti.

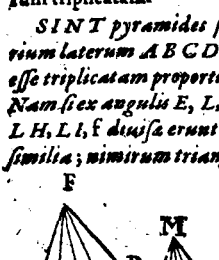
e 33. undec.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum A B C D E, G H I K L. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa A B, G H. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ E B, E C, L H, L I, f *diuisa erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula A B E, E B C, C D E, similia erunt triangulis G H L, L H I, I K L. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula A E F, G L M, similia sunt, & angulus F E A, angulo M L G, æqualis; erit* ⁘ *t F E, ad E A, ita M L, ad L G: Vt autem E A, ad E B, ita L G, ad L H, propter similitudinem triangulorum A E B, G L H. Igitur ex æquo erit,* ⁘ *t F E, ad E B, ita M L, ad L H. Rursus quia est* ⁘ *t E B, ad B A, ita L H, ad H G, ob triangula similia A B E, G H L; Et* ⁘ *t B A, ad B F, ita H G, ad H M, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula A B F, G H M; Erit quoque ex æquo,* ⁘ *t E B, ad B F, ita L H, ad H M: Ac propterea cum sit,* ⁘ *t F E, ad E B, ita M L, ad L H; &* ⁘ *t E B, ad B F, ita L H, ad H M,*

f 20. undec.



g 5. sex. *erit etiam ex æquo,* ⁘ *t F E, ad F B, ita M L, ad M H.* g *Quare æquiangula,*

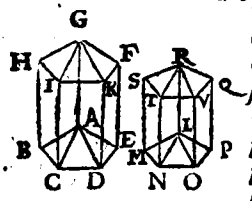
gula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. a Quapropter, vt demonstratum est, pyramides a 8. duo
ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IK- decimi.
LM singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK habeant vnum & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; b Atque idcirco erit vt vna pyramis AB- b 12.
EF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe py- quinti.
ramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, c cum pyramis ABEF, ad pyramidem c 8. duo
GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, decimi.
GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, d erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, d 20. sexti.
OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK, RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM; Vt autem CB, ad CA; ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatis; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nempe angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD; Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt, Ac propterea cum latera circa ipsos ofiensa sint esse proportionalia,



nalia, erunt parallelogramma C G, N R, similia. Atqui & parallelogramma C H, H A, parallelogrammis N S, S L; & triangula A B C, G H I, triangulis L M N, R S T, similia sunt. Igitur prismata A B C I G H, L M N T R S, similia sunt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata C D A G I K, N O L R T V; nec non prismata A E D K G F, L P O V R Q. Quapropter prismata A B C I G H, C D A G I K, A E D K G F, ad prismata L M N T R S, N O L R T V, L P O V R Q, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem singula ad singula, laterum homologorum B C, C D, D E, ad M N, N O, O P, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V, proportionem habere homologorum laterum B C, M N, triplicatam, quæ paulo ante ostensa est eandem ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.



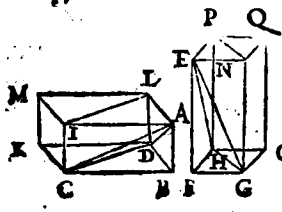
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis corell.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

vij. THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum



sint

sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. a Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis B I, ad basin F N, ita altitudo solidi F Q, ad altitudinem solidi B M: b Vt autem basis B I, ad basim F N, ita est triangulum A B C, ad triangulum E F G. Igitur erit quoque vt basis A B C, ad basin E F G, ita altitudo pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D, cum altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

a 34. *vndec.*
b 15. *quinti.*

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; c cum sit vt A B C, ad E F G, ita parallelogrammum B I, ad parallelogrammum F N; sintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ; d Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda B M, F Q. Quare & prismata D B C I L A, H F G N P E, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

c 14. *quinti.*
d 34. *vndec.*

SCHOLIVM.

EADEM ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at vero E F G H I, non triangularem. Fiat basi non triangulari E F G H, æquale triangulum K L M. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum,



per propos. 45. lib. 1 Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super K L M, fiat pyramis K L M N, eiusdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniam ergo pyramides E F G H I, K L M N, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis E F G H I, æqualis pyramidi A B C D. Igitur & pyramis K L M N, pyramidi A B C D, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides A B C D, K L M N, bases triangulares; e erit vt basis A B C, ad basin K L M, hoc est, ad huic æqualem basin E F G H, ita altitudo pyramidis K L M N, hoc est, altitudo pyramidis E F G H, (ponuntur enim ha altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis A B C D.

e 9. *duo decim.*

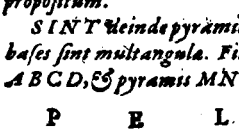
ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, aqualium bases & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse aquales. Constructa enim figura eodem modo; cum basis KLM, aqualis sit basi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, qua pyramidis EFGHI, ponatur autem esse vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt basis ABC, ad basin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. Quamobrem aquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, aqualis sit pyramidis EFGHI, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, aqualis. Quod erat propositum.



a 9. duodecimi.

SINT deinde pyramides aquales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multangula. Fiat rursus triangulum MNO, aquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritque ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis MNOP, aqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc aqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, aqualis erit pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, sibi aqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines aquales.) Ac proptereà pyramidum aqualium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse aquales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO, aqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem qua pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIk, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante ostendimus, aquales erunt pyramides MNOP, FGHIkL. Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, aqualis ex scholio propos. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, aqualis erit. Quod erat propositum.

HOMNIA hac facile quoq; demonstrabuntur conuenire prismatis quibuscunque. Nam si prismata fuerint aqualia, erunt & eorum pyrami-

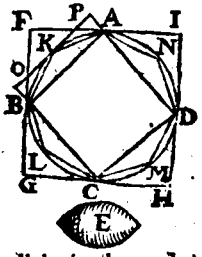
pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertia partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe dua tertia, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, linea recta, vt in ſcholio eiuſdem propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eadem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratum eſt pyramides æquales ſunt; ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certè ſeſquialtera, æqualia quoq; ſunt. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 12.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum A B C D, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni.

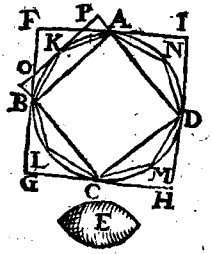


Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelligantur q; ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium eſt quadrati F G H I, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; *a* eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis A B C D, dimidium parallelepipedi baſis F G H I; Ac proinde parallelepipedum baſis A B C D, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus A B C D. Secentur bifariam peripheriæ A B, B C, C D, D A, in punctis K, L, M, N, adiungantur q; rectæ K A, K B, L B, L C, M C, M D, N D, N A. Ducatur quoq; per k, recta O P, tangés circulum in k, quæ parallela erit ipſi A B, vt ad prop. 27. lib. 3. oſtendimus; occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O; & ſuper A k B, A B O P, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. *b* Quia ergo triangulum A k B, dimidiũ eſt parallelogrammi A B O P; erit quoq; priſma baſis A k B, dimidium priſmatis, ſeu

a 32. Vndec.

b 41. primi.

parallelepipedi basis A B O P: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ A K, K B, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, cõstituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam vero si à cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur *plus* quam dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium A K B, B L C, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio;



a 1 dec. a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium A K, K B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia *pars* prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, *cuius* eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. *huius* lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelligantúrque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine

b 6. *duo decimi.* coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, *b* est-

que vt

que vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiungantur-que rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratque rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A k B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo trian- a 41. gulum A k B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque *primi.* pyramis super basin A k B, dimidium pyramidis super basin A B. O P, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam ba- b *6 duo* ses; ac proinde pyramis super basin A k B, maior erit dimidio se- *decimi.* gmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A k B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ A k, k B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quã dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium A k B, B L C, C M D, D N A; atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tan- c 1. *dec.* dem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A k, k B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est prafatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A k B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in co-

rollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demonstratum, erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea que conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

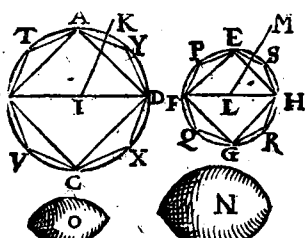
QVAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib 11. *omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersè ita proponi poterit.*

OMNIS conus siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases.

SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F G H, altitudines vero æquales I k, L M. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit vt basis A B C D, ad basim E F G H, ita conus A B C D k, ad aliquam magnitudinem, nempe ad M, quæ vel maior erit, vel minor cono E F G H M. Si enim esset æqualis, a haberet conus A B C D k, ad conum E F G H M, & ad N, proportionē eandem; ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O, ita vt conus E F G H M, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H, diuidanturque peripheriæ E F, F G, G H, H E, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ E P, P F, F Q, &c. Quoniam igitur si ex cono E F G H M, detrahatur pyramis super basin E F G H, eiusdem



a 7. quinti.

eiusdem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; *a* relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EPGH, ita ponitur conus ABCDk, ad magnitudinem N, *b* & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYk, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDk, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYk, minor sit cono ABCDk, pars toto, *c* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

a 1. *dec.*

b 6. *duo decimi.*

c 14. *quinti.*

SIT Secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDk, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDk. Ponatur vt N, ad conum ABCDk, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDk, quam O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDk. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque minor est ostensa; Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDk, ad N; *d* Sit autem, vt conus ABCDk, ad N, ita idem conus ABCDκ, ad conum EFGHM, erit quoq; vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDκ, ad conum EFGHM. *e* QVONIAM autem, vt conus ABCDk, ad conum EFGHM, ita est

d 7. *quinti.*

e 15. *quinti.*

ita est cylindrus A B C D k, (qui triplus est coni A B C D k,) ad cylindrum E F G H M; (qui triplus est coni E F G H M,) Erit quoq; vt basis A L C D, ad basin E F G H, ita cylindrus A B C D k, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo vti sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifeste indicat, ita vt propositio vniuersè proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

CONVERTETVR hac propositio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

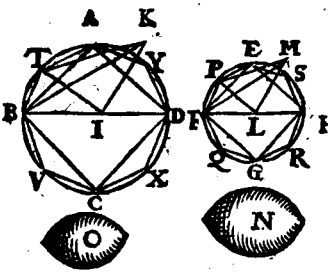
12. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

SINT similes coni, & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F G H, axes vero L k. L M, & diametri basium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus A B C D k, ad aliquam magnitudinem N, propor-

proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, vel minor, vel maior cono E F G H M. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, pro- a 7. portionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis E P F Q G R H S M, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T, M F, M P, vt habeantur duo triangula B K T, E M P, pyramidum A T B V C X D Y K, E P F Q G R H S M; & connectantur rectæ T I, P L. Quoniam igitur coni A B C D K, E F G H M, similes ponuntur; erit ex 24. defin. lib. 11. vt diameter B D, ad diametrum F H, *b* ac propterea vt semidiameter B I, ad semidiametrum F L, b 15. ita axis I K, ad axem L M; Ac permutando vt B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cum igitur anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib 11. quod coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorum bases; *c* Erunt triangula B I K, F L M, æquiangula; *d* Ac propterea vt c 6. sex. K B, ad B I, ita erit M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad d 4. sex. F P, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P. (Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus arcubus B T, F P, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitque vt B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æqualitatem tam linearum B I, I T, quam F L, L P; *e* erunt triangula B I T, F L P, similia) Igitur ex æquo, vt K B, e 6. sex. ad B T, ita M F, ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sunt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis I K, rectus ponatur ad circulum A B C D, *f* erunt bases K B, K T, æquales. f 4. pri. Eodem modo æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erunt, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. *g* Quoniam vero vt K B, ad B T, ita K T; g 7. ad eandem B T; Item vt M F, ad F P, ita M P, ad eandem F P: Erat autem vt K B, ad B T, ita M F, ad F P: Erit quoque vt K T, ad B T; ita M P, ad F P; Et conuertendo vt B T, ad T K, ita F P, ad P M, Quare cum sit vt T K, ad K B, ita P N, ad M F; & vt K B, ad B T, ita M F, ad F P; Et vt B T, ad T K, ita F P, ad P M, veluti ostensum est; habebunt triangula B K T, F M P, latera proportionalia, *h* ideo- h 6. sex.

que æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides A T B V C X D Y K, E P F Q G R H S M, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum B T, F P, ex coroll. propos. 8 huius lib. Vt autem B T, ad F P, ita est B I, ad F L, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P;



a 11. *quinti.* a Et vt B I, ad F L, ita B D, ad F H. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum B D, F H: Ponebatur autem & proportio coni A B C D K, ad N, eandem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus A B C D K, ad N. Quare cum pyramis A T B V C X D Y K, minor sit cono A B C D K, pars toto; b erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono E F G H M.

b 14. *quinti.*

SIT deinde N, maior cono E F G H M. Cum ergo ponatur conus A B C D K, ad N, habere proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autem & pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime ostendimus: Erit vt conus A B C D K, ad N, ita pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M; & conuertendo vt N, ad conum A B C D K, ita pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cum ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad T B, hoc est, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoq; N, ad conum A B C D K, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur quam conus E F G H K; c erit quoque conus A B C D K, maior quam O. Quapropter conus E F G H M, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem

c 14. *quinti.*

alia

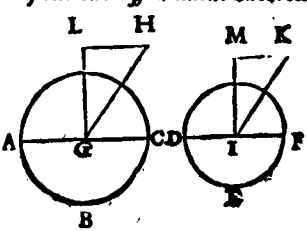
alio cono minorem, proportionē habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono E F G H M: Sed neque minor est ostensa. Æqualis igitur est; a ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionem ad conum E F G H M, & ad N. Cum ergo ponatur conus A B C D K, ad N, in triplicata proportione diametrorum B D, & F H; erit quoq; conus A B C D K, ad conum E F G H M, in earundem diametrorum proportione triplicata. a 7. quinti.

b QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, eandem quoq; obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atq; prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorū, quæ in basibus. Quod ostendendum erat. b 15. quinti.

SCHOLIVM.

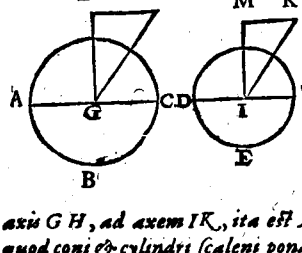
QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perspicuum est, in secunda parte huius propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes rectis ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli A B C, D E F, axes vero G H, I K. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionē diametri ad diametrū triplicatam. Intelligatur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinū, quorū axes G L, I M. Ducanturq; per rectas G H, G L; Item per I K, I M, plana secantia bases lineis rectis A C, D F, quæ diametri basium erūt. Quoniā igitur axes G L, I M, recti sunt basibus A B C, D E F, c erunt & plana per G H, G L; & per I K, I M, ad easdem recta. d Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in A C, D E, cōmunes sectiones; & proinde erunt anguli C G H, F I K, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt,



c 18. Vndec.
d 38. Vndec.

se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem
a 32. primi. *& anguli C G L, F I M, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Reliqui igitur, H G L, K I M, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni A B C H, A B C L, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta H L,*
b 29. primi. *per axium vertices ducta ipsi A C, parallela; b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli*



c 4. sex. *C G L, F I M, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli C G H, F I K. Triangula igitur G H L, I K M, æquiangula sunt; c atque idcirco erit vt G H, ad G L, ita I K, ad I M; & permutando, vt G H, ad I K, ita G L, ad I M. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita est A C, diameter ad D F, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & G L, axis ad I M, axem erit, vt diameter A C, ad D F, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti A B C L, D E F M, similes erunt ex definitione.*
d 12. duodec. d *Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus A B C L, cono & cylindro A B C H, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus D E F M, cono & cylindro D E F K, (ob eandem rationem,) est aqualis, vt constat ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit vt conus & cylindrus A B C L, ad conum & cylindrum D E F M, ita conus & cylindrus A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, ideoque proportio coni & cylindri A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, triplicata quoque erit diametri A C, ad diametrum D F. Quod est propositum.*

xj. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus A B C D, plano G H, parallelo aduersis planis A B, C D, quod quidem secet axem E F, in I. Dico vt est cylindrus A B H G, ad cylindrum G H C D, ita esse axem E I, ad axem I F. Intelligatur enim cylindrus A B C D, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo E C, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantum libet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ E K, K L, æquales ipsi E I; Item quotcunque rectæ F M, M N, N O, æquales ipsi F I. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ I H, K P, L Q, M T, N V, O X, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli E C, describent circulos G H, P Q, Q S, T a, V Z,

T α, V Z, X Y, parallelos æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum S Q X Y. Quoniam vero tam cylindri S P, P A, A H, super bases æquales Q S, P R, B A, & sub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales sunt, quam cylindri X Z, Z T, T D, D H, super æquales bases X Y, V Z, T α, C D, & sub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quam multiplex est axis I L, ipsius axis I E; Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quam multiplex est axis I O, ipsius axis I F. Quoniam autem si axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis est axi I O, (multiplici axis I F, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propos. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, secundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper aquidistantes circa centra L, K, E, &c. vna cum recta S T, semidiametros contingente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, qua scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

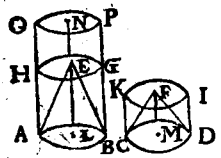


THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT

SINT ſuper baſes æquales A B, C D, duo coni A B E, C D F, & duo cylindri A B G H, C D I K, quorum axes, ſeu altitudines. (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) L E, M F. Dico eſſe conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, vt eſt altitudo L E, ad altitudinem M F. Extendatur enim cylindrus A B G H, ad partes G H, vna cum eius axe L E, & rectangulo A G; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O P, eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. *a* cylindrus A G, ad ipſos eandem habebit proportionem. *b* Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, vt axis, ſeu altitudo L E, ad axem, ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo L E, ad altitudinem M F.



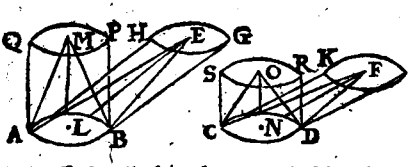
a 7. quinti.
b 13. duode.

c QVIA vero coni A B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; *d* ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, vt altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

c 10. duode.
d 15. quinti.

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E, C D F, & cylindri A B G H, C D I K, ſcaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conum A B E, ad conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, eſſe, vt eſt altitudo L M, ad altitudinem N O. Super baſin enim A B, conſtituatur cylindrus rectus A B P Q, ſub altitudine L M; Item ſuper baſin C D, cylindrus C D R S, ſub altitudine N O. e Quoniam igitur eſt cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrum rectum C D R S, vt altitudo L M, ad altitudinem N O: Eſt autem cylindrus A B P Q, cylindro A B G H: Item cylindro C D R S, cylindrus C D I K, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus A B G H, ad cylindrum C D I K, vt altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod eſt propoſitum.



e 14. duod.
f 10. duode.

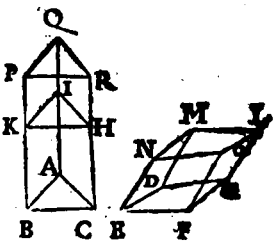
QVONIAM autem coni, ſ cum ſint tertiæ partes cylindrorum, eandem

a vendum habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus a 15. quinti. ad BE, ad conum CDF, & altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eodem argumento, quo & si summus in cylindris, confirmari potest, & perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

IDEM concludetur, quamuis omnes conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH. fuerit scalenus; alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, aequalis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, & altitudo LM, ad altitudinem NO, ut Euclides demonstravit: Erit quoque cylindrus scalenus ABGk, ad cylindrum rectum CDRS, & altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

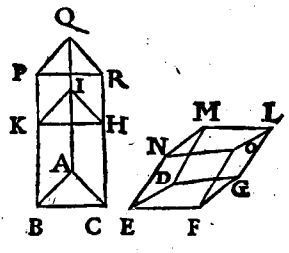
b QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam b 15. quinti. cylindri, c cum illi horum sint tertia partes; Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, & altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod dubio omnino ostendetur eadem ratione, qua & si summus in cylindris, & manifestum est. c 10. duod.

EADEM quoque haec propositio convenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super aequales bases constitutis. Sint enim super bases aequales ABC, DEFG, prisma ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, ut est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineae AI, CH, BK, prismatis ABCHIk, ad basin ABC, perpendiculares, ita ut Bk, sit altitudo prismatis ABCHIk; Productis autem rectis AI, CH, Bk, sumantur IQ, HR, kP, aequales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIkPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntque prismata HIkPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se aequalia, ex coroll. 2. propos. 7. huius lib. d Ac propterea prisma ABCHIk, ad utrumque eandem habebit d 7. proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma ABCHIk, ad prisma HIkPQR, est ut planum BI, ad planum kQ; e Et ut planum BI, ad planum kQ, ita est recta Bk, ad kP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, ut Bk, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum. e 1. sexti.



QVOD si insistentes lineae AI, CH, BK, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma, cuius

cuius insistentes sint perpendiculares ad basin, & aquales altitudinē prismatu ABCHIK. Nam cum ex 2. coroll propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin sint æqualia sitque prisma constitutum ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.



a 15. quinti.

a *QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem cum prismatis,* b *quod illa sint horum tertia partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.*

b 10. duodec.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HÆC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA quoque hæc facile conuerti possunt hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

**NAM alioquin pars aqualis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib. 11. ostensum est.*

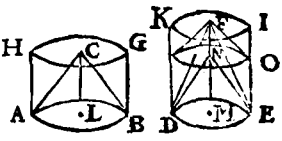
xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudinesve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic proposītum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.

QVOD

QVOD si altitudines L C, M F, inæquales fuerint, sit M F, maior, ex qua abscindatur M N, ipsi L C, æqualis; & per N, ducatur planum O N, basi D E, parallelum, vt in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri D O, O K. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri A B G H, D E I K; *a* erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O. *b* Est autem vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita basis A B, ad basin D E, cum æquales sint altitudines: *c* Item vt cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cum bases sint æquales, imò vna & eadem D E. Igitur erit quoque vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc est, ad huic æqualem L C; Ac propterea reciprocæ sunt bases & altitudines.



a 7. quinti.
b 11. duodec.
c 14. duodec.

IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni A B C, D E F, sint æquales; erunt & cylindri A B G H, D E I K, æquales. *d* cum coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus M N, N F, constituantur duo coni, vt in figura.

d 10. duodec.

SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, sint æquales, cum sit vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C; erunt & bases A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases A B, D E, & sub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem L C, hoc est, ad huic æqualem M N; *e* Est autem vt basis A B, ad basin D E, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, cum altitudines sint æquales: *f* Item vt altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cum bases sint æquales: erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O; *g* Ideoque cylindrus A B G H, cylindro D E I K, æqualis erit.

e 11. duodec.
f 14. duodec.
g 9. quinti.

AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum A B C, D E F, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cum eædem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam

ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

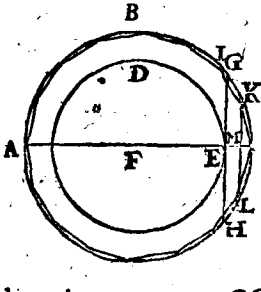
NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti eadem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoq; erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quam CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes



xi. *def.*

nume-

numero & magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, *a* quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt; *b* erunt rectæ GH, kL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DF, in solo puncto E; recta kL, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta Ck, quæ longius à circulo DE, abest, quam kL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, *c* ideoque æqualiter cum Ck, à centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

a 29. tertij

b 29. primi

c 14.

COROLLARIVM.

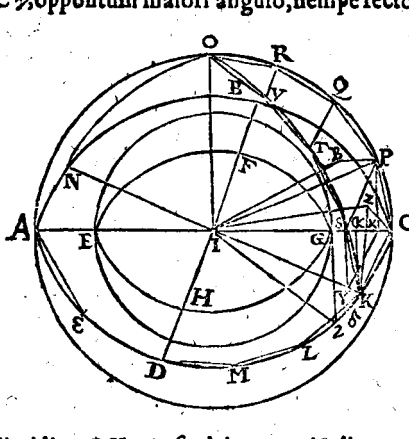
HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

PROBL. 2. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatq; in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintq; communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrū sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionū sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarū ad earū superficiem; erunt ipsæ sectio-

nes, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint
a 16. quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. *a* Deinde in maiori circulo
duodè. A B C D, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ, ad circumferentiam vsque circuli A B C D, quæ circulum
b 1. E F G H, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, *b* ap-
quarti. plicetur in circulo A B C D, recta æqualis A ε. Quia vero si arcui
c 19. C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, *c* latus
primi. C γ, oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ,



quod minori angulo opponitur, ni mirum acuto; erit quoque recta C γ, maior recta A ε; ac proinde arcus C γ, arcu A ε, maior erit, vt constat ex scholio *propos.* 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod si ex quadrante C D, dimidiũ auferatur D L, & ex reliquo C L,
d 1. *dec.* dimidium L K, & sic deinceps; *d* relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, seu arcu A ε. Sit ergo iam arcus C K, minor; Erit que recta C κ, subtensa minor quam recta A ε, hoc est, quam G γ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C κ, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet; multo minus recta C κ, subtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tan-
e 12. get. Rursus ducta diametro κ N, *e* erigatur ex centro I, ad plana
Vndec. circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, κ N,
f 18. plana ducantur, *f* quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficient-
Vndec. que communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O *K*. Quia vero anguli O I C, O I κ, recti
g *schol.* 21. *ter.* sunt, ex defin. 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt O C, O κ; atque adeo cum circuli A B C D, A O C, N O κ, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D,

tes C D, O C, O κ, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; & quadrantes O C, O κ, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis C D; *a* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C k, k L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; k S, S T; T V, V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, *b* quæ in communes sectiones A C, N k, cadent; *c* eruntque inter se parallelæ. a 29. tertij. b 38. vndec. c 6. vndecimi.

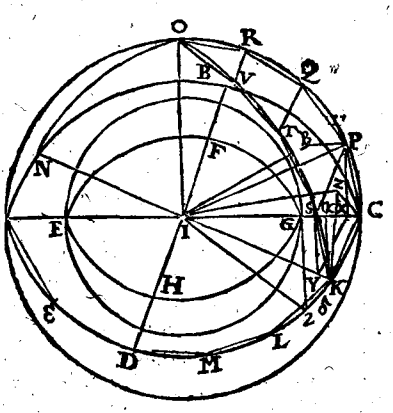
QVONIAM igitur triangulorum P C X, S k Y, anguli P X C, S Y k, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *d* & anguli P C X, S k Y, æquales, quod & æquales sint peripheriæ A O P, N O S, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis A O C, N O k, æqualibus demantur arcus æquales C P, k S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X, æquales duobus angulis S k Y, S Y k, trianguli S k Y. Sunt autem & latera P C, S k, rectis angulis opposita, æqualia. *e* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y k, æqualia erunt. Quare cum rectæ P Y, S Y, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta X Y, *f* æquales quoque erunt & parallelæ P S, X Y, inter sese. *g* At quia & rectæ C k, X Y, parallelæ sunt, quod latera I C, I k, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris I C, I κ, æqualibus demantur æquales rectæ C X, κ Y, relinquentur & I X, I Y, æquales; Ac proinde erit, vt I X, ad X C, ita I Y, ad Y κ.) *h* Erunt parallelæ quoque P S, C k, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi X Y, *i* ideoque eas coniungentes rectæ C P, k S; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum C k, S P, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli A B C D, perpendiculares, & connectantur rectæ Q C, T k, ostendemus similiter C k, Q T, esse parallelas; atque adeo ipsas P S, Q T, inter se parallelas esse, cum eidem C k, sint parallelæ; totumque quadrilaterum P S T Q, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum Q T V R. *k* Est autem & triangulum R V O, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur reliqua latera k L, L M, M D, ductis scilicet quadrantibus O L, O M, O D, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes O C, O k, super latus C k, constructis, inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem E F G H. d 27. tertij. e 26. primi. f 33. primi. g 2. sex. h 8. vndec. i 7. vndecimi. k 2. vndecimi.

DVCATVR enim ex I, ad planum C k S P, perpendicularis I Z, connectanturque rectæ Z C, Z k. Cadere autem perpendicularem I k, intra quadrilaterum C k S P, in scholio sequenti

ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli I Z C, I Z κ, recti sunt; a erit quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ I κ, quadratis rectarum I Z, Z κ, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium I C, I κ, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, quadratis rectarum I Z, Z κ, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato I Z, reliqua quadrata rectarũ Z C, Z κ, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectæ Z C, Z κ, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad P S, ducentur, æquales esse & inter se & rectis Z C, Z κ. Quare circulus ex Z, ad interuallum Z C, describetur per quatuor puncta C, κ, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera P S T Q, Q T V R, & triangulum R V O, circulos describi posse: demonstrabimus. Quoniam vero, vt postea ostendemus, angulus C Z κ, obtusus est; b erit quadratum rectæ C κ, maius quadratis rectarum Z C, Z κ; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ C κ, duplo quadrati rectæ Z C.

a 47. primi.

b 12. secund.



DVCATVR ex k, ad rectam A C, perpendicularis k α. Cum igitur A C, dupla sit ipsius A I, & A α, maior sit, quam A I, erit A C, minor duplo ipsius A α. Quam ob rem cum sit, c vt A C, ad A α, ita rectangulum sub A C, α C, ad rectangulum sub A α, α C, quod bases horum rectangulorum sint A C, A α, & eadem altitudo α C; erit quoque rectangulum sub A C, α C, minus duplo rectanguli sub A α, α C. d Est autem rectangulum sub A C, α C, æquale quadrato rectæ C κ, & rectangulum sub A α, α C, æquale quadrato rectæ k α; quod recta C k, inter A C, α C, sit media proportionalis, & recta k α, inter A α, α C, ex coroll propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta A k, fieret triangulum rectangulum A C k.) Igitur & quadratum rectæ C k, minus erit duplo quadrati rectæ k α. Ac propterea cum quadratum rectæ C k, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ Z C, erit quadratum rectæ k α, maius quadrato rectæ Z C. e Quoniam vero quadratum rectæ I C, æquale est quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ I k, quadratis re-

c 1. sex.

d 17. sexti.

e 47. primi.

ris rectarum I α, α k; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium I C, I k. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarum I α, α k. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ α k; & ex illis minus, videlicet rectæ Z C, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z, maior quam recta I α. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorem E F G H, quod per coroll. propos. præcedentis recta k α, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani C k S P, longius absint à sphæra E F G H, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum C k S P, sphæram E F G H.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum C K S P, non tangere sphæram minorem E F G H, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam C K, minorem esse recta c γ: α Est autem a 19. C k, maior quam Z C, quod angulus C Z k, obtusus sit, vt mox *primi.* demonstrabitur; Multo maior erit G γ: quam Z C; Ac propterea quadratum rectæ G γ, maius quadrato rectæ Z C. b Quia vero b 47. quadratum rectæ I γ, æquale est quadratis rectarum I G, G γ; & *primi.* quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, sit sphæræ minoris E F G H, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum C k S P, sphæram E F G H, nequaquam continget.

DVCATVR rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa P S T Q, descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. c erit quadratum rectæ I P, æ- c 47. quale quadratis rectarum I β, β P. Quia vero & quadratum rectæ *primi.* I c, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I c, I P,) æquale est quadratis rectarum I Z, Z c; erunt quadrata rectarum I β, β P, quadratis rectarum I Z, Z c, æqualia; Est autem quadratũ rectæ Z c, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z c, maior sit, quam linea β P, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratũ rectæ I β, reliquo quadrato rectæ I Z, maius erit, ideoque & linea, I β, maior quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram E F G H, existet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum P S T Q, quam c k s p, tanget sphæram maiorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus,

quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

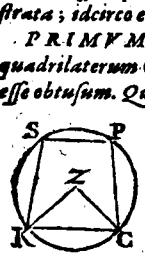
EX iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quàm habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat excoroll. propos. 8. huius lib. Sint autẽ, vt vna pyramis ad vnã pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum vnius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, a cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

a 15. quinti.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; qua tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum C K S P, & angulum C Z K, in quadrilatero C K S P, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt I K, ad K C, ita I Y, ad Y X, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula I C K, I X Y, similia sint.) Est autem I K, maior quam I Y; b erit & K C, maior quam Y X. Cum igitur Y X, æqualis sit ostensæ ipsi S P, erit quoque K C, maior quam S P: Ac propterea in hac figura, arcus C K, maior c erit arcus S P, ex scholio propos. 28. lib. 3. c Quare cum arcus C P, K S, arcui C K, sint æquales, quod & lineæ C P, K S, ipsi K C, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus C P, K S, arcu P S, maiores; Atq; idcirco quilibet arcum C K, C P, K S, quadrantem circuli C K S P, excedet; atque à semicirculo superabitur; ac proinde multo magis segmentum S P, minus erit semicirculo.

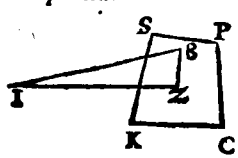


b 14. quinti.

c 28. tertij.

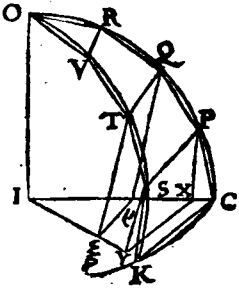
micirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex l, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Kβ, cadere intra quadrilatera; nec non & perpendicularem ex l, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, & perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro l, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur recta lθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppositum lθ, maius latere lZ, quod minori angulo lθZ, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius à centro l, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.



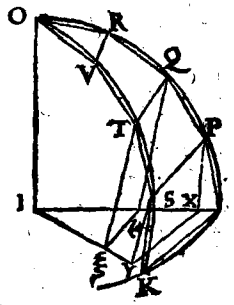
a 19. primi.

TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figura, ea videlicet, qua continetur semidiametris lC, lK, lO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum lCK, perpendiculares Qμ, Tξ, b qua in communes sectiones lC, lK, cadent, c eruntque inter se se parallela, vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ; erunt QT, μξ, parallela & aquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & aquales PS, XY. d Quia vero μξ, ipsi CK, parallela est; quod latera lC, lK, proportionaliter sint sectain μ, & ξ, (veluti diximus de recta XY; e erunt quoque μξ, XY, parallela. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt lY, ad YX, sic ipsi lξ, ad ξμ; Est autem lY, maior quam lξ. f Igitur & YX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, qua aqualis est ipsi XY, maior erit quam QT, qua aqualis est ipsi ξμ.



b 32. vndec.
c 6. vndec.
d 2. sext.
e 30.
f 14. quinti.

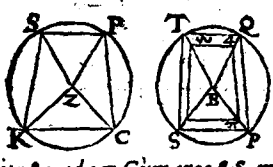
HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, C, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediantur que è centris recta ZC, ZK, ZS, ZP; CP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel aqualis, vel minor. Sit primum aqualis.



a 25. primi.

b 8. primi.

Quia ergo latera ZK, ZC, aqualia, ponuntur lateribus βS, ζP, & basis KC, maior est basi PS; a erit angulus KZC, maior angulo SζP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TζQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt aquales; b erunt anguli KZS, CZP, angulis SζT, PζQ, aquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad ζ: Sunt autem & aquales, cum tam hi, quàm illi quatuor rectis sint aquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur aqualis est recta Zϵ, recta ζP. SIT deinde ZC, minor quàm ζP. Et abscindantur ζπ, βρ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, aquales, connectantur ρ, recta πρ, ρω, ωφ, φπ, e quæ parallela erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eò quòd recta ex centris secta, sunt proportionaliter; ac proinde ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit βS, ad SP, ut βρ, ad ρω. Cum ergo βS, maior sit quàm βϱ, d erit & SP, maior quàm ϱπ. Eadem ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, πφ, φπ; Ac propterea cum PS, minor sit, quàm CK, & ST, PQ, aquales rectis KS, CP; & TQ, minor quàm PS; erunt recta πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum recta βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint aquales; e erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & aquales. quod tam illi, quàm hi sint quatuor rectis aquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum Non igitur minor est recta ZC, quàm βP: Sed neque aqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.



a 2. sext.

d 14. quinti.

e 25. primi.

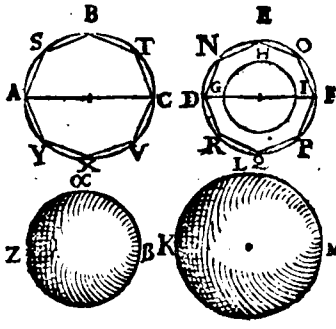
THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHÆRÆ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quàm DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum AC, ad diametrum DF. Habeat primum sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæræ DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. f Inscribatur

f 15. duodecimi.

batur in ſphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI; Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cùm ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, a erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.



a 14. quinti.

HABEAT ſecundò ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cùm igitur ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrũ DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrũ ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra kLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphærã Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, proportionẽ triplicatam diametri *DF*, ad diametrum AC. Et quia ſphæra kLM, maior ponitur, quàm ſphæra DEF, erit quoq; ſphæra ABC, maior, quàm ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphærã Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatã diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt,

non

non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphæram kLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

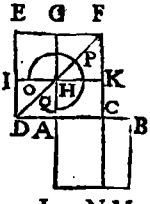
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia totius describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur enim super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, per quod ducatur Ik, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, kG, quadrata rectarum AD, AC. *a* Quia ergo est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *b* erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi kG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla: *c* Est autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad Ak, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius Ak. Quoniam autem Ak, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus Ak, IG. Additis igitur æqualibus CM, kG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, qua-



a 3. def. sexti.
b 17. sexti.
c 1. sex.
d 43. primi.

A M, quadruplum sit quadrati A I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea A B, dupla ponatur lineæ A D, erit & gnomon O P Q, eiusdem quadrati A I, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni O P Q, addatur ipsum quadratum A I, quintuplum efficietur quadratum C E, quadrati A I.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A B, quadruplum est quadrati rectæ A D, quòd linea A B, dupla lineæ
a 2. sec. A D, ponatur. a Est autem quadratum rectæ A B, æquale rectan-



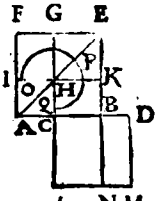
gulis sub A B, A C, & sub A B, B C, comprehensis; Et rursus, quod sub A B, A C, æquale est ei, quod sub A D, A C, bis; (sicut enim A B, ipsius
b 1. sext. A D, est dupla, b ita quoque erit rectangulum sub A B, A C, rectanguli sub A D, A C, duplum, cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo A C. Ac propterea rectangulum sub A D, A C, bis sumptum æquale erit rectangulo sub A B, A C.) c Quod verò sub A B,
c 17. sexti. B C, æquale est quadrato rectæ A C, cùm sit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Igitur quadratum rectæ A C, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ A D; Ac proinde quadrata rectarum A C, A D, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ A D.
d 4. sec. d Quocirca cùm quadratum rectæ C D, æquale sit quadratis rectarum A C, A D, vnà cum rectangulo sub A D, A C, bis; Erit & quadratum rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremã & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta A B, in C, possitq; quintuplum segmenti A C; sumatur autem ipsius A C, dupla C D, quæ, vt pòst ostendemus, maior erit reliquo segmento B C. Dico si C D, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse C B, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ex C, ducatur ipsi A F, parallela C G, secans diametrum in puncto H, per quod agatur I K, parallela ipsi A B. Producta deinde G C, perficiatur quadratum C M, protrahaturque E B, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. C I, K G, quadrata rectarum A C, C B. Quia igitur quadratum B F, quintuplum

plum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus: Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æquales erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; est quæ LC, ipsi CD; & GH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. *a* Cùm igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: *b* Est autem CK, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD; estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB; *c* Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum CB.

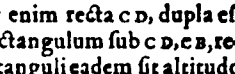


a 31. sexti

b 43 primi

c 17. sexti

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; *d* est quæ quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vnà cum rectangulo sub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vnà cum rectangulo sub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ AC; Est autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cùm ergo rectangulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectangulo sub CD, CB; (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, *e* ita quoque duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: *f* At quadratũ rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; *g* ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque segmentum maius CB. Si igitur recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.



d 4. sexti

e 1. quinti

f 2. sexti

g 17. sexti

LEM-

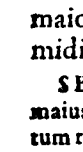
LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior sit necessario quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, a 4. secundi. *a cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.*

iij. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

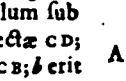
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde



ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, k, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt AB, ad AC, b 17. sexti. ita AC, ad CB, *b* erit rectangulum sub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, c 34. primi. quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earum d 36. primi. latera Hk, IQ, æqualia; *c* ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. *d* Quare rectangula IO, QE, æqualia e 43 pr. erunt. *e* Est autem IO, ipsi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æquale

æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

ALITER. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B, *a* erit rectangulum sub A B, B C, vna cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulum sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cum sit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; *b* erit rectangulum sub A B, A C, æquale quadrato rectæ A C: quod cum, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdem quadrati rectæ C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, vna cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratum rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.



a 6. secundi.

b 17. sexti.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque eum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta A C, diuisa inaqualiter in C, cuius maius segmentum A C, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratum rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam A B, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum L G, rectæ A C, quadruplum quadrati P Q, rectæ C D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus. (cum enim quadratum D O, rectæ B D, quintuplum ponatur quadrati P Q,) ex recta C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus. Igitur gnomon R S T, æqualis erit quadrato L G. At gnomoni R S T, æquale est rectangulum C E, vt supra ostensum est. Ergo & quadrato L G, recta A C, æquale erit idem rectangulum C E, sub A B, B C, compre-

c 17. sexti.

benſum: c Ac proinde erit, vt A B, ad A G, ita A C, ad C B. Quocir-

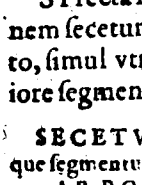
ea, ex definitione, recta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

ALITER. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita G B,
a 6. secundi. *erit rectangulum sub A B, B C, vna cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cum quadratum ex recta linea B D, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta C D, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis A B, B C, descriptum, vna cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiusdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Est autem eiusdem quadrati recta C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale est rectangulum sub A B, B C.*
b 17. sexti. *b Quamobrem erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde recta erit A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

v. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum A B, B C, simul tripla esse quadrati rectæ A C. Describatur



enim super A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi B D, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi A B. Eruntque C H, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad A C, ita A C,
c 17. sexti. ad C B; c erit rectangulum sub A B, B C, nempe A H, æquale ipsi I E, quadrato rectæ A C. Cum ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon k L M, vna cum quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectæ A B, vna cum quadrato C H, rectæ B C, eiusdem quadrati I F, rectæ A C, triplum.

ALITER. Quoniam est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B;
d 17. sexti. d erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C; Atque adeo rectangulum sub A B, B C, bis, vna cum quadrato rectæ A C,
e 7. secundi. triplum quadrati rectæ A C. e Sunt autem quadrata rectarum A B, B C, simul æqualia quadrati rectæ A C, vna cum rectangulo sub A B, B C, bis. Igitur & quadrata rectarum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C. Quocirca si recta secundum extremam & mediam

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

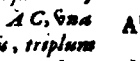
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraque simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, demptoque quadrato IF, erit gnomon KL, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC; a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema ac media ratione. a 19. sexti.

ALITER. Cum quadruplum rectarum AB, BC, tripla sint quadrati recta AC; b Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato recta AC, & rectangulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum recta AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati recta AC. Dempto ergo quadrato recta AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati recta AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato recta AC. c Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.



b 7. secundi.

c 17. sexti.

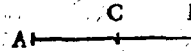
EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaq; assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta

illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta A B, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta B D, minori segmento B C, aequalis. Dico quadratum ex A D, quintuplum esse quadrati ex A C, maiore segmento. a *Quoniam enim quadratum ex A D, aequale est rectangulo sub A B, B C, quater contento, una cum quadrato ex A C:* b *Rectangulum autem sub A B, B C, aequale est quadrato ex A C; (quod A B, A C, C B, sint continuè proportionales) erit rectangulum sub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C; atque adeo rectangulum sub A B, B C, quater una cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C. Igitur & quadratum ex A D, (quod aequale ostensum est rectangulo sub A B, B C, quater, una cum quadrato ex A C,) eiusdem quadrati ex A C, quintuplum erit. Quod est propositum.*

a 8. secundi.



b 17. sexti.

SIT deinde recta A B, secta inaequaliter in C, cui addatur recta B D, minori segmento B C, aequalis, sitque quadratum ex A D, quadrati ex A C, maiori segmento quintuplum. Dico A B, in C, sectam esse extrema ac media ratione. c *Quoniam enim quadratum ex A D, aequale est rectangulo sub A B, B C, quater, una cum quadrato ex A C; erit quoque rectangulum sub A C, B C, quater, una cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C; ac propterea rectangulum sub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C: hoc est, rectangulum sub A B, B C, aequale quadrato ex A C.* d *Igitur erit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B: Ac proinde A B, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

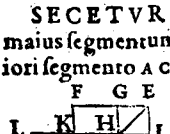
c 8. secundi.

d 17. sexti.

XV. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei aequalis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea.

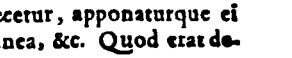
SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum A C, & adiiciatur ei in rectum A D, aequalis maiori segmento A C. Dico rectam B D, secari in A, extrema ac media ratione, essequ; maius segmentum A B. Describatur enim super A B, quadratum B E, in quo ducta diametro A E, ducatur ex C, ipsi B E, parallela C G, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi B D, parallela I K, & ex D, ducatur



cetur ipſi A F, parallela D L, occurrens ipſi I k, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. c k, I G, quadrata rectarum A C, B C. Quoniam igitur eſt vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; *a* Erit rectangulum I F, contentum ſub A B, B C, æquale quadrato C K, rectæ A C. *b* Eſt autem c k, ipſi A L, æquale. Igitur I F, æquale erit ipſi A L; additoque communi B k, erit rectangulum B L, contentum ſub B D, D A, æquale quadrato B F, rectæ A B; *c* Ac proinde erit vt B D, ad A B, ita A B, ad D A. Quare B D, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum A B.

a 17. *ſexti.* *b* 36. *primi.* *c* 17. *ſexti.*

ALITER. Quoniam eſt vt A B, ad A C, hoc eſt, ad A D, ita A C, ad C B; Erit conuertendo vt D A, ad A B, ita B C, ad C A; & componendo vt D B, ad A B, ita A B, ad C A, hoc eſt, ad A D. Secta igitur eſt B D, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea B D, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum A B, minus autem ſegmentum A D, & ex maiori ſegmento A B, detrahatur recta A C, æqualis minori ſegmento A D. Dico maius ſegmentum A B, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam A C, quæ æqualis eſt minori ſegmento A D. Facta enim prioris figura conſtructione, cum ſit vt B D, ad A B, ita A B, ad A D, d erit rectangulum B L, contentum ſub B D, A D, æquale quadrato B F, rectæ A B; & ablato communi B K, erit A L, æquale ipſi I F; e Eſt autem A L, ipſi C K æquale. Æquale igitur eſt I F, contentum ſub A B, C B, quadrato C K, rectæ A C; f Ac proinde erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quare A B, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt A C, minus vero ſegmentum recta C B. Quod eſt propoſitum.

d 17. *ſexti.* *e* 36. *pr.* *f* 17. *ſexti.*

ALITER. Quoniam eſt vt tota B D, ad totam A B, ita A B, detracta ex B D, ad A D, hoc eſt, ad A C, detractam ex A B; g erit quoque ita A D, reliqua ipſius B D, hoc eſt, A C, ad C B, reliquam ipſius A B; vt tota D B, ad totam A B, hoc eſt, vt A B, ad A C; Ac pro-

g 10. *quinti.*

pterea diuisa erit A B, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim A B, extrema ac media ratione in C, sitque D E, dimidium totius, & D F, dimidium maioris segmenti A C.



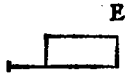
Dico D E, in F, secari extrema ac mediа ratione, maiusq; segmentum esse D F. Cum enim sit vt A B, totа ad D E, totum, ita A C, ablata ad D F, ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; a *erit quoque reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota ad totam; Ac proinde & C B, dupla erit ipsius F E.* b *Quoniam vero est, vt A B, ad A C, ita D E, dimidia illius, ad F E, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, A B, ad A C, vt A C, ad C B; erit quoque D E, ad D F, vt D F, ad F E; Ac proinde ex eadem defin. D E, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

a 19. quinti.
b 15. quinti.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis A B, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum A C, C B, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento A C, recta A D, æqualis dimidiæ totius A B. *c* Quoniam igitur quadratum rectæ C D, quintuplum est quadrati rectæ A D; habebit quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ A D, proportionem, quam numerus ad numerum. *d* Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum C D, A D; propterea que ipsæ rectæ C D, A D, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem A D, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis A B. Igitur & C D, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum C D, A D, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) *e* erunt



c 1. tertiidec.
d 6. decimi.
e 9. dec.

rectæ

rectæ CD, AD, longitudine incommunsurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD Rationalis potentia tantum commensurabilis; *a* erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome. *a* 74. *decimi.*

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; *b* erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, *c* facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. *b* 17. *sexti.* *c* 98. *decimi.*

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis, erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C. sitq; maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. d *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum;* e *ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ ED, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5 ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis;* f *erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.* d 3. *tertiædec.* e 6. *dec.* f 74. *decimi.*

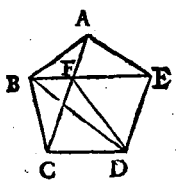


THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse

æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ B E, A C, B D; & ex puncto F, vbi se interſecant rectæ B E, A C, recta ducatur E D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli
a 4. pri. quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; *a* erunt & baſes B E,
b 5 pri. B D, & anguli A E B, C D B, æquales; *b* Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, cum æqualia ſint oſtenſa latera B E, B D; Toti igitur anguli A E D, C D E, æquales erunt. Rurſus quia latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus B A, B C, trianguli B A C; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex



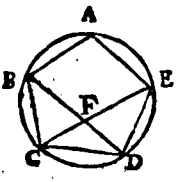
c 4 pri. hypotheſi: *c* Erit & baſis B E, baſi A C, æqua-
lis, & anguli A B E, A E B, angulis B A C, B C A, æquales. Cum er-
d 6 pri. go æquales ſint anguli A B E, B A C, trianguli A B F; *d* erunt quo-
que latera B F, A F, æqualia; Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus B E, A C, erunt reliquæ lineæ F E, F C, æquales. Itaque cum latera F E, E D, trianguli F E D, æqualia ſint lateribus
e 8. pri. F C, C D, trianguli F C D; & baſis communis F D; *e* erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, æquales: Sunt autem & anguli A E B, B C A, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli A E D, B C D; Ac proinde cum angulo A E D, oſtenſus ſit æqualis angulus C D E, & angulo B C D, æquales ponantur anguli A B C, B A E; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipſis conten-
f 4. pri. ti, æquales, ex hypotheſi; *f* Erunt & baſes B E, B D, & anguli A-
g 5. pri. E B, C D B, æquales; *g* Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera B E, B D. Igitur toti anguli A E D, C D E, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli B A E, C D E; erũt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratũ eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demõſtrandum.

11. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo A B C D E, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ D B, C E, ſe



EB, se mutuò secantes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni. *a* Descripto enim circulo circa pentagonum; *b* erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia verò latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; *c* Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cùm in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, *d* & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: *e* Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt: *f* Ideoque rectæ BF, lateri pentagoni BC, æquales. *g* Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD. *h* Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. *i* Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. quarti.
b 28. tertij.
c 4 primi.
d 32. primi.
e 33. sexti.
f 6. primi.
g 27. tertij.
h 32. primi.
i 4. sexti.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AB. Descripto enim circulo circa pentagonum, k *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quàm duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cùm ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales:* l *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

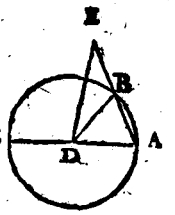
k 22. tertij.
l 28. primi.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum; componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectum adda-



tur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniunganturque rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. *a* Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) *b* erunt & anguli BDE, BED, æquales: *c* quibus cùm æqualis sit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: *d* Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus *B*AD, duplus erit anguli *B*ED: ac proinde duo anguli DA*B*, DB*A*, simul quadrupli erunt anguli *B*ED. *e* Cùm ergo angulis DA*B*, DB*A*, æqualis sit externus *B*DC, erit angulus *B*DC, quadruplus eiusdem anguli *B*ED: Atqui idem angulus *B*DC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cùm duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD, *f* erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. *g* Igitur erit vt EA, ad AD, hoc est, ad E*B*, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, E*B*, sibi æqualis ad *B*A: Atque ideirco recta EA, secta est in *B*, extrema & media ratione, estque maius segmentum E*B*, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.

a 33. sex.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 5. primi.
e 32. primi.
f 32. primi.
g 4. sex.

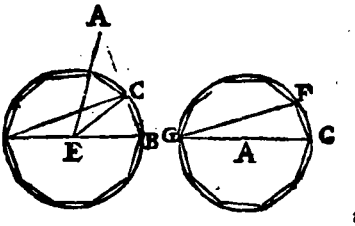
SCHOLIVM.

QVIA vero demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum linea diuisa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum secari quoq; extrema & media ratione, eiusq; segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hoc autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoq; huius theorematis facile cum Campano demonstrabimus. Deducta

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentũ latus decagoni eiuſdẽ circuli. Quod ſi minus ſegmentũ fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitq; primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoq; vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, a ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erũt, cùm habeant latera circa communem angulum B, proportionalia; eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni; b erunt anguli CAE, CEA, æquales; quibus cùm æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: d Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A. e Cùm ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, quia æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus. f Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.



a 6. ſex.

b 5. pri mi.

c 32. pri mi.

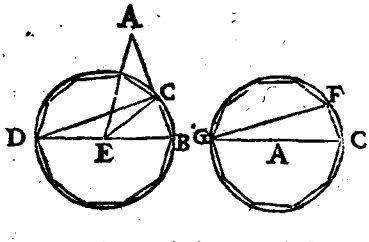
d 5. pri mi.

e 32. pri mi.

f 33. ſex.

SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentũ AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD; ducaturq; diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFH, cuius diameter CAG; eritq; ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniã igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum, & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntq; latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniam verò,

ſi coni



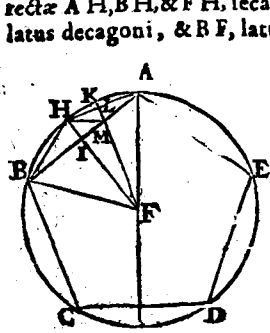
si connectantur recta C D, F G, anguli C D B, F G C, sunt æquales, & in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quòd insistant arcubus similibus B C, C F, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoq; anguli B C D, C F G, in semicir-

a 31. ter tij. *culis æquales, a nimirum recti:* b *Erunt quoque latera B D, C G, inter se æqualia. Quam ob rem cùm diametri B D, C G, sint æquales,*
b 36. primi. *æquales quoque erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde cùm recta A C, sit latus hexagoni circuli C F G, erit quoque eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D. Quod est propositum.*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

In circulo A B C D E, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vnà cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diuiso deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I; eritq; recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu A H, bifariam in K, adiúgatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, pũcto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; c erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cùm latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipsi contenti æquales quoque; d erunt & bases A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, ideoque recti: Eademq; ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G, inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D. Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cùm arcus A B, C D, æquales sint; erunt quoque



c 27. tertij.

d 4. primi.

eorum

eorum dimidii arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cùm arcus A H, duplus sit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiusdem arcus H K. Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales sunt, & est arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiusdem arcus B H, duplus. Quare arcus C G, B C, æquè multiplices sunt, nempe dupli, arcuum H K, B H; a Ac propterea totus arcus B G, duplus sequoque erit totius arcus B K, b & ideirco angulus quoque B F G, duplus anguli B F K: c Sed quia idem angulus B F G, ad centrum duplus est quoque anguli F A B; erunt ideirco anguli B F M, F A B, æquales; d Ac propterea triangula A B F, F B M, cùm habeant angulos F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt. e Quocirca erit vt A B, ad B F, ita B F, ad B M; f ideoque rectangulum sub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ B F.

a 1. quinti. b 33. sequoque. c 20. ter duplus. d 32. pri mi. e 4 sex. f 17. sexti.

RVRSVS quia latera A L, L M, trianguli A L M, æqualia sunt lateribus H L, L M, trianguli H L M, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; g erunt & bases A M, H M, & anguli L A M, L H M, æquales: h Est autem angulus L A M, angulo H B A, æqualis, quòd & latera H A, H B, æqualia sint. Igitur & angulus L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; i Ac propterea triangula A B H, A H M, cùm habeant angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. k Quā ob rem erit vt A B, ad A H, ita A H, ad H M; l ideoque rectangulum sub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Ostensum est autem & rectangulum sub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, simul æqualia sunt quadratis rectarum B F, A H. m At verò rectangula sub A B, B M. & sub A B, A M, æqualia sunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

g 4. pri. h 5. pri mi. i 32. pri mi. k 4. sex. l 17. sexti. m 2. secundi.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam F H, propterea quòd arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

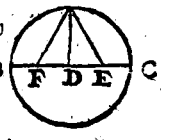
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est, diametrum A G, ex puncto A, ductam diuidere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cùm transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bi-

CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusq; demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc à nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF, adiungaturq; recta AF. Dico rectam AF, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, secta sit bifariam in E, eiq; additæ DF,



a 6. sec. *a erit rectangulum sub CF, DF, vnà cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF, est æqualis.* b 47. primi. *b Est autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum sub CF, DF, vnà cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc est, quadrato rectæ CD.* c 17 sexti. *c Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF, propterea que recta CF, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15 lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib.* d 10. ter tij dec. *d Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vnà cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli;* e 47 primi. *e Est autem eiusdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*

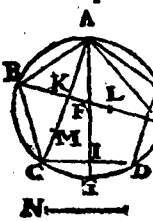
xij. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem; describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetq; AG, latus CD, in I, connectanturq; rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in

K. Ab-

K. Abscindatur quoq; ex semidiametro F H, quarta eius pars F L. Item ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commensurabiles, cùm sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota B L, composita, *a* cùm sit commensurabilis vtrique F L, B F, Rationalis erit.



a 16. def. 10.

RVRSVS quoniam recta F B, ex centro ducta secat arcum A C, bifariam in B; secabit quoque rectam A C, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. præcedentis propos. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2 eiusdem propos. Triangula ergo A C I, A F K, cùm habeant angulos A I C, A K F, rectos, & angulum C A I, communem, *b* æquiangula inter se erunt. Quamobrem erit, vt C I, ad C A, ita F K, ad F A; & permutando vt C I, ad F K, ita C A, ad F A, siue ad F H, ipsi F A, æqualem *d* Vt autem C A, ad F H, ita est C M, quarta pars ipsius C A, ad F L, quartam partem ipsius F H. Erit igitur vt C I, ad F K, ita C M, ad F L; & permutando, vt C I, ad C M, hoc est, vt C D, dupla ipsius C I, ad C K duplam ipsius C M, ita F K, ad F L; Atque componendo, vt C D, C K, simul ad C K, ita F K, F L, simul, nimirum recta K L, ad F L; *e* Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C K, ita quadratum rectæ K L, ad quadratum rectæ F L. Quia verò si A C, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta B D,) *f* maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi C D; *g* Erit quadratum rectæ compositæ ex C D, maiori segmento, & C K, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ C K, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ K L, quintuplum erit quadrati rectæ F L, *h* ideoque quadratum rectæ K L, commensurabile erit quadrato rectæ F L; Ac proinde rectæ K L, F L, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem F L, ostensa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit.

b 32. primi.
c 3. secundi.
d 15. quinti.
e 22. sexti.
f 8. tertiædec.
g 1. tertiædec.
h 6. decimi.

DEINDE quia qualium partium 4. est B F, talium 1. est F L; ac propterea qualium 5. est B L, talium 1. est F L: erit quadratum rectæ B L, talium partium 25 qualium 1. est quadratum rectæ F L, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. *i* habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. est quadratum rectæ F L, talium 5. ostenium est quadratum rectæ K L. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ B L, talium 5. est quadratum rectæ K L; ac proinde quadratum rectæ B L, quintuplum erit quadrati rectæ K L. Quia ergo quadrata rectarũ B L, K L, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum,

i 20. sexti.



dratum (vt patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.)
a 9. dec. a Erunt rectæ B L, K L, longitudine incommensurabiles: ideoque, cùm ostensæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quare si ex Rationali B L, demat̃ur Rationalis K L, potentia tantùm cõmensurabilis; b erit reliqua B K, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei verò congruens erit K L.
b 74. dec. unmi.

IAM verò recta B L, possit, plus, quàm recta K L, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ B L, æquale est quadratis rectarum K L, & N; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ K L, Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. c Quare commẽsurabilia erunt; propterea q; rectæ ipsæ B L, & N, commensurabiles, saltem potentia; Est autem B L, ostensa Rationalis, Rationalis igitur erit & N. Quia verò quadrata rectarum B L, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quòd
c 6. dec.
d 9. dec. proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) d Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quapropter cùm tota recta B L, Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali B H; (Qualium enim partium 8. est B H, talium 5. est B L) possitque plus, quàm congruens K L, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est: Erit B K, Apotome quarta, ex definitione.

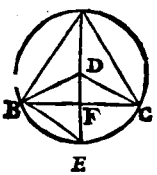
POSTREMO quia recta A B, est media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propos. 8. lib. 6 (quòd triangulum A B H, e habeat angulum B A H, rectum, à quo ducta est A K, ad basin perpendicularis) f erit quadratum rectæ A B, æquale rectangulo sub B H, B K. Quocirca cùm superficiem contentam sub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, possit recta linea A B; g Erit A B, linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.
e 31. ter tij. f 17. sex. g 95. decimi.

viij. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN cir-

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur A B C. Dico quadratum lateris A B, triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariā quoque, & ad angulos rectos in puncto F; cùm arcus B C, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoq; coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiā ita probabitur. Semicirculus A B E, continet tres sextas partes totius circuli; arcus verò A B, cùm sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus B E, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta B E, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro D E, ex coroll. propos. 15. lib. 4.

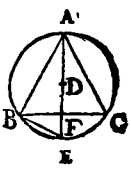


a Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale est quadratis rectarum A B, B E, b quòd angulus A B E, in semicirculo rectus sit; Est autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd linea A E, dupla sit lineæ B E; c erunt quadrata rectarum A B, B E, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4 sunt quadrata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ A B, triplum est quadrati rectæ B E, quæ æqualis est semidiametro Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 47 primi. b 31 tertij.

COROLLARIVM I.

SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circuculo descripti. Nam cùm latus A B, ostensum sit potentia triplum semidiametri A D, posito quadrato ex A B, 3. erit quadratum ex A D, 1. atque adeo quadratum ex A E, quod ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum est quadrati ex A D, erit 4. Quare quadratum ex A E, quadrati ex A B, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.



ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. vt est A E, ad A B, ita se habet A B, ad A F; erit quoque latus trianguli æquilateri A B, perpendicularis A F, ex vno angulo ad basin demissæ potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facilè etiam colligi potest, semidiametrum D E, bifariam secari in F, à latere trianguli B C. Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B E; si ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. c Est autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt

c 47 primi.

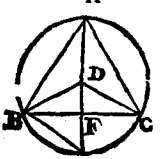
quadrata rectarum B F, F E. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ B F (quod quadratum rectæ A B, quadruplum sit quadrati rectæ B F, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim A B, dupla ipsius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc est, quadratum rectæ D E, sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Igitur ex scholio propos. 4. lib. 2. recta D E, dupla erit ipsius F E. Quocirca D E, bifariam secatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur A B C. Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum B A C, & latum B C, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, secari à latere B C, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; eũ latera A B, A D, æqualia sint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & bases B D, C D, æquales quoq; a *Erunt anguli B A D, C A D, æquales. Quod est primum.*



a 8. primi.

DEINDE, cùm latera A B, A F, trianguli B A F, æqualia sint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipsis contenti æquales ostensi: b *Erunt & bases B F, C F, & angulo ad F, æqua-*

b 4. primi.

ideoque recti. Quod est secundum.

POSTREMO, cùm anguli B A E, C A E, demonstrati sint esse æquales; c *erunt & arcus B E, C E, æquales. Quare cùm B E C, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit B E, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta B E, latus hexagoni, atque semidiametro proinde B D, æqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4.* d *Igitur anguli B D E, B E D, æquales erunt. Quoniam ergo anguli B D F, B F D, trianguli D B F, æquales sunt angulis B E F, B F E, trianguli E B F, & latus B F, commune;* e *Erunt & latera D F, E F, æqualia, quod est tertium.*

c 26. tertij.

d 5. primi.

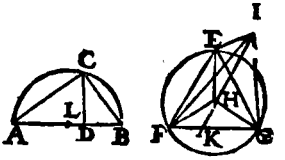
e 26. primi.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT

SIT datæ ſphæræ diameter A B, circa quam ſemicirculus deſcribatur A B C; & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt ſit A D, ipſius D B, dupla; at vero A B, eiuſdem D B, tripla; & ipſius A D, ſeſquialtera. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, cõnectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ H E, quæ æqualis ſit ipſi D C, deſcribatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inſcribatur E F G, adiunganturq; rectæ H F, H G, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi D C, cum æquales ſint ipſi H E, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quæ æqualis ponatur rectæ A D, & ex I, demittantur rectæ I E, I F, I G. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis F. E G, I E F, I F G, I E G, eſſe Pyramidem, ſiue Tetraedrum. Quoniam enim latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipſis contenti, recti, ex hypotheſi, & 3. defin. lib 11. a erit baſis A C, baſi I E, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam A C, æqualem eſſe rectis I F, I G. Rurſus quia tres lineæ A D, D C, D B, proportionales ſunt ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt A D, ad D B, ita quadratum rectæ A D, ad quadratũ rectæ D C; & componendo, vt A B, ad D B, ita quadrata rectarũ A D, D C, ſimul ad quadratum rectæ D C: b Sunt autẽ quadrata rectarũ A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoq; vt A B, ad D B, ita quadratũ rectæ A C, ad quadratũ rectæ D C; Ac proinde cum A B, ſit ipſius D B, tripla, erit quoq; quadratũ rectæ A C, triplum quadrati rectæ H E, cum H E, æqualis ſit ipſi D C: c Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ H E. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectæ E F. Quare cum recta A C, oſtenſa quoq; ſit æqualis rectis I E, I F, I G; erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis E F G, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter A B; & diametrum ſphæræ A B, potentia ſeſquialteram eſſe lateris E F, vel A C.



a 4. primi.

b 47. primi.

c 12. tertiid.

EXTENDATVR perpendicularis I H, vſq; ad K, vt ſit H K, ipſi D B; & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres I H, H E, H K; erunt quoque I H, H E, H K, proportionales. Quare cum H E, ſit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K, ſemicirculus circa I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H E, tranſibit per E, vt mox oſtendetur; Eodemque

argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H F, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H G, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cùm per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cùm ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quòd diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

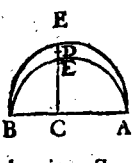
QVONIAM verò tres rectæ A B, A C, A D, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt A B, ad A D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta A B, ſeſquialtera rectæ A D, quod qualium partium 3. eſt A B, talium 2. ſit A D. Igitur & quadratum rectæ A B, ſeſquialterum erit quadrati rectæ A C; Ac propterea cùm A B, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa I K, in plano rectarum I K, H E, deſcriptus, tranſeat per E, facilè demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad A B, perpendicularis C D, & media proportionalis inter A C, & C B. Dico ſemicirculum circa A B, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque C E, media proportionalis inter A C, & C B, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ C D, quàm quadratum rectæ C E, a æquale erit rectangulo ſub A C, C B; Ac proinde quadrata rectarum C D, C E, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.



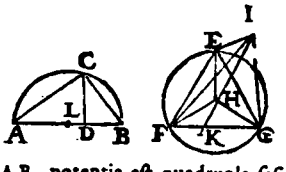
a 17. ſeati.

HINC

HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa I K, *in plano rectarum* I K, H E, *transire per* E, *cùm* H E, *sit ad* I K, *perpendicularis, & media proportionalis inter* I H, H K.

COROLLARIVM I.

HINC facilè colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti. Cùm enim diameter sphæræ A B, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis E F, erit quadratum rectæ E F, talium partium 6. qualium 9. est quadratum rectæ A B: At qualium partium 6. est quadratum rectæ E F, talium partium 2. est quadratum rectæ H E, a quod quadratum rectæ E F, triplum sit quadrati rectæ H E. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectæ A B, talium partium 2. erit quadratum rectæ H E; Ac propterea diameter sphæræ A B, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri H E, cùm proportio quadratorum sit, quæ 9. ad 2.



a 12. *tertiæ*

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi A C B, eritque L, centrum quoque sphæræ. Dico rectam L D, (quæ nimirum ex centro sphæræ ad basin E F G, ducitur perpendicularis; cùm A D, æqualis sit ipsi I H, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem est, quod centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ A B, & tertiam partem semidiametri A L. Quoniam enim A D, dupla est ipsius D B; Qualium partium 4. est A D, talium 2. erit D B: ac proinde talium 6. tota A B, & semidiameter A L, talium 3. Quare si A D, est 4. & A L, 3. erit L D, 1. & idcirco L D, sexta pars erit rectæ A B, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ A L, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER altitudo pyramidis H I, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim H I, eadem, quæ A D, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, & hac figura indicat, facilè ex ipsis vitè inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totum soliditatem. Hanc verò praxin, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regula-



via in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

EV.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

SIT sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC, BC, *a* quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuò secantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales; cùm sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. lib. demonstratum est. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus FI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At verò EIG, *b* eo quòd sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH,.) *c* Erit & basis EK, basi EH, æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeò æqualia triangulo KEH, cùm illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.

a 4. *primi.*

b 8. *primi.*

c 4. *primi.*

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quòd tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F.

Idem-

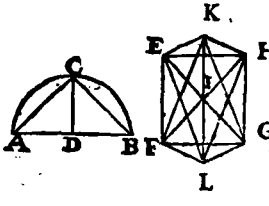
Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cùm per omnes illius angulos incedat. Cùm ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB; (Nam cùm rectæ AC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quàm quadratum rectæ EE, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

QVIA verò quadratum rectæ AB, *a* æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cùm AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

a 47. primi.

COROLLARIVM I.

EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuò ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atque proinde, cùm KI, recta sit ad lineas EG, HF: *b* recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum: *c* Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immò eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGk, se mutuò ad angulos rectos secabunt: Quæ quidem plana sunt quadrata, cùm omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque *angulos rectos*, eo *quod* (*cum quadratum* diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri FK, KH. *d* Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.



b 4. Vndecimi.
c 8. Vndecimi.
d 48. primi.

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHk, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. a Quoniam igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. b Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri sphæræ. Igitur cùm talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

a 13. ter tÿdec.

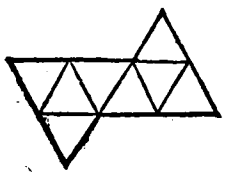
b 14. ter tÿdec.

COROLLARIVM IV.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: c Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

c 15. Vndecimi.

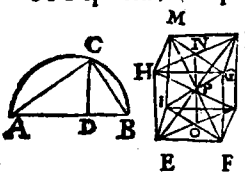
SCHOLIVM.



QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, facilè ex ipsis ritè inter se complicatis componetur octaedrum secundum totam solliditatem, vt ait Albertus Durerus.

XIV. PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM constituere: & sphæra complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.



SIT sphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BG, sit æqualis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoq; ipsi BC, quarũ extrema coniũgantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniã ergo rectæ EI, FK, ad planum EF, GH, rectæ sunt; d erũt rectæ EI, FK, parallelæ. Sunt autẽ & æqua-

d 6. Vndecimi.

& æquales, quod vtraq; æqualis posita sit ipsi B C, hoc est, ipsi E F.
a Igitur & E F, I K, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelo- a 33. pr.
grammum est E F K I; In quo, cum lineæ E I, I K, K F, æquales
sint ipsi E F, omnes quatuor lineæ æquales existunt: b Sunt autem b 34. pr.
& omnes quatuor anguli recti, cum E I K, F k I, æquales sint oppo-
sitis angulis rectis k F E, I E F. Igitur E F k I, quadratum est. Ea-
dem ratione quadrata erunt F k L G, G L M H, H M I E; Atque id-
circo & I k L M, quadratum erit, c cum simile sit & æquale quadra- c 24.
to opposito E F G H. Est enim E L, solidum parallelepipedum, Q. n. d.
d quod eius plana opposita sint parallela, nimirum per lineas pa- d 15.
rallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit E L. Quem Q. n. d.
dico comprehendi sphæra diametri A B. Sint enim planorum op-
positorum E F k I, G H M L, diametri E k, F I, G M, H L, per quas
ducantur plana E k L H, F I M G. e Quia igitur tam planum E- e 28.
k L H, quam F I M G, cubum bifariam secat; vtrumque per cen- Q. n. d.
trum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum vi-
delicet P, in quo ex coroll. eiusdem propos. se mutuo quoque bifa-
riam diuident omnes diametri cubi; Ac proprerea communis pla-
norum sectio, recta scilicet N O, per idem punctum P, incedet.
Quia vero plana E k L H, F I M G, rectangula sunt, (Cum enim
H E, perpendicularis sit duabus rectis E I, E F, ob quadrata E M,
E k; f perpendicularis quoque erit ad planum E k, ideoque & ad f 4. Vn-
rectam E k, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est H E k. Ea- decimi.
dem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E k L H, nec non
& anguli in plano F I M G. Rectangula ergo sunt plana E k L H,
F I M G,) & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus al-
terius; erunt quoque eorum diametri E L, H k, F M, G I, æqua-
les, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidia-
metri P E, P L, P H, P k; P F, P M, P G, P I, æquales erunt. Quare
semicirculus circa E L, ex centro P, descriptus, & circumductus,
fixa manente diametro E L, sphæram describet per omnes cubi
angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ di-
metri A B, ita demonstrabitur.

CVM quadratum rectæ E k, g æquale sit quadratis æqualibus g 47.
rectarum æqualium E F, F k, ac proinde duplum quadrati rectæ primi.
E F, hoc est, quadrati rectæ k L: Erunt quadrata rectarum E k, k L,
tripla quadrati rectæ k L. h Est autem quadratis rectarum E k, h 47.
k L, æquale quadratum rectæ E L, quod angulus E k L, sit rectus primi.
in rectangulo E k L H. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum
erit quadrati rectæ k L, hoc est, quadrati rectæ B C: At vero eius-
dem quadrati rectæ B C, triplum est quadratum rectæ A B. (Nam
tres rectæ A B, B C, B D, proportionales sunt ex coroll. propos. 8.
lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est A B, ad B D, ita
erit quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B C. Cum ergo

A B, ipsius B D, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ A B, quadrati rectæ B C, triplum. Igitur quadrata rectarum E L, A B, æqualia sunt; ac propterea ipsæ rectæ E L, A B, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt.

QVIA vero ostensum est quadratum diametri E L, triplum esse quadrati lateris cubi k L, manifestum est, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi E L, H K, F M, G I, æquales esse, seseque mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta N O, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum G H M L: E F k I, in eodem centro P, bifariã diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli O F P, O P F, trianguli O F P, æquales sunt duob. angulis N M P, N P M, trianguli N M P: (a Nam angulus O F P, æqualis est alterno N M P, inter lineas F I, G M, quæ parallelæ sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum E F K I, G H M L, & angulus O P F, æqualis est opposito ad verticem N P M.) Sunt autem & latera P F, P M, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera P O, P N, æqualia erunt; ac proinde recta N O, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

a 29. pr.
b 16. 11 dec.
c 15. pr.

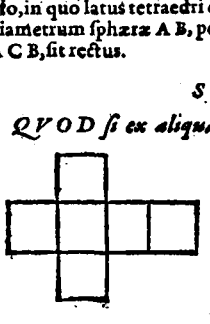
COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. (d Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri: (e Qualium vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. (f Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est A C, cubi vero B C. ſ Perspicuum autem est, diametrum sphæræ A B, posse & rectam A C, & rectam B C, cum angulus A C B, sit rectus.

d 13. ter tiidec.
e 15. ter tiidec.
f 47. pr.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quadam solida octo angulos solides continens instar tessaræ cuiusplam, vt constat.



ICO-

PROBL. 4. PROPOS. 16. xvj.

ICOSAEDRVM constituere: & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

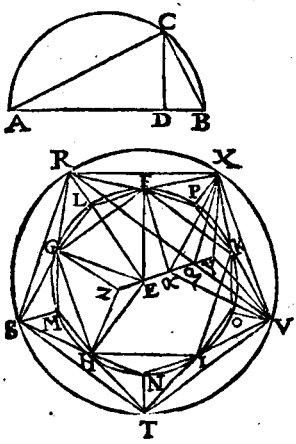
SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter A B, circa quam semicirculus describatur A C B: Et ex A B, abscindatur quinta pars B D, vt A B, ipsius B D, sit quintupla; & ipsius A D, sesquiquarta; At vero A D, ipsius B D, quadrupla. Deinde ducta D C, perpendicularis ad A B, connectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ E F, quæ ipsi B C, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; *a* in quo pentagonum æquilaterum inscribatur F G H I K. Post hæc diuisis arcubus F G, G H, H I, I K, K F, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ F L, L G, G M, M H, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli F G H I K, perpendiculares erigantur E Q, L R, M S, N T, O V, P X, quæ æquales ponantur semidiametro E F, seu rectæ B C. Eruntque omnes inter se æquales; *b* sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe E L, Q R, E M, Q S; E N, Q T; E O, Q V; E P, Q X. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus) *c* binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint E L, E M, &c. semidiametro E F; æquales quoque erunt Q R, Q S, Q T, Q V, Q X, & inter se, & semidiametro E F, seu rectæ B C. *d* Quia vero planum per rectas Q R, Q S, ductum parallelum est plano F G H I K, per rectas E L, E M, ducto, eademque ratione planum per rectas Q S, Q T, ductum parallelum est plano eidem E G H I k, per rectas E M, E N, ducto, conuenit autem planum per rectas Q R, Q S, cum plano per Q S, Q T, in recta Q S. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per Q T, Q V, cum hoc plano efficere vnum planum; nec non planum per Q V, Q X; & planum per Q X, Q R. Sunt ergo quinque lineæ Q R, Q S, Q T, Q V, Q X, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum Q R, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo F G H I k. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis A S, S T, T V, V X, X R. *e* Quia igitur L R, P X, æquales sunt, & parallelæ; si concipiatur duci recta L P; *f* erunt quoque L P, R X, æquales & parallelæ; *g* Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem L P, quintam partem circuli F G H I k, nempe duas decimas partes F L, F P. Igitur & R X, quintam partem auferet circuli R S T V X. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas R S, S T,

a 11. quarti.
b 6. Vnd. decimi.
c 33. pr.
d 15. Vnd.
e 6. Vnd. decimi.
f 33. pr.
g 28. tertij.

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferte. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIk. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIk, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, Vk, Xk, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIk, & est LF, latus decagoni; *a* erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: *b* Est autem eisdem quadratis æquale quadratū rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademq; ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIk, VkX, XkF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; cum eorū omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri.

a 10. *ter tiidec.*

b 47. *primi.*



Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIk, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; *c* erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; *d* Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV,

c 10. *ter tiidec.*

d 47. *primi.*

TYV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZk, kZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturque ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico comprehendi ſphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia ſunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, ſint ſemidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. α Erunt & baſes αV, αX, æquales. Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter ſe, & ipſis αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia ſunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque baſes αX, αF, æquales: eodemque modo ſi ex α, E, ad G, H, I, k, rectæ ducantur, oſtendentur αG, αH, αI, αk, æquales ipſi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, k; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIk; & EZ, latus decagoni eiuſdem circuli; c erit QZ, diuiſa in E, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens Eα, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta αZ, d quintuplum poteſt eius, quod ex Eα, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta αF, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit quadrati rectæ αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius Eα; Erunt quadrata rectarum EF, Eα, ſimul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipſæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (proterea quod ſi æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt,) Eruntomnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum

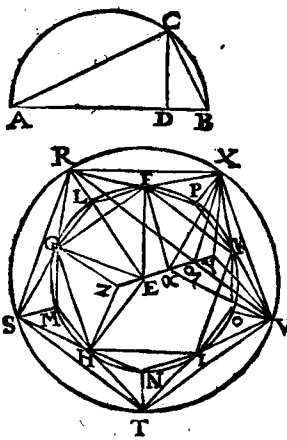
a 4. pri.
b 4. pri.
c 9. ter. tiidec.
d 3. ter. tiidec.
e 47. pri.

ZY, ex

ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri constituti transibit; Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæræ diametri AB.

a 15. quinti. α CVM enim sit vt α Z, ad α E, ita YZ, dupla ipsius α Z, ad QE, duplam ipsius α E; b Ac propterea vt quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ α Z, ostensum quintuplum quadrati rectæ α E; erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC; Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplū quadrati rectæ BC,) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

b 22. sexti.



c

QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) potestq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi æqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGH1k, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam c 6. decimi. numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. c erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGH1k, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icod 11. tertiidec. saedri, d Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonstrauimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. Quod erat faciendum.

COROL.

COROLLARIVM I.

EX dictis infertur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri A B, quintuplum esse quadrati rectæ B C, hoc est, semidiametri E F.

COROLLARIVM II.

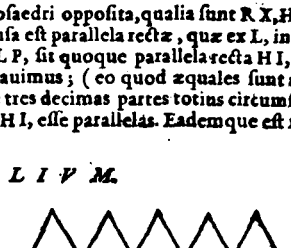
ITEM manifestum est, sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam Y Z, diameter sphæræ componitur ex E Q, latere hexagoni, & ex Q Y, E Z, lateribus decagoni circuli F G H I K.

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt R X, H I, esse parallela. Nam recta R X, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ L P, sit quoque parallela recta H I, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus H L, I P: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas R X, H I, esse parallelas. Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se aptentur.



PROBL. 5. PROPOS. 17. xvj.

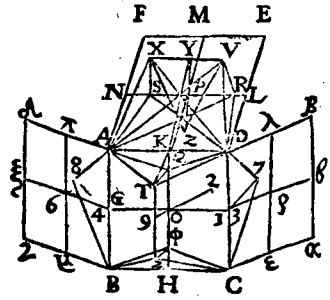
DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum A B C D, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos A D E F, vt sit communis horum sectio recta A D, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis E F G H, quatuor lineæ E I, F k, G L, H M, ipsi basi E F G H, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. a Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin E F G H.) Diuisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, k, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui

a 18. Vnde.

proble-

Problematis lib. 4. Secentur O k, P L, P N, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares Q T, R V, S X, æquales segmentis maioribus O Q, P R, P S. Coniunctis deinde rectis A T, A X, D T, D V, V X; Dico A T D V X, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi.



a 6. Vn. decimi.

Quod enim pentagonum A T D V X, sit in vno plano, ita ostendetur, Cum R V, S X, sint ad quadratum A D E F, rectæ *a* iplæ erunt parallelæ; Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora P R, P S, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ P L, P N, æquales sint. *b*) erunt quoq; contingentes rectæ R S, V X, æquales & parallelæ: *c* Est autem & A D, eidem R S, siue L N, parallela, eo quod A N, D L, parallelæ sunt & æquales. *d* Igitur & A D, V X, parallelæ sunt; *e* Ac propterea rectæ coniungentes A X, D V, in eodem cum ipsis erunt plano, ideoque trapezium A D V X, in vno existet plano: Est autem & triangulum A T D, in vno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio A D V X. Ex P, namque ducatur P Y, parallela ipsi R V, *f* quæ erit recta ad quadratum A D E F; quod ad idem recta sit R V: Et connectantur rectæ k T, k Y. Quoniam igitur est vt O k, ad O Q, ita O Q, ad Q k, ob sectionem rectæ O k: Est autem k P, ipsi O k, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi,) & P Y, ipsi O Q, (cum æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt k P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illis æqualis, ad Q k. Quare cum triangula P k Y, Q T k, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum k, composita, *g* ita vt homologa latera sint parallela, nempe P k, & Q T, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A B C D; & P Y, Q k, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F: *h* Erunt reliqua latera k Y, k T, in rectam lineam collocata, *i* Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoque planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

b 33. pr.
c 33. pr.
d 9. Vn. decimi.
e 7. Vn. decimi.
f 8. Vn. decimi.
g 6. Vn. decimi.
h 32. sexti.
i 2. Vnd.

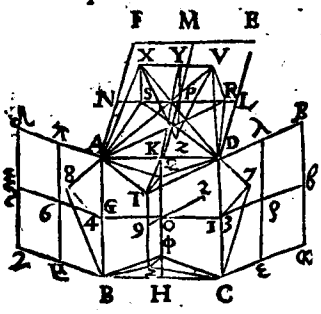
Q V O D vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A k, k Q, trianguli A k Q; (Sunt enim A N, A k, dimidia latera cubi, & N S, k Q, segmenta minora rectarum æqualium sectarum) & anguli A N S, A K Q,

AXQ, recti; si ducatur recta AQ, *a* erunt bases AS, AQ, æqua- *a 4. primi.*
les. Rursus cùm latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia late-
ribus AQ, QT, trianguli AQT. (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ
sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarum æqua-
lium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3. lib. 11. *b* E- *b 4. pri-*
runt quoque bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ, *mi.*
ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; si verò
ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt
igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV, æqualia: qui-
bus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. *c* Qua- *c 4. ter-*
drata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc *tij dec.*
est, quadrati rectæ SX: Est autem quadrato rectæ PN, æquale
quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, si-
mul tripla sunt quadrati rectæ SX. *d* Cùm ergo quadratis recta- *d 47.*
rum AN, NS, æquale sit quadratum rectæ AS; erit quoq; qua- *primi.*
dratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX, Ac proinde qua-
drata rectarum AS, SX, simul, quàdrupla eiusdem quadrati rectæ
SX. *e* Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum *e 47.*
rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum quoq; erit *primi.*
quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati
rectæ XY; *f* Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cùm igitur & *f 34. pri*
quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ *mi.*
XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; E-
runt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ
æquales. Quare cùm & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æ-
quales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Duc-
tis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ra-
tione, eiq; addita PR, æqualis maiori segmento PS; *g* erit quo- *g 5 ter-*
que NR; secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmen- *tij dec.*
tum erit NP. *h* Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla *h 4. ter-*
sunt quadrati NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem qua- *tij dec.*
dratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata
rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde
quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem qua-
drati rectæ AN. *i* Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æ- *i 47. pri*
qualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, *mi.*
quadrupla sunt quadrati rectæ AN. *k* Cum ergo quadratis re- *k 47.*
ctarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque *primi.*
quadratum rectæ AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum.
At vero eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum
rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius
AN. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoque
& rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS,

DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli
a 8 pri. DXV; & bases AD, DX, æquales quoque: a Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero
b 7. ter tio def. AT DVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, b ipsum erit æquiangulum.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cαβ D, Bγδ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, ϖ, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ϱ I, σ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 46, coniunganturque rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, haecarte demonstrabimus.



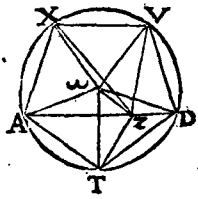
INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorũ latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ
c 19. sunt ad plana ADEF, ABCD; c Erunt & communes eorum sec-
undec. tiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa,

commu-

communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur.
a Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem seſe diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum comprehendentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX.
b Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quod vtraque recta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt OK, ZP, quod vtraque recta sit ad planum ADEF; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. c Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ; (Est enim XY, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PZ:) d Est autem quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratum rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoq; quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; f Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. g Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ ZX, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi; Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certè quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelam VX, perpendicularis.) h Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ

a 39. Vndec.
b 6. vnd. decimi.
c 4. ter tiædec.
d 47. primi.
e 15. quinti.
f 22. sexti.
g 15. ter tiædec.
h 4. prit

perpendiculariſis demittatur Z ω, connectanturq; rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. a Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale
a 47. primi. eſt quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quod rectæ Z A, Z X, oſtenſæ ſint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoque rectæ ipſæ ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter oſtendentur rectæ ω V, ω D, & inter ſe, & ipſis ω A, ω X, æquales, quod & rectæ Z V, Z D, æquales ſint oſtenſæ rectis Z A, Z X. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ
b 9. ter. lineæ æquales, quam duæ, b punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt
c 47. primi. quadratis rectarum Z ω, ω T. c Cum ergo illis duobus æquale ſit quadratum rectæ Z A; his vero quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; propterea que & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare ſphæra complectens cubum ex centro Z, deſcripta comprehendet pentagonum quoque A T D V X; Eodemque modo & reliqua penragona Dodecaedri: Ac propterea eadem ſphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



d 13. quinti. POSTREMO cum ſit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: d erit quoque vt N L, dupla ipſius N P, ad R S, duplam ipſius P S, ita R S, dupla ipſius P S, ad rectam compoſitam ex S N, R L, nimirum ad duplam ipſius S N. Si igitur cubi latus N L, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum erit S R; ſed N L, tota ita ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratum commenſurabile eſt quadrato diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum ſit
e 6. ter. tiidec. illud tertia pars huius) e Igitur maius ſegmentum S R, hoc eſt, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & prædictas figuras; & demonſtrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Cum ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti.

COROL-

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis A V, D X, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, a facit maius segmentum latus pentagoni: b ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

a 8. tertiidec.
b 5. tertiidec.

COROLLARIVM III.

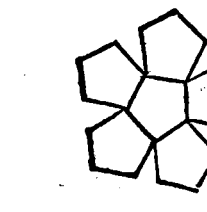
CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt V X, T quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi E F, A B: aliaque quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos a lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ Y Z, 9 Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo inter secant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ P Z, O Z, æquales sint dimidio latori cubi, & Y P, 9 O, æquales maioribus segmentis æqualibus P S, O Q; Erunt totæ Y Z, 9 Z, æquales: Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in paralle logrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus est, cum opponatur recto O K P. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IV.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmẽtum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum Z Y, Y P, tripla ostensa sint quadrati rectæ P Z: erit Z Y, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit P Z, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt Z Y, ad Z P, ita Z P, ad P Y: c ideoque vt dupla ipsius Z Y, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius Z P, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplam ipsius Z P, ad duplam ipsius P Y, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.

c 15. quinti.

SCHOLIVM.

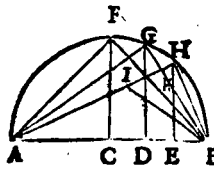


QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona aequilatera, & aequiangula, inter se aequalia, disponanturque, & hac figura indicat, componetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se complicentur.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsa AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH, connectaturque recta BI. Postremo BC, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim AG, media proportionalis est inter BA; AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; *a* Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri. *a* 13. *tertiæ.*

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AF. *b* Quare cum diameter *b* 14. *tertiæ.*

sphæræ

sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

DEINDE cum B G, sit media proportionalis inter A B, B D, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem A B, ipsius B D, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. a Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit B G, latus cubi. a 15. tertiidec.

PRÆTEREA quia, ex eisdem corollariis, B H, est media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt A B, ad B E, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. propos. 16 huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. b Igitur latus pentagoni potterit B H, & H I, simul; Ac proinde c cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. d Quam ob rem B I, latus est Icosaedri. b 10. tertiidec. c 47. pr. d 16. tertiidec.

DENIQVE cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

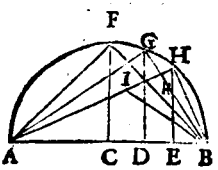
QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratū lateris Tetraedri; talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum. e Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atq; adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ve

Diamet. 6.
Tetraed. 4.
Octaed. 3.
Cub. 2.

e 6. decim.

a 9. dec. constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. a Erunt huiusmodi lineæ, mirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figuratum lateribus priorũ, cum latera priorũ sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.



SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apo-
b 104. decimi. tome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus
c 106. decimi. Icosaedri sit linea Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor.
d 16. ter tiidec. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinquè figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim A G, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam A F, latus Octaedri; maior erit recta A G, quam A F, ex scholio propos. 28, lib. 3.

EODEM

EODEM modo ostendemus, latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam B F, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quàm B G, cubi latus.

LATVS autem cubi B G, maius esse latere Icosaedri B I, hac arte demonstrabimus. Quoniam A B, tripla ponitur ipsius B D; *a* & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B D, cùm noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1.3.9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ A B, talium 1. erit quadratum rectæ B D. Qualium autem partiũ 9. est quadratum rectæ A B, talium 3. est quadratum rectæ B G; *b* quòd illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum G D, B D, cùm æqualia sint quadrato rectæ B G. Igitur si auferatur quadratum rectæ B D, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ G D. Quoniam verò quadratum rectæ A B, quintuplum est quadrati rectæ B H, erit quadratum rectæ B H, minus quàm talium partium 2. Nam cùm 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quòd 10. ad 2 quintuplam proportionem habeant; *c* erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quàm 2. Quare quadratum rectæ G D, maius est quadrato rectæ B H, ideoque recta G D, maior quàm recta B H. Rursus quia diameter sphæræ A B, componitur ex B H, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrũ constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni H I, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni H I, maius esse tertia parte rectæ A B, hoc est, minus recta B D. Nam si H I, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ A B; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi A D; Ac propterea B H, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi B D; Atque adeò cùm quadratum rectæ A B, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ B D, erit idem quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B H. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo H I, tertia pars est ipsius A B: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta H I, dicatur maior tertia parte rectæ A B, & proinde dupla ipsius H I, maior quàm duæ tertiæ, hoc est, quàm A D, erit B H, minor quàm tertia pars B D. Quare quadratum rectæ A B, maius erit, quàm noncuplum quadrati rectæ B H. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est H I, tertia parte ipsius A B: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quàm tertia pars, hoc est, quàm B D. Itaque cùm rectæ G D, D B, maiores sint rectis B H, H I, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: *d* Est autem quadratum rectæ B G, æquale quadratis rectarum G D, D B; & quadratum rectæ B I, quadratis rectarum

a 20. *sexti.*
b 15. *huius* 1. *doc.*
c 10. *quinti.*
d 47. *primi*

rum B H, H I. Quadratum ergo rectæ B G, maius quoq; erit quadrato rectæ B I, Ac proinde recta B G, nempe latus cubi, maior erit quàm recta B I, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri B I, latere Dodecaedri B K, hac ratione patefiet. Cùm rectæ B G, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B K, & minus G K; erit rectangulum sub B G, B K, maius rectangulo sub B G, G K; atq; adeò rectangula sub B G, B K, & sub B G, G K, simul maiora duplo rectanguli sub B G, G K: *a* Est autem rectangulis sub B G, B K, & sub B G, G K, æquale quadratum rectæ B G; Et duobus rectangulis sub B G, G K, æqualia sunt duo quadrata rectæ B K (Nam cùm sit, vt B G, ad B K, ita B K, ad G K; *b* erit quadratum rectæ B K, æquale rectangulo sub B G, G K, ideoque duo quadrata rectæ B K, æqualia duobus rectangulis sub B G, G K.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ B G, duobus quadratis rectæ B K; Atque ideirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, sex quadratis rectæ B K: Atqui tribus quadratis rectæ B G, æqualia sunt quinque quadrata rectæ B H (Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quàm quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ B H, maiora erunt sex quadratis rectæ B K; Ac proinde vnum quadratum rectæ B H, maius erit vno quadrato rectæ B K. (Si namque æquale esset quadratum rectæ B H, quadrato rectæ B K, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora sex quadratis rectæ B K, quod est absurdum, cùm illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quàm recta B K; Ac propterea cùm B I, maior sit quàm B H, multò maior erit B I, latus videlicet Icosaedri, quàm B K, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

a 2. sex.

b 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis continuatim inter se æqualibus, hac sola ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cùm saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX

EX quinque, angulus Icosaedri;

EX sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cùm enim trianguli aequilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertia partes unius recti, hoc est, erunt quatuor rectis aequales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. 2 Nam solidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multò ergo minus ex pluribus, quàm sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. 20. vndecimo.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis aequilateris, & aequiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cùm enim quinque anguli pentagoni aequales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac praterea quintam partem unius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cùm enim unus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod continet unum rectum, & insuper recti quintam partem, erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multò minùs ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sanè ex aliis figuris aequilateris, & aequiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cùm sex anguli hexagoni aequales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac praterea duas partes sextas unius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atq; idcirco multò minus ex pluribus eiusmodi angulis, quàm tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, prater dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, qua planis aequilateris, & aequiangulis inter se aequalibus contineatur.

NAM si tria triangula aequilatera & aequalia coeant in unum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI verò quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinq; talia triangula ad efformandum angu-

angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata aqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona aquilatera, & aquiangula, inter se aqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle, Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figura regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quodlibet Regulariū Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia verò bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24 quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quodlibet Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia verò tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, dividendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si dividantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si verò 6 quadrata cubi multiplicentur in 4. numerū angulorum vnius quadrati,

fiunt

fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) facunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & Octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contrà. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos: octaedrum verò octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases, totidemque solidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et ſolidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij verò, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumq; differerent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non rectè tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accuratè complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certè ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cùm ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cùm in omnibus diſciplinis, tum vel maximè in Geometria verſatus, ſcitè ac prudenter iudices

dices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam verò, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt proœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

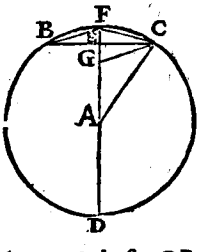
TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi adscribuntur: Duo verò subsequentes à plerisque Hypsicli Alexandrino & rectè, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrũ, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quàm soliditates: In posteriori verò exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verùm quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumq; mutuas inscriptiones vnius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque verò problematibus decimusquintus absolvitur: Visum est, vt aliquantam lucem huic tractationi afferremus, paulò vberius de dictis figuris regularibus in vniversum differere, proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuò inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solùm insequentes duos libros quamplurimis theorematibus problematibusque locupletauit; verùm etiam integrum librum, qui ordine decimus sextus est, adiunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Caterùm præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facilè intelligi potest ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

QVONIAM verò in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quàm in earundem ordine, & inter se, & à Francisco Flussate, ideoque & à nobis discrepant; annotauimus in margine ordinem vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior verò Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantùm numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si fortè loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR.

j. THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli B C D, ducatur A E, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico A E, dimidiũ eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim A E, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter D F, ſumptaque E G, æquali ipſi E F; connectantur
a 3. ter. tẽ. rectæ A C, C G, C F, B F. a Quoniã igitur perpendicularis A E, ſecat rectam B C, bifariã; erunt latera B E, E F, trianguli B E F, æqualia lateribus C E, E F, trianguli C E F; Cum
b 4. primi. c 28. ter tẽ. igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; b erunt baſes C F, B F, æquales; c ideoque & arcus C F, B F, æquales; Ac proinde exiſtente arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit C F, eiuſdem pars decima; atque adeò recta C F, latus erit decagoni. Rurſus quia latera C E, E F, trianguli C E F, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, ſuntq; anguli contenti recti;


d 4. primi. d erunt & baſes C F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia verò arcus C F, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ D C F, cùm ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus C F, qualium 4. eſt arcus D C, hoc eſt, arcus D C, quadruplus erit
e 33. ſex. f 20. ter tẽ. arcus C F. e Quare & angulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: f Eſt autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cùm illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis D C. Igitur angulus C F D, atq; adeò illi æqualis oſtenſus C G F,
g 32. primi duplus erit anguli C A F: g Atqui angulus C G F, externus, æqualis eſt internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cùm igitur G A C, ſit dimidium anguli C G F, vt oſtenſum eſt, erit G C A, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoque æquales erunt
h 6. primi. anguli G A C, G C A; h ac proinde & latera A G, C G, æqualia. Eſt autem C G, recta oſtenſa æqualis rectæ C F. Igitur & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F G, ſimul: Ac proinde tres ſimul A E, E F, F C, hoc eſt, duæ ſimul A F, F C, duplæ erunt ipſius A E, atq; idcirco è contrario erit A E, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam

in pen-

in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hæc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

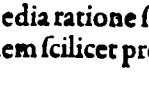
COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem eſſe vtriuſque lineæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul: Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. IV. ij.

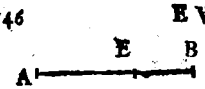
SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECENTVR binæ rectæ AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cùm enim ſit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB; & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD; [a] erit rectangulum ſub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum ſub CD, FD, æquale quadrato rectæ CF. Quam ob rem erit vt rectangulum ſub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF (eſt enim vtrobiq; æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB, & quadratum rectæ AE, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, & quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ CF: [b] Sed quod quater continetur ſub AB, EB, vnà cum quadrato rectæ AE, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex AB, EB; Et quod quater continetur ſub CD, FD, vnà cum quadrato rectæ CF, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadra-



a 17. ſexti.

b 8. ſec.



a 2. sec. tum rectæ A E, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ C F, *a* Ac proinde, vt recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et componendo vt composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, vt dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F; b 15. quinti. *b* Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo vt A B, ad C D, ita A E, ad C F; Ac propterea, cùm sit vt tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F, ablatam; c 19. quinti. *c* erit quoq; reliqua E B, ad reliquam F D, vt tota ad totam. Quare vt A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cùm vtraq; proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit vt A E, ad E B, sic C F, ad F D, & sic deniq; iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

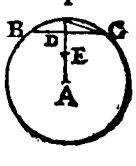
d 9. tertii dec. e 8. tertii dec. f 2. quarti decimi. *QVONIAM enim* d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam*; e *& recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni:* f *fit & eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti recta angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, & maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoq; latus hexagoni ad latus decagoni, & recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.*

EX hac quoq; propositione & præcedenti inferemus hoc altetum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquila-

æquilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ductæ; minus verò segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namq; recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F, a Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni, minus verò segmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum; & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: b Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri, & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cùm ergo per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse ductæ perpendiculari, minus verò ED, dimidio lateris decagoni. Quod erat propositum.



a 9. tertiidec.

b 1. quartidecimi.

THEOR. 5. PROOPS. 3.

ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatq; recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa CG,





latus decagoni. Quoniam igitur recta A G, duplа est rectæ F G: erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A G, quadruplum quadrati rectæ F G: *a* Sunt autem quadrato rectæ A G, æqualia quadrata rectarum A C, C G. Igitur & quadrata rectarum A C, C G, quadrupla sunt quadrati rectæ F G; Atque adeò tria quadrata rectarum A C, C G, F G, quintupla quadrati eiusdem rectæ F G: *b* Cùm ergo quadratis rectarum F G, C G, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratũ rectæ C D, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum A C, C D, quintupla quadrati rectæ F G, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

b 10. ter tijdec.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentágonum Dodecaedri circumscribentis.

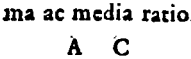
CIRCVMSCRIBAT enim circulus A B C D E, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta A C, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. *c* Perspicuum est autem, quadrata rectarum A C, C D, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.

c 3. quarti decimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim A B, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum A C. Dico A C, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim A D, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi A B; *d* eritq; tota composita B D, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum B A: Ponitur



d 9. tertij dec.

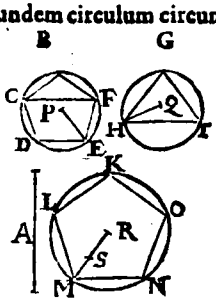
tus autem & A B, secta in C, similiter. a Igitur erit vt B D, tota ad a c. maius sui segmentum A B, ita A B, tota ad maius sui segmentum *quarti.* A C: Sed est quoque vt B D, tota ad maius sui segmentum A B, *decimi.* ita A B, maius segmentum ad A D, segmentum minus, per definitionem *lineæ sectæ extrema ac media ratione.* Igitur erit vt A B, ad A C, ita eadem A B, ad A D; Ac propterea A C, A D, æquales erunt. Cùm ergo A D, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est A B; erit & A C, eiusdem circuli latus decagoni.

ALITER. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D, æqualis maiori segmento A C; b eritque tota recta B D, diuisa in A, b 5. *ter.* extrema ac media ratione. Cùm igitur A B, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. A D, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum. *tijdee.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

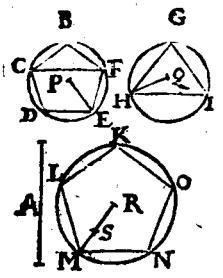
IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum B C D E F, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum G H I. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum B C D E F, & triangulum G H I, hoc est, circulos B C D E F, G H I, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus K L M N O, pentagonum K L M N O, e ex quo Icosaedrum sphæræ *inscribitur*, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoq; quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli G H I. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ P E, Q H, R M; Secetur-



e 13. *ter tijdee.*

que R M, extrema ac media ratione in S; d eritq; maius segmen- d 4. tum R S, latus Decagoni in circulo K L M N O, in quo R M, est *quarti.* latus hexagoni. Subtendat quoque recta C F, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. B F, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris *decimi.*



a 2. *quartidecimi.* b 22. *sexti.*

cubi CF, sẽcti extrema ac media ratione *a* erit vt tota CF, ad totam RM; ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratũ rectæ RS; Atq; adeò per ea, quæ demõstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 6. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quàm quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 2. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æ

c 10. *tertiidec.*

quale erit quintuplo quadrati rectæ RS: *c* Quia verò quadratũ rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinq; quadratis rectæ RM, & quinq; quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cùm hæc ostẽsa sint æqualia quinq; quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinq; quadratis rectæ RS. Sed

d 5. *quartidecimi.*

quoniam, *d* (cùm quadrata rectarum CF, BF, quinq; quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cùm MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; *e* sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH;

e 12. *tertiidec.*

Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoq; quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter BE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.

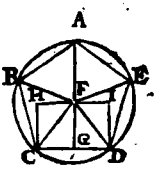
iij. vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari com-

ri comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri A B C D E, ducatur ad latus C D, perpendicularis F G. Dico rectangulum sub F G, & C D, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cùm bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta H I, parallela ipsi C D, occurrens duabus perpendicularibus C H, D I, ductis ex C, D, ad C D, in punctis H, & I. Eritq; rectangulum C I, contentum sub H C, hoc est, sub F G, & C D. a Quoniam verò rectangulum C I, duplum est trianguli F C D, atque adeò cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi F C D, æqualium; erit rectangulum C I, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cùm quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeò sextuplum rectanguli C I, quinquies sumpti, nimirum rectangulum C I, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



a 41. primi.

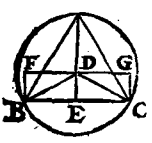
ALITER. Facta eadem figuræ constructione, b cùm rectangulum C I, duplum sit trianguli F C D, hoc est, æquale triangulo F C D, bis sumpto; Erit rectangulum C I, trigesies sumptum æquale triangulo F C D, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cùm enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum F C D, sumptum sexagesies æquale erit superficiei Dodecaedri.

b 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri A B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum sub D E, & B C, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes



trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & basis vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoq; per D, recta F G, parallela ipsi B C, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus B F, C G, ex B, C, ductis ad B C; eritq; rectangulum B G, contentum sub F B, hoc est, sub D E, & B C.

a 41. primi. a Quoniam verò rectangulum B G, duplum est trianguli B D C; atq; adeò cuiuslibet reliquorū duorum triangulorum ipsi D B C, æqualium: Erit rectangulum B G, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cùm tria talia triangula æqualia sint vni triangulo Icosaedri; Atq; adeò idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli B G, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

b 41. primi. ALITER. Facta eadem constructione figuræ, b cùm rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum B G, trigesies sumptum, æquale triangulo D B C, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quòd tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies, (repetita figura proximè antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est ficut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni

c 6. quartidecimi. Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum

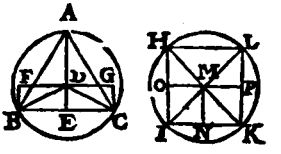
d 7. quartidecimi. latus. c Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; d Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.

e 15. quinti. e Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangluum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

SCHO-

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, sive quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptũ sexies, superficies Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficies Octaedri, & cubi aquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, aquale esse superficiei Tetraedri.



a *Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totum superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aquilatera ipsi A B C, aqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aquale.* a 41. pr.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptum, aquale esse superficiei Octaedri. b *Cum enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum aquale viginti quatuor huiusmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptum aquale est superficiei Octaedri.* b 41. primi.

SIT tertio quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula aqualia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, aquale esse superficiei cubi. c *Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, aquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptũ aquale viginti quatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totã superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum aquale superficiei cubi. Quod est propositum.* c 41. primi.

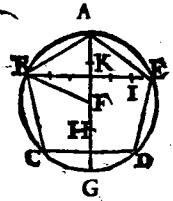
ALITER. Cum duo rectangula I P, conficiant quadratum H L K L; (sunt enim I P, P H, aqualia, cum recta O I, sit dimidium lateris H I, nempe aqualis ipsi M N) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

17. viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum vero A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sint quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F; quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cum sit semidiameter; erit A H, ipsius A F, sesquialtera. Quia vero recta F A, diuidens arcum B A E, bifariam, diuidit quoque rectam B E, bifariam, per coroll 1. propos 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam K B, quam K E, tres sextas rectæ B E; atque adeo cum B I, contineat quinque, continebit K I, duas: Ac proinde & K B, ipsius K I, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt A H, ad A F, ita k B, ad K I; *a* atque idcirco rectangulum sub extremis A H, K I, æquale erit rectangulo sub mediis A F, K B. *b* Est autem rectangulum sub A F, K B, duplum trianguli A B F, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin A F, & eandem altitudinem B K, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta, Igitur & rectangulum sub A H, K I, duplum erit eiusdem trianguli A B F: *c* Est autem & rectangulum sub A H, K I, duplum rectanguli sub A H, I E; propterea quod & basis k I, dupla est basis I E, (continet enim k I, duas sextas partes ipsius B E, & I E, vnam) eademque semper altitudo A H. Igitur æqualia sunt triangulum A B F, & rectangulum sub A H, I E; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum A B C D E, quintuplum est trianguli A B F, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero sub A H, B I, quintuplum est rectanguli sub A H, I E; quod & basis B I, quintupla sit basis I E, eademque semper altitudo A H.



a 16. sexti.
b 41. primi.
c 1. sex.
d 1 sen.

Igitur

Igitur pentagonum A B C D E, & rectangulum ſub A H, B I, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

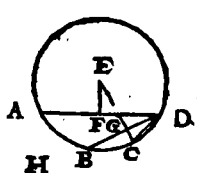
COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum A B C D E, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, B E, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, (a comprehenſi videlicet eodem circulo, a 5. quarti decimi. quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum A G, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum F G, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum F G, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub A H, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub B I, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 17. VIII.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

IN circulo A B C D, b circumſcribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni B D, & trianguli A D; & ex centro E; ducatur ad A D, B D, perpendiculares E F, E G; Sit deniq; H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe, vt H, latus cubi, ad A D, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt B D, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem E G, ſectæ quoque extrema ac media ratione maius ſegmentum eſt E F, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. c Erit vt H, tota ad B D, maius ſui ſegmentum, ita E G, tota ad E F, maius ſui ſegmentum; d Ac proinde rectangulum ſub extremis H, E F; æquale erit rectangulo ſub mediis B D, E G. e Quia vero eſt, vt H, ad A D, ita rectangulum ſub H, E F, ad rectangulum ſub A D, E F, cum baſes ſint H, A D, altitudo vero ſemper eadem E F; Erit quoque vt H, ad A D, ita rectangulum ſub B D, E G, (quod eſt æquale rectangulo ſub H, E F,) ad idem rectangulum ſub A D, E F. Quare cum ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectangulum ſub B D, E G, ad rectangulum ſub A D, E F, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoq;, vt H, latus cubi, ad A D, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiē Icoſaedri. Superficies itaque



b 5. quarti decimi.

c 2. quarti decimi.

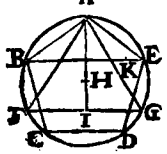
d 16. ſexti.

e 1. ſexti.

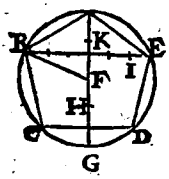
f

itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. *quarti decimi.* ALITER. *a* Circumſcribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icoſaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint B k. Dico rurſus eſſe, vt B E, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub A I, B k, æquale eſt pentagono A B C D E, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale eſt triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub A I, B k, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B k, ad I F, cum baſes ſint B k, I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque vt pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B k, ad I F; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta B k, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æque multiplicentur per numerum 20. *c* erit quoque vt pentagonum A B C D E, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta B k, duodecies ſumpta ad rectam I F, vigeſies ſumptam: Atqui recta B k, duodecies ſumpta æquialet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B k, contineat quinque ſextas partes ipſius B E, continebit eadem B k, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E.) Recta vero I F, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri F G, decies ſumpto; (eo quod F G, eſt ipſius I F, dupla,) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi B E, decies ſumptum ad latus Icoſaedri F G, decies ſumptum; Ac propterea, *d* cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.



b 12. *ſex.*



c *ſchol.* 2 2. *quinti.*

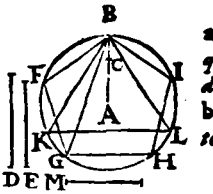
d 15. *quinti.*

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10. IV. 4.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

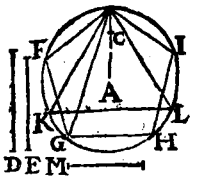
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum Bkl. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam vero AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, *a* est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni; *b* poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. *c* Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri Bk, triplum est quadrati semidiametri AB: *d* Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ Bk, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ Bk, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. eo quod BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; *e* Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF; *f* Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF, ita



a 4. *quartidecimi.*
b 10. *tertiid.*
c 12. *tertiidec.*
d 4. *tertiidec.*
e 2. *quartidecimi.*
f 22. *sexti.*

BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; a Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cum igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AG, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. sexti.



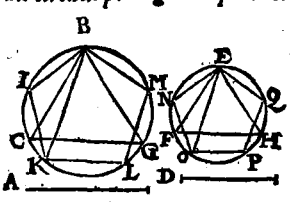
SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæra eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona aquilatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectæ BK, CK, EO, FO.

b 5. quartidecimi.



b *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæra, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterq; continet duas quintas partes suæ circumferentiæ.) Item arcus PGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BGK, EFO, e. de-*

finitio-

finitione segmentorum similium, aquales inter se, quam anguli B K C, E O F, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Atproinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus C B K, vtrianguli B C K, reliquo angulo F E O, vtrianguli E F O, aqualis erit, & totum triangulum B C K, toti triangulo E F O, aquiangulum. a *Quare erit vt B K, hoc est, recta A, illi aqualis, nempe latus cubi,* a 4. sim. *ad B C, latus Icosaedri, ita E O, hoc est, recta D, illi aqualis, latus scilicet alterius cubi, ad E F, latus Icosaedri. Quod erat propositum.*

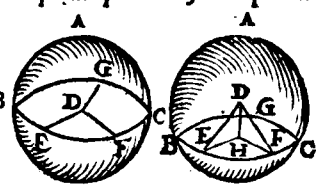
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent B G, B K, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

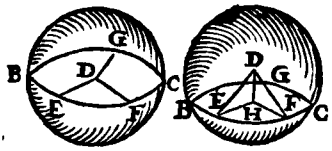
SECETVR sphæra A B C, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum B E F G C. Dico B E F C G, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione B E F C G; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ, quotcunque D E, D F, D G. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana B E F C G, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.



TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis D H; emittanturque ex H, rectæ vtcunque H E, H F, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectan-

nectantur rectæ D E, D F. *Quoniam igitur anguli* D H E, D H F, *ex defin. 3. lib.* 11. *recti sunt*; a *erit tam quadratum rectæ* D E, *quadratis rectarum* D H, H E, *quam quadratum rectæ* D F, *quadratis rectarum* D H, H F, *æquale*: *Sunt autem quadrata rectarum* D E, DF, *æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentiũ, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* D H, H E, *quadratis rectarum* D H, H F, *æqualia erunt*; *& proinde, dempto communi quadrato rectæ* D H, *reliquum quadratum rectæ* H E, *reliquo quadrato rectæ* H F, *æquale erit. Quare & rectæ* H E, H F, *æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex* H, *ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus* H E, H F. *Figura igitur plana* B E F C G, *vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit*; *eiusque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis* D H, *cadit. Quod est propositum.*

a 47. primi.



COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

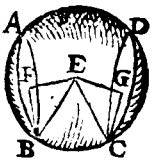
LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN sphæra A B C D, *cuius centrum* E, *sint circuli æquales* A B, D C. *Dico ipsos æqualiter à centro* E, *distare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* E F, E G, *quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* F B, G C, *ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ* E B, E C. *Quoniam igitur anguli* E F B, E G C, *recti sunt, ex defin. 3. lib.* 11. b *Erit tam quadratum*

b 47. primi

tum rectæ E B, *quadratis rectarum* E F, F B, *quam quadratum rectæ* E C, *quadratis rectarum* E G, G C, *æquale: Sunt autem quadrata rectarum* E B, E C, *æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* E F, F B, *quadratis rectarum* E G, G C, *æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium* F B, G C, *cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ* E F, *reliquo quadrato rectæ* E G, *æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares* E F, E G. *Quam ob rem circuli* A B, D C, *æqualiter diſtant à centro* E.

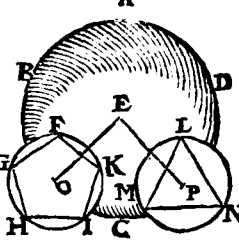


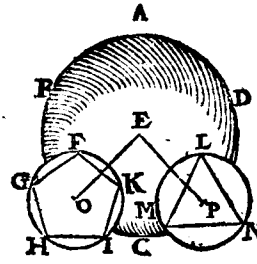
SED iam æqualiter diſtent circuli A B, D C, *à centro ſphæræ* E. *Dico ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, oſtendemus eodem modo, quadrata rectarum* E F, F B, *æqualia eſſe quadratis rectarum* E G, G C; *Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium* E F, E G, *cum circuli æqualiter ponantur diſtare à centro, reliquum quadratum rectæ* F B, *reliquo quadrato rectæ* G C, *æquale erit; atque adeo æquales erunt rectæ* F B, G C, *ſemidiametri ſcilicet circulorum* A B, D C. *Circuli igitur* A B, D C, *æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 11. PROPOS. 11. IV. X.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri; in vna eademque ſphæra.

IN ſphæra A B C D, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum F G H I K: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra A B C D, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangũt; ſi per pentagonũ, & triangulum plana ducãtur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in ſphęra F G H I k,





a 5. *quarti-decimi.* LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. *a* Quia verò idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N; Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorũ centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt E O, E P, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ; resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cùm & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemq; modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. *b* Quoniã autem est, vt basis F G H I K, ad basin L M N, ita pyramis F G H I K E, ad pyramidem L M N E, cùm vtriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, tota videlicet superficies Dodecaedri, ad basin L M N, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem L M N E. Rursus quia est (sicut modò diximus) vt tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin L M N, ita Dodecaedrum ad pyramidem L M N E; erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: *c* Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ; atque adeò ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunq; sphęræ. Quapropter Dodecaedrũ ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

b 6. *duodecimi.*

c 9. *quarti-decimi.*

d 9. *quarti-decimi.*

COROLLARIVM.

c 10. *quarti-decimi.* QVONIAM verò ostensum est quoque, *d* ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra. *e* Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemque sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quam-

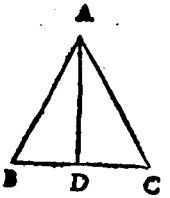
quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: *a* Item ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri: & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri: & lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius: & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, esse inter se æquales.

a 11. quarti decimi.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, anguli B, & C, æquales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. *c* Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia sunt; ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. *d* Cùm igitur quadrato rectæ AB, æqualia sint quadrata rectarum AD, BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadruplâ quadrati rectæ BD; Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. sesquitertium est quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.



b 5. primi.

c 26. primi.

d 47. primi.

COROLLARIVM.

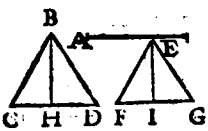
HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & CD, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli ACD: & basis BD, basi CD, æqualis: *e* Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id est, angulus BAC, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD.

e 8. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

aiij. SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita C D, F G, perpendiculares B H, E I. *a* Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri B C, *b* & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, E F, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. *c* ideoque commenſurabilia erunt: Quare lineæ ipſæ A, B C, E F, commenſurabiles exiſtent ſaltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, E F, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt C H, F I.



a 13. *tertiidec.*
b 14 *tertiidec.*
c 6. *dec.*

d 12. *quartidecimi.* RVRSVS, *d* quia tam quadratum rectæ B C, quadrati rectæ B H, quam quadratū rectæ E F, quadrati rectæ E I, ſeſquitertium eſt; habebunt tam quadrata rectarum B C, B H, quam quadrata rectarū E F, E I, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. *e* ideoq; tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ B C, B H, quam lineæ E F, E I, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam C H, ipſi B C, quam F I, ipſi E F, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. *f* Igitur & tam B H, C H, quam E I, F I, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde cum C H, & F I, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoque B H, E I, Rationales. *g* Quoniam vero tam C H, B H, quam F I, E I, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionē, quam 1. ad 3. *b* cum oſtenſum ſit talium partiū 1. eſſe tam quadratū C H, quam quadratū F I, qualium 3. eſt tam quadratum B H, quam quadratum E I.) Erunt tam C H, B H, quam F I, E I, Rationales potentia tantum commenſurabiles: *i* Ac proinde tam rectangulum ſub C H, B H, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub F I, E I, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula B C D, E F G, æqualia rectangulis ſub C H, B H, & ſub F I, E I, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum C D, F G, duplæ ſint baſium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula B C D, E F G, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri trian-

e 6. *dec.*
f 12. *decimi.*
g 9. *dec.*
h 12. *quartidecimi.*
i 22. *decimi.*

triangulo B C D, sit commensurabilis; (est enim triangulum B C D, totius superficiei quarta pars) Item tota superficies Octaedri triangulo E F G, commensurabilis; (Est enim triangulum E F G, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quã Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum.

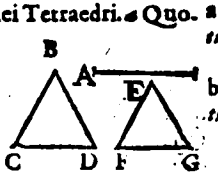
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera B C, E F, & ob id eorum dimidia C H, F I, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas C H, B H, quam F I, E I, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub C H, B H, & sub F I, E I, hoc est, triangula B C D, E F G, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale: perspicuum est, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri. XIV.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum B C D; Octaedri vero basis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, sesquitertium esse trianguli E F G; At vero superficiem Octaedri esse sesquialterã superficiei Tetraedri. a Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterũ est quadrati lateris Tetraedri C D; b duplum vero quadrati lateris Octaedri F G; sit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris C D; & talium 3. quadratum lateris F G. Quare quadratum rectæ C D, sesquitertium est quadrati rectæ F G: Vt autem quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ F G, ita est triangulum B C D, ad triangulum E F G. (c quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum C D, F G, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum B C D, sesquitertium est trianguli E F G.



a 13. tertiidec.

b 14 tertiidec.

c 20. & 19. sexti.

RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum B C D, sesquitertium esse trianguli E F G; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum B C D, talium 3. esse triangulum E F G; Efficitur, vt triangulum E F G, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum B C D, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16.

Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basin.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E; ducaturq; ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta DEF, incidens in basin ABC, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cùm sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. *a* Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, *b* eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; *c* Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cùm tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; *d* erit F, centrum basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.



a 8. primi.
b 13. primi
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA verò ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cùm F, quoq; sit demonstratum centrum eiusdē circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis verò vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FDA, FAD, FDC, & in sphæra descriptū, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinū, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Ductis enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales sunt, cùm sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet è centro ad superficiem sphæræ: *a* quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio propos. 4. lib. 3. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2 erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cùm ergo quadratum rectæ AG, æquale sit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarū AG, BG; *b* Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. *c* Quum ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ; *d* atque adeò rectæ AC, BD, sese secantes in G, in vno existent plano; *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ACD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarū basis communis ABCD, vertices verò E, & F; quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cùm quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia, & basi communi ABCD. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG; *f* Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuò secantibus in G, ad rectos angulos insistit, *g* ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe



a 14. huius.
b 48. primi.
c 14. primi.
d 2. undecimi.
e 7. undecimi
f 48. primi.
g 4. undecimi.

ad basin pyramidum. Quare E G, altitudo est pyramidis A B C D E. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis A B C D F. Cum ergo E G, F G, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia A C, est diameter sphæræ; *a* erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterum A D, D C. *b* Quare angulus A D C, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere Octaedri A B; *c* constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. *tertiidec.*



b 48. *primi.*

c 12. *tertiidec.*

SCHOLIVM.

MVLTO brevius hanc propositionem demonstravimus in coroll. 2 propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

o. xvij.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

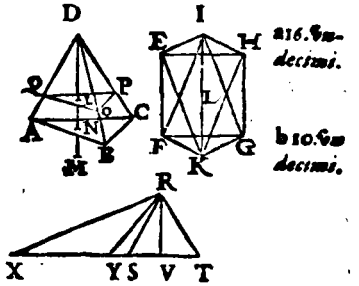
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

SIT Tetraedrum A B C D, & octaedrum E F G H I k, in vna eademq; sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ D M, incidens in basin A B C, ad punctum N. *d* Erit igitur N, centrum basis A B C, & D N, perpendicularis

d 15. *quartidecimi.*

laris ad eandem basin. Quia verò pars diametri L N, inter centrum sphæræ & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit D L, semidiameter talium partium 3. qualium 1. est L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde ex scholio propos. 15. lib. 11. per centrũ L, planum O P Q, parallelum plano A B C; *a* Eruntq; rectæ Q O, O P, P Q, parallelæ rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulum Q O P, æquiangulum erit triangulo æquilatero A B C, *b* cùm anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At A B C, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi A B C. Sunt autem & triangula D Q O, D O P, D Q P, triangulis D A B, D B C, D A C, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides A B C D, Q O P D, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. *c* Rursus quia plana parallela A B C, Q O P, secant rectas D N, D C, proportionaliter; erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P. Erat autem D N, ad D L, vt 4. ad 3. (cùm ostensum sit D N, esse talium partium 4. qualium 3. est D L.) Igitur & D C, ad D P, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, *d* cùm pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus *e* quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ D C, ad quadratum rectæ D P, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



a 16. Undecimi.

b 10. Undecimi.

c 17. Undecimi.

d 8. duodecimi.

e 20. sexti.

SIT iam triangulum æquilaterum R S T, æquale triangulo D Q P; demittaturque ex R, ad S T, perpendicularis R V. *f* Erit-que latus R T, hoc est, D P, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis R V. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ D P, talium 27. erit quadratum rectæ R V. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ D C. Igitur linea R V, est potens vigintiseptem sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. quarti decimi.

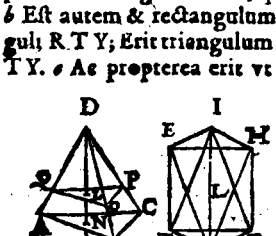
R V R S V S extensa T S, fiat T X, ad T S, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturque T X, bifariam in Y, vt sit T Y, talium partium 32. qualium 27. est T S, seu illi æqualis D P. Quoniam verò proportio D C, ad D P, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquiter-

tia, erit D C, talium partium 56. qualium D F, eſt 27. (proportio enim 56. ad 27. eſt ſeſquitertia) ac propterea qualium T Y, eſt 32. Quare linea T Y, continet octo nonas partes lateris tetraedri D C. Dico igitur ita eſſe tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K, vt rectangulum contentum ſub recta R V, (quæ poteſt viginti ſeptem ſexageſimaſquartas partes quadrati lateris D C) & ſub recta T Y (quæ continet octo nonas partes eiuſdem lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

a 11. ſext. CVM enim ductis rectis R X, R Y, a triangulum R T X, duplum ſit trianguli R T Y, quod & baſis T X, dupla ſit baſis T Y:

b 41. pri. mi. b Eſt autem & rectangulum ſub R V, T Y, duplum eiuſdem trianguli R T Y; Erit triangulum R T X, æquale rectangulo ſub R V,

c 7. quinti. T Y. c Ac propterea erit vt triangulum R T X, ad triangulum R S T, ita rectangulum ſub R V, T Y, ad idem triangulum R S T:



d 11. ſext. d Eſt autem triangulum R T X, ad triangulum R S T, vt baſis T X, ad baſin S T, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub R V, T Y, ad triangulum R S T, hoc eſt, ad triangulum D Q P, ſiue Q O P, ſibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub R V, T Y, ad triangulum Q O P, ita pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D: At vero vt triangulum Q O P, ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita eſt pyramis Q O P D, ad octaedrum E F G H I K (Nam cùm D N, recta ſit ad planum A B C, recta quoq; erit ad planũ Q O P, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoq; ſphæræ ſemidiameter D L, alti-

e 16. quarti. decimi. tudo erit pyramidis ſeu tetraedri Q O P D: e Octaedrum autem E F G H I K, diuiditur in duas pyramides æquales E F G H I, E F G H K, quarum baſis communis quadratum E F G H, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ L I, L K. Pyramides ergo Q O P D, E F G H I, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis Q O P, ad baſin E F G H, ita pyramis Q O P D, ad pyramidem E F G H I; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. lib. 5. oſtendimus, vt baſis Q O P, ad duplum baſis E F G H, hoc eſt, ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyramidis E F G H I, hoc eſt, ad Octaedrum E F G H I K) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub R V, potente viginti ſeptem ſexageſimaſquartas partes quadrati lateris tetraedri D C, & ſub T Y, octo nonis eiuſdem lateris D C, contentum ad quadratum

dratum diametri sphæræ D M, ita pyramis, seu tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

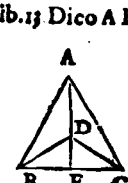
QVONIAM verò D C, talium partium 4. fuit qualium 3. D P; continebit D P, seu illi æqualis R T, tres quartas partes lateris tetraedri D E: Ac proinde, a cùm recta R T, sit potentia sesquitertia rectæ R V; erit R V, potentia subsesquitertia ipsius R T, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rursus quia T Y, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, seu D P; (tres videlicet quarta partes lateris tetraedri) erit T Y, superquintupartiens vigesimasseptimas partes ipsius S T, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K, & rectangulum sub R V, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub T Y, quæ superquintupartiens est vigesimasseptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.

a 12. quartiæcima.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta A E, quæ perpendicularis erit ad B C, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10 lib. 13 Dico A E, triplam esse rectæ D E, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cùm latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia sint lateribus D B, D C, trianguli B D C; (è centro enim ducuntur) sit autem & basis A B, basi B C, æqualis: Erunt triangula A B D, B D C, æqualia ex coroll. propos. 8 lib. 1. Atq; eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare obæqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, triangulum A B C, triplum est trianguli B D C. Quoniam verò rectangulum sub A E, E B, triangulo A B C, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cùm basis trianguli B D C, dupla sit basis B E, vtriusq; rectanguli; Erit quoque rectangulum sub A E, E B, triplum rectanguli sub D E, E B: b Est autem vt rectangulum sub A E, E B, ad rectangulum sub D E, E B, eiusdem altitudinis E B, ita basis A E, ad basin D E. Igitur & A E, tripla est ipsius D E. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.



b 1. sexti

COROL.

COROLLARIVM.

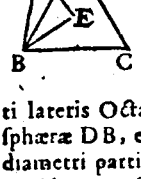
ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cùm enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

o. xvij. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphæræ inscribatur: erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphæra, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ DB. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; a quoniã quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. b Quia verò quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare c cùm quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autẽ quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. ter tiidec.

b 12. ter tiidec.

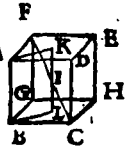
c 47. primi.

o. xviij. THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum

centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. *a* Cùm enim quadratũ diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.



a 15. tertiidec.

PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cùm KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, *b* quia AB, KL, parallelæ sunt, quòd rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, *c* quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeò recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam verò perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cùm KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit Ik, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b 6. vndecimi.

c 16. vndecimi.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. *d* Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: *e* Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales Itaque cùm dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

d 15. tertiidec.

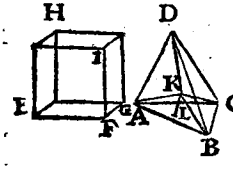
e 31. vndecimi.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro

centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſin ducta bis tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunq; A B C D, contentum planis A B C, A B D, A C D, B C D, ſolidum autem E F G H, contentum ſub E I, tertia parte ſuperficiei corporis A B C D, & ſub altitudine F G, quæ æqualis ſit perpendiculari K L, ducta ex centro K, ad baſin A B C. Dico ſolidum E F G H, æquale eſſe dato corpori regulari A B C D. Nam ductis ex centro K, rectis K A, K B, K C, K D, ad omnes angulos corporis, reſolvetur corpus regulare in pyramides æquales, cùm æquales habeant baſes & altitudines. Cùm enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſe æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſitionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ducta, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò priſma contentum ſub baſi A B C, & altitudine K L, triplum eſt pyramidis A B C K, per coroll. 1. propoſ. 6. lib. 12. Atq; eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine K L, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub totu ſuperficie corporis regularis, & altitudine K L, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis A B C D. Quamobrem cùm idem priſma triplum ſit priſmatis E F G H, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida E F G H, A B C D, æqualia. Quod eſt propoſitum.



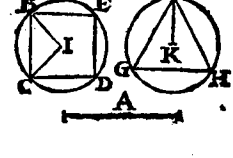
THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum B C D E, & octaedrum, cuius vnum triangulum F G H. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum B C D E, & triangulum F G H, hoc eſt, circulos B C D E, F G H, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex centris I B, K F. *a* Quia igitur quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi B C, & quadratum lateris B C, duplum quadrati rectæ B I; (Nam ducta recta I C, fiet angulus B I C, rectus, cùm ſubtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectarum B I, I C. Quare cùm rectarum

a 15. *tertiodec.*

b 47. *primi*



ctarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus a quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; b & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ Fk. Cùm igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, Fk; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erũt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. tertiidoc.
b 12. tertiidem.

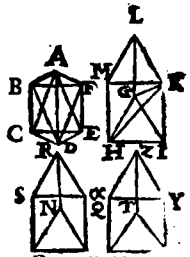
COROLLARIVM.

HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quàm octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. c qui cùm sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cùm sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quòd parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quàm in octaedro. quod est propositum.

c 21. quarti demonst.

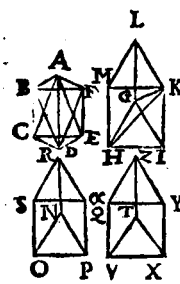
THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.



IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrũ GHIk. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus communis est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD; in BDFA; cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis DEF; quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt continentes cum ipso dimidiam partem octaedri. Quoniam verò quælibet harum pyramidum

dum constat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipsorum commune est A D,
a 8. primi. diameter, & reliqua latera, ipsius octaedri latera existunt, a inter se æqualia sunt; efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cùm contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Constituatur super G H I, basin tetraedri, prisma



G H I K L M, eiusdem cum tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Rursus, super basin octaedri N O P, & T V X, basi tetraedri æqualem, constituantur duo prismata N O P Q R S, T V X Y Z α, eiusdem cum octaedro, seu pyramide A C D E, altitudinis.
b 14. quarti decimi. b Quoniam igitur G H I, hoc est, T V X, basis tetraedri sesquitertia est ipsius N O P, basis octaedri: Erit quoque prisma T V X Y Z α, prismatis N O P Q R S, sesquitertiũ, cùm prismata eiusdem altitudinis sint, vt bases, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus. Est autem & octaedrum A B C D E F, eiusmodi prismatis N O P Q R S, sesquitertium; (Nam prisma æquale est tribus pyramidibus ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum.) Igitur æquale est octaedrum prismati T V X Y Z α. Quia verò prisma T V X Y Z α, ad prisma G H I K L M, proportionẽ habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex scholio propos. 14. lib. 12. Est autem altitudo prismatis T V X Y Z α, quod octaedro æquale est, eadem quæ octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prismá G H I K L M, hoc est, ad triplum tetraedri G H I K, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quàm quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, vt 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est vt 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaq; octaedrum, atq; Tetraedrũ eidem sphæræ inscribantur, &c. quod demonstrandum erat.

COROL-

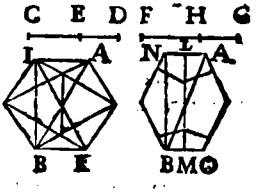
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. *a* Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram *a* 18. huius.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

POSSIT recta A*B*, rectam C D, & eius segmentum maius C E; Item rectam F G, & eius segmentum minus H G. Dico C E, esse latus Icosaedri, & H G, latus Dodecaedri, eius sphæræ, cuius A B, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter A B, descriptũ Icosaedrum A I B K, & Dodecaedrum A N B O. Latera deinde Icosaedri opposita A I, B K, connectantur recta I B, quæ subtendet vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, vt constat ex propos. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta Z F, erit R S H Z F, pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia G R, G S, G H, G Z, G F, cadentia in superficiem sphæræ, in quo recta R H, latera opposita R X, H I, coniungens angulum R S H, subtendit) clariusq; patebit ex constructione Icosaedri, quam ad finem lib. 16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia verò A I, *B* K, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16. lib. 13. *b* erunt anguli A I B, I B *K*, æquales duobus rectis, Ac proinde, cùm sint inter se æquales (Ducta enim alia diametro I *K*; cùm latera A I, I B, trianguli A I B, æqualia sint lateribus K B, B I; & bases quoque A B, I K, æquales; *c* Erunt anguli A I B, I B *K*, æquales) recti erunt; *c* ideoq; quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum A I, I B; Erat autem idem quadratum rectæ A B, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum C D, C E: Igitur quadrata rectarum I B, I A, æqualia sunt



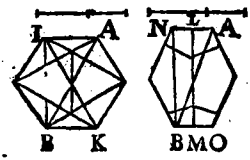
b 29. primi.

c 8 primi.

d 47. primi.

quadratis rectarum C D, C E; Ac propterea cùm C E, sit maius segmentum ipsius C D, diuisæ extrema ac media ratione; Item I A, maius segmentum ipsius I B, similiter diuisæ; (Nam I B, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est I A, latus Icosaedri. Cõstat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, *a* maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit C E, maius segmentum ipsi I A, lateri Icosaedri. *b* Cùm enim sit vt C D, ad C E, ita I B, ad I A; *c* erit quoq; vt quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ C E, ita quadratum rectæ I B, ad quadratũ rectæ I A; Ac componendo, vt quadrata rectarum C D, C E, ad quadratum rectæ C E, ita quadrata rectarum I B, I A, ad quadratum rectæ I A: Ostensa sunt autem quadratis rectarum C D, C E, æqualia quadrata rectarum I B, I A; *d* Igitur & quadrato rectæ C E, æquale est quadratum rectæ I A; ideoq; rectæ C E, I A, æquales sunt. Quod est propositum.

a 8. tertiidec.
b 2. quartidecimi.
c 22. sexti.
d 14. quinti.



RVRSVS latera Dodecaedri opposita A N, B O, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta L M, & ipsa latera recta N B, coniungantur. Quoniam igitur N I, B M, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. *e* erunt quoque L M, N B, æquales, & parallelæ: Est autem recta L M, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & N B, ad eadem perpendicularis erit, *f* Ac proinde quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B, N A. Quare cùm idem quadratum rectæ A B, æquale sit positum quadratis rectarum F G, H G; æqualia erunt quadrata rectarum N B, N A, quadratis rectarũ F G, H G. Ac propterea, cùm H G, sit minus segmentum ipsius F G, sectæ extrema ac media ratione: Item N A, minus segmentum ipsius N B, hoc est, ipsius L M, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit H G, minus segmentum ipsi N A, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac suprà demonstrauimus, C E, maius segmentum æquale esse ipsi I A, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit. Quod erat ostendendum.

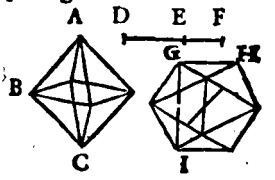
e 33. primi.
f 47. primi.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cùm enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; *a* erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; *b* Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. *c* Quia verò quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: *d* Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cùm sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. *f* Erit quoque vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



a 8. tertiidec.
b 5. tertiidec.
c 47. primi.
d 14. tertiidec.
e 2. quartidecimi.
f 22. sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulũ rectũ constituat; cui recta subtenda-

tendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.



LINEA recta A B, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quæ æqualis sit minori segmento A C, angulum rectum A, cui recta subtendatur B D, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua A D, vel A C, latus est Dodecaedri. Cùm enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum B C, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum A C, vel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi: a Sunt autem & quadrata rectarum A B, A D, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti B C. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum A B, A D, hoc est, quadrato rectæ B D; Ac proinde recta B D, diameter est sphæræ. b Quare cùm diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta B D, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius B D; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. tertiidec.

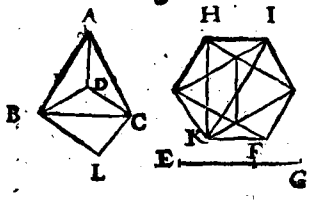
b 14. tertiidec.

COROLLARIVM.

c 18. tertiidec. c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est A D, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum B C, sit maius segmentum, & A D, minus rectæ A B, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum B C) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum A D) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ; latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri A B C D, latus B C, maius segmentum E F, & minus F G, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico H I, rectam potentia esse

esse sesquialteram minoris segmenti F G. Subtendat enim recta H K, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta I K, diameter. *a* Quia igitur H I, est maius segmentum rectæ H K, diuisæ extrema ac media ratione; *b* Erit quoque composita K H I, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum H K, & minus H I. *c* Fiat ex rectis B C, E F, F G, triangulum B C K, ita vt B L, recta ipsi E F, & C L, ipsi F G, sit æqualis, *d* Eritq; angulus L, rectus, quòd recta B C, ponatur posse rectas B L, C L, hoc est, tectas E F, F G: Est autem & angulus I H K, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; *e* Estq; vt B L, ad L C, ita K H, ad H I. *f* Igitur triangula B L C, K H I, æquiangula sunt. *g* Ac propterea vt K I, ad I H, ita B C, ad C L; & permutando, vt K I, ad B C, ita H I, ad C L. *h* Atqui I K, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & H I, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius C L, hoc est, minoris segmenti F H. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

a 8 *terii*
tisdec.
b 5. *terii*
tisdec.
c 21 *primi.*
d 48 *primi.*
e 2. *quarti*
dec.
f 6. *sexti.*
g 4. *sexti.*
h 13 *tertiidec.*

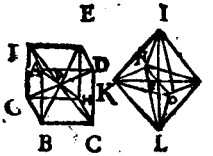
THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum I K L M N O, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quàm Octaedri, ductis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines. (Cùm enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. *i* Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri à centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basin pyra-



i 21. *quartidecimi.*

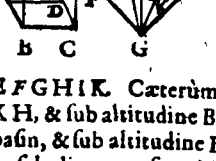


ramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basin pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus ex eodem scholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

SINT rursus in eadem sphæra cubus A B C D, & octaedrum E F G H I K, sitq; diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam verò quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. a sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C: Est autem & recta A B, rectæ B M, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases I F K H, B D, & altitudines A B, B M: b Ac propterea parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basin B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta E L, rectæ E N, tripla est; erit & parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basin, & sub altitudine E N, vt in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine E L, triplum est pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo super basin I F K H, & sub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. quòd & altitudo L N, dupla sit altitudinis E N. c Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E. Aequale igitur erit parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterùm quia parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, vt altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L. (Cùm enim sit vt A M, ad M B, ita E N, ad N L: & componendo, vt A B, ad E L,

a 18. tertiidec.

b 34. vndecimi.

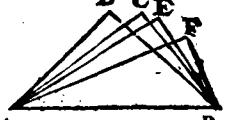


c 16. quartidecimi.

ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostentium cubo A B C D: Et parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, æquale est Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoq, vt cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVIA demonstratum est, a diametrum sphæra, in qua omnia quinq, corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt si quadratum diametri ponatur 3 partium, eorundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duæ tertias illius partes continens, vt in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3 partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphæra ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratū rectæ A C, continens duas tertias partes, a 13. terciidec.



quadrati diametri A B: Vel si constituantur duo quadrata rectarum A C, B C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum sit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.

RVRSVS b *cum ostensum sit, diametrum sphæra potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium sit quadrati diametri A B; Vel si constituantur duo quadrata rectarum A D, B D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis secundum doctrinā scholij propos 33. lib. 6. rectā A D, latum esse Octaedri.* b 14. terciidec.

DEINDE, c *quoniam docuimus, diametrum sphæra potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars sit quadrati diametri A B; Vel si quadrato diametri A B, constituantur duo quadrata æqualia rectarum A C, B C, ita vt quadratum rectæ A C, duplum sit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus existere. Vel certè cum diameter A B, posit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2 propos. 15. lib. 13. manifestū est, si ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, relinqui quadratum lateris cubi B C; Quemadmo-* c 15. terciidec.

dum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quæ si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extremæ ac mediæ ratione sectam, & maius ipsius segmentum; a *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæra, cuius diameter est recta prior linea; Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quauis extremæ ac mediæ ratione diuisa ad maius segmentum; Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.*

a 23. quartidecimi.

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extremæ ac mediæ ratione, & minus illius segmentum; b *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæra, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quacunque recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum; Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.*

b 23. quartidecimi.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt. Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

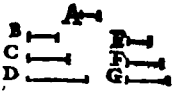
THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales; nec non quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secunda ad secundam. Cùm enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; c habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam

c 20. sexti.

tam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E: vt recta C, ad rectam F: *a* Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.



quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

a 20. *sexti.*

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; *b* habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: *c* Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

b 33. *Vndec.*

c 33. *Vndec.*

SCHOLIVM.

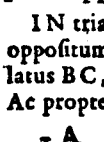
HOC idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatã proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-

portionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; *a 13. sex.* Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. *a* Inueniatur ergo



recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cùm enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. *b* sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. *c* Quoniam verò quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoq; duplicatam lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

b 17. sexti.

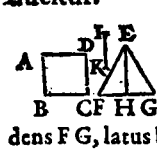
c 20. sexti.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta dividens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpendicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; *d* cùm quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B; *e* sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangu-

d 18. tertiudec.

e 1. sext.

triangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; *a* Ac proptere a A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continuè erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continuè proportionales, ex constructione. Igitur cùm omnium antecedens sit F H, *b* erit proportio rectæ E F, ad rectam E H, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ A B, ad rectam I K, secundæ ad secundam duplicata. Quare cùm & quadratum A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc est, ad triangulum E F G (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratū rectæ I K, æquale triangulo E F G) *c* proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, vt latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. sexti.

b 28. quartidecimi.

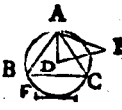
F H. I K. E F. E H.

c 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis verò, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulum A B C, & altitudo, seu axis Tetraedri D E, latusq; cubi eiusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri A B, esse potentia sesquialterum axis D E: Axem verò D E, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* descripto circulo A B C; ad centrū D, in quod videlicet cadit axis D E, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur A D, semidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc est, lateris A B, *e* æquale est quadratis rectarum A D, D E, *f* & triplum quadrati semidiametri A D; Fit, vt posito quadrato lateris A B, seu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.



d 5. quarti.

e 47. primi.

f 12. tertiidec.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, *g* potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis D E. Igitur quadratum axis D E, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

g 18. tertiidec.

COROL.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris A B, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. *a* quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Eorundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis D E: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, *b* cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

a 13. *tertiidec.*

b 20. *sexti.*

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet *c* tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

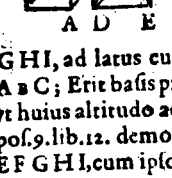
c 12. *quartidecimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus A B C, & Tetraedrum D E F G. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super D E F, basim Tetraedri prisma D E F G H I, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. *d* Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi A B C, ad basim prismatis, seu Tetraedri D E F, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis D E F, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis D E F G H I, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis A B C; Erit basis prismatis A B C, ad basim prismatis D E F G H I, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata A B C, D E F G H I, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma D E F G H I, triplum est pyramidis, seu Tetraedri D E F G, ex coroll. 1 propos. 7. lib. 12. Cubus ergo A B C, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri D E F G. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.

d 30. *quartidecimi.*



COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto Ostensum enim est, cubum A B C, æqualem esse prismati D E F G H I, &c

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

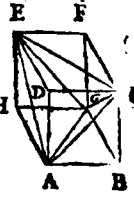
ET SOLIDORVM QVINTVM, vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus,

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus baſibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potentia duplæ ſint laterum æqualium quadratorum, vt in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, perſpicuum eſt, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem, ſeu Tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifeſtum eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.



PROBL.

ij. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro AbCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E,F,G,H,I,K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam verò latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quòd sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quòd sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: a æquales erunt bases EH, GH. Eademq; ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoq; octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cùm omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 8. duo decimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM verò tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuò ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: b Eodemq; modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

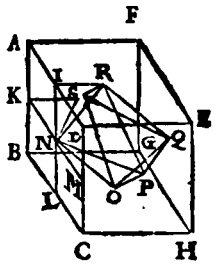
b 8. duo decimi.

iij. PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto; quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NL, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum,

torum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremò ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planũ conſiſtunt. Quoniam verò latera *IN*, *IR*, trianguli *I*NR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli kNS, quòd omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cùm NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; *a* angulus NIR, æqualis eſt recto angulo kAF, in quadrato AG, eademq; ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; *b* Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad *I*, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, Sk, ductæ ſunt ad k, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorũ centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cùm omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 10. Undecimi.
b 4. primi.

ALITER. *c* In cubo dato inſcribatur pyramis; *d* In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera verò pyramidis ex demonſtrattone propoſ. 1 huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cùm ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atq; adeò Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 13. quinti dec.
d 2. quinti dec.

COROLLARIVM.

QVIA verò diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO (ſi ducantur) ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1 propoſ. 14 lib. 13.

qua-

quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

17. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.

DATVM Octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CFD, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC; CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habent communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. [a] Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP. [b] Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumq; constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13 & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano ABCD, [e] ipsa, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, KL, trianguli KLL æqualia sint lateribus



a 18. quartidecimi.
b 2. sex.
c 10. vndec.
d 15. vndec.
e 15. vndecimi.

teribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoque ipſis contenti, æquales, quòd recta E K, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariam ſecet angulum A E D, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. *a* Erunt & baſes K L, K O, æquales, hoc eſt, recta L O, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione L M, M N, N O, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ G L, G M, H M, H N, I N, I O, K O, K L, cùm ſint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoque, cùm & angulos contineant æquales, nimirum rectos, *b* æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra G, H, I, K, connectentes. Quia verò hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati L N, angulóſque comprehendunt rectos; (*c* cùm enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus ſint rectis æquales; ſint autem L K G, I K O, per corollarium 2. propoſ. 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli k G H, G H I, H I k.) quadratum erit G H I k, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cùm octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

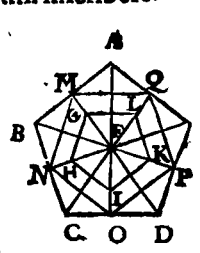
a 4. *prim. mi.*

b 4. *prim. mi.*

c 13. *prim. mi.*

PROBL. 5. PROPOS. 5. v. vj.

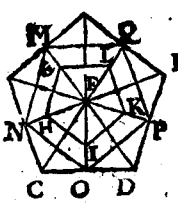
IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pentagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices verò, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis A B C D E F, cuius baſis pentagonum A B C D E, triangula verò æquilatera A B F, B C F, C D F, D E F, E A F, ſint q; horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis G H, H I, I k, k L, L G. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur F M, F N, F O, F P, F Q; quæ ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. bifariam ſecabunt latera A B, B C, C D, D E, E A, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, æquales ſint, quæ cùm angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, *d* æquales quoque erunt rectæ M N,

d 4. *prim. mi.*

ctæ M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta M, N, O, P, Q, connectentes. *a* Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, æquales erunt, quod & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B M, trianguli F B M, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum, *b* erunt bases F M, F N, æquales; & sic de reliquis. Quoniam verò & rectæ F G, F H, F I, F K, F L, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratum est; *c* Erunt & rectæ G H, H I, I K, K L, L G, æquales. *d* Rursus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, quam anguli B N M, M N O, O N C, æquales sunt duobus rectis. *e* Sunt autem anguli A M Q, N M B, angulis B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, existens. Denique cùm rectæ F M, F N, F O, F P, F Q, æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quòd & F G, F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales sint; Vel certè quia F G, F H, F I, F K, F L, duplæ sunt ipsarum G M, H N, I O, K P, L Q, ex coroll. propos. 18. lib. 14. *f* parallelæ erunt G H, H I, I K, K L, L G, ipsis M N, N O, O P, P Q, Q M; *g* Ac propterea anguli L G H, G H I, H I K, I K L, K L G, angulis æqualibus Q M N, M N O, N O P, O P Q, P Q M, ideoq; & inter se æquales erunt. *h* Quia verò plana per rectas G H, H I, & per H I, I K, ducta parallela sunt plano pentagoni M N O P Q, per rectas M N, N O, O P, ducto conueniuntq; in recta H I, ipsa vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Eodemq; modo ostendemus plana per I K, K L, & per K L, L G, nec non per L G, G H, ducta idem planum constituere cum plano per G H, H I, I K, ducto. Quocirca G H I K L, pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cùm & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula; quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quāobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin 31. lib. 11. in Icosaedro erit descriptū, cùm viginti anguli dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri con-



a 8. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.
d 13. primi.
e 4. primi.
f 2 sext.
g 10. Undecimi.
h 15. Undecimi.

dri con-

dri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

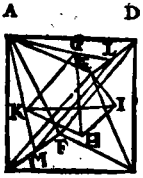
COROLLARIVM.

ITAQVE cùm omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basiũ, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentiũ, atq; adeo eorundẽ distantiæ existant à çentro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lem. 2. eiusdem, propos. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atq; sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro A B C D E F. In pyramide octaedri superiori A B C D E, sumantur G, & H, centra triangulorũ ex aduerso sibi respondentium A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorũ ex aduerso quoq; sibi correspondentium C F D, A F B: quæ quidem centra coniungantur sex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, secantes latera opposita octaedri DE, B F, bifariam in L, & M, per scholiũ propos. 12. lib. 13. coniungaturq; recta L M, a quæ ipsi BE, vel FD, çqualis & parallela erit: cùm EL, BM; Item DL, F M, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ DE, B F, oppositorum in quadrato E F. Quoniã verò rectæ A L, A M, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quòd A G, A K, duplæ sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propos. 18. lib. 14. b Erunt G K, L M, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia. c Quare erit vt AL, ad LM, ita A G, ad G K; & permutando, vt A L, ad AG, ita L M, ad Gk. Est autẽ A L, ipsius A G, sesquialtera; d quòd G L, sit tertia pars ipsius A L, ideoq; A G, eiusdem A L, duæ tertiæ. Igitur & L M, hoc est, ipsi æqualis D F, sesquialtera erit ipsius G k. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, k, coniungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrum constitui: quod, cùm habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem describimus. Quod erat faciendum.



a 33. primi.

b 2. sex. 4. sex.

c 4. quarti decimi.

d 18. quarti decimi.

ALITER. e In octaedro dato inscribatur cubus, f & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri, & in angulis cubi

e 4. quarti decimi.

f 1. quinti decimi.

collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

COROLLARIVM L

QVIA verò oſtenſum eſt, vtramque G K, D F, parallelam eſſe ipſi L M, *a* ac propterea & G K, ipſi D F, atque adeò ipſi B E, parallelam eſſe: *b* Atque eadem ratione K H, ipſis F C, E A, parallelum eſſe: Atque idcirco, planum G K H, per G K, K H, ductum, parallelum eſſe plano D F C, per D F, F C, necnon & plano B E A, per B E, E A, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula: Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

a 29. Vndecimi. *b* 11. Vndecimi.

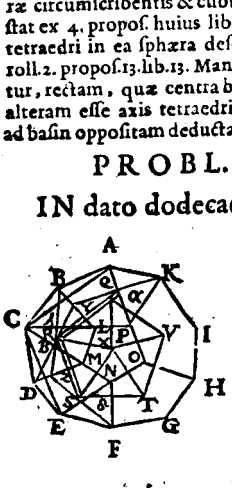
COROLLARIVM II

PRAETEREA cùm octaedrum circumſcribat & cubum & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur: Atq; adeò recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

O. vij.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis A B L P K, P K L H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectæ ducantur K Y, D Y, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem Y k, Y D, rectas A P, C M, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll eiuſdem propoſitionis, quod & arcus A k P, C D M, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant (*c* conſtat enim rectas A k, P k; Item C D, M D, arcus ſubtendere æquales.) *d* Igitur A α, C β, parallelæ ſunt rectæ B Y, *e* atque adeò & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales,

c 28. tertij. d 28. primi. e 9. Vndecimi.

les, nempe dimidia rectarum AP, CM, *a* quæ æquales sunt, cùm latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. *b* Rectæ ergo ipsas connectentes AC, $\alpha\beta$, æquales erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æquales esse ipsas CE, $\gamma\delta$: *c* Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cùm contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quàm CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter cùm & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualiū, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, *d* atque adeò æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarū æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, *e* ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt) *f* Erunt quoq; anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cùm & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; *g* æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cùm duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. pri mi. b 33. pri mi. c 4. pri mi. d 14. ter tij. e 14. ter tij. f 8. pri mi. g 4. pri mi.

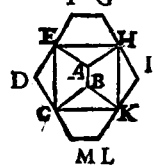
PROBL. 8. PROPOS. 8. o. viij.

IN dato Dodecaedro cubum describere.



PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus ABCDE, EFGHA, AHIkB, BkLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABkIH, secundū latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLk, secundum angulos EAH, CBk. In his verò pentagonis subtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, Ck, CE, Hk,

quadrilaterum efficientes E H k C, quod æquilaterum erit. Cùm enim omnia latera A E, A H, D E, D C, B C, B k, I H, I k, æqualia
a 4. primi. sint, angulosq; contineant æquales, ex hypothesi; a æquales erũt
b 28. tertij. baſes E H, H k, k C, C E. b Quoniam igitur rectæ A E, B C, æquales, auferunt ex circulo pentagonum A B C D E, circumſcribente
c 9. Undecimi. arcus æquales; Erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectæ A B, C E, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt A B, H K. c Quare & E C, H k, inter ſe parallelæ erunt; d Ac propterea rectæ E H, C K,
d 33. primi. quæ ipſas connectunt, parallelæ erunt, e in eo-
e 7. Undecimi. demq; cum ipſis plano; ideoq; parallelogrammum erit E H k C; quod oſtendimus eſſe æqui-



laterum. Quia verò planum E C k H, productũ communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. propoſitionis 10. lib. 14. circa
f 22. tertij. quadrilaterum E k, deſcriptum; f Erunt tam anguli oppoſiti E, k, quàm C, H, duobus rectis
g 34. primi. æquales; g Ac propterea cùm oppoſiti E, & K, ſint æquales, necnõ & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare E x, quadratum erit; collocans ſuos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorũ Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis ſimiliter octo angulis octo aliæ rectæ ſubtendantur eodem ordine; conſtitutum
h 4. primi. erit ſolidum ſex quadratis contentum; quæ cùm ſint æqualia, h eo quòd eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehenſos ſubtendentia æqualia ſunt, cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quòd duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiuſque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC ſit, rectam, quæ ſubtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, C E, ipſi A B, eſſe parallelam.

9.

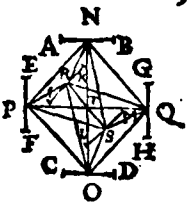
IX. PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſ. 17. lib. 13. nimirum A B, C D, E F, G H, I K, L M, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur N O, P Q, R S, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuò in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos

diui-

diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeò æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. a Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cùm dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentque octaedrum intra Dodecaedrum descriptũ, cùm sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

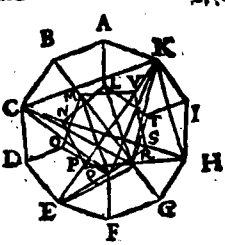


a 24. prop. 11.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato dodecaedro pyramidem describere.

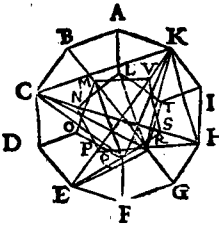
SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorũ quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At verò K, lateri LV, communi pentagonis KLT, LTP; Deniq; R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; b quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. c Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Nõ secus ostendemus, rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. d Quocirca cùm in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Aequalia etunt quadrata rectarum Ck, kH, quadratis rectarum CR, RH,



b 17. huius.

c 31. huius.

d 47. primi.



& quadratis rectarum k R, R E, & quadratis rectarum k Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarũ æqualium k H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H; (Hæ enim rectæ cùm subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, *a* æquales sunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum C k, C R, R k, k Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C k R, C k Q, k R Q, R C Q, æquilatera sunt, & æqualiã, ideoque tetraedrum componunt C k R Q: quod cùm habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. primi.

b 8. quinti decimi. et 21. quintidec.

ALITER. *b* In proposito Dodecaedro cubus describatur; *c* & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

d 5. quinti decimi. *e* 8. quinti decimi.

d DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrum; *e* & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli verò Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

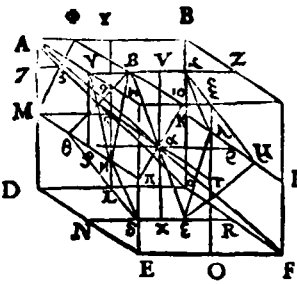
f 11. quinti decimi. *g* 13. quintidec. *h* 11. quinti decimi. *i* 12. quintidec.

IN dato Icosaedro *f* cubus describatur, *g* & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. *h* Cùm enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri: Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

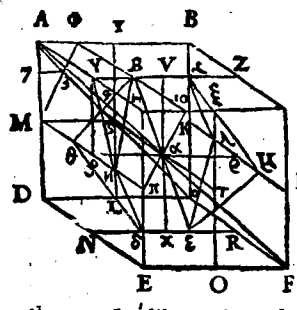


Ducatur in figura recta Hac.

SIT in cubo proposito A F, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in *l*, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis l L, Y Z, ξ O, M ϖ, k P, N R, nusquam inter se coeũtibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed vna dũtaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis S T, V X, ρ Q, quæ se mutuò in centro α, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, sunt que lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum Y Z, M π, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt sint maiora segmenta, Y β, Z γ, M θ, π κ, ductis rectis Y ρ, Y κ, β θ, β κ. Quoniam ergo Y ρ, Y V, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρ κ, 6 V, segmenta minora rectarum æqualium Y V, ρ π, æqualia quoque: *a* Sunt autem quadrata rectarum Y V, β V, tripla quadrati rectæ Y β; Erunt & quadrata rectarum Y ρ, ρ κ, tripla eiusdem quadrati rectæ Y β. Quare, *b* cum quadratis rectarum Y ρ, ρ κ, æquale sit quadratum rectæ Y κ, *c* quòd angulus Y ρ κ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y κ, triplum quadrati rectæ Y 6. Rursus, quia V Y, perpendicularis ad A Y, Y ρ, *d* recta est ad planum A E, per rectas A Y, Y ρ, ductum, rectus erit angulus β Y κ, ex defin. 3. lib. 11. *e* Ac propterea quadratum rectæ β κ, æquale quadratis rectarum Y κ, Y β, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Y β (quia nimirum quadrata rectarum Y κ, Y β, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Y β, cùm quadratum rectæ Y κ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Y β) Ideoque *f* cùm quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta β κ, rectæ Y β Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & θ κ, dupla ipsius ρ κ, quòd minora segmenta θ ρ, κ ρ, rectarum æqualium M ρ, π ρ, æqualia sint. *g* Erit igitur vt Y β, ad ρ κ, ita 6 κ, dupla ipsius Y 6, ad θ κ, duplam ipsius ρ κ: Est autem Y 6, maius segmentum ad ρ κ, rectam minori segmento β V, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & β κ, ad θ κ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde θ κ, erit maius segmentum rectæ β κ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θ κ, maius esse segmentum

a 4. terc. Elem.
b 47. primi.
c 29. primi.
d 4 Vndecimi.
e 47. primi.
f 20. sexti.
g 15. quinti.

rectæ βθ, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erunt βθ, βκ, constituentes triangulum Isosceles βθκ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus: Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βθκ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.



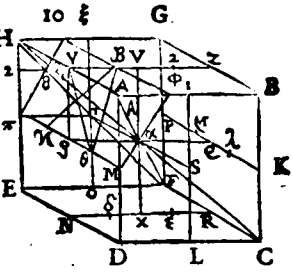
INTELLIGATVR iam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipsi Mπ, parallela) per parallelas Mπ, φ10. vt sit planũ extensum φπ, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi verò diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturq; MS, σ quæ parallela est vtrique Aφ, 73. Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A73. simile est triangulo AMS; b ac proinde vt AM, ad MS, ita est A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Est autẽ Aφ, maius segmentũ rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione (c quòd æquales sint Aφ, Y6, necnon & MA, YV, dimidia cubi latera) Igitur & 73. hoc est, 7A, maius segmentũ erit rectæ M7. extrema ac media ratione sectæ; d Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusq; segmentũ erit M7. e Atqui vt M7. ad 7A, ita est S3. ad 3A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusq; segmentum est S3. f Quia verò Sσ T, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per SσT, planũ ducatur parallelum plano φπ, ducto per Mπ, g secabuntur rectæ AS, Aσ, in easdẽ rationes, in punctis 3. & 4. cùm planum φπ, rectas AS, Aσ, secet in 3. & 4. at planum per SσT, ductum plano φπ, parallelum eadem secet in S, & σ Atq; idcirco, cùm AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aσ, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit σ4.

a 33. primi.
b 4. sex.
c 34. primi.
d 5. terciidec.
e 2. sex.
f 33. primi.
g 17. & 19. decimi.

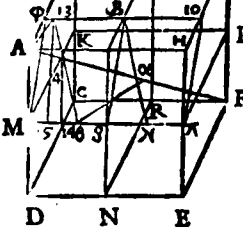
IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano φπ, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum AC, locum quadrati HF; & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, siue hac inuersione

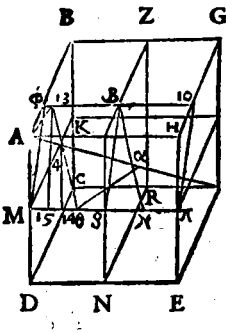
proba-

probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura; (Hæc deest in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum $\phi\pi$, secet in 9. prope punctum H; intelligaturq; per rectã AH, planum plano $\phi\pi$, parallelũ. Quoniam igitur rectæ $A\alpha$, $H\alpha$, in centro α, conueniunt, secanturque plans parallelis in punctis A, H; & 4, 9; (Nam planum $\phi\pi$, eas secat in 4. & 9. planum verò per AH, ductum plano $\phi\pi$, parallelum eaſdem secat in A, & H) α erit vt $\alpha 4$, ad 4A, ita $\alpha 9$, ad 9H. Cùm ergo αA, secta sit in 4. extrema & media ratione, erit quoque αH, similiter secta, quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura Ostendamus nunc, si rectæ iungantur $\theta 4, \beta 4, \beta 9, \varkappa 9$, rectilineum $\beta 4, \theta \varkappa 9$. in plano $\phi\pi$, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum. a 15. 6m decimi.



INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum $\beta\theta\varkappa$, siue planum $\phi\pi$, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano $\phi\pi$, recta coniuncta θ4. extendatur vsque ad rectam ϕ10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta kP, & iunctis rectis MK, $\varkappa$P, b planum MP, parallelum est plano AG, (quòd & rectæ Pk, kM, parallelæ sint rectis GB, BA) c secatq; cubum bifariam; ideoque per centrũ α, transit, per ea quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt; si per rectas α4A, θ413. planum extendatur, d fient $\alpha\theta$, A13. communes sectiones planorum MP, AG, parallelæ; Ac proinde triangula $\alpha\theta$4. 1α34. æquiangula erunt; e Eritque vt α4 ad 4A, ita θ4. ad 413. Quare cùm αA, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostendimus; eodẽ modo erit secta 913. in 4. Rursus plano NZ, per centrum α, transeuntĩ, parallelum ducatur planum per punctum 4. ex schol. propos. 15. lib. 11. secans $\phi\pi$, recta 414. f Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. g Rectæ igitur αA, ϱM, in eaſdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ϱM, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minuſq; b 15. 6m decimi. c 32. 6m decimi. d 16. 6m decimi. e 4. sext. f 15. 6m decimi. g 17. 6m decimi.





minuſq; erit ſegmentum 14M, ideoque æquale minori ϱθ, ipſius Mρ. Quare cùm ex ϱ14. maiori ſegmento ipſius ϱ M, auferatur ϱθ, minus ſegmẽtum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. ρ14. diuiſa in θ, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit ϱθ. Poſtremò acta per 13. recta 13.15. rectæ 4.14. parallela, a ſecabuntur rectæ θ13. θ15. proportionaliter; Ac proinde & 915. ſecta erit in 14 extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentũ erit 914. b Quapropter erit vt ρθ, maius ſegmentum ad 914. minus, ita θ14. maius ad 14.15. minus: Vt autem 914. ad 14.15. ita eſt tota 915. ad θ14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ρθ, ad θ14. ita 915. ad eandem 914. Ac propterea rectæ ϱθ, vel ρκ, & 915. æquales erunt. Quoniam verò planum N Z, & planum illi parallelum per 4.14. ductum, ſecant plano φπ, c erunt communes ſectiones βϱ, 4.14 parallelæ, ideoque & 13.15. βϱ, parallelæ erunt, d anguluſque externus βρκ, interno 13.15 9. æqualis. Cùm igitur & latera βϱ, ρκ, lateribus 13.15. 15θ, ſint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ βκ, 13θ. Ac proinde & earum ſegmenta maiora θκ, θ4 (Oſtenſum enim eſt θκ, eſſe maius ſegmentum ipſius βκ) æqualia erunt. Eadem arte & ζ4, ipſi βγ, in prima figura oſtendetur æqualis, ſi ſimili ſiru triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſin βγ, cuius vertex conſiſtat in puncto, quod rectam I S, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eiſdem θκ, ζγ, æquales erunt κ9. ζ9. Aequilaterum ergo eſt pentagonum β4θκ9. quandoquidem βγ, θκ, rectæ æquales ſunt, cùm componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt Y V, Z V, ϖϱ, Mϱ. Sed & æquiangulum, vt mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirũ ad ſingulas rectas Mϖ, Y Z, N R, I L, ξ O, K P; bina ipſi ζθκ, ſimilia, & æqualia conſtruantur; (ita enim ad Mπ, duo huiuſmodi triangula vides βθκ, δθκ) & ipſorum beneficio duodecim pentagona ipſi β4θκ9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis Mϖ, Y Z, N R, I L, ξ O, K P, bini nimirum in ſingulis, octo verò reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quæ ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris A α, & H α, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrum, quamuis non propriè, cùm non omnes eius anguli vel in angulis, vel

a 22. ſext.

b 2. quartidecimi.

c 16. undecimi.

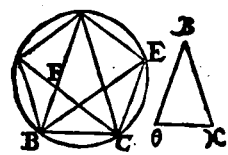
d 29 primi.

e 4. primi.

vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo verò in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, residebant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem triangulum Cθκ, cuius basis θκ, maius segmentum existat vtriusque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles ABC, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE,



diuisisque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentq; se mutuò rectæ AB, CD, in F. a Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentũ est AF, æquale lateri BC: b Erit vt AB, tota ad maius suum segmentum BC, ita βθ, tota ad maius suum segmentum θκ; Eodemque modo, vt tota AC, ad maius segmentum CB, ita βκ, tota ad maius segmentum κθ: Est autem quoque vt AB, ad AC, ita βθ, ad βκ, vtrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur βθκ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea quæ vterque angulorum θκ, duplus erit anguli β; & triangula Cθκ, ABC, similia.

a 3. tertiidec.

b 2. quartidecimi

PENTAGONVM verò β4θκ9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum βθκ, circulus βAθκB, qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex iis, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si verò non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum βAθκB. Quoniam igitur tam rectæ Aθ, Aβ, quàm rectæ 4θ, 4β, æquales sunt rectæ θκ, cùm & β4θκ9,



& βA-

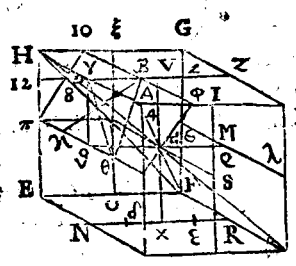
& β A θ x B, pentagonum sit aquilaterum; Erunt tam dua recta θ A, & 4, quàm dua β A, 4 β, aquales. quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β θ x, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ x 9, aquiangulum est.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



a 33. primi.

b 29. primi.

c 47. primi.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ε, intelligatur, & coniuncta recta γ ε, a aqualis existens & parallela lateri cubi V X, quod & V γ, X ε, aquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est, b rectus quoq; erit angulus β γ ε, ad γ, constitutus; c Ac proinde quadratum diametri 6 ε, aquale erit quadratis laterũ β γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

d 15. quinti.

IN eadem enim prima figura, d cùm sit ut Y X, ad β V, ita Y Z, dupla ipsius Y V, ad β γ, duplam ipsius β V; Sit autem β V, minus segmentum ipsius Y V, secta extrema ac media ratione. Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Y Z, secti extrema ac media ratione; composita verò ex Y 6, γ Z, hoc est, recta β x (qua dupla fuit, ostensa ipsius Y β, ideoque composita ex Y β, γ Z, aqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione 6 γ, esse latus Dodecaedri e & β x, seu β θ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cùm subtendat angulum pentagoni β 9 x, vel 6 4 θ.

e 8. quinti decimi.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus; Dodecaedri

caedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi YZ, componitur ex latere Dodecaedri Cγ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Yβ. γZ. quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim YZ, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, & perspicuum est ex 8. propos. huius lib. a Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris YZ, sectis extrema ac media ratione: Erit βθ, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris YZ, & aqualis duabus Yβ, γZ simul, & iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumscripti. a 8. sexti.

IV.

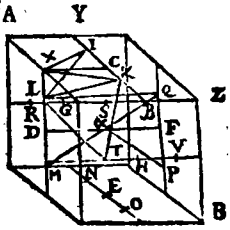
RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppositi, b aqualis est recta VX (quod & CV, δX, aquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur. b 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

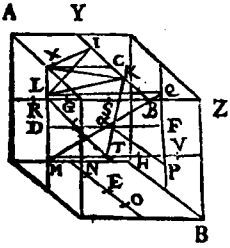
IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquam inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, κ, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IkQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVk, TVO, ILR, ISQ, κTL, κQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora verò octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, Xκ. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, Cκ, trianguli XCκ; c & anguli contenti, recti, quòd XC, c 29. primi.



a 4. primi. parallela sit ipsi A Y; a Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea L X, recta est ad planum A Z, per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas X I, X K; Ac propterea, cùm latera L X, X I, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, &

b 4. primi. anguli contenti, recti; b æquales erũt bases L I, L k. Rursus c quo-



c 47. primi. niam quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I; Et quadratum rectæ L X, quadrato rectæ I Y; quadratum verò rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, est æquale: Aequale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quòd eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc

d 4. ter. vide c. tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ C I (d Cùm enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoque quadrati rectæ C I; Ac propterea, cùm eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratum rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, substratum.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atq; adeò inter se æqualia, cùm eorum latera I K, L M, N O, P Q, R S, T V, æqualia sint. Quoniam verò latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo k T L, latus k L, commune est triangulo I k L; & latus K T, triangulo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cùm eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

DIA-

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela est, & aqualis, quod & DL, FQ, parallela sint, & aquales; b manifestum est, quadratum diametri QM, aquale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est, c cùm angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, sit rectus.

a 33. primi. b 47. primi. c 29. primi.

II.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cùm coniungant centra basium cubi oppositarum, aquales sunt lateribus cubi, sesequ per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, sta ostendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ, trianguli αFQ, aqualia sunt lateribus αF, FP trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, d aquales erunt recta αQ, αP. Eademque ratione aquales erunt omnes recta ex α ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

d 4. primi.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI, sit maius segmentum recta CΥ; e sitq; vt CI, ad CΥ, ita KI, dupla ipsius CI, ad βΥ, duplam ipsius CΥ; f erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi CΥ. Si enim alia recta, quàm KI, esset maius segmentum recta βΥ, esset βΥ, ad illam rectam, vt CΥ, ad CI, hoc est, vt βΥ, ad KI, diuersum ab illa recta. quod est absurdum.

e 15. quinti. f 2. quarti.

IV.

ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita, inter se sunt parallela.

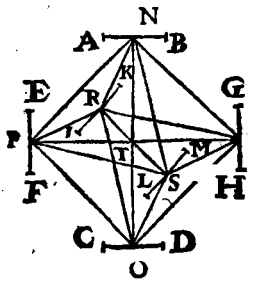
SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se aqualia, angulosque alternos habentia aquales ex 4. propos. lib. 1. qua quidem in centro conuenient. Quare qualibet latera opposita parallela erunt; g Atq; idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

g 15. vndecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita A B, C D, E F, G H, I K, L M, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ N O, P Q, R S, æquales sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturque rectæ N P, N R, N S, N Q; O P, O R, O S, O Q; P R, P S; Q R, Q S, constituentes octo triangula ſ N P, ſ P O, ſ O Q, ſ Q N; R N P, R P O, R O Q, R Q N. Quia igitur latera T N, T S, trianguli T N S, æqualia sunt laterib. T N, T P, trianguli T N P, (cùm sint rectarum æqualium dimidia) angulosque continent



a 4. primi. rectos, vt dictum est; a æquales erunt bases N S, N P: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hisce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoq; Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptũ est, cum eius axes resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

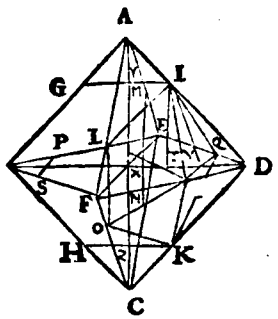
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ N O, P Q, R S, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri N P O Q R S, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoq; est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

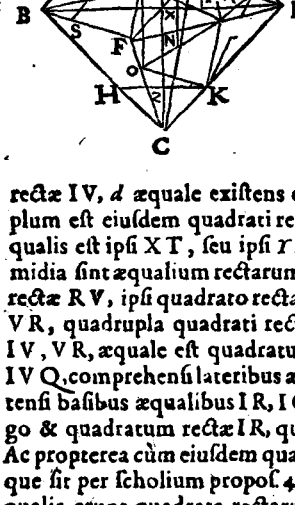
DATVM octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit A B C D E F. Cùm à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt: B A, B C; D A, D C, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati A B C D; A F, A E; C E, C F, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati A E C F: (Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantùm duo latera; at verò latera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuere) E B, E D; F D, F B, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati E B F D (Nam latera

latera E A, E C; F C, F A, quadrati A E C F, iuxta eosdem angulos E, F, iam accepta sunt) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectæ I Q, I R, I M, I L, I G, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchrè indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ eum eo, in quo punctū acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorū octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptū est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere D F, quod cum tribus D E, D A, D C, pyramidem constituit in vertice D, est commune triangulis octaedri D F A, D F C; propterea ex R, ad quinq; puncta horū quinque laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris A C, B D, E F, sese in centro X, secantibus bifariā, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturq; recta I V, agaturq, I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I, trianguli D R I; (sunt enim D Q, D R, minora segmenta rectarum æqualium D E, D F) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri A D E, A D F; a Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cùm fit, b vt B G, ad G A, ita D I, ad I A; c erit G I, rectæ B D, parallela. Eademq; ratione Q R, ipsi E F, parallela; d Ac proinde vt D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est vt A X, ad X D, ita A Y, ad Y I (quod triangulum A Y I, simile sit triangulo A X D, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y I, minus segmentū est rectæ X A. Nō aliter ostendemus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoq; G I, rectā, bifariam in Y, similiterq; Q R, in V, secari. Cùm verò latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R (nimirum minora segmenta minorib. segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendant rectos, nempe quadratorum A B C D, D E B F; e æquales erunt



a 4. primi.
b 2. quarti.
c 2. sext.
d 4. 6. sext.
e 4. primi

baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturque duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13.



a 34. primi.

b 34. primi.

c 4. tertiidec.

Eſt autem XY, rectæ XV, æqualis (cùm ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD) a & YI, rectæ XT; erit XT, maius ſegmentũ ipſius XV, & idcirco TV, ſegmentum minus, eiuſdẽ XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT (b cùm & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmenti, c tripla ſunt quadrati rectæ XT, maioris ſegmenti; Atq; adeò quadratum rectæ IV, d æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdem quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cùm RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: e At quadratis rectarum IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR, f quòd anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR; Ac propterea cùm eiuſdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque ſit per ſcholium propoſ. 4 lib. 2. quadratum rectæ QR; Aequalia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR, GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN, atque adeò triangulo IQR, æqualia, cùm latera omniũ ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cùm enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterum Octaedri, maiore & mino-

d 47. primi.

e 47. primi.

f 8. primi.

minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, subtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehensos minoribus segmentis D Q. D R; A G, A I, æqualia sunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cùm subtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic verò segmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non secus latera I R, G L, æqualia erunt. Aequalia igitur sunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propos. 8 lib. 1. Atqui I Q R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur, reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet G M P, in A E B; H N P, in B E C; K N Q, in C E D; I M Q, in A E D; G L S, in A F B; H O S, in B F C; K O R, in C F D; I L R, in A F D, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cùm horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi (vt vides in quinq; R Q I, R I L, R L O, R O K, R K Q, solidum angulum R, componentibus) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alterius verò minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cùm enim in triangulo æquilatero A D E, maius segmentum lateris A D, sit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, ostensa æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti A I, *a* cùm quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perspicuum est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmenti minoris A I. *a* 47. pri ms.

COROLLARIVM II.



RVRSVS fit, cùm octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namq; Octaedri superioris triangulum A E D, in quo collocatum est triangulum Icosaedri I M Q, sitq; C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D: C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia sunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q, quòd hæc latera sint ex centro, &

tro, & maiora segmenta æqualium rectarum) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in schol. propos. 12. lib. 13. ostendimus: Erunt bases C M, C Q æquales. Non secus demõstrabimus C I, æqualem esse lineis C M, C Q. Quare C, centrum erit trianguli I M Q.

COROLLARIVM III.

NON difficile est deniq; ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atq; sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunq; duos angulos Icosaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O; cum latera X A, A G, trianguli X A G, æqualia sint lateribus X F, F O, trianguli X F O (Nam X A, X F, semidiametri sunt Octaedri, & A G, F O, segmenta minora laterum æqualium Octaedri sectorum extrema ac media ratione) anguloſq; complectantur æquales, semirectos videlicet (cùm A C, E F, diametri sint quadratorum A B C E, E A F C: ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) *a* æquales erunt & bases X G, X O. Eodemque argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

a 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

b 16. quinti decimi. *c* 5. quinti decimi.

b INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; *c* & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cùm enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest: Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

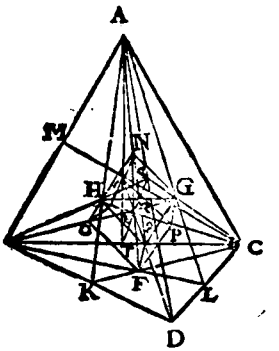
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum describere.

DETVR pyramis A B C D, in qua cubus iubetur describi; sitq; eius centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur A E F, B E G, C E H, D E I, *d* quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases B C D, A C D, A B D, A B C. Per hæc centra porrò ex angulis A, B, C, rectæ ducantur A H K, A G L, A I T, B F L, B H S, C I M, C F K, C G S, secantes bases oppositas B D, C D, A B, A D, B C, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S. Secentur quoq; rectæ ex solidis angulis per centrum E, demissæ A F, B G, C H, D I, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris,

d 15. quarti decimi.

tris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidũ N F, contentum quadrilateris NO, N P, N Q, F G, F H, F I, cubum esse. Cùm enim latera A F, F K, trianguli A F k, æqualia sint lateribus A F, F L, trianguli A F L, (quod F k, F L, cùm perpendiculares sint ad B D, C D, ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarum æqualiũ B D, C D, à centro F) angulosq; contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. a Æquales erunt & bases A k, A L, & anguli k A F, L A F. Rursus quia latera A N, A H, trianguli A N H, æqualia sunt lateribus A N, A G, trianguli A N G (sunt enim A H, A G, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium A B D, A C D) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; b Æquales erunt bases N H, N G. Haud secus ostendentur æquales rectæ Q G, Q H, si rectæ ducantur D G, D H, necnon & reliquæ, cùm omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur F T, cùm latera A F, F T, æqualia sint lateribus A F, F K. (Sunt namq; F T, F k; distantiæ rectarum æqualium B C, B D, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli T A F, k A F. Ac proinde cùm latera A N, A I, æqualia sint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, semidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualium A B C, A B D) angulosque contineant æquales: c Æquales erunt bases N I, N H, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeò componere cubum N F.

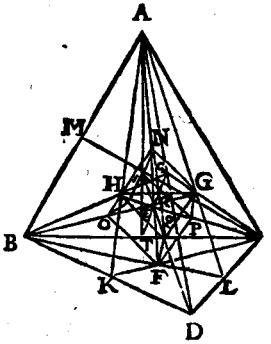


a 4. primi.

b 4. primi.

c 4. primi.

ASSVMATVR quadrilaterum N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera B C, A D, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propositionis 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cùm & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia B C, A D. Quocirca cùm idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrauimus, transibit



a 18. quarti-decimi.

b 2. sext.

S T, per E, centrum pyramidis, æqualesq; erunt E S, E T, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia B S, C S, perpendiculares sunt ad A D, per scholium propos. 12. lib. 13. *a* erunt H S, G S, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium B S, C S. Quare latera B S, C S, trianguli B S C, proportionaliter secantur, *b* atq; idcirco H G, parallela est lateri B C, secatque latera T S, C S, trianguli T S C (quod quidem pars est trianguli B S C) proportionaliter; ideoq; & R S, tertia pars est ipsius S T; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ S E. Rursus *c* quia D I, perpendicularis est ad triangulum A B C; erit E I, tertia pars

c 15. quarti-decimi.

semidiametri D E, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13 hoc est, qualium partium 3. ponetur D E, talium 1. erit E I, ac proinde talium 4. recta D I, ideoq; eius dimidium D Q, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua E Q, talium partium erit 1. atq; idcirco E Q, tertia pars erit ipsius D E. Eadem ratione E N, tertia pars erit ipsius A E; Ac propterea, cùm latera D E, A E, trianguli A E D, proportiona-

d 2. sex.

liter secentur, *d* recta N Q, parallela erit lateri A D, secabitq; latera E S, E D, trianguli D E S (quod quidem pars est trianguli A E D) proportionaliter, ideoque, cùm E Q, sit tertia pars ipsius D E; tertia pars erit E R, ipsius S E; Ac proinde S R, duæ tertiæ partes eiusdem S E. Quoniam igitur vtraq; H G, N Q, ex S E, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur S E, à rectis H G, N Q; Atq; idcirco & ipsæ H G, N Q, in eodem sese puncto

e 2. Undecimi.

interfecabunt. *e* Quare in eodem sunt plano, propterea q; & rectæ H Q, Q G, G N, N H, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum N Q; Eademq; est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

CVM ostensa sit H G, ipsi B C, parallela, atq; adeò trian-

f 2. sext.

gulum S H G, simile triangulo S B C, ex coroll. propos. 4. lib. 6. *f* Erit vt S H, ad H G, ita S B, ad B C; & permutando, vt S H, ad S B, ita H G, ad B C: Est autem S H, tertia pars ipsius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris B C, Haud secus ostendemus N Q, tertiam esse partem lateris A D. Cùm ergo latera B C, A D, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cùm subtendatur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G;

g 8. primi.

N H, Q H; *g* Æquales erunt quatuor anguli, H N G, N G Q, G Q H, Q H N. Quocirca cùm ipsi sint quatuor rectis æquales

vt ostem-

vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum erit N Q. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent, qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.

ALITER. In data pyramide deſcribatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in centris octo baſium Octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt conſtat ex propoſ. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes Octaedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. (*a* cum enim rectæ E G, E H, parallelæ ſint rectis B C, B D; *b* erunt quoque triangula E G H, B C D, per illas rectas ducta, inter ſe parallela, & ſic de cæteris) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas quatuor reliquas baſes Octaedri perpendiculares, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor baſes Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 2. *ſext.*
b 15. *vndecimi.*
c 17. *vndecimi.*

COROLLARIVM I.

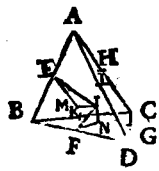
CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum, per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis G N H Q, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat: Recta R S, dupla ipſius E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, oſtenſa ſit tertia pars ipſius S T; perſpicuum eſt, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis A D, B C, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi R S.

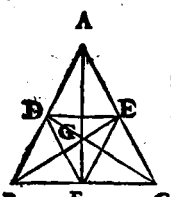
LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primùm pyramis



ABCD, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF (cùm enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes, sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.

a 4. primi. *a Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cùm anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cùm ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cùm igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.*



SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri;

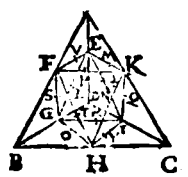
b 4. sex. *b erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF. quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, Ek, Hk, HG; *k*F, *K*I; GI, G*F*; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. describetur erit Icosaedrū in dicto octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cùm ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quòd & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, H*K*, k*F*; In ABD, latera E*F*, *F*G, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, denique latera Ik, kE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 2. *quartidecimi.*

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ *b* inscribatur Icosaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri: *F*actumq; erit quod iubetur. Cùm enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus: consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde *d* quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyra-

b 19. *quintidecimi.*

c 5. *quintidecimi.*

d 2. *quintidecimi.*

pyramidi inscriptus, a quatuor angulos in centris basium pyra-
quinti- midis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifa-
decimi. riis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

xiij. PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter à centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliqua inscribatur, & sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum impropriè describitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, & perspicuum est ex propos. 13 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non propriè in pyramide describitur, vt ex propos. 19 huius lib. est manifestum. Nam, vt propriè solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non
b 16. *quinti- conuenit.*
decimi. *CÆTERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum*
c 5. *Octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta:*
quinti- b *In Octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos*
decimi. *angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extre-*
d 8. *ma ac media ratione secantur. Deinde c Icosaedro imponitur Dode-*
quinti- *caedrum quod eidem Octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17.*
decimi. *huius lib. Est hoc in Dodecaedro d describitur cubus, cuius octo an-*

guli,

guli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident; ac propterea & cubum ipse in Octaedro descriptum est.

a Denique in cubo Pyramis includitur; qua ideo in Octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis. a 1. quintidecimi.

NEQVE vero pratereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. b Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, c conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat. b 1. quintidecimi. c 8. quintidecimi.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium Octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18 huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesue quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliquas quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuò inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

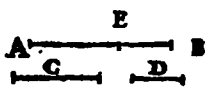
QVEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem lib 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuò inſcriptas, nec nõ & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartumdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hac quinque corporum regularium, ſi liber hic decimuſexтus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturq; AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmẽtum ad EB, minus. Cùm enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ lib. 15. docui-

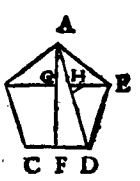
docuimus, Dodecaedrum, cubumque in illo deſcriptum, eadem comprehendantur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit A E, maius ſegmẽtum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit E B, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt A E, maius ſegmentum ad E B, minus. Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris ſegmenti A E, ad minus ſegmentum E B. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo A B C D E, ex angulo A, ad latus oppoſitum C D, perpendicularis demittatur A F. Dico A F, à recta B E, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta A D, quæ ſecet B E, in H; quoniam B E, recta lateri C D, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, *a* ſecabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: *b* Atqui A D, in H. ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum D H. Igitur & A F, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 2. *ſexti.*
b 8. *tertiidec.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris,

lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit A B C, cuius latera ſecentur bifariam in D, E, F, innctis rectis D E, E F, F D, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ G H, H I, I G, conſtituentes G H I, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in k, L, M, iunctis rectis B k, C L, A M. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri G H I, hoc eſt, rectam B k, tranſire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectam A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipſi B C, parallela; erit triangulum F H O, triangulo F E C, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & F E C, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo A B C, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis eſt rectæ F H, maiori ſegmento rectæ F E, ſeu D F, ipſi æqualis: (Eſt enim & D E F, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqualium laterum, eiuſdem trianguli comprehenſos; *a* ideoque æqualia ſint.) *b* Eſt autem & N H, æqualis toti D F, in parallelográmo D H, *c* propterea quod F H, D F, parallelæ ſunt rectis A B, B C, ſeu N O. Igitur recta N O, compoſita ex N H, tota, & H O, maiori ſegmento, *d* ſecta erit in H, extrema ac média ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ B C, N O, D F, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex iis, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam A M, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus B k, per puncta G, I; & C L, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus A C, A B; Atque idcirco rectæ B k, C L, A M, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri G H I.



AGATVR iam per G, recta P Q, rectæ C L, parallela. Quoniam igitur A F, æqualis eſt rectæ D F, ſeu rectæ F E, cuius maius ſegmentum fuit F H, hoc eſt, F O, illi æqualis; Erit quoque F O, maius ſegmentum rectæ A F; *e* ac proinde tota A O, ſecta in F, extrema ac media ratione: *f* Eſt autem vt A F, ad F O, ita A G, ad G H, ob

a 4. pri. b 34. primi. c 2. ſex. d 5. tertiidec. e 5. tertiidec. f 2 ſex.

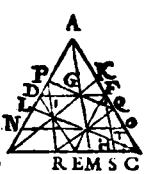
GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntq; maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia verò est a vt AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris AB, maiusque reliqua BP; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione; atq; adeò in puncta R, Q, cadet. Quoniam verò singula latera trianguli PQR, cùm subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, b æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI (Cùm enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in easdem rationes, ex iis, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, c secans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. quarti. decimi.

b 4. primi.

c 2. sex.

COROLLARIVM.



EX his facilè colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cùm enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. d Cùm igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; e sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC,

d 2. sex.

e 34 pri mi.

a 2. *sex.* in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde *a* quia F E, F S, similiter secantur: secatur autem F E extrema ac media ratione, secabitur & F S, in T, extrema ac media ratione; maiusque segmentū erit F T, recta *b* æqualis existens lateri Icosaedri G H, ob parallelogrammum G T. Igitur F T, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ F S, quæ diuidit E C, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.

b 34. *pri. elem.*

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit A B C, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis B K, C L, A M, producentibus G H I, basin Icosaedri in illa pyramide descripti, inscripta triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli A B C, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera P Q, Q R, R P, bifariā diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico A P, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri H I. Cùm enim P Q, dupla sit potentia minoris segmenti A P, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 15. quadrupla verò potentia rectæ H I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd P Q, recta dupla sit rectæ P G, hoc est, sibi æqualis H I, ob parallelogrammum P H; Erit P Q, potentia 4. & A P, 2. & H I, 1. Quamobrem A P, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. *c* Cùm enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, *d* cum diametro potentia sit commensurabile. *e* Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit: Atque ageò *f* cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

c 13 *ter tiidec.* d 6 *dec.* e 6. *ter tiidec.* f 6. *dec.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus verò Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cùm ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt cõstat ex coroll. propos. 4. lib. 6. *a* Nam cùm sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus Pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti. *a* 2. *sex.*

DENIQVE *b* quia diameter sphæræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cùm diameter octaedri coniungat centra basium oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. *b* 14. *ter tiidec.*

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potẽtia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

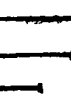
CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; *c* existat deinque latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Apertè colligitur, latus Dodecaedri maius, segmentum rectæ esse, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. *c* 17. *sexti decimi.*

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodẽ cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cùm enim ex iis, quæ in propos. 14. lib. 15. demonstrata

A ——
B ——
C ——



ſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri maius ſegmentum ſit lateris cubi A; & C latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. eiuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi: Planum fit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

CVM enim per ea, quæ in propoſ. 18. lib. 5. ſunt demonſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti (oſtenſum enim eſt ibi, G H, diametrum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partem lateris Pyramidis B C) *a* Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis nonecuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cùm nonecupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cùm quadratum diametri baſis cubi duplum ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiuſdem baſis diametri ſit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.

a 20. ſexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus quoque ſit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inſcribitur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vlt. lib. 15. *b* Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi ſibi, & Dodecaedro inſcripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

b 8. ſextidec.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſae-

Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium propè minora segmenta (qualis fuit ibi recta G I, subtendens angulum rectum G A I, minoribus segmentis A G, A I, comprehensum) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare *a* cùm hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. a 47. primi.

THEOR. II. PROPOS. II.

LATVS octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octaedri A B C D E, cuius basis quadratũ A B C D, triangula verò ad E, verticem, A B E, E B C, C E D, D E A, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur K L, L M, M N, N K, rectis A B, B C, C D, D A, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ F G, G H, H I, I F; erit F G H I, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta E H O, sesquialtera est rectæ E H, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur E O, talium 2. erit E H: *b* Atqui vt E O, ad E H, ita est E B, ad E L. Igitur qualium partium 3. continet E B, talium 2. erit E L, seu L M, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L, M N, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi G H, videlicet F G H I, talium partium 2. cùm quadratum L N, duplum sit quadrati G I, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. demonstrauimus. Est enim L N, quadratum ex diametro quadrati H I, descriptum; *c* cùm G I, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri L M. Quapropter latus octaedri E B, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi G H, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.



b 2. sex.

c 33. primi.

COROLLARIVM.

QVIA verò latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema

ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti: cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusque scholio: Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residentsex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cùm per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. a Atqui diameter sphæræ seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

a 14. ter huiusdec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cùm ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus (quod tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales) liquidò constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

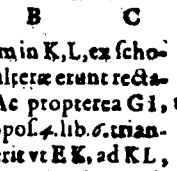
PRÆ-

PRÆTEREA, cùm constet ex coroll. 1. propos. 17. lib 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cùm enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula autem ad verticem E, sint A B E, E B C, C E D, D E A, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur F G, G H, H I, I F, quadratum cubi in octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam verò pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus, Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri B C, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I, Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera A B, C D, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque E K, E L, sesquialteræ erunt rectarum E G, E I, per coroll. propos. 18. lib. 14. a Ac propterea G I, a 2. sex. parallela erit rectæ K L, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum E G I, simile triangulo E K L. Quare erit vt E K, ad K L, ita E G, ad G I, & permutando, vt E K, ad E G, ita K L, ad G I, idcoque cùm E K, sesquialtera sit ipsius E G, erit & K L, sesquialtera ipsius G I. b Cùm ergo B C, æqualis sit ipsi K L, quòd & B K, C L, æquales sint, & parallelæ; Erit B C, latus octaedri sesquialterũ lateris Pyramidis G I, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. b 33. pri mi.

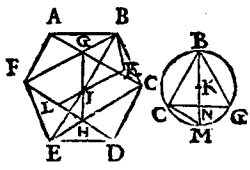


THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum A B C D E F G H, cuius diameter B E, & centrum

centrum I; triangula verò oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13 B C G, E F H, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum B C G, perpendicularis I K, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur K I, perpendicularis quoque erit ad planum E F H, parallelum plano B C G, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cùm cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, vt conſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeò angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit K L, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cùm ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri æquales: Coniuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum B C G, circumſcribentis; erit angulus B K I, rectus, ex defin. 3. lib. 11. *a* Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum B K. K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, vt in ſchollo propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis, & K L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi K L (*b* quod triplum eſt quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extenſaque B K, vſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. *c* erit recta B C, potentia ſeſquitertia rectæ B N: Vt autem B C, ad B N, ita eſt B M, ad B C, quòd B C, ſit media proportionalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. *d* cùm angulus B C M, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur B M, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri B M, ſeſquitertium eſt quadrati lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 74. primi.

b 15. tertiidec.

c 12. quartidecimi.

d 31. tertij.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambien-

bientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri B E, æquale esse quadratis diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum B C G, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, a duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum. a 14. huius.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

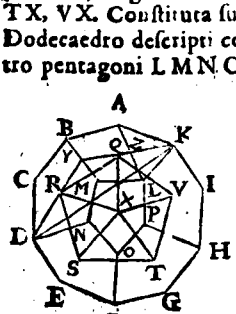
DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circumdantis: b Potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basin Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & sui ipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basin Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum. b 13. huius.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atq; extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdē lineæ inter centrum pentagoni & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABML*K*, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſium BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſitionis 10. lib. 13. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo *K*; ſecabitur *a* perpendicularis kY, in Z, extrema ac media ratione.



a 2. ſextidec.

Dico ita eſſe latus Dodecaedri LM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt kZ, minus ſegmentum perpendicularis kY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta Dk, quæ per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius Dk, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodem ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam verò latera YD, Yk, trianguli YDk, proportionaliter ſecantur in R, & Q (ſunt enim RD, Qk, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) *b* parallela erit QR, ipſi Dk; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDk, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. *c* Quamobrem erit, vt Dk, ad kY, ita QR, ad QY, *d* Vt autem Dk, tota ad totam kY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus k Z. Vt igitur LM, ad kZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita kZ, minus ſegmentum perpendicularis kY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 2. ſex.

c 4. ſex.

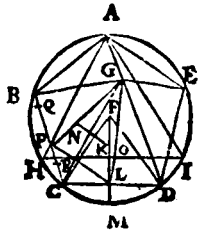
d 2. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

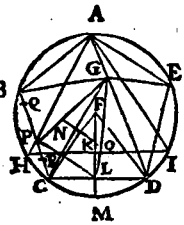
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRC Pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinq; latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur A H I. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cùm quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus A B H, A E I, cùm sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus H C, I D, æquales; propterea q; rectæ H I, C D, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur F k L, a secans rectas H I, C D, bifariam in k, & L; coniunganturq; rectæ F C, F D. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum G B C, G C D, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur G N P, G O L, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta G O, in punctum L, in quo diuisa est C D, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta N O, quæ, vt constat ex demõstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro descripti. Deniq; B P, dimidiũ lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento B Q, ex toto latere B C, reliquæ C Q, tertia pars detrahatur C R. Dico reliquam Q R, æqualem esse lateri Dodecaedri N O. Cùm enim F L, perpendicularis à latere trianguli æquilateri H I, secetur in k, extrema ac media ratione (quòd F L, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari F k, per coroll. propos. 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento F k, æqualis recta k M, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum k M, sectum quoque in L, à minori segmento k L, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F L, minore dimidiæ suiipsius segmento L M. Quoniam verò iuncta P L, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, descri-



a 3. huius
19.

descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo lib. 4. ideoque similis illi: erunt triangula F C D, F P L (si recta duceretur F P) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare vt F C, ad C D, ita erit F L, ad L P; & permutando, vt F C, ad F L, ita C D, ad L P; Atqui F C, hoc est, sibi æqualis F M, excedit rectam F L, minore segmẽto dimidii ipsius F M, nempe minore segmento rectæ K M, vt ostendimus. Recta igitur C D, vel sibi æqualis B C, excedet quoque rectã L P, minore segmento dimidii ipsius B Q, nimirum minore segmento rectæ B P, quod fuit P Q; ideoque reliqua C Q, rectæ P L, æqualis erit. Rursus quia G P, G L, proportionaliter secantur in centris N O (quòd G N, G O, duplæ sint ipsarum N P, O L, per coroll. propos. 18. lib. 14.)

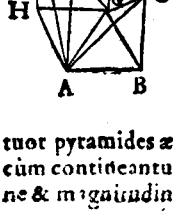


a 2. sex. b 4. sex. parallelæ erunt P L, N O; ac proinde triangulum G N O, triangulo G P L, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. b Igitur erit vt G P, ad P L, ita G N, ad N O; & permutando, vt G P, ad G N, ita P L, ad N O: Est autem G P, ipsius G N, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & P L, hoc est, sibi æqualis C Q, sesquialtera erit ipsius N O; Ac proinde, cùm C Q, sesquialtera quoque sit rectæ Q R. (Nam qualium partium 3. est C Q, talium 1. est C R, per constructionem; Ac propterea earundem 2. Q R) æqualis erit Q R, ipsi N O, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectũ fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo A F, descripta sit pyramis A C E G. *Dico cubum* pyramidis triplum esse. Cùm enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices verò habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non residunt quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin A C E, fundatur pyramis A C E D; super basin A E G, pyramis A E G H; super basin C E G, pyramis C E G F; & super basin A C G, pyramis A C G B: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt; ex 10. definitione libri vndecimi, cùm contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & simili-



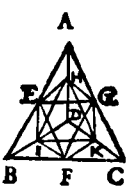
similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus (Nam exempli causa, pyramis A B C G, basin habens A B C, dimidium basis cubi B D, altitudinem verò eandem, quam cubus, rectam videlicet B G, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 17. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. *a* Cùm igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quòd & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem A B C G, sextam partem esse cubi, propterea cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram A C E G, cubo inscripram eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum. *a* 32. Vndecimi.

ALITER. Cùm cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. *b* Cubus verò triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicuè colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur. *b* 32. quarti decimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide A B C D, descriptum sit octaedrum E I K G H F. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cùm enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi A B C D, similes, vt propos. 3. lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri E G H, E F I, F G K, H I K; quales sunt pyramides E G H A, E F I B, F G K C, H I K D: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cùm contineantur triangulis similibus, æquali busque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ A B C D, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterũ æqualium eiusdem pyramidis A B C D, ex constructione propos. 2. lib. 15.) *c* Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis A B C D, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum (cum octupla proportio sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis A B C D, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicuè apparet) hoc est, quælibet



c 8. duodecimi.

ber illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis A B C D; Atq; idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis A B C D, conficient. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis A B C D. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. *a* Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, *b* & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeò cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

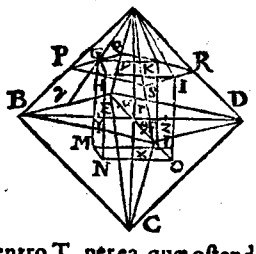
a 20 *sextidec.*

b 21. *sextidec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro A B C D E F, cubus descriptus sit G H I K L M N O, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri B E D F A, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ P Q, Q R, R S, S P, lateribus B E, E D, D F, F B, parallelæ quadratum cõstituentes P Q R S, vt in propos. 4. lib. 15. est demonstratum; *c* quod quidem parallelum erit quadrato B E D F. Ducatur quoque octaedri diameter A C, perpendicularis existens ad quadratum B E D F, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos 4. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi G I, M O, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati P Q R S; *d* (cùm enim plana B E D F, P Q R S, parallela secent rectas æquales A B, A E, A D, A F, proportionaliter; erunt & A P, A Q, A K, A S, æquales. Intelligantur ductæ rectæ V P, V Q, V R, V S. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium A P, A Q,



c 15. *&* 16. *decimi.*

d 17. *&* 18. *decimi.*

e 47. *primi.*

AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quòd anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ propterea que & rectæ ipsæ VP, VQ æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR, VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS) Igitur & centrũ erit quadrati GHIK, in illo descripti, per schol. vltimũ lib. 4. Secantur n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariãm in G, K, I, H, vt constat ex demonstratis in propos. 4. lib 15. Eodẽ argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO; Necnon & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib. 14. α Cùm ergo plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde cùm æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: necnon VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cùm ad eundem modum YZ, αβ, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cùm per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarũ connectentes sese bifariam secent in centro. Iam verò quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autem fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. cùm vtriusque eadem sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX. b Est autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quòd & basis PQRS, dupla sit basis GHIK, illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia verò pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cùm triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius) c proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterum, quòd & recta Aγ, d proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet,

α 17. duodecimi.

b 6. vndecimi.

c 8. duodecimi.

d 2. sexti.

habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptũ cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. *a* Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

a 11. *sextidec.*

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; *b* Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & *c* cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis triplus: qualium partium 2 ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27 octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptã pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

b 23. *sextidec.*

c 20. *sextidec.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide A B C D, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G H. centra duarum basium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa verò recta G H; cùm B H, C G, duplæ sint rectarũ H S, G S, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur B S, C S, *d* parallelæ erũt B C, H G, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, simile. *e* Erit ergo vt B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, vt B C; ad H G, ita C S, ad



d 2. *sex.*

e 4. *sex.*

CS, ad GS: *a* Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta verò connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuū est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15 (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis; GH, verò diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cùm ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera (Est enim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quòd proportio vtraque sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cùm vtrobique sit proportio dupla. *b* Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionē triplam. At verò cubi, cùm sint parallelepipeda similia, *c* proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABDC, proportionē habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, *d* cùm cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeò pyramis sibi inscripti cubi nonacupla est. Quod erat demonstrandum.

a 18. *quarti decimi.*

b 12. *sexti.*

c 33. *vndecimi.*

d 20. *sextidecimi.*

COROLLARIVM.

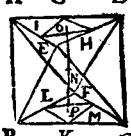
IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionē habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

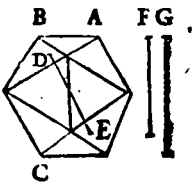
IN octaedro ABCDEF, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases o-

ctaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cùm enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atq; ex N, centro octaedri, necnon & Icoſaedri (idem enim vtriuſq; eſt centrũ, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſin A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoq; eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cùm ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. Recta O N, producta perpendicularis quoq; erit, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia verò octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autẽ priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſin, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At verò priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo verò O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſin A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo verò eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P; cùm per ea, quæ docuimus ad propoſ. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis G H I, altitudo verò O P, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: propterea quæ triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem



GHI,

GHI, & sub altitudine OP, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo verò eadem OP; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius verò basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam verò, cùm duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes (cùm vnius basis sit ADE, nempe tres tertiæ partes ipsius ADE, complectens, alterius verò basis tertia pars ipsius ADE) ad bases prismatum Icosaedro æqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes (cùm vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipsius GHI, continens, alterius verò basis tertia pars ipsius GHI) sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias erianguli GHI, a ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos 22. lib. 7. sex tertiæ partes ipsius ADE (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cùm sex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipsius GHI (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cùm quindecim tertias complectantur) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.



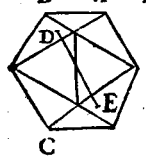
a 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionē habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadē cum in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam

habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum A B C, in quo recta D E coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit A C; & *F*, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione *F*, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad rectam D E. Cùm enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeò oppositos angulos in centris basium oppositarum; Erit D E, diameter dodecaedri in Icosaedro A B C, descripti, cùm copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum A B C, descripto, cùm vtriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icosaedrum videlicet A B C, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri A B C, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6 à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri A B C, ad dodecaedrum diametri A C, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro A B C, descriptum. Cùm ergo Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi (a Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icosaedrum A B C, eiusdem diametri est, vt G, latus cubi ad *F*, latus Icosaedri. Conuertendo igitur erit Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At verò Dodecaedrum eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro videlicet A B C, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 7. lib 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri D E, componi quoque ex proportione F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum pro-



a 11. *quartidecimi.*

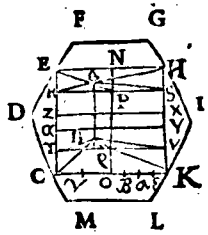
proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At verò altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

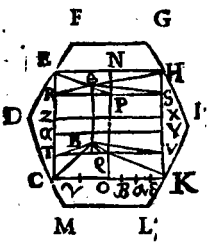
QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B k L M C, conuenientia ad latus A B; duo quidem A B C D E, A H I k B, ſecundum latus idem commune A B, alia autem duo A E F G H, B C M L k, ſecundum angulos E A H, C B k. His verò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C k H, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet C B k H A E, conſtans quinq; planis C B k, E A H, A B C E, A B k H, E C k H; quorum duo C B K, E A H, a triangula ſunt æqualia, cùm latera pentagoni B C, B k, æqualia ſint lateribus pentagoni A E, A H, angulosque comprehendant æquales pentagonorũ E A H, C B k. Duo verò A B C E, A B k H, trapezia ſunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona A B C D E, A B k I H, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata C D E, H I K, b æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia A B C E, A B k H;) Quintũ denique eſt baſis cubi inſcripti E C k H. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia, & æqualia, per 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit à C E H k, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi C k, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at verò altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati late-

a 4. primi.



b 4. primi.

ris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus E H, C k, bifariam in N, O, iunctaque recta N O, quæ parallela est lateri pentagoni A B, & in quam cadunt perpendiculares A P, B Q, demissæ in planum E k, vt constat ex demonstratis propos. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ N O, A B, A P, B Q, huius figuræ lineas L N, V X, V R, X S, figuræ propos. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta A B, P Q, maius segmentum lateris cubi N O, vel H k, & vtraque A P, B Q, æqualis dimidio lateris pentagoni A B, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propos. 17. lib. 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ R S, T V, rectis E H, C k, parallelæ; erunt quoque R T, S V, maiora segmenta laterum E C, H k; atq; adeò E R, C T, simul, & H S, k V, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis A R, A S, B T, B V, constituantur duæ pyramides E R S H A, C T V k B, quæ per coroll. propos. 6. lib. 12 æquales inter se erunt, cùm & earum bases E R S H, T C k V, & altitudines P A, Q B, æquales



a 33 primi. sint; consistentque extra solidum A B T V S R. a Quoniam autem A S, ipsi B V, & A R, ipsi B T, æqualis est, & parallela, cùm

b 15. & decimi. coniungant æquales rectas, & parallelas A B, S V, R T, b parallela erunt plana triangulorum A R S, B T V, atq; adeò inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 11. cùm latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum A B T V S R, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis A R S, B T V, & tribus parallelogrammis R V, A T, A V, prisma est, ex definitione.

1 A M verò, cùm ostensum sit rectas H S, k V, minus segmentum efficere lateris H k, fiat illis æqualis V X, dupla nimirum vtriusque H S, & k V; & ipsius V X, minoris segmenti lateris H k, duas tertias partes contineat V Y, tertia verò pars sit X Y, ducanturque X Z, Y α, rectæ T V, parallelæ. Quoniam igitur pyramides

c 6. duo decimi. E R S H A, C T V k B, æquales sunt ostensæ; c vtriusq; verò earum dupla est pyramis super basem T X, & sub eadem altitudine P A,

d 1. sext. vel Q B, constituta, d quòd & basis T X, dupla sit basis C V, vel R H; æqualis erit pyramis T V X Z B, vtrique pyramidi E R S H A, C T V k B, simul: At pyramis T V X Z B, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem T X, & altitudo eadem Q B, vertex verò linea recta, pars videlicet rectæ A B, quæ æqualis sit ipsi V X, vt demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis T X, & altitudo Q B, vertex verò pars rectæ A B, æqualis ipsi V X, duas tertias partes continet prisma, cuius basis T Y, & altitudo eadem Q B, vertex verò pars

rectæ

rectæ A B, æqualis ipſi V Y, ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. α quòd & ba-
ſis T Y, duas partes tertias complectatur baſis T X. Igitur & priſma, cuius baſis T Y, & altitudo Q B, vertex verò pars rectæ A B, æqualis ipſi V Y, æquale erit duabus pyramidibus E R S H A, C T V k B; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati A B T V S R, efficiet priſma æquale ſolido C B k H A E, habens baſin rectangulum contentum ſub latere cubi T V, & ſub recta compoſita ex V Y, duas tertias partes minoris ſegmenti V X, comprehendente, & ex V S, maiore ſegmento, ideoq; à baſe cubi deficientem rectangulo α X, contento ſub latere cubi α Y, & ſub X Y, tertia parte minoris ſegmenti V X. Non diſſimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinq; priſmata æqualia & proximè dicto priſmati, & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſolidis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quælibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitudine Q B, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni A B, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes à baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis à baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo verò æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eſt, altitudini Q B, quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmenti lateris cubi, ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Diuidatur enim C k, latus cubi extrema ac media ratione in ζ. Itemq; C β, maius ſegmentum, & β k, minus bifariam in γ, δ; atque ex ζ k, abſcindatur ζ ε, æqualis ipſi β γ, ſeu C γ, ita vt C γ, vel γ β, vel β ε, dimidia pars minoris ſegmenti C β, æqualis ſit ipſi Q B, & C ε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Poteſt autem ex minori ſegmento β k, abſcindi recta æqualis ipſi C γ, dimidio maioris ſegmenti; quia β k, maior eſt, quàm dimidium maioris ſegmenti C β. Cùm enim ſit, vt C k, ad C β, ita C β, ad β k; ſit autem C k, minor, quàm dupla ipſius C β, quòd C β, ſit ipſius maius ſegmentum; erit quoque C β, minor, quàm dupla ipſius β K, hoc eſt, erit β k, maior, quàm dimidium ipſius C β. Quoniam igitur eſt, vt tota C k, ad maius ſegmentum C β, ita maius ſegmentum C ζ, ad minus β k; b erit quoque vt C O, dimidia b iii

α 1. ſext.

quinti.

ipsius C κ, ad C γ, vel $\beta\varepsilon$, dimidiam ipsius C β, ita C γ, vel $\beta\varepsilon$, ad $\beta\delta$, dimidiam ipsius $\beta\kappa$; Ac proinde si C O, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ, vel $\zeta\varepsilon$, & minus $\beta\delta$. Quare & $\beta\delta$, minus segmentum secabit $\beta\varepsilon$, maius segmentū extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. eritque maius segmentum $\beta\delta$, minus autem $\delta\varepsilon$; Ac propterea rursus $\delta\varepsilon$, minus segmentum secabit rectam δK, maiori segmento $\beta\delta$, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit εK. Deficit igitur C ε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi C κ, minore segmento εK, rectæ $\delta\kappa$, vel sibi æqualis rectæ $\beta\delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem verò ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

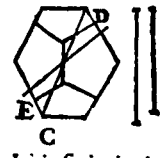
VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Alterius verò & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens. quam cubus, altitudo verò à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedū prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo verò alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam

rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro A B C, diameter sit A C, & recta coniungens centra basium oppositarum D E; At verò F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cùm enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeò anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta D E, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cùm eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cùm ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex coroll. propos. 17. lib. 12. a Dodecaedrum verò diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquidò constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. quarti decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo deniq; à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentū minus existit, ita vt amborū altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdē cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, [a] cùm pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cùm Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeò vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

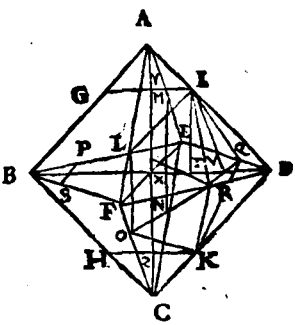
[a] 25. *septimi.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propos. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, vigiuti triangula Icosaedrum inscriptū componentia esse [illegible] KQR,

KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABCDEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri QR, altitudo verò IT, maius segmentum semidiametri AX. Cùm enim in quatuor basibus octaedri DEA, DFA, DEC, DEC, angulum solidum octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cùm earū altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri octaedri (Nam quemadmodum AX, secta est à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; secta est CX, à recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrū prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia verò triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ (Cùm DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoq; quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR,



a 34. pri mi.

ID QR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum constituere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cùm earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Aequale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cùm enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: *a* octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri, recta videlicet IT, seu YX: Fit, vt octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur (*b* quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet duplum Icosaedri in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cùm altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramidis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

a 31. sexti.

b 21. undec.

DE QVINQVE CORPORVM REgularium descriptione in data sphæra ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram constituit, deinde verò eadem à sphæra comprehendi, nova demonstratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cùm eius ratio multò clarior videatur, & facilior, quàm constructio illa ab Euclide præscripta. Sed priùs ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, non tamen pro-

ea

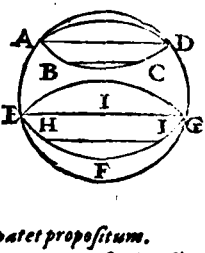
pterea ordinem Euclidis pervertere censeri possumus; quippe cum propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11 Euclidis pendeant; & vt commodè ante lib. 12. atque adeò multò magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. In citandis autem Theodosij propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, datæque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli A B C D, E F G; sitq; primum in A B C D, data diameter A D, cui in E F G, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, & vt in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum A D, planum rectum ad circulum A B C D, a *faciens in sphæra superficie circulum A E G D. Quoniam igitur circulus A E G D, circulum A B C D, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus A E G D, maximus, transibitq; per polos circuli A B C D, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli E F G,* b *cum paralleli eosdem polos habeant;* c *ideoque eum bifariam secabit. Communis ergo sectio E G, eius diameter erit:* d *qua cùm sit ipsi A D, parallela, patet propositum.*

a 1. 1. Theod.



b 1. 2. Theod.

c 15. 1. Theod.

d 16. & undecimi.

DEINDE in circulo A B C D, data recta B C, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo E F G. e *Ducatur ipsi B C, per centrum circuli A B C D, diameter parallela A D; cui in circulo E F G, ducatur diameter parallela E G, vt proximè ostendimus. Quoniam igitur vtraque B C, E G, eidem A D, parallela est, ex constructione,* f *ipsa quoq; B C, E G, inter se parallela erunt. Quod est propositum.*

e 31 primi.

f 9. & undecimi.

EADEM ratione recta B C, ducetur in circulo E F G, parallela H I, à diametro E G, diuersa, quæ ipsi B C, æqualis sit, si modò B C, maior non sit diametro E G. Nam si in circulo E F G, ducatur ipsi B G, parallela H I, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

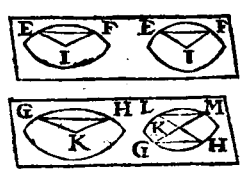
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes;

erunt

erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis A B, C D, descripti sint duo circuli, in quibus recta E F, G H, primum parallela sint, ad easdem partes centrorum I, K, auferanturque arcus similes E F, G H, ac tandem iungantur ad contra recta E I, F I, G K, H K. Dico tam E I, G K, quàm F I, H K, parallelas esse. Quoniam enim arcus E F, G H, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propos. 22. lib. 3. a *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* b *Cum ergo tam illi, quàm hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quàm angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis recta E F, G H, parallela sunt, & recta E I, G K, ad easdem partes plani per E F, G H, ducti efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt ea inter se, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstrauimus, E I, G K, parallela: Eademque ratione F I, H K, parallela erunt.*



a 32. primi.
b 5. primi.

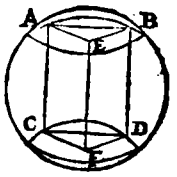
DEINDE sint E F, G H, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. Dico tam E I, H K, quàm F I, G K, esse parallelas. Productis enim G K, H K, iungatur recta L M. Et quia latera G K, H K, lateribus L K, M K, sunt æqualia, c *angulosque ad verticem K, æquales continent;* d *erunt & bases G H, L M, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M.* e *Igitur arcus G H, L M, æquales sunt,* f *& rectæ G H, L M, inter se parallelæ: Ac proinde cum vtraque E F, L M, ipsi G H, sit parallela,* g *erunt & E F, L M, parallelæ inter se. Quia igitur E F, L M, parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes E F, L M (Nam cum arcus G H, sit arcui E F, similis, erit quoque arcus L M, qui arcui G H, æqualis est, eidem arcui E F, similis) erunt tam E I, L K, hoc est, E I, H K, quàm F I, M K, hoc est, F I, C K, parallelæ. Quod est propositum.*

c 14. primi.
d 4. primi.
e 28. tertij.
f 27. primi.
g 9. Undecimi.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus sint



Sint duæ rectæ æquales & parallelæ A B, C D, ad easdem partes centrorum, quarum extremæ iungantur ad easdem partes rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, æquales quoque esse, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt; a *erunt A C, B D, in eodem cum ipsis plano. Quare cùm A B, C D, sint etiam æquales;* b *æquales quoq; erunt ac parallelæ A C, B D, quod est primum.* a 7. Vndecimi. b 33. primi.

EX centris deinde E, F, ductis rectis E A, E B; F C, F D, iunctaq; rectæ E F; erunt tam A E, C F, quàm B E, D F, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c *Igitur & A C, E F, & B D, E F, parallelæ erunt, &* d *æquales.* e *Quoniam verò circuli A B, C D, parallelis circa eosdem polos sunt,* f *recta per eorũ polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta E F, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra ducantur transire, nimirum recta per eorum polos extensa, quod est absurdum. Haberent enim illa recta segmentum commune E F.* f *Igitur E F, ad plana circulorum A B, C D, recta est:* g *Ac propterea & vtraque A C, B D, ipsi E F, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.* c 33. primi. d 1. 2. Theod. e 10. 1. Theod. f 10. 11. Theod. g 8. Vndecimi.

HÆC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ A B, C D, sunt circulorum diametri, sed tunc E A, E B, F C, F D, erunt partes diametrorum, vt patet.

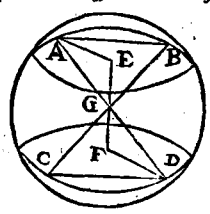
LEMMA IV.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales; Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, & in iis ducta recta parallela & æquales A B, C D, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primùm non ad easdem partes iungantur rectis A D, B C. Dico rectas A D, B C, in centro sphæræ se intersecare, ideoque diametros esse sphæræ inter se æquales.

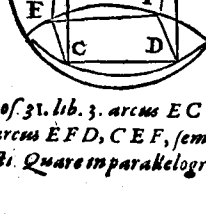
Quoniam

a 7. Undecimi. *Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt; a erunt A D, B C, in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuò intersecabunt, & in puncto H: quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis E A, E G; F D, F G.* b *Et quia anguli A G B, C G D, ad verticem æquales sunt:* c *Item tam alterni anguli B A D, C D A: quàm alterni A B C, D C B; æquiangula erunt triangula A B G, C D G.* d *Igitur erit & A B, ad B G ita D C, ad C G: Item & A B, ad A G, ita D C, ad D G. Cùm ergo A B, C D, ponantur æquales,* e *erunt quoque tam B G, C G, quàm A G, D G, inter se æquales. Rursus quia A E, D F, semidiametri circulorum æqualium æquales sunt; sunt autem ex 2 lemmate & parallelæ,* f *ideoque anguli alterni E A D, F D A, æquales; erunt duo latera E A, A G, duobus lateribus F D, D G, æqualia, angulosque comprehendent æquales.* g *Igitur & baſes E G, F G; & anguli A G E, D G F, æquales sunt.* h *Et quia A D, in eodem plano est, in quo parallelæ A E, D F;* i *& E G, F G, in eodem plano, in quo A D, A E, D F; erunt E G, F G, in rectum & continuum constituta, propter æquales angulos A G E, D G F, & ex Proclo ad propos. 15 lib. 1. ostendimus. Quare E F, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, & in præcedenti lemmate demonstrauimus,* k *perpendicularis q3 ad eorum plana erit. Cùm ergo E G, F G, æquales sint ostensæ, erit G, centrum sphæræ,* l *propterea quod circuli æquales A B, C D, æqualiter à centro sphæræ absunt; inæqualiter verò abessent, si centrum sphæræ in recta E F, diceretur aliud punctum quàm G. Quocirca A D, B C, diametri sphæra sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.*



b 15. primi.
c 29. primi.
d 4 primi.
e 14. quinti.
f 29. primi.
g 4. primi.
h 7. Undecimi.
i 2. Undecimi.
k 10. 1. Theod.
l 6. 1. Theod.

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium A B, C D, ad easdem partes iungantur rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos C A B, A B D, B D C, D C A esse rectos. Quòd enim sint parallelæ & æquales, m *manifestum est, cùm extrema puncta parallelarũ æqualtũ coniungant. Quod autem ad A B, C D, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo C D, ad rectam C D, excitentur perpendiculares C E, D F, iungantur q3 E F, A E, B F. Quia igitur anguli E C D, F D C, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus E C D, F D C, semicirculi, ac proinde & reliqui* n *arcus E F D, C E F, semicirculi erunt,* n *& anguli E F D, C E F, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo D E, recta C D, E F, æquales*



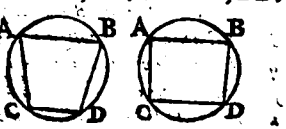
m 33. primi.
n 31. tertij.

lel sunt, a *ideoque & A B, E F, parallela erunt, & æquales. Igitur ex* a 9. Vn. decimi. *3. lemmate A E, B F, ad plana circulorum recta erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli A E C, B F D, recti erunt. Recta igitur E F, perpendicularis ad vtramque E C, E A, & ad vtramque F D, F B; vt ostendimus,* b *perpendicularis erit & ad planum trianguli A E C,* b 4. Vn. decimi. *per E C, E A, ducti, & ad planum trianguli B F D, per F D, F B, ductis:* c *ac propterea & C D, A B, ipsi E F, parallela, ad eadem plana* c 8. Vn. decimi. *triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli C A B, A B D, B D C, D C A, recti erunt. Quod est secundum.*

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erũt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ A B, C D, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis A C, B D; Dico A C, B D, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt A B, C D, d *erunt A C, B D, in eodem cum ipsis plano. Ducti igitur per ipsas plano,* e *fiat in sphæra circulus A B D C, in quo cum parallelæ sint A B, C D; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus A C, B D, æquales:* f *ideoque & rectæ A C, B D, æquales erunt. Quod si parallelæ A B, C D, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum A B D C, in circulo habeat duo opposita latera A B, C D, parallela, & æqualia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. A B D C, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.*



d 7. Vn. decimi.
e 1. 1. Theod.
f 29. tertij.

LEMMA VI.

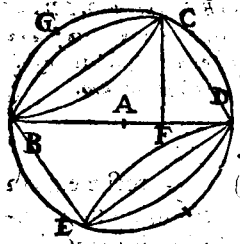
IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum B C D E, cuius diameter B D, ex coroll. 1. propos. 1. lib. 1. Theod. Secta autem B D, in F, vt B F, ipsius F D, dupla sit; erit B D, talium partium 3. qualium 2. est B F; ac proinde B D, ipsius B F, sesquialtera erit. Ducta quoque F C, ad B D, perpendicularis, iungantur rectæ B C, D E, ductaque D E, ipsi B C, parallela, connectatur

a 29. pri mus. recta BE. a Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quàm duo, BED, CEB, duobus rectis æquales sunt; b estque tam BCD, quàm BED, rectus; erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scholio propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum est; c ideoque recta BC, DE, æquales sunt. Diuiso tam

b 31. ter tij.

c 34. pri mi.



arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariam in G, quod ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quos BE, CD, æquales sunt. Polo igitur G, & internallo GB, GE, circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quàm GE, GD; d qui parallelli erunt, cùm eosdem habeant polos. e Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cùm æquales sint ostensa, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentiæ sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continuè proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autem BD, ipsius BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atq; adeo & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusq; diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.

d 2. 2. Theod.

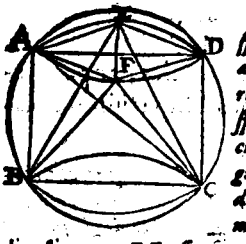
e 15. 1. Theod.

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinq; corpora regularia.

PROBL. I. PROPOS. I.

IN data sphæra Pyramidem describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & parallelli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD; f qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, esse æquilatera & æqualia.



f 15. 1. Theod.

qualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3 lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, deſcriptum, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Itaq; quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ AC, ſeſquialterum eſt quadrati ex AD, diametro circuli; ſi ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, 2 æquale ſit quadratis ex AD, DC, quòd angulus ADC, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Eſt autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC, DF; b quibus cum æquale ſit quadratum ex CF, quòd angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoq; duplum, propterea & quadrati ex AD, æquale. Recta igitur CF, recta AD, hoc eſt, ipſi BC, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoq; BCF, triangulum eſt æquilaterum. a 47. pri mi. b 47. pri mi.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: c quibus cum æquale ſit quadratum ex CE, quòd angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo ſunt quadrata ex CE, AD, propterea que recta CE, recta AD, hoc eſt, rectæ BC, EF, æqualis eſt, atque adeò & recta CF, quæ ipſi BC, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam eſt, & ipſi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum BEF, eſſe æquilaterum, & ipſis BCF, FCE, æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipſi BC, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cùm eius anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. quod eſt propoſitum. c 47. pri mi.

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Nam latus pyramidis eſt æquale diametro AD, vt oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diametri AD.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

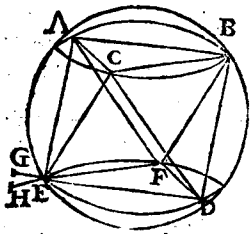
IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circu-

culi æquales & paralleli A B C, D E F, ita vt sphæra diameter diametri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. a Describito autem triangulo æquilatero A B C, in circulo A B C, ducatur per primum lemma, recta A B, in circulo D E F, parallela & æqualis D E, ad diuersas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo D E F, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero D E F, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli A B C, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum A B, D E, æqualitatem; parallela verò, ex scholio propos. 16. lib. 11. Cùm enim parallela sint A B, D E, & anguli A B C, D E F, æquales; productis rectis D E, F E, ad G, H, erunt quoque anguli A B C, G E H, æquales. Cùm ergo parallelæ sint A B, G E, & B C, E H, ad easdem partes plani per A B, G E, ductæ; erunt quoque B C, H E, hoc est, B C, E F, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit D F, ipsi A C. Connectantur denique A E, E C, C D, D B, B F, F A, vt in figura. Dico A D, octaedrum esse, hoc est, octo triangula A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ A B, D E, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ A D, B E (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ A E, B D, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas A B, D E.

b Quadratum igitur ex B E, duobus quadratis ex B D, D E, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ B E, 6. quadratum ex D E, est 3. (Nam cùm per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli D E F: posito quadrato ex B E, 6. erit quadratum diametri circuli D E F, 4. At posito quadrato diametri circuli D E F, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri D E, est 3. quod ex coroll. 1. propos. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri) Igitur & quadratum ex B D, est 3. ac proinde quadrata ex D E, B D, æqualia sunt, & rectæ ipsis D E, B D, æquales. Est autem D E, ipsi A B, per constructionem, & B D, ipsi A E, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ A B, B D, D E, E A, æquales erunt, constituentq; quadratum A B D E, cùm anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4. lemmate.

RVRSVS quia B C, E F, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ B E, C F, non ad easdem partes diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ B F, C E, æquales inter se, atque ad B C, E F, perpendiculares, eritque rursus, vt prius, quadratum B C E F. Non aliter ostendemus, A C D F, quadratum esse



a 2. quarti.

b 47. primi.

esse; cùm iuncta recta A D, C F, sint quoque sphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cùm ergo tria quadrata A D, B E, C F, constructa sint super latera æqualia A B, B C, C A, nimirum super latera trianguli æquilateri, cùm A B, latus sit quadrati A D; & B C, quadrati B E; & C A, quadrati C F; erunt omnia triangula esse A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est A D, ex defin. 27 lib. 11. & in data sphæra descriptum, cùm eius anguli solidi A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod erat propositum.

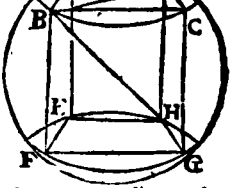
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex B E, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex D E, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

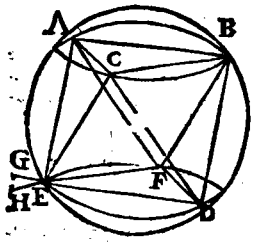
IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli A B C D, E F G H, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. a *Descripto autem quadrato A B C D, in circulo A B C D, ducatur per* 1. *lemma recta A D,* 2 6. quarti.



in circulo E F G H, parallela E H, & æqualis ex eadem parte centrorum, qua latus quoque erit quadrati in circulo E F G H, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato E F G H, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati A B C D, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum A D, E H, æqualitatem: parallela verò, ex scholio propos. 16. lib. 11. Nam quia parallela sunt A D, E H, sumtque anguli æquales A D C, E H G, nimirum recti; erunt quoque D C, H G, parallela, cùm sint ad easdem partes plani per A D, E H, ducti, & sic de cæteris. Iungantur demique ad easdem partes centrorum rectæ A E, B F, C G, D H, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico A G, esse cubum, hoc est, sex quadrilatera A B C D, E F G H, A D H E, B C G F, A B F E, C D H G, esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis B H, B D, erit ex lemmate 4. B H. diameter sphæræ; at B D, diameter circuli A B C D, quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex B H, sesquialterum est quadrati ex B D; quadratum autem ex B D, quadrati ex B C, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. si statuatur quadratum ex B H, 3. erit quadratum ex B D, 2. & quadratum

dratum ex D C, 1. atque adeò quadratum ex B H, quadrati ex D C, triplum erit. Rursus quia quadratum ex B H, est 3. & quadratum
947. primi. *ex B D, 2. a estque quadratum ex B H, æquale quadratis ex B D, D H, quòd angulus B D H, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum est quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratum ex B H, triplum quadrati ex D C. Æqualia ergo sunt quadrata ex D C, D H, ac proinde recta D C, D H, æquales. Cùm ergo oppositis lateribus G H, C G, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo C H. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit C H. Eadem ratione & B E, A H, B G, quadrata ostendentur: Sed & A C, E C, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est A G, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus, cùm etiam angulis solidis A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.*



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ B H, triplum esse quadrati lateris cubi D C, vel D H, vel A D, &c.

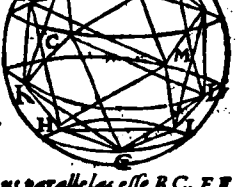
MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descripti: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis est circulo A B C, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoq; est lib. 14. propos. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

b 12. sexti. *REPERIATVR b recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiatq; ex coroll. propos. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiusdam lineæ, ad cuius internallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Describi*
c 1. quinti. *quimpto maximo circulo in sphæra data, c accommodetur in eo recta, quæ inuenta semidiametri sit dupla, cùm hac recta minor sit diametro sphæræ, siue illius circuli maximi, vt infrà probabitur. Nam si per eam*
d 11. Theod. *rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum, d faciet id circulum A B C, in sphæra, cuius semidiameter, ex construc-*
tione,

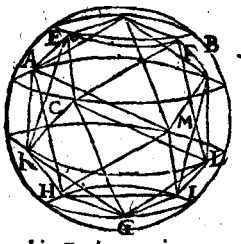
sione, potentia subtripla est recta extrito inuenta. Deinde inueniatur a rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæra diameter, vt 12. *se-*
pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono xii.
descripti; Fiat q. *vt* 3. *ad* 1. *sta per coroll. propos.* 6. *lib.* 10. *quadratum recta inuenta ad quadratum alterius linea, ad cuius internallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo A B C. parallelus; quod fiet, si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis dupla semidiametri inuenta, & parallela prioris circuli diametro, exitus, qua ad propos.* 1. *lib.* 4. *demonstrauimus, & per eam rectam plana extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectum, ex scholio propos.* 18 *lib.* 11. *Nam per idem scholium, planum hoc erit circulo A B C. parallelum,* b *facietq; in sphæra* b 1. 11.
circulum D E F, cuius semidiameter semidiametro inuenta æqualis Theod.
est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæra alij duo æquales ac paralleli describantur G H I, K L M, quod facilè fiet, si illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. c *Descripto autem in circulo D E F, triangulo æqui-* c 2.
latero D E F, ducatur lateri E F, in parallelo circulo A B C, ex lem- quarti.
mate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, qua æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in circulo A B C. descripti: Item huic A B, agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circulo K L M, & æqualis: Ac denique huic K L, in circulo G H I, ducatur ex altera parte centri, parallela H I, & æqualis ipsi E F, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo G H I, descripti. Completis ergo triangulis æquilateris A B C, K L M, G H I, erunt singula latera singulis lateribus trianguli D E F, parallela; nimirum A C, M L, G H, ipsi D F; at B C, M K, G I, ipsi D E, quod probabitur ex scholio propos. 16.



lib. 11. *vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse B C, E F, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus. Postremò ex quolibet* 12. *punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, recta D E, D A, D M, D B, D F, ex G, recta G H, G K, G C, G L, G I, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico D G, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula D E F, D E A, D A M, D M B, D F B, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos.* 16.

lib 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus; nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in sphæra descripti Icosaedri DG, 12. angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia 5. rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cùm sint latera triangulorum aquilaterorum æqualium; si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in uno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cùm ergo eius latera sint æqualia, utpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKGFD, ob quinque rectas æquales EA, Ek, EC, EF, ED: Et kHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia Ak, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icosaedri æqualia kH, kG, kC, kE, kA: Et GIMAk, ob latera quinque Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, Hk: Et ILCkH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, Gk, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinq; æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEk, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, Ck, ita ut 12. pentagona æquilatera, æquiangulaq; inter se æqualia constituantur. Quoniam verò recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppositi lateri æquidistat, ut in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AkCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. a *Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt,* b *facientq; circules parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta kE, ipsi HI, parallela in pentagono ILCkH: Et iuncta kM, ipsi GI, in pentagono GIMAk: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMGH: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, kLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta kL, ipsi EF, in pentagono GLFEk.* c *Igitur EF, HI, cùm sint eidem iuncta AB, vel kL, parallela, inter se parallela sunt, Eademque ratione DE, GI, cùm sint eidem iuncta BC, vel kM, parallela, inter se parallela erunt; propterea que plana circulo-*



a 15. Undecimi.

b 1. 1. Theod.

c 9. Undecimi.

eulorum D E F, G H I, *per rectas* D E, E F, & H I, G I, *ductas parallelas erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra* D E F, A B C, k L M, G H I, *parallelis inter se sunt: & tum circuli* D E F, G H I, *inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quàm circuli* A B C, K L M, *inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis* A B, B C, C A; & k L, L M, M k, *constituuntur: quippe cùm latera hæc sint recta subtendentes angulos pentagonorum æqualium.*

QVIA verò iuncta recta K B, *quæ connectit non ad easdem partes extremæ* K, B, *parallelarum* K L, A B, *in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus* B A k, *rectus ex* 4. *lemmate, quòd* K A, *connectat ad easdem partes extremæ* K, A, *earundem parallelarum; a erit quadratum diametri* k B, *æquale duobus quadratis ex* A B, A k. *Rursus quia in pentagono* E A M B F, *recta iuncta* A B, *angulum* A M B, *subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis* 2. *lib.* 14. *erit* A B, *iuncta ad* E F, *vel* A k, *ipsi* E F, *æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cùm latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæræ* k B (*quæ ambas* A B, A k, *potest, vt ostendimus*) *latus pentagoni in eo circulo, in quo* A B, *latus est hexagoni, &* A k, *vel* E F, *latus decagoni. Quare sphæra diameter* k B, *ad iunctam* A B, *proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at verò ad* E F, *eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cùm tam* A B, *latus trianguli æquilateri in circulo* D E F, *potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli* D E F, A B C, *ac proinde & G H I, k L M, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ duplò est semidiametri insito inuenta, minorem esse diametro sphæræ, vt suprà diximus.*

a 47. primi.

b 10 ter tiidem.

c 12. ter tiidem.

HIS demonstratis facile negotio includemus, solidam figuram à nobis descriptam D G, *esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum* D E F, *omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, à quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.*

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeò vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo in circulo. Nam descripto Icosaedro D G, in sphæra, ostensum est

esse diametrum sphæræ K B, ad E F, latus Icosahedri, vt latus pentagoni, ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cùm duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles con-
a 10. primi. stituant: a ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

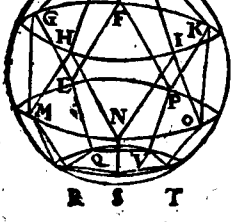
COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo A B C, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo A B C, descriptorum, ita diameter sphæræ K B, ad iunctam A B, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus
b 12. ter tudec. hexagoni ad iunctum A B. b Est autem latus hexagoni in circulo A B C, (hoc est, semidiametri) potentia subtriplum rectæ iunctæ A B, quod A B, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo A B C, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo A B C, descripti.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli parallelι, & vt in antecedenti propositione A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ita vt semidiametri circulorum A B C D E, Q R S T V, sint potentia subtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri verò circulorum F G H I K, L M N O P, potentia sint subtripla duarum rectarum, ad quas diameter sphæra sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo A B C D E, pentagono A B C D E, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri C D, ad easdem partes centrorum parallela H I, in circulo F G H I K, & æqualis lateri pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem H I, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela L P, in circulo L M N O P: Huic tandem L P, ad easdem centrorum partes ducatur parallela Q V, in circulo Q R S T V. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis (quorum tamen latera, & confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni



A B C-

ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallela ducta sunt: quod demonstrabitur, vt in problemate secundo ostendimus, parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera inuicta, parallela erunt ipsi BC, &c. Postremò ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas videri esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona AECDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPkE, kPVTO, RSNHM, FLQVP, GDINH, BCHMG, æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propositione 17. lib. 13.) suos viginti angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos describimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem viginti puncta notauimus.

SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, k, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppositi lateri æquidistat, vt in scholio propos. 2. lib. 13. demonstrauimus, erit inuicta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & inuicta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & Ik, lateri DE, in pentagono DEKOI; & kF, ipsi AE, in pentagono AEKPF; & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectæ FG, Fk, parallelæ sunt; a erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quòd hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propositionis 16. lib. 11. plana per FG, Fk, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeò, ex eodem scholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, Eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quàm duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, iK, KF; LM, MN, NO, OP, PL, c quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

a 15. undecimi.

b 1. 1. Theod.

c 4. primi.

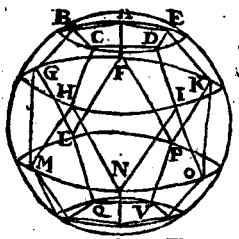
DEIN-

DEINDE quia ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. recta iuncta ND, MB, lateri CH, parallela ſunt in pentagonis CHNID, BGMHC; a erunt quoque ipſa iuncta ND, MB, parallela: Sunt autem & aquales, quod aquales angulos in pentagonis aqualibus ſubtendant. b Igitur & iuncta NM, BD, aquales erunt ac parallela. Eodem modo aquales erunt & parallela, iuncta NO, CE, cùm connectat duas NC, OE, aquales ac parallelas, quod & vtraque lateri DI, ſit parallela. c Circulum igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelum eſt, cùm ille dicatur per rectas NM, NO, hic verò per rectas BD, CE, quibus illa parallela ſunt oſtenſa. Non ſecus oſtendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſint.

a 29. Vndecimi.

b 33. primi.

c 15. Vndecimi.



RVRSVS quoniam iuncta recta EF, OV, cùm ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVKPO, aquidiſtent, d parallela ſunt; nec non & inter ſe aquales, quòd angulos aquales in pentagonis aqualibus ſubtendant, e erunt & recta iuncta EO, FV, parallela & aquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano eſt, f cùm EF, OV, in eodem ſint plano cum parallelis EO, FV. Eſt autem & in circulo, g propterea quòd planum, in quo exiſtit, in ſphæra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propoſ. 31. lib. 3. demonſtrauimus, cùm in eo quadrilatero oppoſitæ latera aqualia ſint, quadrilaterum rectangulum eſt EFVO; ac proinde cùm omnia latera aqualia ſint, ſubtendentia angulos aquales in pentagonis aqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum poteſt lateris FE, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. hoc eſt, recta iuncta FG, quòd aquales ſint FG, FE, ſubtendentes angulos pentagonorum aqualium: ideoque qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata ſimul earundem partium 3. Quibus h cum aquale ſit quadratum iuncta recta OG, quæ diameter ſphæræ eſt (Nam cùm aquales ſint iuncta FG, ON, ſubtendentes aquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallela, quod duabus parallelis AB, ST, parallela ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter ſphæræ) erit quoque quadratum diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectæ FG, hoc eſt, quadratum diametri ſphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. i Eſt autē & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; k atque adeò vt diameter ſphæræ ad rectam FG, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem re-

d 9. Vndecimi.

e 33. primi.

f 7. Vndecimi.

g 1. 1. Theod.

h 47. primi.

i 12. tertiidee.

k 12 ſexti.

tem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quòd FG, sit latus pentagoni. Igitur ex aqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli aquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in apposita formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoque vt diameter sphæra ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ aqualis.

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta FG, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE; erit quoque vt latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæra ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proximè demonstratum est. Igitur ex aquo erit, vt diameter sphæra ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæra ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ aqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram AS, à nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli solidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & trian-

& triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo A B C D E, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

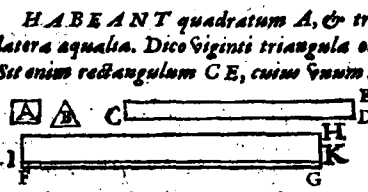
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonstrauimus, facilè etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in vna eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertiò cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora constituisse, cùm post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper à minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quàm octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum sit lateris quadrati A, & latus D E, lateri eiusdem quadrati æquale: Eritque rectangulum C E,



a1. sext. *octuplum quadrati A, a cum sit, vt C D, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum sit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius basem demissa, hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi G H, hoc est,*

b1. sext. *altitudini trianguli B, b vigecuplum est trianguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. rectangulum F H, quippe cum basis F G, dimidium sit basis illius trianguli; erit*

c 12. quarti decimi. *quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est, rectangulum F H, maius esse rectangulo C E. c Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus D E, potentia sesquitertium est eius perpen-*

perpendicularis, hoc est, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod FG sit 10. & CD. 8. hoc est, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim maior proportio 25. ad 16. superpartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertia, quod maior sit fractio $\frac{9}{16}$. a quam $\frac{1}{3}$. a Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque maior quoq; proportio DE, ad HK. quam ad GH; b ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipsi FG, parallela, erit vt IK, ipsi FG, aequalis ad CD, ita DE, ad HK. c Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, aequale: ideoque EH, maius, quam CE. Quod est propositum.

a 12. sexti.
b 10. quinti.
c 14. vel 16. sexti.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

d QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæra descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti aequalia sunt: Octo vero eadem quadrata aequalia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæra descripta, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæra aequalia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæra. Quod est propositum.

d 20. quartidecimi.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basin Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basin octaedri, & cubi ducta.

e NAM quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumque solidum ita intra sphæram constituatur, vt triangulum vnius trianguli alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat; ac proinde perpendicularis è centro sphæra ad basin Icosaedri ducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basin Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri aequalis sit perpendiculari cubi; f quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoq; aequaliter à centro distent; erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.

e 19. vndecimi.
f 21. quartidecimi.

SI

IV.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæræ semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superiorus. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cùm viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulò ante demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDItatum quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis; demonstremus idem. Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro: quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, a vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum: b est autem latus cubi latere Icosaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.

a 11. quarti decimi.

b 18. ter uidem.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basin cubi demissa, vt in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basin Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basin cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cùm ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 12. demonstrauimus, illud solidum

dum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum, quàm cubus. Quod est propositum.

III.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, a *vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius (Nam*b *cùm latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multò maius semidiametro sphæræ) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.*

a 27. quarti. decimi. b 18. tertiidec.

IV.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis octaedri minor est basi Tetraedri, c *quòd basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad ♁nam basin octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad ♁nam basin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quàm suprà theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior,* d *cùm illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in ♁nam basin Octaedri cadente, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in ♁nam basin Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cùm ex scholio propos. 20. lib. 14. illud solidum octaedro sit æquale, hoc verò Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.*

c 14. quarti. decimi. d 14. quarti. decimi.

ALITER. Quoniam est, e *vt latus Octaedri ad latus tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cùm ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri (Nam* f *quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multò minorem tripla;* g *ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.*

e 22. quarti. decimi. f 18. tertiidec. g 10. quinti. h 17.

ALITER. h *Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt te-*

Vt rectangulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quòd eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

a 32. quarti decimi. b 27. quarti decimi. *ALITER. a Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor verò quàm triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quàm triplum semidiametri sphæræ, quòd & tota diameter, quæ cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quàm triplam) Erit Octaedrum maius, quàm Tetraedrum. Quod est propositum.*

EODEM prorsus ordine se mutuò superant conuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

c 9. quarti decimi. d 18. ter tiidec. *QVONIAM enim c est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, d vt suprà demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.*

SVPERFICIEM verò Icosaedri minorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulò ante theoremate 4. ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

e 27. quarti decimi. *DEINDE e quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri maior.*

f 14. quarti decimi. *DENIQVE f quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.*

g 18. ter tiidec. *VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quò maius fuerit corpus, eò maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam g vt suprà demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius verò superficies atque soliditas, vt hoc demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius verò conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra describa-*

scriptas

scripta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuò superant, a & *vt supra ostensum est, ita contrario ordine eorundem superficies conuexa, atque solidi status se mutuò superant,* & *hoc loco demonstrauimus.* a 18. huius.

CÆTERVM pratereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum; solidi status videlicet quinque corporum Regularium, si isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphæra constructa, longè aliter se habere, quam à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Itaque Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubum denique Tetraedro maius sit. tiidec.

INVENTIO ANGVLI INCLINAtionis duarum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppositis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cùm perpendiculares sint ad B D, communem sectionem planorum A B D, C B D, in quibus existunt (*b* Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis A E C, basium A B D, C B D, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur F G H: triangulum æquilaterum super rectam F G, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimirum A B D, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, constituatur super F G, triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc est, vtrique perpendiculari A E, C E, cùm perpendiculares H I, A E, C E, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem esse angulo inclinationis A E C, basium A B D, C B D. Cùm enim latera K F, k G, æqualia sint lateribus E A, E C; & basis F G, basi A C: (*c* Æquales erunt anguli F k G, A E C. Dico insuper angulum inclinationis A C E, acutum esse. *d* Cùm enim latus A D, vel illi æquale b 8. primi.



c 8. primi.

d 12. quarti decimi.

æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 7. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cùm in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

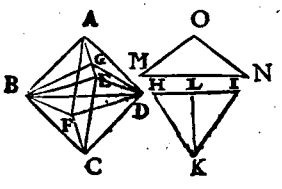
COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia ſint æqualia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; ſectum in G, rectæ ducantur BG, DG, quæ cùm perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtunt [a] (quod in triangulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIk, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta kL, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti, triangulũ OMN, habens vtrumq; latus MO, NO, perpendiculari kL, æquale, hoc eſt, vtriq, perpendiculari BG, DG, cùm perpendiculares kL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cùm enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GD; & baſis MN, baſi BD; [b] Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico propterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum. Cùm



a 6. primi.

b 8. primi.

a Cùm enim diameter octaedri B D, dupla sit potentia lateris A B: *b* latus verò A B, potentia sesquitertium rectæ B G: qualium partium 8 ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, earundemq; 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo simul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris B D, in triangulo G B D, maius est quadratis simul laterũ G B, G D; Ac propterea angulus G B D, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

a 14 ter tiidec.
b 12. quartidecimo.

COROLLARIVM.

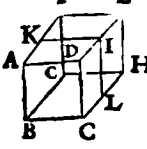
HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cùm enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, D G, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est B D; omnes inter se æquales erunt, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales.

c 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus A B C D E F G H, in quo secetur latus D E, bifariam in I, nec non & latera illi opposita in quadratis A E, E C, cõmune latus illud D E, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur I k, I L; *d* quæ cùm æquales, ac parallelæ sint lateribus E F, E H (quòd & k F, I E, inter se, necnon & I E, L H, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoq; *e* angulos rectos ad latus D E, efficiant, continebunt k I L, angulum inclinationis basium A E, E C, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam verò rectæ I k, I L, parallelæ existentes rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, *f* angulum k I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modò demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



d 33 primi.
e 29. primi.
f 10. vndecimi.

COROLLARIVM.

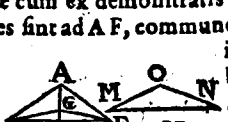
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicuè concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidibus Icosae-

dri, cuius basis pentagonum A B C D E, ex quinq; Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diuiso itaque latere A F, bifariã in G, ducantur ex triangulorum A B F, A E F, latus A F, commune habentium, angulis B, & E, lateri A F, oppositis rectæ B G, E G, quæ cùm ex demonstratis in probl. 2. huius scholij, perpendiculares sint ad A F, communem sectionem planorum A B F, A E F,



in quibus ducuntur, comprehendent B G E, angulum inclinationis basium A B F, A E F, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulũ æquilaterum H I k, super rectam H I, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuius triangulo I cosaedri, ipsi videlicet A B F, æquale, in quo ducta recta K L, ad H I, perpendiculari, constituatur super recta M N, quæ rectæ B E, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum O M N, habens vtrumq; latus M O, N O, perpendiculari K L; æquale, hoc est, vtriq; perpendiculari B G, E G, cùm perpendiculares k L, B G, E G, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum M O N, angulo B G E, inclinationis basiũ A B F, A E F, æqualem esse. Cùm enim latera O M, O N, æqualia
a 8. primi. sint lateribus G B, G E, & basis M N, basi B E; a æquales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc etiam angulum inclinationis B G E, esse obtusum. Cùm enim B G, angulum rectũ faciat A G B;
b 19. primi. b erit recta A B, maior quàm recta B G; ad eundemq; modũ A E, maior erit quàm E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoque erunt rectis O M, O N, cùm hæ rectis G B, G E, positæ sint æquales. Si itaq; recta B E, super rectam sibi æqualem M N, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum M O N, ita vt rectæ A B,
c 25. primi. A E, rectas O M, O N, prorsus includant. c Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At hic obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales; per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintam. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multò igitur magis obtusus erit angulus M O N, hoc est, sibi æqualis B G E.

COROLLARIVM.

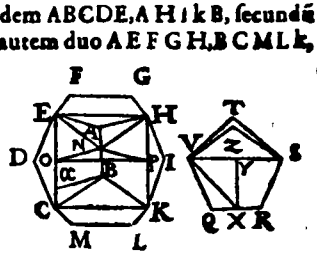
NON obscurè quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cùm singuli anguli inclinationũ contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases
d 8. primi. oppositas ductis, quales sunt B G, F G, subtendanturq; à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est B E: d omnes inter se e-
e 4. primi. runt æquales, quòd & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & rectæ: illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, e æquales erunt.

ANGV-

V.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnũ latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B k L M C, ad latus A B, conuenientia, duo quidem A B C D E, A H I k B, ſecundũ idem latus commune A B; alia autem duo A E F G H, B C M L k, ſecundũ angulos E A H, C B k. His porrò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C, K H, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorũ D, B, I, A. Diuiſo autem latere A B, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum A B C D E, A B K I H, ad A B, perpendiculares N O, N P, ſecantes latera E C, H K, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cùm rectæ E C, H K, ipſi A B, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur N O, N P, angulum O N P, inclinationis baſiũ A B C D E, A B k I H. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam Q R, lateri Dodecaedri A B, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum Q R S T V, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi A B C D E, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur V S, æqualis exiſtens rectæ E C, cùm & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, angulóſq; contineant æquales. Diuiſa deinde recta Q R, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; propterea q; perpendicularis ad V S, cùm V S, ſit parallela ipſi Q R, ex ſchol. propoſ. 8. lib. 13. Ac poſtremò ſuper recta V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumq; latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cum latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, angulóſq; comprehendant æquales; [b] Aequales erũt & baſes N E, N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoque & reſidui ex rectis; anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erunt. Quoniam igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec non & angulis V X Y, V Y X, trianguli V X Y (ſunt enim E O N, H P N, V Y X, oſtenſi recti) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum; [c] Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis late-



[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 26. primi

lateribus P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S, æquales existentes ipsi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam verò, quia O E, P H, æquales sunt, ac parallelæ; *a* erit quoq; recta
a 33. primi. conuncta O P, æqualis & parallela ipsi E H, ideoq; æqualis ipsi E C, hoc est, rectæ V S. Quam ob rem, cum latera Z V, Z S, lateri-
b 8. primi. bus N O, N P, æqualia sint; basis item V S, basi O P; *b* æqualis erit angulus V Z S, angulo inclinationis O N P. Dico etiam angulum hunc O N P, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta B *α*, ipsi N O, parallela; cum sit quoq; N B, ipsi O *α*, parallela, ex scholio
c 34. primi. propos. 8. lib. 13 Parallelogrammum erit N O *α* B, *c* ideoque recta B *α*, ipsi N O, æqualis. Quia verò B C, latus pentagoni oppositum
d 29. primi. angulo C *α* B, qui rectus est (*d* æqualis nimirum interno C O N) maius est latere B *α*, hoc est, recta N O, vel vtraq; Z V, Z S, quæ ipsi N O, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ T V, T S, maiores duab. rectis Z V, Z S. Cadit igitur punctũ Z, intra triangulũ T V S, ita vt rectæ T V, T S, rectas Z V, Z S, includant omnino; Atque proinde angulus V Z S, ideoque illi æqualis O N P, maior est angulo pentagoni T: Hic verò, cum sit pentagoni angulus, paulò antè, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multò igitur maior recto erit angulus inclinationis O N P, ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cùm enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt N O, N P, subtendanturq; à rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certè, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta O F, lateri cubi inscripti E H, quod angulum pentagoni E A H, subtendit, æqualis: *e* Erunt omnes inter se æquales, cùm & omnes illæ
e 8. primi. perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint: necnon & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.

Elementi decimisexti Finis.