

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Bibliothèque électronique suisse

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

Libri XV. breviter demonstrati,

Operâ

IS. BARROW, *Cantabrigiensis*,

Coll. TRIN. Soc.

Et prioribus mendis typographi-
cis nunc demum purgati.

H I E R O C L.

Καθαροὶ ψυχῆς λογικῆς οἶον αἱ μαθηματικαὶ
ἐπιστήμαι.



L O N D I N I,

Typis J. Redmayne: Prostant autem apud
J. Williams ad Insigne Coronæ in Coemete-
rio D. Pauli, & J. Dunsmore ad Insigne Tri-
um Bibliorum in vico vulgò vocato Ludgate
Street. MDCCLXXVIII.





Nobilissimis & Generosissimis

Adolescentibus,

Dno EDOUARDO CECILIO,

Illustriss. Comitiss. Sarisburiensis Filio;

Dno JOHANNI KNATCHBOL,

ET

D. FRANCIS. WILLOUGHBY,

ARMIGERIS.



Nicuique vestrum (Optimi Adolescentes) tantum me debere reputo, quantum homo homini debere potest. Mea enim sententia, ultra sincerum amorem non est, quod quispiam de alio bene
210
mereri

mereri possit. Hunc autem jam
diu est quo ex singulari vestra
bonitate mihi indultum experi-
or; ejusque sensus, intimis ani-
mi medullis inhærens, ipsi ar-
dens studium impressit quovis
honesto modo reciprocos affectus
prodendi. Quandoquidem vero
ea fortunarum mearum tenuitas,
ea vestrarum amplitudo, existit,
ut nec ego alia quam gratæ ali-
cujus agnitionis significatione uti
queam, nec vos aliam admittere
velitis; ea propter haud illiben-
ter hanc occasionem arripio, ho-
noris & benevolentiae, quibus
vos prosequor, publicum hoc &
durabile *κατασκευαστον* edendi. Etsi
cum oblatis anathematis exilita-
tem, & libellum vestris nomini-
bus consecratum, quam is longe
infra vestrorum meritorum dig-
nitatem subsidat, attentius con-
sidero, timor subinde aliquis &
dubitatio animum incessant, ne
hoc studium erga vos meum vo-
bis

Epistola Dedicatoria.

bis dehonestamento fit potius quam ornamento; scilicet memor cum sim, ut malæ causæ, sic & mali libri patrociniū in patroni contumeliā magis quam in gloriam cedere. Sed quum vestrarum virtutum id robur, eam fore soliditatem, recognoscerem, quæ vestrum decus, meo quantumvis labefactato, inconcussū sustinere possint; idcirco non dubitavi vos in aliquatenus commune mecum periculum induere. Virtutes illas intelligo, quibus nemo unquam in vestra ætate aut in vestro ordine, saltem me iudice, majores deprehendit; quæ vos insigniter gratos omnibus & amabiles reddunt; eximiam modestiam, sobrietatem, benignitatem animi, morum comitatem, prudentiam, magnanimitatem, fidem, præclarā insuper ingenii indolem, quæ vos ad omnem ingenuam scientiam non tantum excellenti

ma
* 3 captu,

Epistola Dedicatoria.

capto, sed & appetitu forti ac sincero, infiruxit. Quas vestras præclarissimas dotes prout nemo est fortassis qui me melius novit, aut pro consuetudine, quam jamdudum vobiscum dulcissimam coluisse ex vestro favore mihi contigit, penitus intropexit, ita nemo est qui impensius miratur & suspicit; aut qui ipsas libentius prædicare ac celebrare vellet, si non cum eloqui mei vires supergrederentur, tum etiam quæ in singulis vobis elucet, prolixi alicujus commentarii aut panegyricæ orationis libertatem, potius quam præstitutas hujusmodi salutationibus angustias, exposcerent. Quin potius divinam clementiam implo-ro, ut vos earundem virtutum sancto tramiti insistere, atque hos egregios fructus vernæ vestræ ætatis felicibus incrementis maturescere concedat, vitamque vobis in hoc seculo ingenuam, innocentem, jucundam, & in futuro beatam

Epistola Dedicatoria.

tam ac sempiternam transigere largiatur. Minime autem dubito, ne pro consueto vestro in me candore hoc ultimum fortassis quod vobis præstare potero, benevolentiae erga vos & observantiae testimonium, alacriter accepturi sitis; quod vobis propensissimo affectu offert.

Vestri in aeternum amantiſſimus,

& observantiſſimus,

I. B.



Benevolo LECTORI.

SI, quid in hac elementorum editione praestitum sit, scire desideras, amice Lector, accipe, pro genio operis, breviter. Ad duos praecipue fines conatus meos direxi. Primum, ut cum requisita perspicuitate summam demonstrationum brevitatem conjungerem, quo eam libello molem compararem, qua commode absque molestia circumferri posset. Id quod affectus videor, si absentem Typographi cura non frustretur. Concinnius enim quispiam meliori ingenio aut majori peritia excellens, at nemo forsitan brevius plerasque propositiones demonstraverit; praesertim cum in numero & ordine propositionum ipse nihil immutarim, nec licentiam mihi assumpserim quamcunque propositionem Euclidean procul ablegandi tanquam minus necessariam, aut quasdam faciliores in axiomatum censum referendi; quod nonnulli fecerunt: inter quos peritissimus Geometra Andr. Tacquetus, (quem iudeo etiam nomino, quod quada m ex eo desumpta agnoscere honestū duco,) post cujus elegantissimam editionem, ipse nihil attendere.

Ad Lectorem.

tare voluisssem, si non visum fuisset doctissimo viro non nisi octo Euclidis libros suâ curâ adornatos publico communicare, reliquis septem, tanquam ad elementa Geometria minus spectantibus, omnino quasi spretis atque posthabitis. ~~Mibi~~ ~~autem~~ jam ab initio alia provincia demandata fuit, non elementa Geometriae utcunque pro arbitrio conscribendi, ~~verum~~ Euclidem ipsum, eumque totum, quam possem brevissime, demonstrandi. Quod enim quatuor libros spectat, septimum, octavum, nonum, decimum, quamvis illi ad Geometria planâ & solida elementa, ut sex præcedentes & duo subsequentes, non tam prope pertineant; quod tamen ad res Geometricas admodum utiles sint, tam propter Arithmetica & Geometria vâidæ propinquam cognationem, quam ob notitiam commensurabilium & incommensurabilium magnitudinum ad figurarum tam planarum quam solidarum intellectum apprime necessariam, nemo est è peritioribus Geometris qui ignorat. Quæ vero in tribus ultimis libris continetur, & corporum regularium nobilis contemplatio, illa non nisi injuria prætermitti potuit; quando nempe illius gratia noster socrus, Platonice familie philosophus, hoc elementorum systema universum condidisse perhibetur;

uti

Ad Lectorem.

uti testis est * Proclus, iis verbis, * Ὅθεν * lib. 2.
 δι' ἧς τὸ στοιχείωμα στοιχειώσας τέλει πρὸς ἐπε-
 ρὰς τῶν γεωμετρικῶν μαθηματικῶν χρημάτων οὐσα-
 σιν. Præterea facile in animum induxi ut
 opinarer, nemini harum scientiarum a-
 manti non futurum esse cordi penes se ha-
 bere integrum Euclidæum opus, quale
 passim ab omnibus citatur & celebratur.
 Quare nullum librum nullamque propo-
 sitionem negligere volui earum qua apud
 P. Herigonium habentur; cuius vesti-
 giis pressa insistere necesse habui, quoni-
 am ejusce libri schematizms maxima ex
 parte uti statutum erat, quod prævide-
 rem mihi ad novas describendas tempus
 non suppetere; etsi nonnunquam id facere
 præoptassem. Eadem de causa nec alias
 plerasque quam Euclidæas demonstrati-
 ones adhibere volui, succinctori forma
 expressas, nisi forte in 2, & 13, & parce
 in 7, 8, 9. libris; ubi ab eo nonnihil
 deflectere opera pretium videbatur. Bona
 igitur spes est saltem in hac parte cum no-
 stris consiliis, tum studiosorum votis,
 aliquo modo satisfactum iri. Nam
 quæ adjecta sunt in Scholiis problemata
 quedam & theoremata, sive ob suum
 frequentem usum ad naturam elemen-
 tarem accedentia, sive ad eorum
 quæ sequuntur expeditam demon-
 strationem conducentia, seu qua regula-
 rum

Ad Lectorem.

rum practica Geometriae quarundam principiarum rationes innuunt ad suos fontes relatas, per ea, ut spero, libellus ultra destinatam molem magnopere non intumescet.

Alter scopus ad quem collineatum est, eorum desideriis consuluit qui demonstrationibus symbolicis potius quam verbalibus delectantur. In quo genere cum plerique apud nos Guilielmi Oughtredi symbolis assueti sint, ea plerumque usurpare consultius duximus. Nam qui Euclidem hanc viâ tradere & interpretari aggressus sit, hactenus, quod ego sciam, præter unum P. Herigonium, repertus est nemo. Cujus viri longe doctissimi methodus, sane in multis egregia, ac ejus peculiari proposito admodum accommodata, duplici tamen defectu laborare mihi visa est. Primo, quod cum Propositionum ad unius alicujus theorematidis aut problematis probationem adductarum posterior à priori non semper dependeat; quando tamen illæ inter se coherent, quando non, nec ex ordine singularum, nec nullo alio modo, satis prompte innotescere potest: unde ob defectum conjunctionum & adjectivorum (ergo, rursus, &c.) non raro difficultas & dubitandi occasio, præsertim minus exercitatis, inter legendum oboriri solent. Deinde sæpenumero evenit, ut prædicta methodus supervacaneas repetitiones effugere nequeat, à quibus demonstrationes est quando proli-

Ad Lectorem.

*xa, aliquando & magis intricata, evadunt. Quibus vitiis noster modus facile per verborum signorumq; arbitrariam mixturam medetur. Atque hac de opella hujus intentione & methodo dicta sufficiant. Caterum quæ in laudem Matheseos in genere, aut Geometria ipsius; & quæ de historia harum scientiarum, ideoque de Euclide horum elementorum digestore, dici possent, & reliqua hujusmodi *εἰς τὴν εἰρηάν*, cui hac placent, apud alios interpretes consulere potest. Neque nos angustias temporis quod huic operi impendi potuit, nec interpellationes negotiorum, nec adjumentorum ad hac studia apud nos egestatem, & quadam alia, ut liceret non immerito, in excusationem obtinemus; metu scilicet inducti, ne hac nostra omnibus minus satisfaciant. Verum quæ ingenui Lectoris usibus elaboravimus, eadem in solidum ipsius censura ac judicio submittimus; probanda si utilia sibi compererit; sin omnino secus, rejicienda.*

I. B.

Ad amicissimum Virum, I. B. de
EUCLIDE contracto
Εὐφρησμός.

FActum bene ! didicit Laconice loqui
Senex profundus, & aphorismos induit.
Immensa dudum margo commentarii
Diagramma circuit minutum : utque Insula
Problema breve natabat in vasto mari.
Sed unda jam detumuit, & glossa arctior
Stringit Theoremata : minoris anguli
Lateribus ecce torus *Euclides* jacet,
Inclusus olim velut Homerus in nuce ;
Pluteoque sarcina modo qui incubuit, levis
En fit manipulus. Pelle in exigua later
Ingens Mathesi, matris ut in utero Hercules,
In glande quercus, vel Ithaca Eurys in pila.
Nec mole cum decrescit, usu fit minor ;
Quin auctior jam evadit, & cumulatus
Contracta prodest erudita pagina.
Sic ubere magis liquor è pressio effluit ;
Sit pleniori vasa inundat sanguinis
Torrente cordis Systole ; sic fusius
Procurrit æquor ex Abylæ angustis.
Tantilli operis ars tanta referenda unice est
BAROVIANO nomini, ac solertia.
Sublimis euge mentis ingenium potens !
Cui invium nil, arduum esse nil solet.
Sic usque pergas prospero conamine,
Radiusque multum debeat ac abacus tibi ;
Sic crescat indies feracior leges,
Simili colonum germine assiduo beans.
Specimen futuræ messi hic fiet labor,
Magnæque famæ illustria hæc præludia.
Juvenis dedit qui tanta, quid dabit senex ?

Car. Robotham, *CANTAB.*
Coll. Trin. Sen. Soc.

In novam *Elementorum*

E U C L I D I S

Editionem à D. *IS. BARROW*,
Collegii SS. TRIN. Socio,
viro opt. & eruditissimo,
adornatam.

Benigne Lector! si uspiã auditũ est tibi,
Quantus tenella Nix Geometres fiet;
Qua mille radiis, mille ludit angulis,
Totumque puro ducit Euclidem finem:
Amabis ultro candidissimum Virum,
Cui plena nivium est indoles, sed quas tamẽ
Præclarus ardor mentis urget *Enthea*;
Et usque blandis temperat caloribus:
Quo suavius nil vivit, & melius nihil.
Is, dum liquentes pectore excutit nives,
Et inde & inde spargit, en aliam tibi,
Lector benigne, & nidiibus Geometriam!

G. C. A. M. C. E. S.

Notarum Explicatio.

- $\equiv$ æqualitatem.
- $\supset$ majoritatem.
- $\subset$ minoritatem.
- $+$ plus, vel addendum esse.
- $-$ minus, vel subtrahendum esse.
- $-:$ differentiam vel excessum; item quantitates omnes, quæ sequuntur, subtrahendas esse, signis non mutatis.
- $\times$ multiplicationem, vel ductum lateris rectanguli in aliud latus.
- Idem denotat conjunctio literarum, ut $AB = A \times B$.
- $\sqrt{\quad}$ Latus, vel radicem quadrati, vel cubi, &c.
- Q. & q quadratum. C. & c cubum.
- Q. Q. rationem quadrati numeri ad quadratum numerum.

significat.

Reliquas, quæ ubicunque occurrunt, vocabulorum abbreviationes ipse Lector per se facile intelliget; exceptis iis, quas tanquam minus generalis usus. suis locis explicandas relinquimus.

Definitiones.

I. **P**unctum est cujus pars nulla est.
 II. Linea vero longitudo latitudinis expers.
 III. Lineæ autem termini sunt puncta.

IV. Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

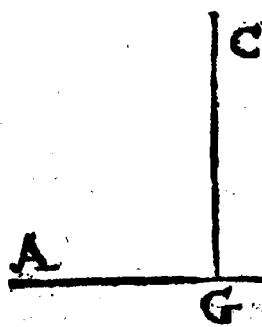
V. Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

VI. Superficieci autem extrema sunt lineæ.

VII. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas.

VIII. Planus vero angulus est, duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium alterius ad alteram inclinatio.

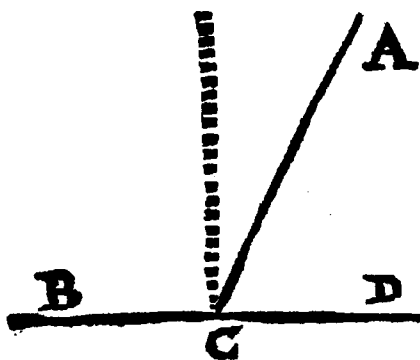
IX. Cum autem quæ angulum continent, lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.



X. Cum vero recta linea CG super rectam lineam AB consistens, eos qui sunt deinceps angulos CGA, CGB æquales inter se fecerit, rectus est uterque

æqualium angulorum, & quæ insistit recta linea CG, perpendicularis vocatur ejus (AB) cui insistit.

Not. Cum plures anguli ad unum punctum : (ut ad G) existunt, designatur quilibet angulus tribus literis, quarum media ad verticem est illius de quo agitur : ut angulus quem rectæ CG, AG efficiunt ad partes A, vocatur CGA, vel AGC.



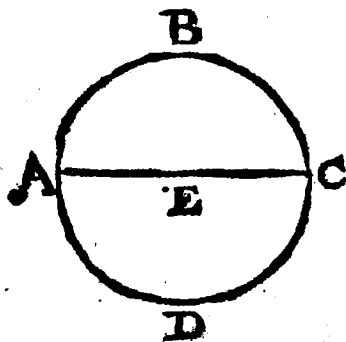
XI. Obtusus angulus est, qui recto major est, ut $\angle ACB$.

XII. Acutus vero, qui minor est recto, ut $\angle ACD$.

XIII. Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV. Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

XV. Circulus est figura plana, sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.



XVI. Hoc vero punctum centrum circuli appellatur.

XVII. Diameter autem circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli

peripheriam terminata, quæ circulum bifariam fecat.

XVIII. Semicirculus vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

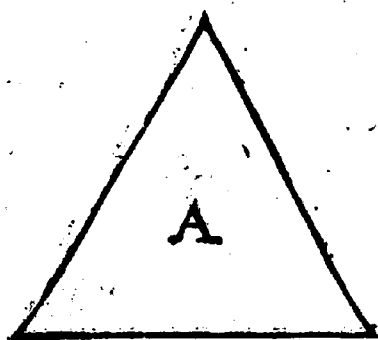
In circulo EABGD. E est centrum, AC diameter, ABC semicirculus.

XIX. Rectæ lineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

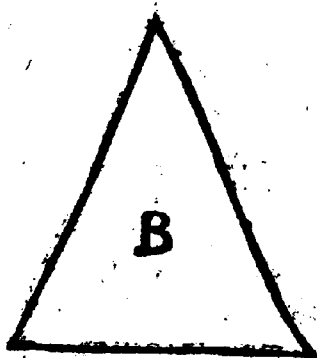
XX. Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

XXI. Quadrilateræ vero, quæ sub quatuor.

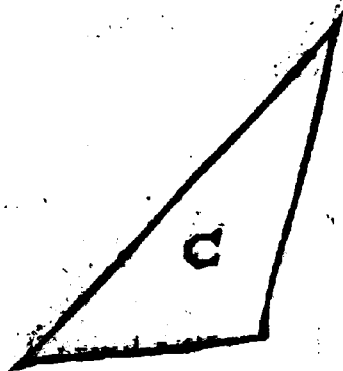
XXII. Multilateræ autem, quæ sub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.



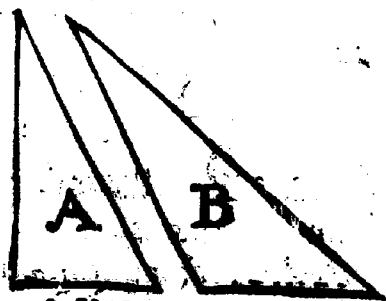
XXIII. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia, ut triangulum A.



XXIV. Isosceles autem, quod duo tantum æqualia habet latera, ut triangulum B.



XXV. Scalenum vero, quod tria inæqualia habet latera, ut C.

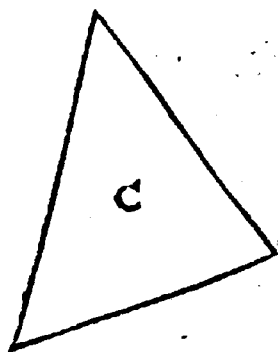


XXVI. Adhæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet, ut triangulum A.

XXVII. Amblygonium autem, quod obtusum angulum habet, ut B.

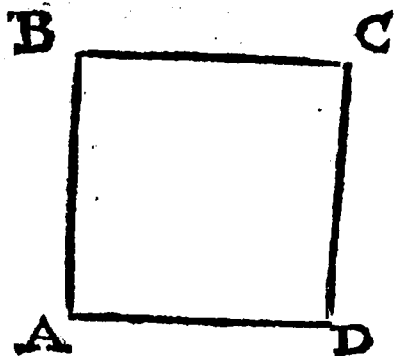
A 2

XXVIII.

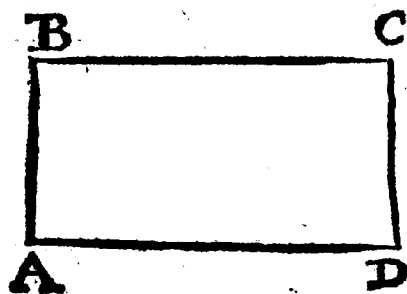


XXVIII. Oxygoni-
um vero, quod tres ha-
bet acutos angulos, ut
C.

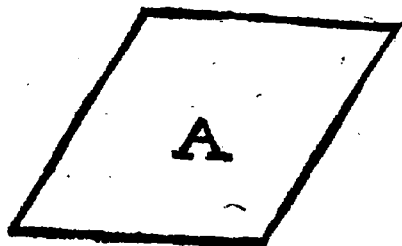
Figura æquiangula
est, cujus omnes anguli
inter se æquales sunt.
Duæ vero figuræ æqui-
angulæ sunt; si singuli
anguli unius singulis angulis alterius sint æqua-
les. Similiter de figuris æquilateris concipe.



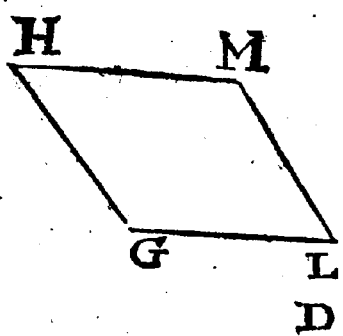
XXIX. Quadri-
laterarum autem figu-
rarum, quadratum
quidem est, quod &
æquilaterum, & re-
ctangulum est, ut A B
C D.



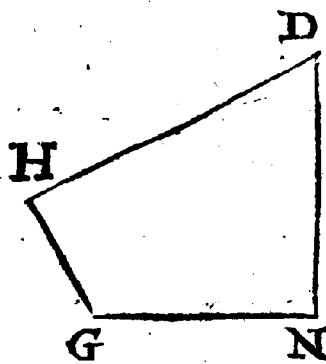
XXX. Altera
vero parte longior
figura est, quæ re-
ctangula quidem, at
æquilatera non est,
ut A B C D.



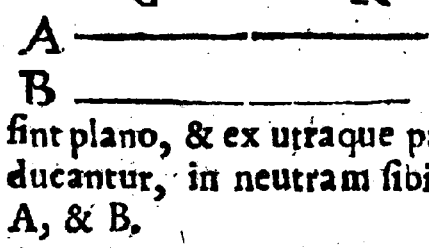
XXXI. Rhombus
autem, quæ æquilate-
ra, sed rectangula non
est, ut A.



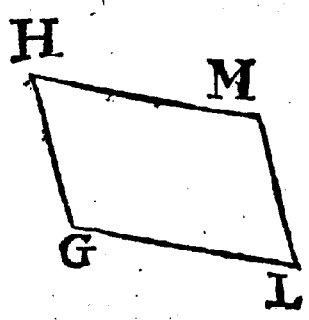
XXXII. Rhombus vero, quæ ad-
versa & latera, & an-
gulus habens inter se
æquales, neque æqui-
latera est, neque rectan-
gula, ut $GLMH$.



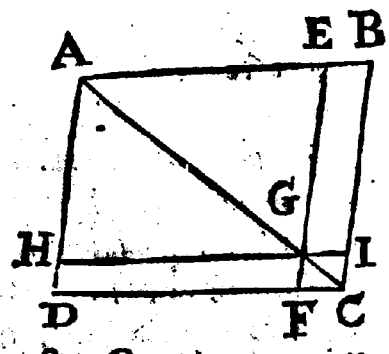
XXXIII. Præter
has autem reliquæ
quadrilateræ figuræ
trapezia appellantur;
ut $GN DH$.



XXXIV. Paralle-
læ rectæ lineæ sunt,
quæ cum in eodem
sint plano, & ex utraque parte in infinitum pro-
ducantur, in neutram sibi mutuo incidunt, ut
 A , & B .



XXXV. Paralle-
logrammum est figu-
ra quadrilatera, cujus
bina opposita latera
sunt parallela, seu
æquidistantia, ut $GLHM$.



XXXVI. Cum ve-
ro in parallelogram-
mo $ABCD$ diame-
ter AC ducta fuerit,
duæque lineæ EF ,
 HI , lateribus paral-
læ secantes diame-
trum in uno eodemq;

puncto G , ita ut parallelogrammum ab hisce

parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa DG , GB , per quæ diameter non transit, Complementa; duo vero reliqua HE , FI , per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.

Problema est, cum proponitur aliquid efficiendum.

Theorema est, cum proponitur aliquid demonstrandum.

Corollarium est consecutarium, quod è facta demonstratione tanquam lucrum aliquod colligitur.

Lemma est demonstratio præmissæ alicujus, ut demonstratio quæsitæ evadat brevior.

Postulata.

1. **P**ostuletur, ut à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.
2. Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.
3. Item, quovis centro, & intervallo circulum describere.

Axiomata.

1. **Q**uæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

ut $A = B = C$. ergo $A = C$, vel ergo omnes A , B , C , æquantur inter se.

Nota, Cum plures quantitates hoc modo conjunctas invenias, concipe ut hujus axiomatis primam ultimæ & quamlibet earum cuilibet æquari. Quo in casu sæpe, brevitatæ causa, ab hoc axiomate citando abstinemus; etsi vis consecutionis ab eo pendeat.

2. Et si æqualibus æqualia adjecta sunt, tota sunt æqualia.

3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.

4. Et si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

6. Et quæ ejusdem vel æqualium sunt duplicia, inter se sunt æqualia. Idem puta de triplicibus, quadruplicibus, &c.

7. Et quæ ejusdem, vel æqualium sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Idem concipe de subtriplicis, subquadruplicis, &c.

8. Et quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

Hoc axioma in rectis lineis, & angulis valet conversum, sed non in figuris, nisi illa similes fuerint.

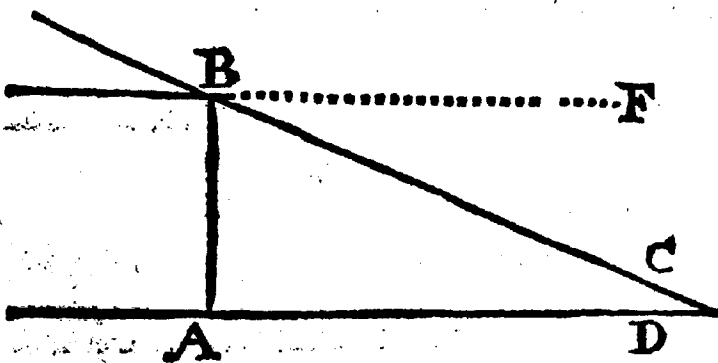
Cæterum, magnitudines congruere dicuntur, quarum partes applicatæ partibus, æqualem vel eundem locum occupant.

9. Et totum suæ parte majus est.

10. Dux rectæ linæ non habent unum & idem segmentum commune.

11. Dux rectæ in uno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto interfecabunt.

12. Item omnes anguli recti sunt inter se æquales.



13. Et si in duas rectas lineas AD, CB, in eodem plano jacentes altera recta B A incidens, inter-

internos ad eandemque partes angulos BAD , ABC duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

14. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

15. Si æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus adjunctorum excessui æqualis.

16. Si inæqualibus æqualia adjungantur, erit totorum excessus excessui eorum, quæ à principio, æqualis.

17. Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

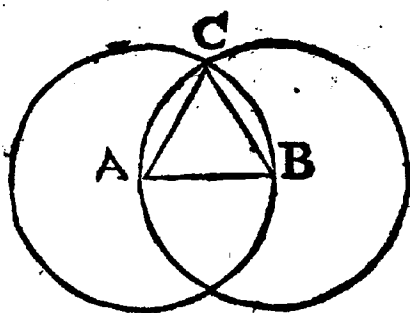
18. Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

19. Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

20. Si totum rotius est duplum, & ablatum ablati, erit & reliquum reliqui duplum. Idem de reliquis multiplicibus intellige.

Citationes intellige sic. Cum duo numeri occurrunt, prior designat propositionem, posterior librum. Ut per 4. 1. intelligitur quarta propositio primi libri, atque ita de reliquis. Cæterum ax. axioma, post. postulatam, def. definitionem, sch. scholium, cor. corollarium denotant, &c.

LIB. I.
PROP. I.



Super data recta li-
nea terminata A B
triangulum æquilate-
rum A B C constitue-
re.

Centris A & B, eo-
dem intervallo A B,
vel B A a describe du-

os circulos se interfecantes in puncto C, ex quo
bduc rectas C A, C B, Erit $A C = A B = B C$
Quare triangulum A C B est
æquilaterum. Quod Erat Faciendum.

a 3. post.

b 1. post.

c 15. def.

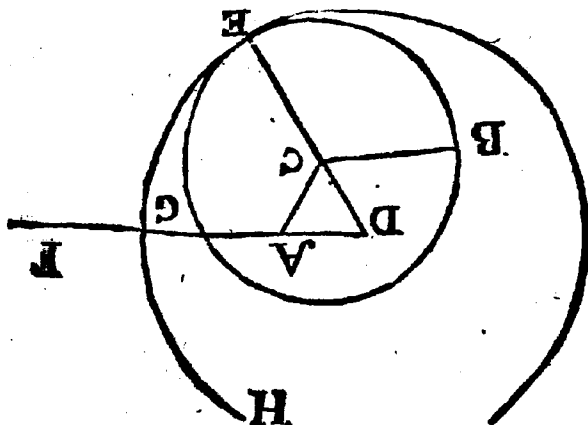
d 1. ax.

e 23. def.

Scholium.

Eodem modo super A B describetur triangu-
lum Isoceles, si intervalla æqualium circulorum
majora sumantur, vel minora, quam A B.

PROP. II.



Ad datum punctum A data recta linea B C
æqualem rectam lineam A G ponere.

a 3. post.

Centro C, intervallo C B a describe circulum b 1. post.

C B E. b Junge A C, super qua c fac triangu- c 1. 1.

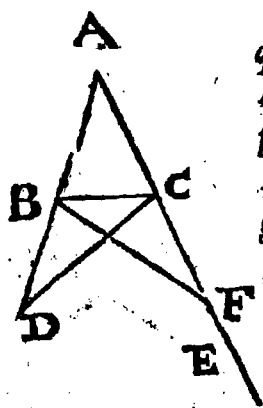
lum æquilaterum A D C d produc D C ad E. d 2. post.

cen-

lem, sub æqualibus rectis lineis contentum, & basim BC basi EF æqualem habebunt; eritque triangulum BAC triangulo EDF æquale, ac reliqui anguli B , C reliquis angulis E , F æquales erunt, uterque utrique, sub quibus æqualia latera subiunguntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectæ AB superponatur, cadet punctum E in B , quia $DE = AB$. Item recta DF cadet in C , quia ang. $A = D$. Quinetiam punctum F puncto C coincidet, quia $AC = DF$. Ergo rectæ EF , BC , cum eisdem habeant terminos, b congruent, & proinde æquales sunt. b 14 ax. Quare triangula BAC , EDF ; & anguli B , E ; itemque anguli C , F etiam congruunt, & æquantur. Quod erat Demonstrandum.

PROP. V.



Isoscelium triangulorum ABC qui ad basim sunt anguli ABC , ACB inter se sunt æquales. Et productis æqualibus rectis lineis AB , AC qui sub base sunt anguli CBD , BCE inter se æquales erunt.

a Accipe $AF = AD$, & b iunge CD , ac BF . a 3. 12. b 1 post.

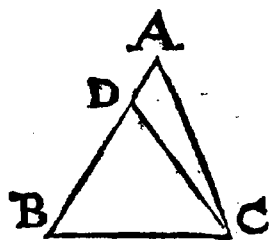
Quoniam in triangulis ACD , ABF , sunt $AB = AC$, & $AF = AD$, angulusque A communis, e erit ang. $ABF = ACD$; e 4. 1. & ang. $AFB = ADC$, & bas. $BF = DC$; item $FC = DB$. ergo in triangulis BFC , BCD erit ang. $FCB = DBC$. Q. E. D. Item g 4. 1. ideo ang. $FCB = DCB$. atqui ang. $ABF = ACD$. ergo ang. $ABC = ACB$. Q. E. D. k 3. ax.

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum æquilaterum est quoque æquiangulum.

PROP.

PROP. VI.



Si triangulis ABC duo anguli ABC , ACB æquales inter se fuerint, & sub æqualibus angulis subtensa latera AB , AC æqualia inter se erunt.

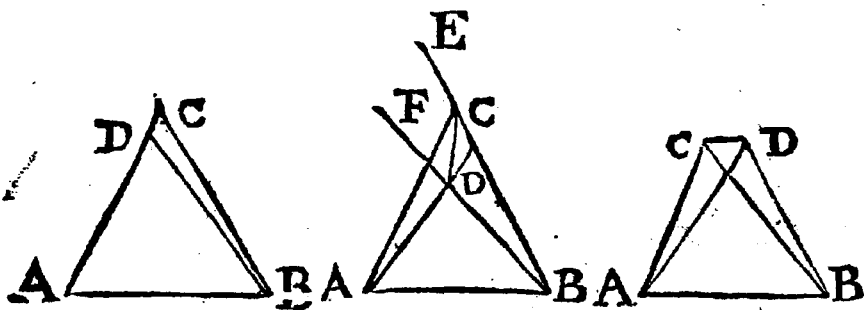
Si fieri potest, sit utravis $BA \neq CA$, a Fac igitur $BD = CA$, & b duc CD .

In triangulis DBC , ACB , quia $BD = CA$, & latus BC commune est; atque ang. $DBC = ACB$, e erunt triangula DBC , ACB æqualia inter se, pars & totum, f Quod Fieri Nequit.

Coroll.

Hinc, Omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.

PROP. VII.



Super eadem recta linea AB duabus eisdem rectis lineis AC , BC , aliæ duæ rectæ lineæ æquales AD , BD , utraque utrique (hoc est, $AD = AC$, & $BD = BC$) non constituentur ad aliud punctum C , atque aliud D , ad easdem partes C , eisdemque terminos A , B cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

a 9. ax.

1. Cas. Si punctum D statuatur in AC a liquet non esse $AD = AC$.

2. Cas. Si punctum D dicatur intra triangulum ACB duc CD , & produc BD F , ac BC E . Jam vis $AD = AC$, ergo ang. $ADC = ACD$; item quia $BD = BC$, erit ang. $FDC = ECD$

ergo

b 5. I.

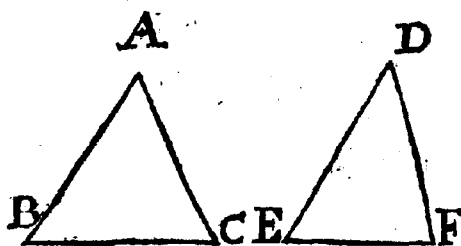
c suppos.

ergo ang. $FDC \equiv ACD$, id est ang. $FDC \equiv 9. ax.$
 $\equiv ADC \equiv Q. E. N.$

3. *Cas.* Sin D cadat extra triangulum ACB
 jungatur CD .

Rursus, ang. $ACD \equiv ADC$, & $BCD \equiv C. I.$
 $BDC \equiv$ ergo ang. $ACD \equiv BDC$, id est ang. $f. 9. ax.$
 $ACD \equiv BCD. Q. E. N.$

PROP. VIII.



Si duo triangula
 ABC, DEF ha-
 buerint duo latera
 AB, AC duobus
 lateribus DE, DF ,
 utrumque utrique
 æqualia; habuerint

vero & basim BC , basi EF , æqualem: angulum
 A sub æqualib. rectis lineis contentum angulo D
 æqualem habebunt.

Quia $BC \equiv EF$, si basis BC superponatur
 basi EF , illæ b congruent. ergo, cum AB
 $\equiv DE$, & $AC \equiv DF$, cadet punctum A in
 D , (nam in aliud punctum cadere nequit, per
 præcedentem) d ergo angulorum A , & D late-
 ra coincidunt, & quare anguli illi pares sunt.
 $Q. E. D.$

a hyp.

b 8. ax.

c hyp.

d 14. ax.

e 8. ax.

Coroll.

1. Hinc triangula sibi mutuo æquilatera;
 etiam mutuo æquiangula sunt.

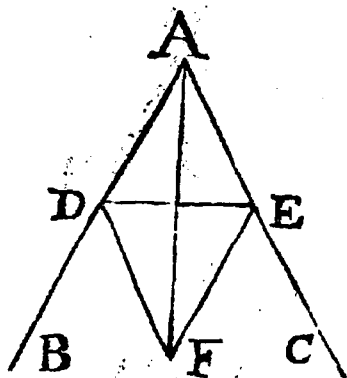
2. Triangula sibi mutuo æquilatera y æquen-
 tur inter se.

x 4. 8.

y 4. 1.

PROP.

PROP. IX.



a 3. I.
b 1. I.

c constr.

d 8. I.

Datum angulum rectilineum BAC bisariam secare.

a Sume $AD = AE$; duc DE , super qua b fac triang. æquilat. DFE .

Ducta AF angulum BAC bisecabit.

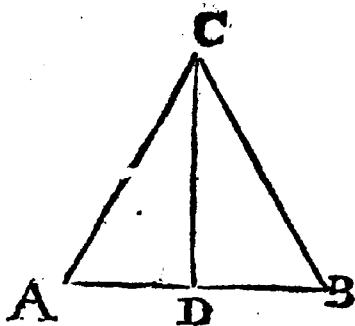
Nam $AD = AE$, & latus AF commune est, & bas. $DF = FE$, d ergo ang. $DAF = EAF$. Q.E.F.

Coroll.

Hinc patet quomodo angulus secari possit in æquales partes 4, 8, 16, &c. Singulas nimirum partes iterum bisecando.

Methodus vero regula & circino angulos secandi in æquales quotcunque hactenus Geometras latuit.

PROP. X.



a 1. I.

b 9. I.

c constr.

d 4. I.

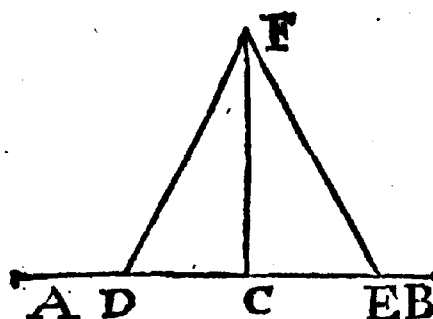
Datam rectam lineam AB bisariam secare.

Super data AB a fac triang. æquilat. ABC , ejus angulum C b biseca recta CD . Eadem datam AB bisecabit.

Nam $AC = BC$, & latus CD est commune; & ang. $ACD = BCD$, d ergo $AD = BD$. Q.E.F. Praxin hujus & præcedentis, constructio primæ hujus libri satis indicat.

PROP.

PROP. XI.

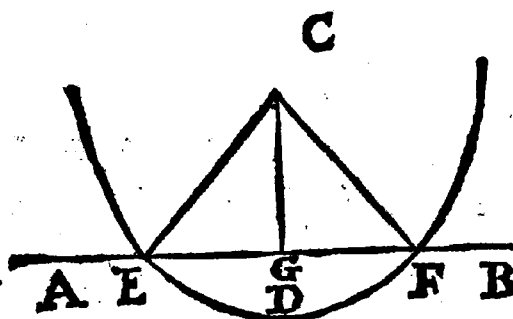


Data recta linea
A B, & puncto in ea
dato C, rectam lineam
C F ad angulos re-
ctos excitare.

a Accipe hinc inde a 3. 1.
C D = C E. Super
D E b fac triang. æ- b 1. 1.
quilat. D F E. Ducta F C perpendicularis est.
Nam triangu- l a D F C, E F C sibi mutuo c æ- c constr.
quilatera sunt. d ergo ang. D C F = E C F. d 8. 1.
e ergo F C perpendicularis est. Q. E. F. e 10. def.

Praxis tam hujus, quam sequentis expeditur
facillime ope normæ.

PROP. XII.

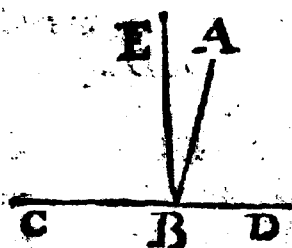


Super datam
rectam lineam
infinitam A B, à
dato puncto C
quod in ea non est
perpendicularem
rectam C G de-
ducere.

Centro C a describe circulum, qui secet da- a 3. post.
tam A B in punctis E & F b biseca E F in G. du- b 10. 1.
cta C G perpendicularis est.

Ducantur enim C E, C F. Triangu- l a E G C, F G C, sibi mutuo c æquilatera sunt. d ergo an- c constr.
guli E G C, F G C, æquales, & e proinde recti d 8. 1.
sunt. Q. E. F. e 10. def.

PROP. XIII.



Cum recta linea A B, super
rectam lineam C D consistens,
facit angulos A B C, A B D, aut
duos rectos, aut duobus rectis
æquales efficiet.

a 10. def.
b 11. 1.
c 19. ax.
d 3. ax.
e 2. ax.

Si anguli ABC , ABD parēs sint *a* liquet illos rectos esse; sin inæquales sint, ex B excitetur perpendicularis BE . Quoniam ang. $ABC = \text{Rect.} + ABE$; & ang. $ABD = \text{Rect.} - ABE$; erit $ABC + ABD = 2 \text{ Rect.} + ABE - ABE = 2 \text{ Rect.}$ Q. E. D.

Coroll.

1. Hinc, si unus ang. ABD rectus sit, alter ABC etiam rectus erit; si hic acutus, ille obtusus erit, & contra.

2. Si plures rectæ quàm una ad idem punctum eidem rectæ insistant, anguli fient duobus rectis æquales

3. Duæ rectæ invicem secantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales.

4. Omnes anguli circa unum punctum constituti faciunt quatuor rectos, patet ex Coroll. 2.

PROP. XIV.

Si ad aliquam rectam lineam AB , atque ad ejus punctum B duæ rectæ lineæ CB, BD non ad easdem partes ductæ, eos qui sunt deinceps angulos ABC, ABD duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ CB, BD .

Si negas, faciant CB, BE unam rectam, ergo ang. $ABC + ABE = 2 \text{ Rect.}$ b $= ABC + ABD$. c Quod est absurdum.

PROP. XV.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD se mutuo secuerint, angulos ad verticem CEB, AED æquales inter se efficient.

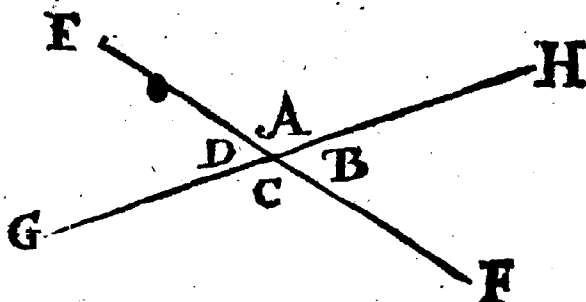
Nam ang. $AEC + CEB = 2 \text{ Rect.}$ a $= ABC + AED$. b Ergo $CEB = AED$. Q. E. F.

Schol.

a 13. 1.
b hyp.
c 9. ax.

a 13. 1.
b 3. ax.

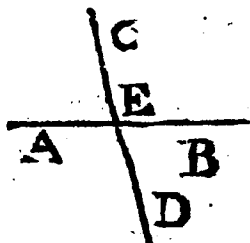
Schol.



Si ad aliquam rectam lineam GH , atque ad ejus punctum, A duæ rectæ lineæ EA , AF non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem D , & B æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ EA , AF in directum sibi invicem erunt.

Nam $2 \text{ Rect.} = a \text{ } D + A \text{ } a = B + A \text{ } b$ ergo $a \text{ } 13. 1.$
 EA , AF sunt in directum sibi invicem. Q.E.D. $b \text{ } 14. 1.$

Schol. 2.

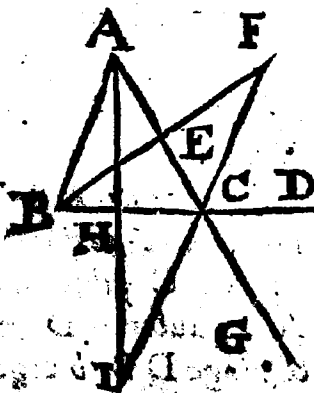


Si quatuor rectæ lineæ EA , EB , EC , ED ab uno puncto E exeuntes, angulos oppositos ad verticem æquales inter se fecerint, erunt quælibet duæ lineæ AE , EB , & CE , ED

in directum positæ.

Nam quia $\text{ang. } AEC + AED + CEB + DEB = 4 \text{ Rect.}$ erit $AEC + AED (= a \text{ } 4. \text{ Cor. } b \text{ } CEB + DEB) = 2 \text{ Rect.}$ c ergo CE , D , & $13. 1.$
 AE , B sunt rectæ lineæ. Q.E.D. $b \text{ } \text{Hyp. 2 ax. } c \text{ } 14. 1.$

PROP. XVI.



Cujuscunque Trianguli ABC uno latere BC producto, externus angulus ACD utrolibet interno & opposito CAB , BCA , major est.

Latera AC , BC a bise- $a \text{ } 10. 1.$ &
cent rectæ AH , BE , è qui- $1.$ post.
bus productis b cape $EF =$
 BE , b & $HI = AH$, Con- $b \text{ } 3. 1.$
juganturque FE , IC , & producatur ACG .

B

Quo;

c constr.
d 15. 1.
e 4. 1.
f 15. 1.
g 9. ax.

Quoniam $CEC = EA$, & $EFc = EB$, &
ang. $FECD = BEA$, erit ang. $ECF = EAB$.
Simili argumento ang. $ICH = ABH$. ergo
totus ACD (f. BEG) g major est utrovis CAB ,
& ABC . Q. E. D.

P R O P. XVII.

Cujuscunque trianguli
 ABC duo anguli duobus re-
ctis sunt minores, omnifariam
sumpti.

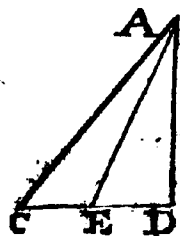
Producatur latus BC .

a 13. 1.
b 16. 1.
c 4. ax.

Quoniam ang. $ACD +$
 $ACB = 2$ Rect. & ang.
 $ACD + A$, erit $A + ACB = 2$ Rect. Eo-
dem modo erit ang. $B + ACB = 2$ Rect. De-
nique producto latere AB , erit similiter ang.
 $A + B = 2$ Rect. Quæ E. D.

Coroll.

1. Hinc, in omni triangulo, cujus unus an-
gulus fuerit rectus, vel obtusus, reliqui acuti
sunt.



2. Si linea recta AE cum alia recta CD an-
gulos inæquales faciat, unum AED acutum, &
alterum AEC obtusum, linea perpendicularis
 AD ex quovis ejus puncto A ad aliam illem
 CD demissa, cadet ad partes anguli acuti AED .

Nam si AC ad partes anguli obtusi ducta, di-
catur perpendicularis, in triangulo AFC erit
ang. $AEC + ACE = 2$ Rect. x Q. F. N.

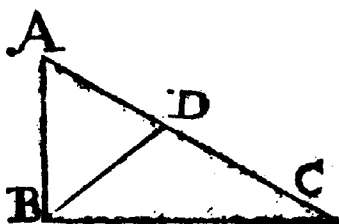
x 17. 1.

3. Omnes anguli trianguli æquilateri, & duo
anguli trianguli isoscelis, supra basim, acuti sunt

P R O P. XVIII.

Omnis trianguli ABC
maius latus AC majorem
angulum ABC subtendit.

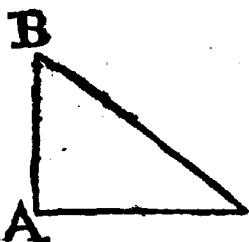
a 3. 1.
b 5. 1.



Ex ACA aufer ADB =
 AB , & junge DB , b ergo
ang. $ADB = ABD$. Sed
 $ADB > ADB$

$c \triangle ADB \sqsubset C$. ergo $ABD \sqsubset C$. d ergo totus c 16. 1.
ang. $ABC \sqsubset C$. Eodem modo erit $ABC \sqsubset d$ 9. ax.
A. Q. E. D.

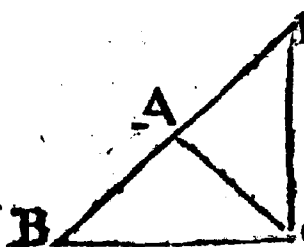
PROP. XIX.



Omnis trianguli ABC maior angulus A majori lateri BC subtrahitur.

Nam si dicatur $AB = BC$, a erit ang. $A = C$. con- a 5. 1.
Ctra Hypoth. & si $AB \sqsubset BC$,
 b erit ang. $C \sqsubset A$, contra hyp. quare potius, b 18. 1.
 $BC \sqsubset AB$. & eodem modo $BC \sqsubset AC$.
Q. E. D.

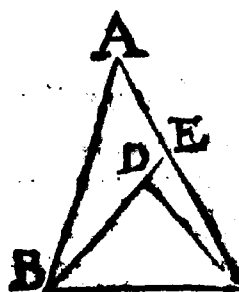
PROP. XX.



*Omnis trianguli ABC duo latera BA, AC reliquo BC sunt maiora quomodo-
cumque sumpta.*

Ex BA producta a cape a 3. 1.
 $CAD = AC$, & duc DC.
 b ergo ang. $D = ACD$. c ergo totus $BCD \sqsubset b$ 5. 1.
 Dd ergo $BD (c BA + AC) \sqsubset BC$. Q. E. D. c 9. ax.
d 19. 1.

PROP. XXI.

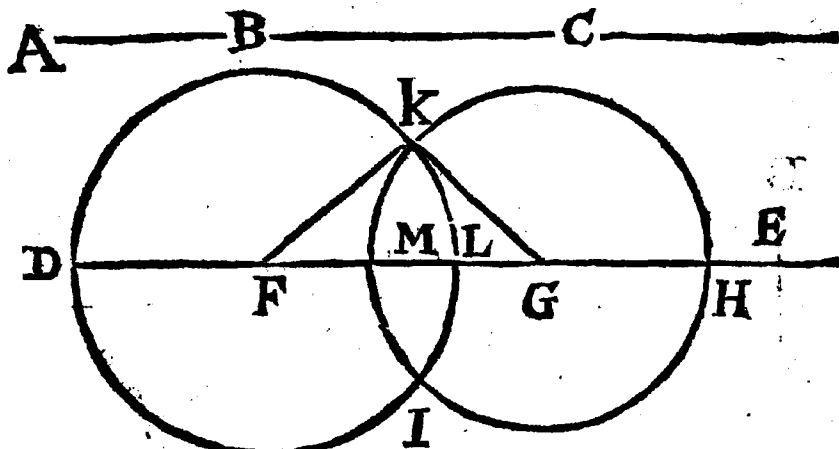


Si super trianguli ABC uno latere BC, ab extremitatibus

duae rectae lineae BD, CD, interius constituta fuerint, haec constituta reliquum trianguli duobus lateribus BA, CA minores quidem

erunt, maiorem vero angulum BDC continent.

Producatur BD in E. estque $CE + ED a \sqsubset a$ 20. 1.
 CD adde commune BD, b erit $BE + EC \sqsubset b$ 4. ax.
 $BD + DC$. Rursus $BA + AE a \sqsubset BE$; b ergo
 $BA + AC \sqsubset BE + EC$. quare $BA + AC \sqsubset$
 $BD + DC$. Q. E. D. 2. Ang. $BDC c \sqsubset c$ 16. 1.
 $DEC c \sqsubset A$. ergo ang. $BDC \sqsubset A$. Q. E. D.



Ex tribus rectis lineis FK, FG, GK , quæ sunt
tribus datis rectis lineis A, B, C , æquales, trian-
gulum FKG constituere. Oportet autem duas re-
liquas esse majores omnifariam sumptas; quoniam
uniuscujusque trianguli duo latera omnifariam
sumpta reliquo sunt majora.

3. 1.

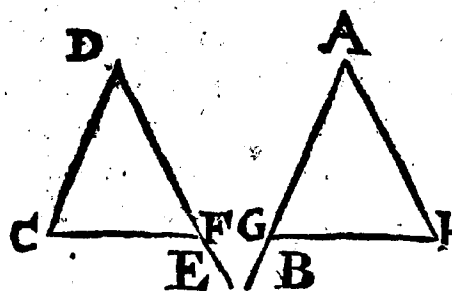
3. post.

c 15. def.

d 1. ax.

Et infinita DE a sume DF, FG, GH datis
 A, B, C ordine æquales. Tum si b centris $F, &$
 G , intervallis $FD, & GH$ ducantur circuli se
intersecantes in K ; junctis rectis KF, KG con-
stituetur triangulum FKG , c cujus latera $FK,$
 FG, GK tribus DF, FG, GH , d id est tribus
datis A, B, C æquantur. Q. E. F.

P R O P. XXIII.



Ad datam rectam
lineam AB , datum-
que in ea punctum
 A , dato angulo re-
ctilineo D æquale
angulum rectiline-
um A constituere.

a 1. post.

b 3. 1.

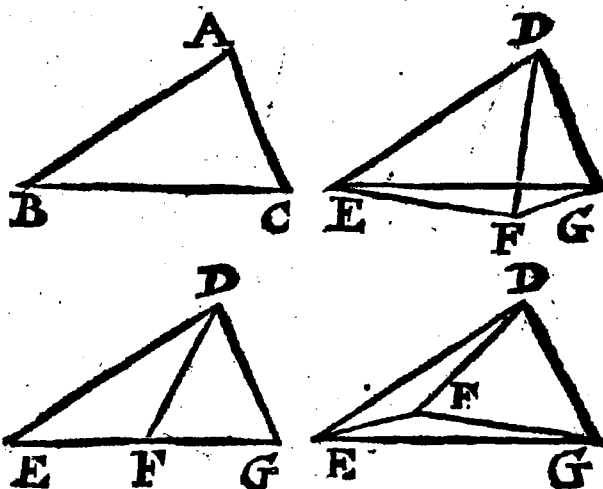
c 22. 1.

d 8. 1.

a Duc rectam CF secantem dati anguli late-
ra utcumque, b Fac $AG = CD$. Super AG
c constitute triangulum alteri CDF æquilate-
rum, ita ut $AH = DF, & GH = CF$; & ha-
bebis ang. $A d = D$. Q. E. F.

• P R O P.

PROP. XXIV;



Si duo triangula ABC, DEF duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habuerint, utrumque utrique; angulum vero A angulo EDF majorem sub aequalibus rectis lineis contentum, & basim BC, basi EF, majorem habebunt.

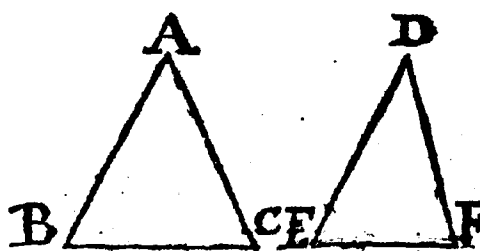
a Fiat ang. EDG = A, & DG b = DF c = a 23. 1. A C, connectanturque EG, FG. b 3. 1.

1. Cas. Si EG cadit supra EF. Quia AB c hyp. d = DE, & AC = e DG, & ang. A e = EDG, d hyp. ferit BC = EG. Quia vero DF e = DG, e constr gerit ang. DFG = DGF. b ergo ang. DFG = f 4. 1. EGF; b & proinde ang. EFG = EGF. k quare g 5. 1. EG (BC) = EF. Q. E. D. h 9. ax.

2. Cas. Si basis EF basi EG coincidat, l li- k 19. 1. quet EG (BC) = EF. l 9. ax.

3. Sin EG cadat infra EF. Quoniam DG + GE m = DF + FE, si hinc inde auferantur m 21. 1. DG, DF, aequales, manet EG (BC) = n 5. ax, EF. Q. E. D.

PROP. XXV.



Si duo triangu-
la ABC, DEF
duo latera AB,
AC duobus late-
ribus DE, DF
aequalia habuerint,

utrumque utrique, basim vero B. basi EF ma-
jorem; & angulum A sub aequalibus rectis lineis
contentum angulo D majorem habebunt.

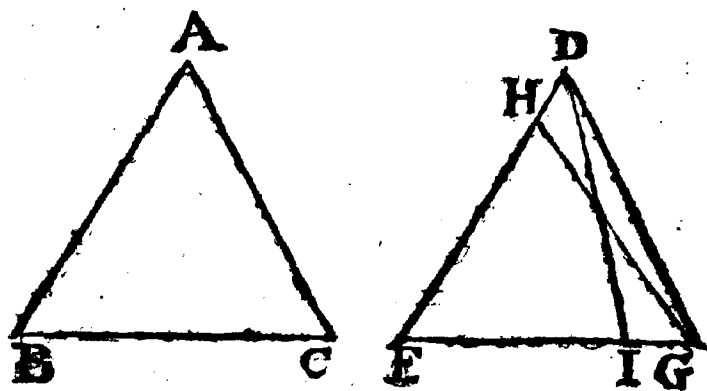
a 4. I.

Nam si dicatur ang. A = D. a erit basis BC
= EF, contra Hyp. Sin dicatur ang. A > D.

b 24. I.

b erit BC > EF, etiam contra Hyp. ergo BC
= EF. Q. E. D.

PROP. XXVI.



Si duo triangula BAC, EDG, duos angulos
B, C, duobus angulis E, DGE, aequales habue-
rint, utrumque utrique, unumque latere uni lateri
aequale, five quod aequalibus adjacet angulis, seu
quod utrius aequalium angulorum subtenditur: reliqua
latera reliquis lateribus aequalia, utrumque utrique,
& reliquum angulum reliquo angulo aequalem ha-
bebunt.

1. Hyp. Sit BC = EG. Dico BA = ED, &
AC = DG, & ang. A = EDG. Nam si dicatur
ED < BA, a fiat EH = BA, ducaturq; GH.

23. I.

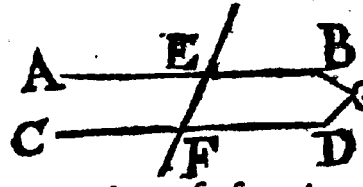
Quoniam

Quoniam $ABb = HE$, & $BCc = EG$, & b *suppos.*
 ang. $Bc = E$, erit ang. $EGHd = Ce = DGE$. c *hyp.*
 f. Q. E. A. ergo $AB = ED$. Eodem modo ACd 4. I.
 $= DG$. d quare etiam ang. $A = EDG$. e *hyp.*

2. *Hyp.* Sit $AB = ED$. Dico $BC = EG$, & f. 9. *ax.*
 $AC = DG$ & ang. $A = EDG$. Nam si dicatur
 $EG < BC$, fiat $EI = BC$, & connectatur DI .
 Quia $ABg = ED$, & $BCb = EI$, & ang. Bg *hyp.*
 $g = E$, erit ang. $EIDk = Cm = EGD$. a Q. h *suppos.*
 E. A. ergo $BC = EG$. ergo ut prius, $AC = k$ 4. I.
 DG , & ang. $A = EDG$. Q. E. D. m *hyp.*

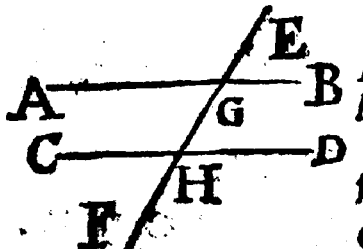
P R O P. XXVII.

n 16. I.

Si in duas rectas lineas

 AB, CD recta incidens
 linea EF alternatim an-
 gulos AEF, DFE , a -
 quales inter se fecerit, *parallelæ erunt inter se illæ*
rectæ lineæ AB, CD .

Si AB, CD dicantur non esse parallelæ;
 conveniant productæ, nempe in G . quo posito
 angulus externus AEF interno DFE a major a 16. I.
 erit, cui tamen ponitur æqualis. Quæ repugnat.

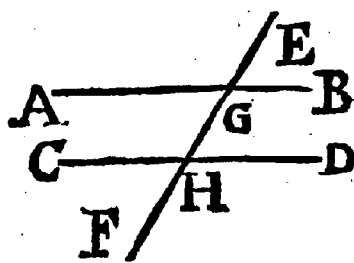
P R O P. XXVIII.

Si in duas rectas lineas

 AB, CD recta incidens
 linea EF externum angu-
 lum AGE interno & op-
 posito, & ad easdem partes
 CHG æqualem fecerit,
 aut internos & ad easdem partes AGH, CHG
 duobus rectis æquales; *parallelæ erunt inter se ipsæ*
rectæ lineæ AB, CD .

1. *Hyp.* Quia per *hyp.* ang. $AGE = CHG$,
 & erit altern. $BGH = CHG$. b *parallelæ* igitur sunt AB, CD . Q. E. D. a 15. I.
 b 17. I.

2. *Hyp.* Quia ex *hyp.* Ang. $AGH + CHG = a$ 13. I.
 2 Rect. $a = AGH + BGH$, b erit $CHG = b$ 3. *ax.*
 BGH . Ergo c AB, CD parallelæ sunt. Q. E. D. c 17. I.

PRO P. XXIX.

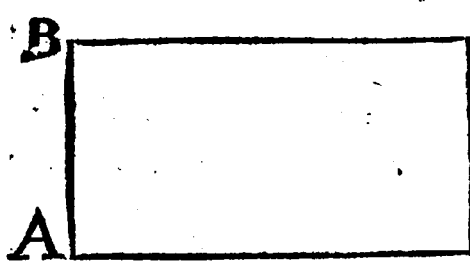


In parallelas rectas lineas AB, CD, recta incidens linea EF, & alternatim angulos DHG, AGH aequales inter se efficit; & externum BGE interno, & opposito, & ad easdem partes DHE aequalem; & internos & ad easdem partes AGH, CHG duobus rectis aequales facit.

a 13. ax.
b 13. I.
c 13. ax.
d 15. I.

Liquet AGH, + CHG = 2 Rect. a alias AB, CD non essent parallelæ, contra hyp. Sed & ang. DHG + CHG b = 2 Rect. ergo DHG c = AGH d = BGE. Q. E. D.

Coroll.

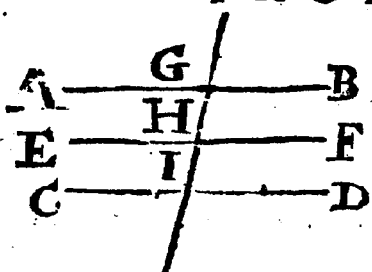


Hinc. omne Parallelogrammum AC habens unum angulum rectum A, est rectangulum.

a 29 I.
b 3. ax.

Nam A + B a = 2 Rect. ergo cum A rectus sit, b etiam B rectus erit. Eodem argumento D, & C recti sunt.

PRO P. XXX.



Quæ (AB, CD) eidem rectæ lineæ EF parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

Tres rectas secet ut-
cunque recta GI. Quo-

a 29. I.
b 1. ax.
c 27. I.

niam AB, EF parallelæ sunt, a erit ang. AGI = EHI, Item propter CD, EF parallelas, a erit ang. EHI = DIG. b ergo ang. AGI = DIG. c quare AB, CD parallelæ sunt. Q. E. D.

PRO P.

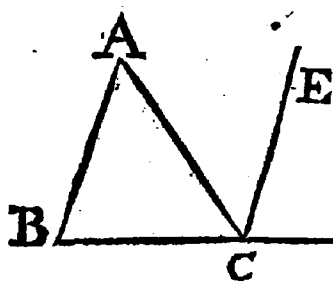
PROP. XXXI.

A dato puncto A data recta linea B C ducere parallelam rectam lineam



Ex A ad datam B C duc rectam utcumque A D. ad quam, ejusque punctum A & fac ang. D A E = A D C. b erunt a 23. I. b 27. I.
A E, B C parallelæ. Q. E. F.

PROP. XXXII.



Cujuscunque trianguli A B C uno latere B C producto, externus angulus A C D duobus internis, & oppositis, A, B est æqualis. Et trianguli tres interni

anguli, A, B, A C B duobus sunt rectis æquales.

Per C a duc C E parall. B A. Ang. A b = A C E. & ang. B b = E C D. ergo A + B c = A C E + E C D d = A C D. Q. E. D. Porro A C D + A C B e = 2 Rect. f ergo A + B + A. C B = 2 Rect. Q. E. D.

Corollaria.

1. Tres simul anguli cujusvis trianguli æquales sunt tribus simul cujuscunque alterius. Unde

2. Si in uno triangulo duo anguli (aut singuli, aut simul) æquales sint duobus angulis (aut singulis, aut simul) in altero triangulo, etiam reliquus reliquo æqualis est. Item, si duo triangula unum angulum uni æqualem habeant, reliquorum summæ æquantur.

3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui unum rectum conficiunt. Item, angulus, qui duobus reliquis æquatur, rectus est.

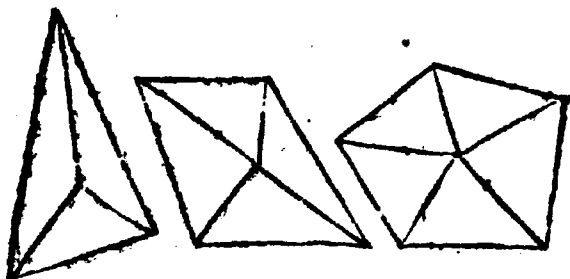
4. Om in Isoscele angulus æquis cruribus contentus rectus est, reliqui ad basim sunt semirecti.

5. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti, nam $\frac{1}{3} \times 2 \text{ Rect.} = \frac{2}{3} \text{ Rect.}$

Schol.

Hujus propositionis beneficio, cujuscunque figuræ rectilineæ tam interni quam externi anguli quot rectos conficiant, innotescet per duo sequentia theoremata.

THEOREMA I.



Omnes simul anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiuntur bi tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Ex quovis puncto intra figuram ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ figuram resolvunt in tot triangula quot habet latera. Quare cum singula triangula conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa dictum punctum conficiunt quatuor rectos. Ergo, si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa id punctum, anguli reliqui qui componunt angulos figuræ conficient bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

Hinc Coroll. Omnes ejusdem speciei rectilineæ figuræ æquales habent angulorum summas.

THEOREMA 2.

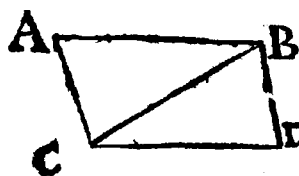
Omnes simul externi anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiuntur quatuor rectos.

Nam singuli figuræ interni anguli cum singulis externis conficiunt duos rectos. Ergo interni

terni simul omnes, cum omnibus simul externis
conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ.
Sed (ut modo ostensum est,) interni simul omnes
etiam cum quatuor rectis efficiunt bis tot rectos
quot sunt latera figuræ. Ergo externi anguli
quatuor rectis æquantur. Q. E. D.

Coroll. Omnes cujuscunque speciei rectilinearæ
figuræ æquales habent externorum angulorum
summas.

P R O P. XXXIII.

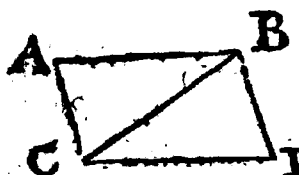


*Rectæ lineæ AC, BD, quæ
æquales & parallelas lineas
AB, CD, ad partes easdem
dem conjungunt, & ipsæ æ-*

quales ac parallelae sunt.

Connectatur CB. Quoniam ob AB, CD
parallelas. ang. $ABC = BCD$, & per hyp. $AB = CD$, & latus CB commune est, $\therefore$ erit $AC = BD$, & ang. $ACB = CBD$. $\therefore$ ergo AC, BD etiam parallelae sunt. Q. E. D.

P R O P. XXXIV.



Parallelogrammorum spa-
tiorum ABDC equalia sunt
inter se quæ ex adverso late-
ra AB, CD; ac AC, BD;
angulique A, D, & A, B, D, A, C, D; & illa bisse-
riam fecit diameter CB.

Quoniam AB, CD æ parallelae sunt, $\therefore$ erit a hyp.
ang. $ABC = BCD$. Item ob AC, DB æ paral- b 29. 1.
lelas, $\therefore$ erit ang. $ACB = CBD$. $\therefore$ ergo toti an- c 2. ax.
guli ACD, ABD æquantur. Similiter ang.
 $A = D$. Porro, cum communi lateri CB adja-
ceant anguli ABC, ACD , ipsis BCD, CBD
paris, $\therefore$ erunt $AC = BD$, & $AB = CD$. adeo- d 26. 1.
que etiam triang. $ABC = CBD$. Q. E. D.

SCHOL.

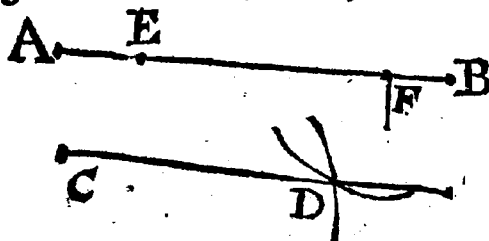
S C H O L.

Omne quadrilaterum A B D C habere latera opposita aequalia, est parallelogrammum.

a 27. 1.

Nam per 8. 1. ang. $A B C = B C D$. $\therefore$ ergo $A B, C D$ parallelæ sunt. Eadem ratione ang. $B C A = C B D$; $\therefore$ quare $A C, B D$ etiam parallelæ sunt. $\therefore$ Ergo $A B D C$ est parallelogrammum. Q. E. D.

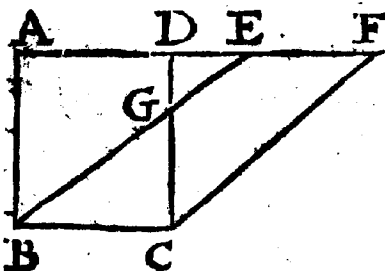
b 35. def. 1.



Hinc expeditius per datum punctum C datæ rectæ $A B$ ducetur parallela $C D$.

Sume in $A B$ quodvis punctum E . centris E . & C ad quodvis intervallum duc æquales circulos $E F, C D$. centro vero F , spatio $E C$ duc circulum $F D$, qui priorem $C D$ secet in D . Erit ducta $C D$ parall. $A B$. Nam ut modo demonstratum est, $C E F D$ est parallelogrammum.

P R O P. XXXV.



Parallelogramma $B C D A, B C F E$ super eadem basi $B C$, & in eisdem parallelis $A F, B C$ constituta, inter se sunt æqualia.

Nam $A D = B C$

a 34. 1.

b 2. ax.

c 29. 1.

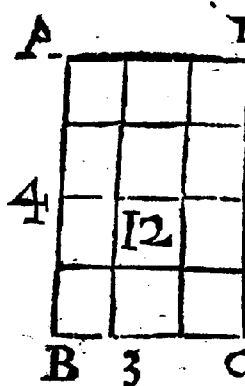
d 4. 1.

e 3. ax.

f 2. ax.

$A E = E F$. adde communem $D E$, $\therefore$ erit $A E = D F$. Sed & $A B = D C$, & ang. $A = C D F$. $\therefore$ ergo triang. $A B E = D C F$. aufer commune $D G E$, $\therefore$ erit Trapez. $A B G D = E G C F$. adde commune $B G C$, $\therefore$ erit Pgr. $A B C D = E B C F$, Q. E. D. Reliquorum casuum non dissimilis, sed simplicior & faciliior est demonstratio.

Scholium.

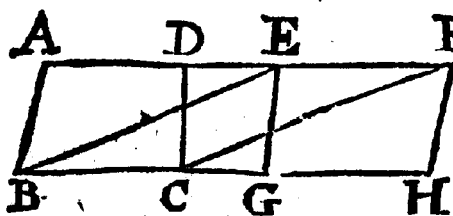


D Si latus AB parallelogrammi rectanguli $ABCD$ ferri intelligatur perpendiculariter per totam BC , aut BC per totam AB , producet eo motu area rectanguli $ABCD$. Hinc rectangulum fieri dicitur ex ductu seu multiplicatione duorum laterum contiguum. Sit exempl. gr. BC pedum 3, AB 4. Duc 3. in 4; proveniunt 12. pedes quadrati pro area rectanguli.

Hoc supposito, ex hoc theoremate cujuscunq; parallelogrammi (* $EBCF$) habetur dimensio. Illius enim area producit ex altitudine BA ducta in basim BC . Nam area rectanguli AC parallelogrammo $EBCF$ æqualis, fit ex BA in BC , ergo, &c.

* v. fig. propof. 35.

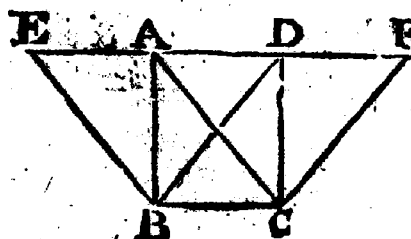
P R O P. XXXVI.



Parallelogramma $BCDA$, $GHFE$ super æqualibus basibus BC , GH , & in eisdem parallelis AF , BH constituta, inter se sunt æqualia.

Ducantur BE , CF . Quia $BCa = GHb = a$ hyp. EF , erit $BCFE$ parallelogrammum. ergo Pgr. b 34. 1. $BCDA d = BCFE d = GHFE$. Q.E.D. c 33. 1.

P R O P. XXXVII.

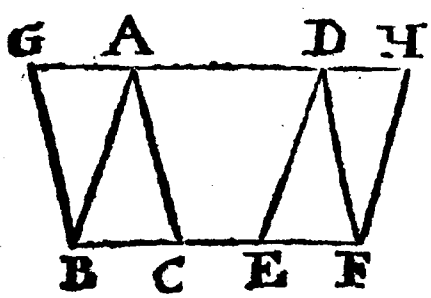


Triangula BCA , BCD super eadem basi BC constituta, & in eisdem parallelis BC , EF inter se sunt æqualia.

a Duc

- a 31. I. a Duc BE parall. CA, & CF parall. BD;
 b 34. I. Erit triang. BCA $a = \frac{1}{2}$ Pgr. B C A E $= c \frac{1}{2}$
 c 35. I. & B D F C $b = B C D$. Q. E. D.
 7. ax.

P R O P. XXXVIII.



Triangula BCA, EFD super aequalibus basibus BC, EF constituta, & in eisdem parallelis GH, BF, inter se sunt aequalia.

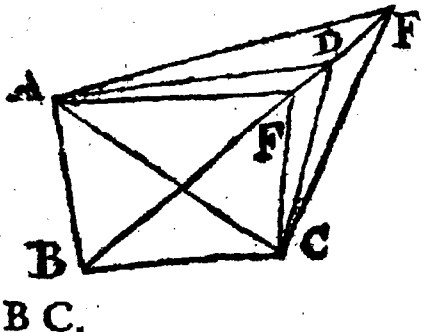
Duc BG parall. CA. & FH parall. ED. erit triang. BCA $a = \frac{1}{2}$ Pgr. B C A G $b = \frac{1}{2}$ EDHF $c = EFD$. Q. E. D.

- a 14. I.
 b 36. I &
 7. ax.
 c 34. I.

Schol.

Si basis BC $\sqsubset$ EF, liquet triang. BAC $\sqsubset$ EDF. & si BC $\supset$ EF, erit BAC $\supset$ EDF.

P R O P. XXXIX.

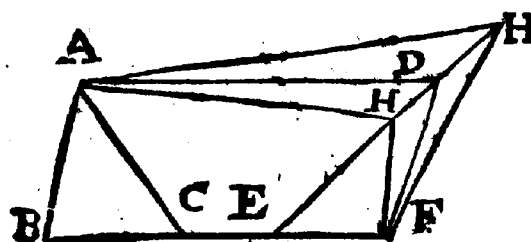


Triangula aequalia BCA, BCD, super eadem base BC, & ad eandem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis AD, BC.

Si negas, sit altera AF parall. BC; & ducatur CF. ergo triang. CBF $a = C B A$ $b = C B D$ & Q. E. A.

- a 37. I.
 b hyp.
 c 9. ax.

PROP. XI.



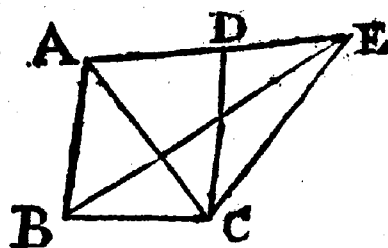
Triangula æqualia BCA, EFD super aequalibus basi- bus BC, EF, & ad easdem

partes constituta, & in eisdem sunt parallela AD. BF.

Si negas, sit altera AH parall. BF. & ducatur FH. ergo triang. EFH $a = BCA$ $b =$ a 38. I. EFD. $c = Q. E. A.$ b hyp.

c 9. ax.

PROP. XII.



Si parallelogrammum ABCD cum triangulo BCE eandem basim BC habuerit, in eisdemque fuerit parallela AE, BC, duplum erit

parallelogrammum ABCD ipsius trianguli BCE.

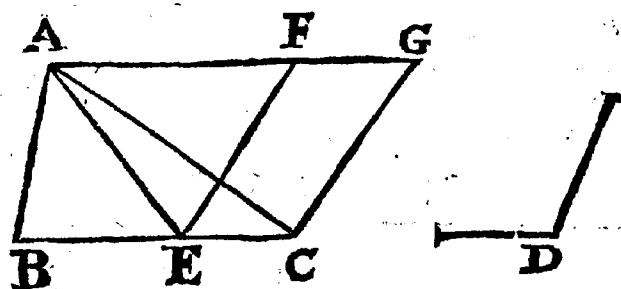
Ducatur AC. Triang. BCA $a = BCE.$ er. a 37. I. go Pgr. ABCD $b = 2 BCA$ $c = 2 BCE.$ b 34. I. Q. E. D. c 6. ax.

Scholium.

Hinc habetur area cujuscunque trianguli BCE. Nam cum area parallelogrammi ABCD producat ex altitudine in basim ducta; producetur area trianguli ex dimidia altitudiue in basim ducta, vel ex dimidia basi in altitudinem, ut si basi BC sit 8, & altitudo 7; erit trianguli BCE area, 28.

PROP.

PROP. XLII.



Dato triangulo ABC æquale parallelogrammum ECGF constituere in dato angulo rectilineo D.

a 31. 1.

b 23. 1.

c 10. 1.

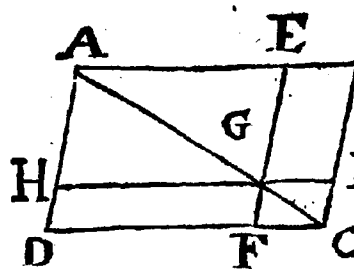
Per A a duc AG parall. BC, b fac ang. BCG = D. basim BC c biseca in E. a duc EF parall. CG. Dico factum.

d 38. 1.

e 41. 1.

Nam ducta AE, erit ex constr. ang. ECG = D, & triang. BAC d = a AEC e = Pgr. ECGF. Q. E. F.

PROP. XLIII.



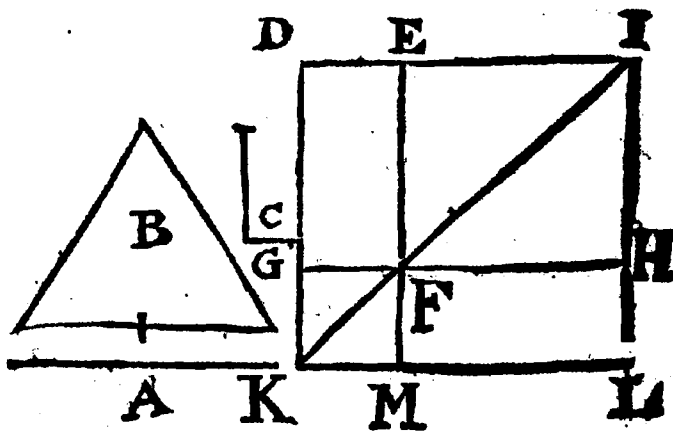
In omni parallelogrammo ABCD complementa DG, GB eorum quæ circa diametrum AC sunt parallelogrammorum HE, FI inter se sunt æqualia.

a 34. 1.

b 3. ax.

Nam Triang. ACD, = a ACB, & triang. AGH a = AGE. & triang. GCF a = GCI. b ergo Pgr. DG = GB. Q. E. D.

PROP. XLIV.

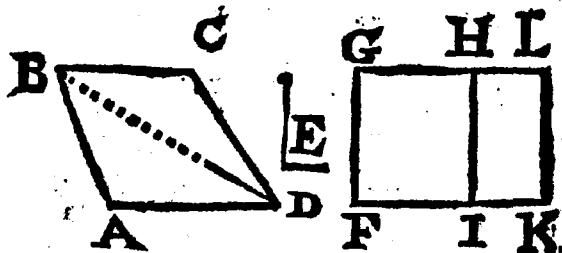


Ad datam rectam lineam A, dato triangulo B, aequale parallelogrammum F L applicare in dato angulo rectilineo C.

a Fac Pgr. F D = triang. B, ita ut ang. GFE ^a 42. I. = C. & pone lateri G F in directum F H = A. Per H *b* duc I L parall. EF; cui occurrat D E ^b 31. I. producta ad I. per I F ductæ rectæ occurrat D G protracta ad K. Per K *b* duc K L parall. G H; cui occurrant E F, & I H prolongatæ ad M, & L. Erit F L. Pgr. quæsitum.

Nam Pgr. F L c = F D = B d & ang. M F H ^c 43. I. = G F E = C. Q. E. F. Ad 15. I.

PROP. XLV.



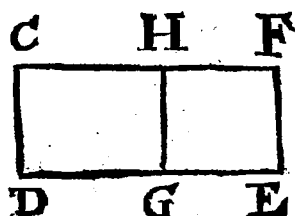
Ad datam rectam lineam F G dato rectilineo ABCD aequale parallelogrammum F L constituere, in dato angulo rectilineo E.

Datum rectilineum resolve in triangula B A D, B C D. *a* Fac. Pgr. F H = B A D ita ut ^a 44. I. ang. F = E, producta F I, *a* fac (ad H I) Pgr. I L

b 19. ax.
c Constr.

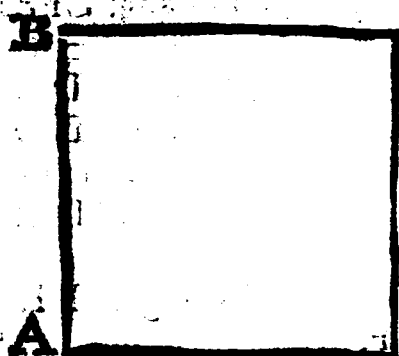
IL = BCD. erit Pgr. FL = b FH + IL c =
ABCD. Q. E. F.

Schol.



Hinc facile invenitur excessus HE, quo rectilineum aliquod A superat rectilineum minus B; nimirum si ad quamvis rectam CD applicentur Pgr. DF = A. & DH = B.

PROP. XLVI.



A data recta linea AD quadratum AC describere.

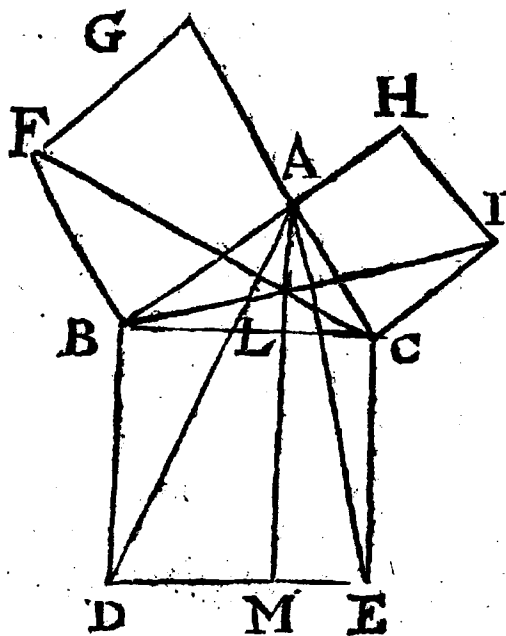
a Erige duas perpendiculares AB, DC. b æquales datæ AD; & junge BC. dico factum.

Cum enim ang. A + D c = 2 Rect. d erunt AB, DC parallelæ. Sunt vero etiam e æquales, f ergo AD, BC pares etiam sunt, & parallelæ. ergo Figura AC est parallelogramma, & æquilatera. Anguli quoque omnes recti sunt, g quoniam unus A est rectus. h ergo AC est quadratum. Q. E. F.

Eodem modo facile describes rectangulum, quod sub datis duabus rectis contineatur.

PROP.

P R O P. XLVII.



In rectangulis
triangulis BAC
quadratum BE,
quod à latere
BC rectum an-
gulum BAC
subtendente de-
scribitur, aequale
est eis, BG,
CH, quæ à la-
teribus AB, AC
rectum angulum
continentibus de-
scribuntur.

Junge AB;
AD; & duc AM
parall. CE.

Quoniam ang. DBC $\hat{=}$ FBA; adde com- a 12. ax.
munem ABC, erit ang. ABD $\hat{=}$ FBC. Sed &
AB $\hat{=}$ FB, & BD $\hat{=}$ BC. c ergo triang. b 29. def.
ABD $\hat{=}$ FBC. atqui Pgr. BM. d $\hat{=}$ 2 ABD; & c 4. 1.
Pgr. BG d $\hat{=}$ 2 FBC (nam GAC est una recta d 41. 1.
per hyp. & 14. 1.) e ergo Pgr. BM $\hat{=}$ BG. Si- e 6. ax.
mili discursu Pgr. CM $\hat{=}$ CH. Totum igitur
BE $\hat{=}$ f BG + CH. Q. E. D. f 2. ax.

Schol.

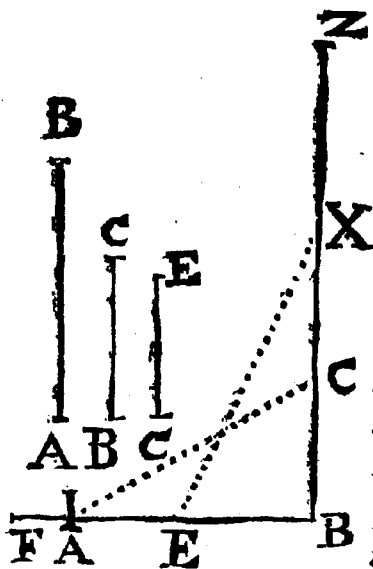
Hoc nobilissimum, & utilissimum theorema
ab inventore Pythagora, Pythagoricum dici me-
ruit. Ejus beneficio quadratorum additio, &
substractio perficitur; quò spectant duo sequen-
tia problemata.

PROBL. I.

And. Targ.

*Datis quocunque qua-
dratis, unum omnibus a-
quale construere.*

Dentur quadrata tria,
quorum latera sint AB,
BC, CE. & Fac ang. re-
ctum FBZ infinita ha-
bentem latera, in eaque
transfer BA, & BC, &
junge AC, *b* erit ACq
= ABq + BCq. Tum
AC transfer ex B in X;
& CE tertium latus da-
E, & jung e EX, *b* erit
+ BXq (ACq) *c* = CEq
F.



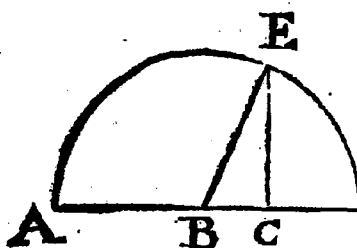
211.1.

b6, 7, C.

52, 421

PROBL. 2.

*Datis duabus rectis in-
equalibus A B, B C, ex-
hibere quadratum, quo
quadratum majoris A B
excedit quadratum mino-
ris B C.*



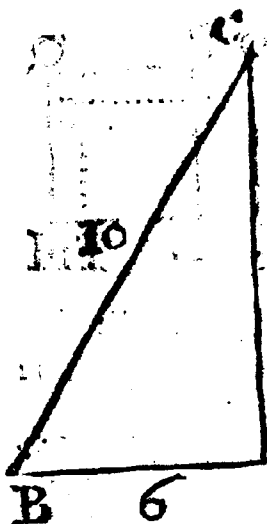
Centro B intervallo BA describe circulum. ex C erige perpendicularem CE occurrentem peripheriæ in E. & ducatur BE. $\angle$ Erit B Eq (BAq) = BCq + CEq. Ergo BAq — BCq = CEq. Q. E. F.

247. 1.

b3. 4x.

PROBLE!

PROBL. 3.

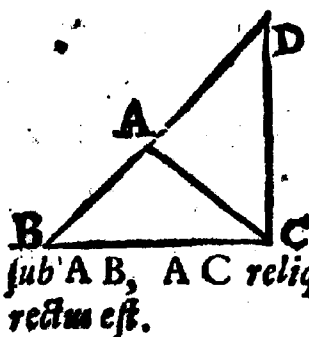


Notis duobus quibuscunque lateribus trigoni rectanguli ABC, reliquum invenire.

Latera rectum angulum ambientia sint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. ergo 47. 1. cum $AC^2 + AB^2 = 64 + 36 = 100 = BC^2$. erit $BC = \sqrt{100} = 10$.

Nota sint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. ergo cum $BC^2 - AB^2 = 100 - 36 = 64 = AC^2$. erit $AC = \sqrt{64} = 8$.

PROP. XLVIII.



Si quadratum quod ab uno latere BC trianguli describitur, aequale sit ei quod à reliquis trianguli lateribus AB, AC describuntur quadratis, angulus BAC comprehensus sub AB, AC reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

Duc ad AC perpendicularem DA = AB, & junge CD.

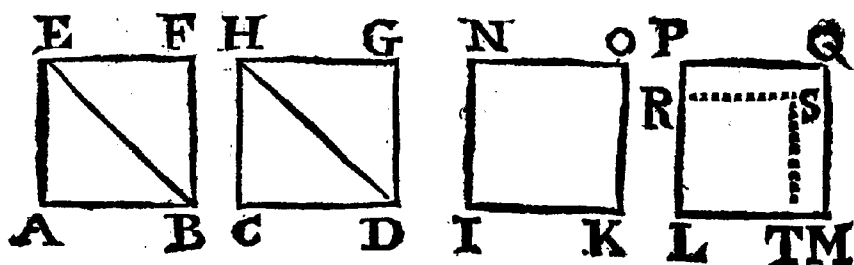
Jam $CD^2 = AD^2 + AC^2 = AB^2 + AC^2$ 47. 1. $AC^2 = BC^2$. * ergo $CD = BC$. ergo trian- * Vide seq. gula CAB, CAD, sibi mutuo æquilatera sunt; Theor. quare ang. CAB = CAD = Rect. Q.E.D. b 8. 1.

Schol.

c Hyp.

Assumpsimus exinde quod $CD = BC$, sequi $CD = BC$. Hoc vero manifestum fiet ex sequenti theoremate.

THEOREMA.



Linearum aequalium AB, CD, *aequalia sunt quadrata* AF, CG; & *quadratorum aequalium* NK, PM *aequalia sunt latera* IK, LM.

Pro 1 Hyp. Duo diametros EB, HD. Li-
 234. 1. quet $AF = a$ 2 triang. $EAB = b$ 2 triang.

b 4. 1. & $HCD = a$ CG. Q.E.D.

6. ax. 2. Hyp. Si fieri potest, fit $LM \sqsubset IK$. fac

a 46. 1. $LT = IK$; a sitque $LS = LT$ q. ergo LS

b 1. part. $b = NK$ c $= LQ$. d Q.E.A. ergo $LM = IK$.

c hyp.

d 9. ax.]

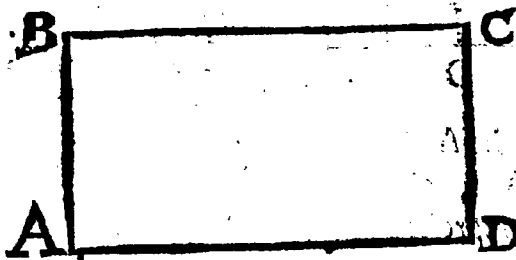
Coroll.

Eodem modo quaelibet rectangula inter se
 æquilatera æqualia ostendentur.

L I B.

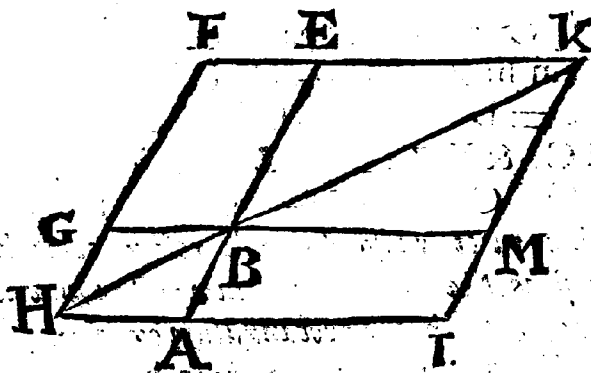
L I B. II.

Definitiones.



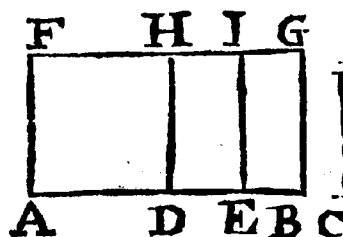
I.  Mne parallelogrammum rectangulum ABCD contineri dicitur sub rectis duabus AB, AD, quæ rectum comprehendunt angulum.

Quando igitur dicitur rectangulum sub BA, AD, vel brevitatis causa; rectangulum BAD, vel $BA \times AD$, (vel ZA pro $Z \times A$;) designatur rectangulum quod continetur sub BA, & AD ad rectum angulum constitutis.



II. In omni parallelogrammo spatio FHIK unumquodq; eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis Gnomon vocetur, ut Pgr. $FB + BI + GA$ (EHM) est Gnomon. item Pgr. $FB + BI + BM$ (GKA) est Gnomon.

P R O P. I.



Si fuerint duæ rectæ lineæ AB, AF, seceturque ipsarum altera AB in quocunque segmenta AD, DE, EB: rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis AB, AF, æquale est eis, quæ sub inspecta AF, & quolibet segmentorum AD, DE, EB comprehenduntur rectangulis.

a II. I.

a Statue AF, perpendicularem ad AB. a per F duc infinitam FG perpendicularem ad AF. a Ex D, E, B erige perpendiculares DH, EI, BG. erit AG rectangulum sub AF, AB, & b 19. ax. I. b est æquale rectangulis AH, DI, EG, hoc est 634. I. (quia DH, EI, AF c pares sunt) rectangulis sub AF, AD; sub AF, DE; sub AF, EB. Q. E. D.

Schol.

Imo si fuerint duæ rectæ, secenturque amba in quocunque partes, idem provenit ex ductu totius in totum, & partium in partes.

a I. 2.

b 2. ax.

Nam sit $Z = A + B + C$, & $Y = D + E$; quia $DZ = DA + DB + DC$, & $EZ = EA + EB + EC$, & $YZ = DZ + EZ$, b erit $ZY = DA + DB + DC + EA + EB + EC$. Q. E. D.

Hinc patet ratio ducendi rectas compositas in compositas. Nam omnia partium rectangula accipere oportet, & habetur rectangulum ex totis.

Sin linearum in se ducendarum signis + admisceantur signa —, etiam signorum ratio habenda est. Quippe ex + in — provenit —; at ex — in — provenit +. Nam sit + A ducenda in B — C. & quoniam + A non affirmatur de toto B, sed de ejus parte tantum, qua superat C, debet AC manere negata. quare prodibit AB — AC. Vel sic; quia

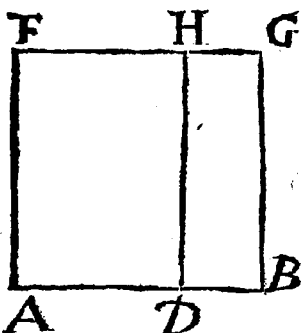
quia B constat partibus C, & B—C, * erit AB * 1. 2.
 $\equiv AC + A$ in B—C; aufer utrinque AC, erit AB
 $\equiv AC \equiv A$ in B—C. Similiter si —A ducenda
 sit in B—C, quoniam ex vi signi — non nega-
 tur A de toto B, sed de ejus solummodo excessu
 supra C, debet AC manere affirmata. proveniet
 ergo $\equiv AB + AC$. Vel sic; quia $AB * \equiv AC + A$
 in B—C; tolle utrinque omnia, erit $\equiv AB \equiv AC$
 $\equiv A$ in B—C; adde AC utrinque, eritque $\equiv AB$
 $+ AC \equiv A$ in B—C.

Atque ex his rite perspectis, quæ subsequuntur
 9. propositiones, aliæque ejusmodi innumeræ, ex
 linearum in se ductarum comparatione emer-
 gentes (quas apud Vietam, & alios Analyttas in
 numerato habes) nullo negotio demonstrantur,
 rem plerumque quasi ad simplicem calculum
 exigendo.

Porro, * liquet productum ex quapiam magni- * 19. ex.
 tudine in numeri cujuslibet partes, æquari pro-
 ducto ex eadem in totum numerum. Ut $5 A + 7$
 $A \equiv 12 A$. & $4 A$ in $5 A + 4 A$ in $7 A \equiv 4 A$ in 12
 A : quare quæ in hoc loco de rectorum in se ductu
 dicta sunt, eadem de numerorum in se multipli-
 catione intelligi possunt. proinde etiam quæ in 9.
 sequentibus theorematibus de lineis affirmantur,
 eadem valent de numeris accepta; quippe cum
 istæ omnes ab hac prima immediate depende-
 ant & deducantur.

Propositiones decem primæ hujus libri valent
 etiam in numeris. Reliquas quilibet tyro exami-
 net. pro hac, sit A F 6, & A B 12, sectus in
 A D 5, D E 3, & E B 4. Estque 6×12 (A G)
 $\equiv 72$. 6×5 (A H) $\equiv 30$ 6 in 3 (D I) $\equiv 18$.
 denique 6×4 (E G) $\equiv 24$. Liquet vero
 $30 + 18 + 24 \equiv 72$.

PROP. II.

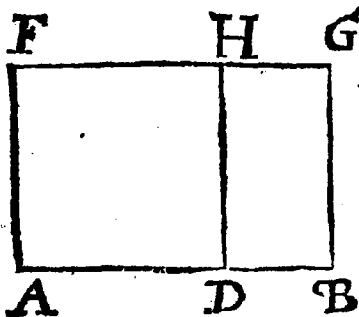


Si recta linea AB secta sit utcumque in D, rectangula quæ sub tota AB & quolibet segmentorum AD, DB comprehenduntur, æqualia sunt ei quod à tota AB fit quadrato.

Erige AF perpendicularem & æqualem AB, & erunt
 $AF \times AD + AF \times DB = AF \times AB$; hoc est
 (ob $AF = AB$) $AB \times AD + AB \times DB = AB^2$.

21.2.

PROP. III.



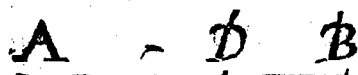
Si recta linea AB secta sit utcumque in D, rectangulum sub tota AB & uno segmentorum AD comprehensum, æquale est illi quod sub segmentis AD, DB comprehenditur rectangulo, & illi quod à prædicto

segmento AD describitur quadrato.

Nam erige AF perpendicularem & æqualem DB, & completis parallelogrammis FD, FB, erit $AB \times AF = AF \times DB + AF \times AD$, hoc est (ob $AF = AD$) $AB \times AD = AD \times DB + AD^2$.

21.2.

PROP. IV.



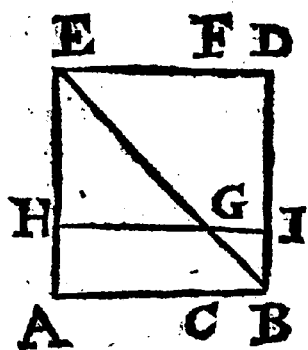
Si recta AB secta sit utcumque in D, quadratum quod à tota AB describitur, æquale est illis quæ à segmentis AD, DB describuntur quadratis, & ei quod bis sub segmentis AD, DB, comprehenditur rectangulo.

Nam $AB^2 = AB \times AD + AB \times DB$. Cum ergo $AB \times AD = AD \times DB + AD^2$ & $AB \times DB = AD \times DB + DB^2$

22.2.

23.2.

$=AD \times DB + DBq$, erit $c ABq = ADq + DBq$ c 1. ax.
 $+2 AD \times DB$.



Aliter. Super AB fac quadratum AD, cujus diameter EB. per divisionis punctum C duc perpendicularem CF; & per G duc HI parall. AB.

Quoniam ang. EHG = A rectus est, & AEB d semirectus, e erit reliquus HGE etiam semirectus. d 4. Cor. 32. 1.
 Ergo HE f = HG g = EF g = AC. b proinde e 32. 1.
 HF quadratum est rectæ AC. eodem modo CI f 6. 1.
 est CBq. ergo AG. GD rectangula sunt sub AC, g 34. 1.
 CB. Quare totum quadratum AD k = ACq h 29. def. 1.
 + CBq + 2 ACB. Q.E.D. k 19. ax. 1.

Coroll.

1. Hinc liquet parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.
2. Item diametrum cujusvis quadrati ejus angulos bifecare.
3. Si $A = \frac{1}{2} Z$; erit $Zq = 4 Aq$, & $Aq = \frac{1}{4} Zq$. item e contra, si $Zq = 4 Aq$. erit $A = \frac{1}{2} Z$.

P R O P. V.

Si recta linea AB secetur in aequalia AC b CB, & non aequalia AD, DB, rectangulum sub inaequalibus segmentis AD, DB comprehensum cum quadrato, quod fit ab intermedia sectione CD, aequale est ei, quod à dimidia CB describitur, quadrato.

Dico $CBq = ADB + CDq$.

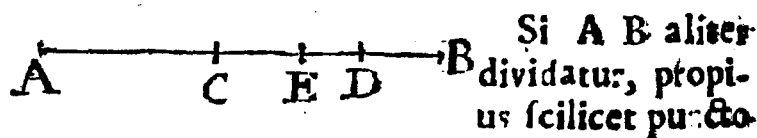
Aequantur

a 4. 2. $\begin{cases} \text{Aequantur} \\ \text{enim ista} \end{cases} \begin{cases} \text{CBq.} \\ a \text{ CDq} + \text{CDB} + \text{DBq} + \text{CDB} \\ \text{CDq} + b \text{ CBD} (c \text{ AC} \times \text{BD}) + \text{CDB} \\ \text{CDq} + d \text{ ADB.} \end{cases}$

b 3. 2. *hyp.*
 d 1. 2. Hoc Theorema paulo aliter effertur, & facilius demonstratur, sic; Rectangulum ex summa & differentia duarum rectarum A, E, aequatur differentie ex ipsis.

* [cb. I. 2.] Nam si A + E ducatur in A - E, *provenit Aq - AE + EA - Eq = Aq - Eq. Q.E.D.

Scholium.



bilectionis, in E; dico AEB = ADB.

a 5. 2. & Nam AEB $a = \text{CBq} - \text{CEq}$ & ADB $a = \text{CBq} - \text{CDq}$, ergo quum $\text{CDq} < \text{CEq}$, erit AEB > ADB. Q.E.D.

Coroll.

b 4. 2. Hinc A Dq + D Bq < AEq + EBq. Nam ADq + DBq + 2 ADB $b = \text{AB} \cdot b = \text{AEq} + \text{EBq} + 2 \text{ AEB}$, ergo quum 2 AEB < 2 ADB, erit ADq + DBq < AEq + EBq. Q.E.D.

c 3. 4x. Unde 2. ADq + DBq - AEq < -EBq = 2 AEB - 2 ADB.

P R O P. VI.



Si recta linea A bisariam secetur, & illi recta quapiam linea E in directum adjiciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adjecta (sub A + E,) & adjecta E, una cum quadrato, quod à dimidia ($\frac{1}{2}$ A,) aequale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjecta componitur, tanquam ab una ($\frac{1}{2}$ A + E) descripto.

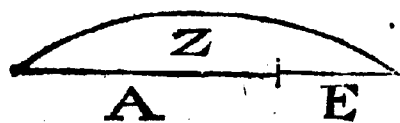
a 4. & 3. Dico $\frac{1}{4}$ Aq (a Q. $\frac{1}{2}$ A) + AE + Eq = Q. $\frac{1}{2}$ A
 Cor. 4. 2. + E. a Nam Q. $\frac{1}{2}$ A + E = $\frac{1}{4}$ Aq + Eq + AE.

Coroll.

Coroll.

Hinc si tres rectæ E , $E + \frac{1}{2} A$, $E + A$ sint in proportionem Arithmetica, rectangulum sub extremis E , $E + A$ contentum, una cum quadrato excessus $\frac{1}{2} A$, æquale erit quadrato mediæ $E + \frac{1}{2} A$.

PROP. VII.



Si recta linea Z secetur utcumque; Quod

à tota Z , quodque ab uno segmentorum E , utraque simul quadrata, æqualia sunt illi, quod bis sub tota Z , & dicto segmento E comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento A fit, quadrato.

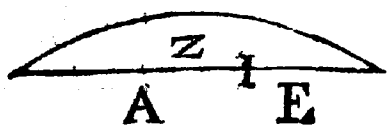
Dico $Zq + Eq = 2 ZE + Aq$. Nam $Zq = Aq + 2 AE + Eq$ a 4. 2.
 $\rightarrow Eq + 2 AE. \& 2 ZE = 2 Eq + 2 AE$ b 3. 2.

Coroll.

Hinc, quadratum differentiæ duarum quarumcunque linearum Z, E , æquale est quadratis utriusque minus duplo rectangulo sub ipsis.

Nam $Zq + Eq - 2 ZE = Aq = Q. Z - E$. c 7. 2. &
3. ax.

PROP. VIII.

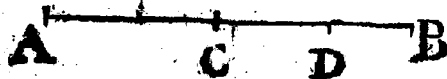


Si recta linea Z secetur utcumque; rectangulum quater comprehensum sub tota Z & uno segmento-

rum E cum eo, quod à reliquo segmento A fit quadrato, æquale est ei, quod à tota Z & dicto segmento E , tanquam ab una linea $Z + E$ describitur quadrato.

Dico $4 ZE + Aq = Q. Z + E$. Nam $2 ZE = 2 AE + 2 EQ$ a 7. 2. &
3 ax.
 $Zq + Eq - Aq$ ergo $4 ZE + Aq = Zq + Eq + 2 ZE$ b 4. 2.
 $ZE = Q. Z + E. Q.E.D.$

PROP. IX.



Si recta linea AB secetur in æqualia AC ,

AC, CB, & non aequalia AD, DB. quadrata, quae ab inaequalibus totius segmenti AD, DB fiunt, simul duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia AE, & ejus, quod ab intermedia sectionum CD fit, quadrati.

Dico $ADq + DBq = 2 ACq + 2 CDq$. Nam
 a 4. 2. $ADq + DBq = ACq + CDq + 2 ACD + DBq$.
 b hyp. atqui $2 ACD (b 2BCD) + DBq = 2 CDq$
 c 7. 2. $(ACq) + CDq$. ergo $ADq + DBq = 2 ACq$
 d 2. ax. $+ 2 CDq$. Q.E.D.

Aliter effertur & facilius demonstratur, sic;

Aggregatum quadratorum ex summa, & differentia duarum rectarum A, E, aequatur duplo quadratorum ex ipsis.

Nam Q. A + E $= Aq + Eq + 2 AE$. & Q. A
 a 4. 2. $- E b = Aq + Eq - 2 AE$. Hæc collecta faciunt
 b Cor. 7. 2. $2 Aq + 2 Eq$. Q.E.D.

P R O P. X.

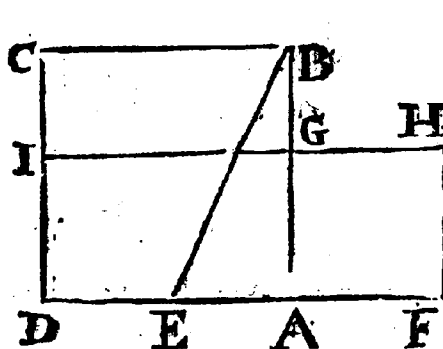


Si recta linea A secetur bisariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam linea; Quod à tota A cum adjuncta E, & quod ab adjuncta E, utraque simul quadrata, duplicia sunt & ejus, quod à dimidia $\frac{1}{2} A$; & ejus, quod à composita ex dimidia, & adjuncta, tanquam ab una $\frac{1}{2} A + E$, descriptum est, quadrati.

Dico $Eq + Q. A + E$, hoc est $Aq + 2 Eq + 2 AE = 2 Q. \frac{1}{2} A + 2 Q. \frac{1}{2} A + E$. Nam $2 Q. \frac{1}{2} A b$
 a 4. 2. $= \frac{1}{2} Aq$ & $2 Q. \frac{1}{2} A + E c = \frac{1}{2} Aq + 2 Eq + 2 AE$.
 b Cor. 4. 2.
 c 4. 2.

PROP.

PROP. XI.



Datam rectam lineam AB secare in HG, ut comprehensum sub tota AB, & altero segmentorum BG rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento AG, fit, quadrato.

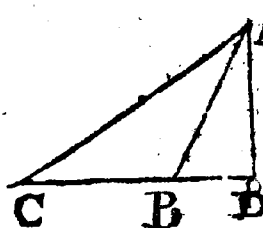
Super AB a describe quadratum AC. latus a 46. 1. AD b biseca in E. duc EB. ex EA producta cape b 10. 1. EF = EB ad A F a statue quadratum AH. Erit AH = AB x BG.

Nam protracta HG ad I; Rectang. DH + EAq c = EFq d = EBq c = BAq + EAq, ergo DH c 6. 2. f = BAq d = quad. AC. subtrahæ commune AI; d constr. f remanet quad. AH = GC; d id est AGq = ABx e 47. 1. BG. Q. E. F. f 3. 45.

Scholium.

Hæc Propositio numeris explicari nequit; *neque enim ullus numerus ita secari potest, ut *vid. 6. 13. productum ex toto in partem unam æquale sit quadrato partis reliquæ.

PROP. XII.



In amblygoniis triangulis ABC quadratum, quod fit à latere AC angulum obtusum ABC subtendente, majus est quadratis, quæ sunt à lateribus AB, BC obtusum angulum

ABC comprehendentibus, rectangulo b in comprehenso, & ab uno laterum BC, quæ sunt circa obtusum angulum ABC, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis AD, & ab assumpta exterius linea BD sub perpendiculari AD plope angulum obtusum ABC.

Dico

a 47. I.
b 4. 2.
c 47. I.

Dico $ACq = CBq + ABq + 2 CB \times BD$.

Nam ista $\left\{ \begin{array}{l} ACq. \\ a \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} a \end{array} \right. CDq + ADq.$

$\left\{ \begin{array}{l} b \end{array} \right. CBq + 2 CBD + BDq + ADq$

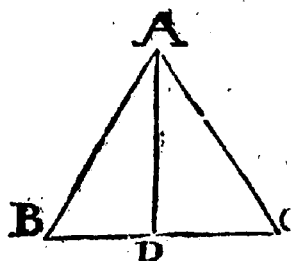
$\left\{ \begin{array}{l} c \end{array} \right. CBq + 2 CBD + ABq.$

Schol.

Hinc, cognitis lateribus trianguli obtusanguli ABC, facile invenientur tum segmentum BD inter perpendicularem AD, & obtusum angulum ABC interceptum, tum ipsa perpendicularis AD.

Sic; Sit AC 10, AB 7, CB 5; unde ACq 100, ABq 49, CBq 25. Proinde ABq + CBq = 74. hunc deme ex 100, manet 26 pro 2 CBD. unde CBD erit 13. hunc divide per CB 5, provenit $2\frac{1}{5}$ pro BD. quare AD invenitur per 47. I.

PROP. XIII.



In oxygoniis triangulis ABC quadratum à latere AB angulum acutum ACB subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus AC, CB acutum angulum ACB comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso;

& ab uno lateram BC, quæ sunt circa acutum angulum ACB, in quod perpendicularis AD cadit, & ab assumpta interioris linea DC sub perpendiculari AD, prope angulum acutum ACB.

Dico $ACq + BCq = ABq + 2 BCD$.

a 47. I.
b 7 2.
c 47. I.

Nam æquan- $\left\{ \begin{array}{l} a \end{array} \right. ACq + BCq.$
tur ista $\left\{ \begin{array}{l} a \end{array} \right. ADq + DCq + BCq.$
 $\left\{ \begin{array}{l} b \end{array} \right. ADq + BDq + 2 BCD.$
 $\left\{ \begin{array}{l} c \end{array} \right. ABq + 2 BCD.$

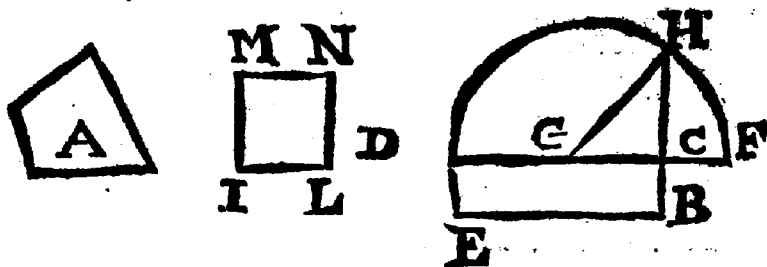
Coroll.

Hinc etiam cognitis lateribus trianguli ABC, invenire est tam segmentum DC inter perpendiculari-
rem

rem AD, & acutum angulum A B C interceptum;
quam ipsam perpendicularem AD.

Sit AB 13. AC 15. BC 14. Detrahe A Bq
(169) ex A Cq + B Cq hoc est ex 225 + 196
= 421; remanet 252 pro 2 BCD; unde BCD
erit 126. hunc divide per B C 14, provenit 9
pro DC. unde $AD = \sqrt{225 - 81} = 12$.

PROP. XIV.



Dato rectilineo A aequale quadratum ML invenire.

a Fac rectangulum DB=A, cujus majus la- a 45. 1.
tus DC produc ad F, ita ut CF=CB. b Bi- b 10. 2.
seca DF in G, quo centro ad intervallum GF
describere circulum FHD, producat CB, do-
nec occurrat circumferentiæ in H. Erit CHq=
*ML=A.

Ducatur enim GH. Estque Ac=DBc=c Constr.
DCF d=GFq-GCq=e=HCq=e=ML d 5. 2. &
Q. E. F.

*46. 1.

c Constr.

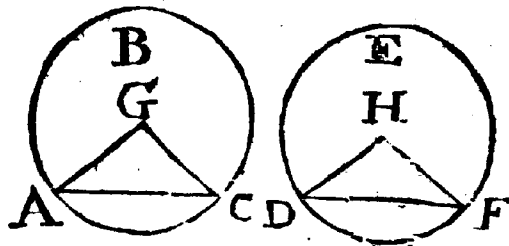
d 5. 2. &

3. ax.

e 47. 1. &

3. ax.

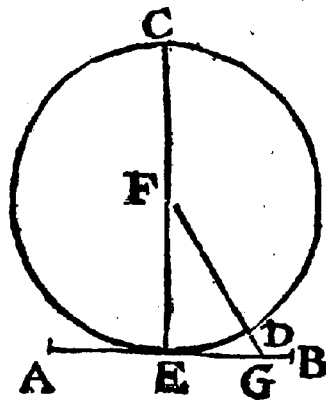
(56).
 L I B. III.
Definitiones.



I.

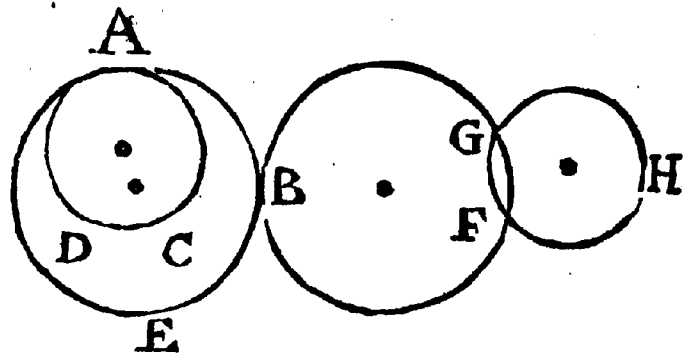


Quales circuli (GABC, HDEF) sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris rectæ linæ GA, HD, sunt æquales.



II. Recta linea AB circulum FED tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producat circulum non secat.

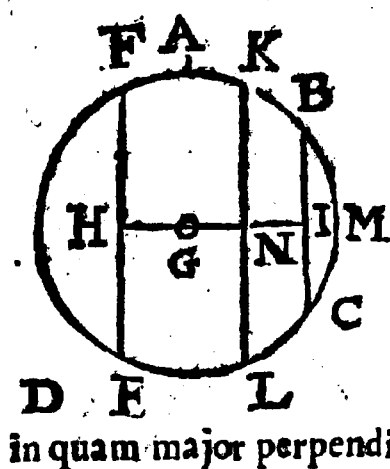
Recta FG secat circulum FED.



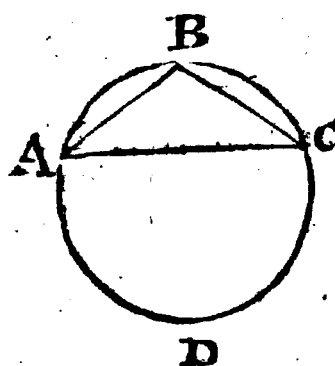
III. Circuli DAC, ABE (item FBG; ABE) se mutuo tangere dicuntur, qui se mutuo tangentes sese mutuo non secant.

Circulus BFG secat circulum FGH.

IV. Ia



IV. In circulo $GABD$ æqualiter distare à centro dicuntur rectæ lineæ FE KL , cum perpendiculares GH , GN , quæ à centro G in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa BC dicitur, in quam major perpendicularis GI cadit.

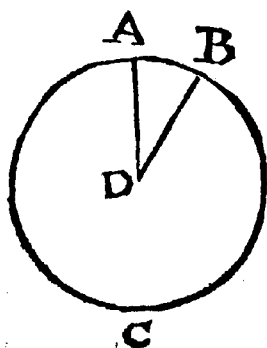


V. Segmentum circuli (ABC) est figura, quæ sub recta linea AC , & circuli peripheria ABC comprehenditur.

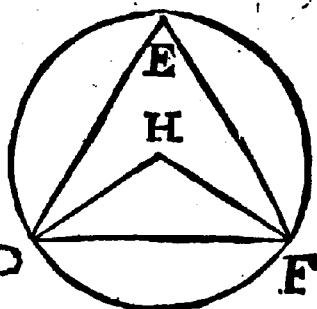
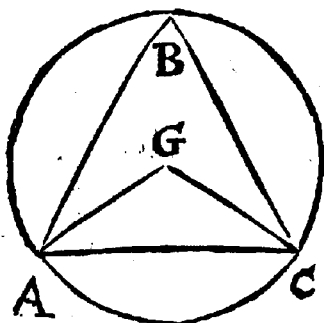
VI. Segmenti autem angulus (CAB) est, qui sub recta linea CA , & circuli peripheria AB comprehenditur.

VII. In segmento autem (ABC) angulus (ABC) est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum B , & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ AC , quæ segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ AB , CB , is inquam angulus ABC ab adjunctis illis lineis AB , CB comprehensus.

VIII. Cum vero comprehendentes angulum ABC , rectæ lineæ AB , BC aliquam assumunt peripheriam ADC , illi angulus ABC insisteret dicitur.

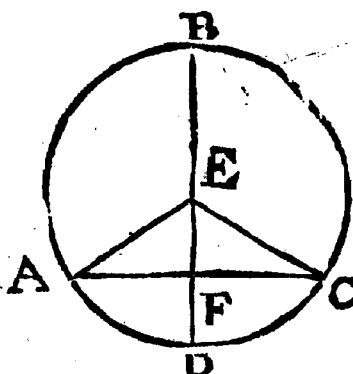


XI. Sector autem circuli (ADB) est, cum ad ipsius circuli centrum D constitutus fuerit angulus ADB; comprehensa nimirum figura ADB. & à rectis lineis AD, BD angulum continentibus, & à peripheria AB ab illis assumpta.



X. Similia circuli segmenta (ABC, DEF) sunt, quæ angulos (ABC, DEF) capiunt æquales; aut in quibus anguli ABC, DEF inter se sunt æquales.

P R O P. I.



Dati circuli ABC centrum F reperire.

Duc in circulo rectam AC utunque, quam biseca in E. per E duc perpendicularem DB. hanc biseca in F. erit F centrū.

Si negas, centrum esto

G, extra rectam DB

(nam in ea esse non potest, cum ubique extra F dividatur inæqualiter) ducanturque GA,

GC, GE. Vis G centrum esse; a ergo $GA = GC$;

& per constr. $AE = EC$, latus vero GE

commune est; b ergo anguli GEA, GEC pares,

& c proinde recti sunt. d ergo ang. $GEC = FEC$

recti. e Q.E.A.

a 15. def. 1.

b 8. 1.

c 10. def 1.

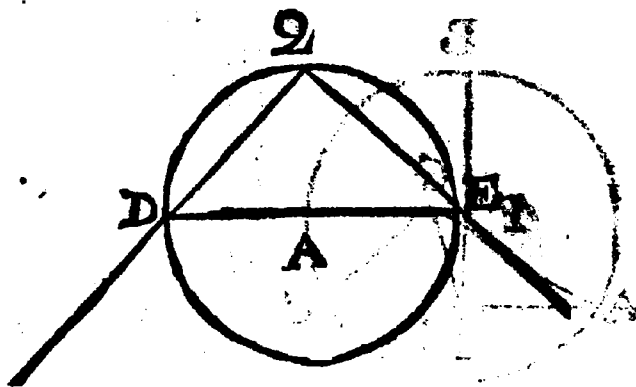
d 12. ax.

e 9. ax.

Q.E.D.

Coroll.

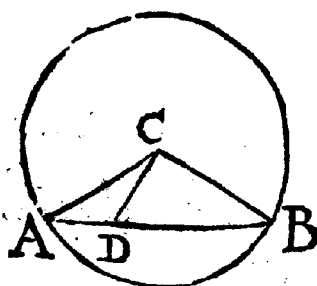
Hinc, si in circulo recta aliqua linea BD aliquam rectam lineam AC bifariam & ad angulos rectos secet, in secante BD erit centrum.



Facillime per normam invenitur centrum vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta D, & E, in quibus normæ latera QD, QE peripheriam secant, bisecetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. hujus.

And. Tarq.

PROP. II.



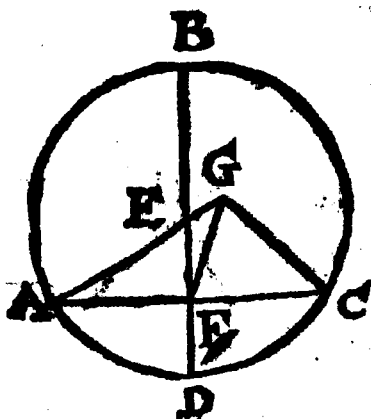
Si in circuli CAB peripheria duo quælibet puncta, A, B accepta fuerint, recta linea AB, quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circumferentiam cadet.

Accipe in recta AB quodvis punctum D, & ex centro C duc CA, CD, CB. & quoniam $CA = CB$, erit ang. $A = B$ 15. def. 1. Sed ang. $CDB < A$; ergo ang. $CDB < B$ 5. 1. Et ergo $CB < CD$, atqui CB tantum pertinet ex centro ad circumferentiam; ergo CD eod. usque non pertingit. ergo punctum D est intra circumferentiam. Idemque ostendetur de quovis alio puncto rectæ AB. Tota igitur AB cadit intra circumferentiam. Q.E.D.

Coroll.

Hinc, recta circulum tangens, ita ut eum non secet, in unico puncto tangit.

P R O P. III.



Si in circulo EABC recta quadam linea BD per centrum extensa quadam AC non per centrum extensam bifariam secet, (in F) & ad angulos rectos ipsam secabit; & si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Ex centro E ducantur EA, EC.

a hyp. 1. Hyp. Quoniam $AF = FC$, & $EA = EC$,
b 15 def. 1. latusque EF commune est, erunt anguli EFA,
c 8. 1. EFC pares, & d consequenter recti. Q.E.D.

d 10. def. 1. 2. Hyp. Quoniam ang. EFA = EFC, & ang.
e hyp. & EAF = ECF, latusque EF commune, g crit
12. ax. $AF = FC$. Bisecta est igitur AC. Q.E.D.

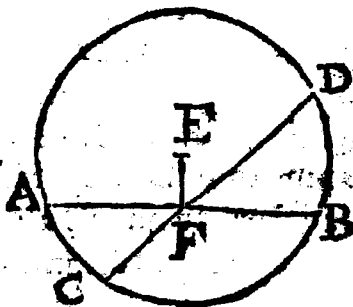
f 5. 1.

g 26. 1.

Coroll.

Hinc, in triangulo quovis æquilatelo & Isoscele linea ab angulo verticis bifecans basim, perpendicularis est basi. & contra perpendicularis ab angulo verticis bifecat basim.

P R O P. IV.

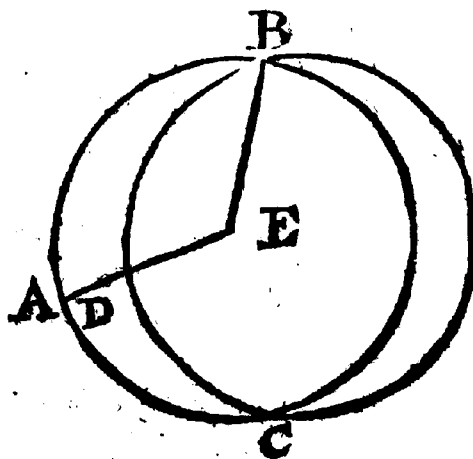


Si in circulo ACD duæ rectæ lineæ AB, CD sese mutuo secant non per centrum E extensa, sese mutuo bifariam non secabunt. Nam si una per centrum transeat, patet hanc non

non bifecari ab altera, quæ ex hyp. per centrum non tranfit.

Si neutra per centrum tranfit, ex E centro duc EF. Si jam ambæ AB, CD forent bifectæ in F, anguli EFB, EFD a ambo effent recti, & a 3. 3.
proinde æquales. b Q.E.A. b 9. ax.

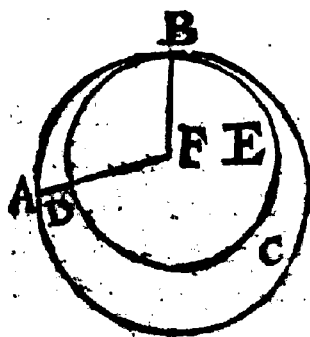
PROP. V.



Si duo circuli BAC, BDC feſe mutuo ſecent, non erit illorum idem centrum E.

Alias enim ductis ex communi centro E rectis EB, EDA, effent $ED = EB = EA$ a 15. def. 1.
EA. b Q.E.A. b 9. ax.

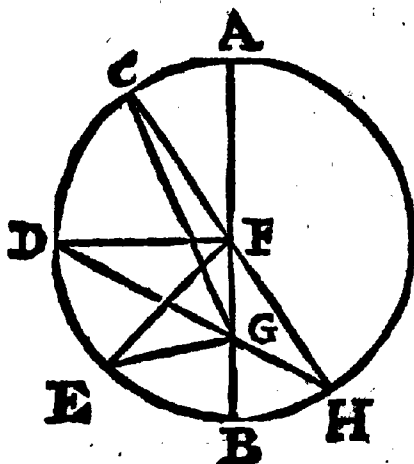
PROP. VI.



Si duo circuli BAC, BDE, feſe mutuo interius tangant (in B) eorum non erit idem centrum F.

Alias ductis ex centro F rectis FB, FDA, effent $FD = FB = FA$ a 15. def. 1.
b Q.F.N. b 9. ax.

PROP. VII.



Si in AB diametro
circuli quodpiam suma-
tur punctum G, quod
circuli centrum non sit,
ab eoque puncto in cir-
culum quaedam recta li-
nea GC, GD, GE ca-
dunt; maxima quidem
erit ea (GA) in qua
centrum F, minima vero
reliqua GB, aliarum
vero illi, quæ per cen-

trum ducitur, propinquior GC remotiore GD sem-
per major est. Duæ autem solum rectæ lineæ GE
GH æquales ab eodem puncto in circulum cadunt,
ad utrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA.

a 23. I. Ex centro F duc rectas FC, FD, FE; & a fac
ang. BFH = BFE.

a 20. I. 1. GF + FC (hoc est GA) a = GC.
Q.E.D.

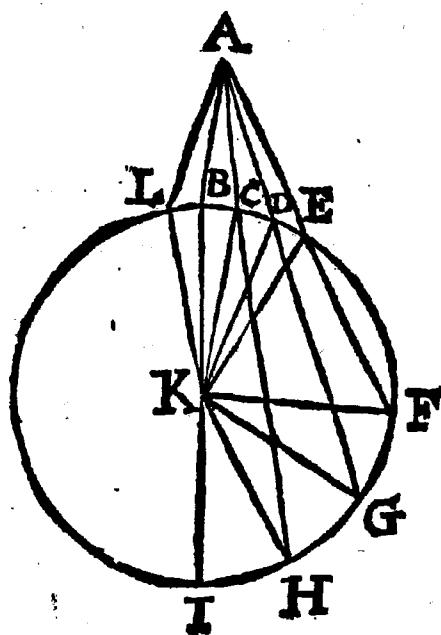
b 15. def. 1. 2. Latus FG commune est, & FC b = FD;
c 9. ax. atque ang. GFC c = GFD. d ergo bas. GC
d 24. I. = GD. Q.E.D.

e 20. I. 3. FB (FE) e = GE + GF. ergo ablato
f 5. ax. communi FG s remanet BG = EG. Q.E.D.

g constr. 4. Latus FG commune est, & FE = FH; atq;
b 4. I. ang. BFH g = BFE. h ergo GE = GH. Quod
vero nulla alia GD ex puncto G æquetur ipsi
GE, vel GH, jamjam ostensum est. Q.E.D.

PROP.

PROP. VIII.



Si extra circulum
sumatur punctum
quodpiam A, ab eoq;
puncto ad circulum
deducantur quaedam
lineæ AI, AH, AG,
AF, quarum una qui-
dem AI per centrum
K protrahatur, reli-
quæ vero ut libet;
in cavam peripheri-
am cadentium recta-
rum linearum maxi-
ma quidem est illa
AI, quæ per centrum
ducetur, aliarum au-

tem ei quæ per centrum transit propinquior AH re-
motiore A G semper major est. In convexam vero
peripheriam cadentium rectarum linearum minima
quidem est illa AB, quæ inter punctum A, & dia-
metrum BI interponitur; aliarum autem ea, quæ est
minimæ propinquior AC remotiore AD semper mi-
nor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ AC, AL
æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad
utrasque partes minimæ AB, vel maximæ AI.

Ex centro K duc rectas KH, KG, KF; KC;
KD, KE. & fac ang. $\angle AKL = \angle AKC$.

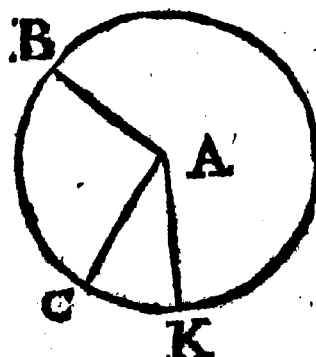
1. AI (AK+KH) æ AH. Q. E. D. a 20. 1.
2. Latus AK commune est; & KH = KG;
atque ang. $\angle AKH = \angle AKG$. b ergo bas. AH = AG. Q. E. D. b 24. 1.
3. KA = KC + CA. aufer hinc inde æquales c 20. 1.
KC, KB, ærit AB = AC. d 5. ax.
4. AC + CK = AD + DK. aufer hinc e 21. 1.
inde æquales CK, DK, f erit AC = AD. f 5. ax.
Q. E. D.

Latus

g constr.
h 4. 1.

5. Latus KA est commune & $KL = KC$;
atque ang. $AKL = AKC$, h ergo $LA = CA$. hisce vero nulla alia æquatur, ex modò
ostensis. ergo, &c.

PROP. IX.

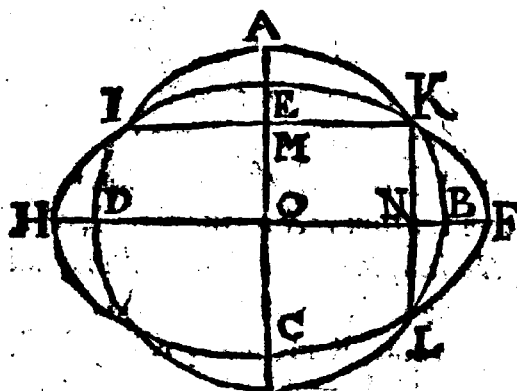


a 7. 3!

Si in circulo BCK acceptum fuerit punctum aliquod A, & ab eo puncto ad circum-
lum cadant plures, quam duæ
rectæ lineæ æquales AB, AC,
AK, acceptum punctum A
centrum est ipsius circuli.

Nam a nullo puncto
extra centrum plures quam
duæ rectæ lineæ æquales duci possunt ad circum-
ferentiam. Ergo A est centrum. Q.E.D.

PROP. X.



Circulus
IAKBL circu-
lum IEKFL in
pluribus quam
duobus punctis
non secat.

Secet, si fie-
ri potest, in tri-
bus punctis I,

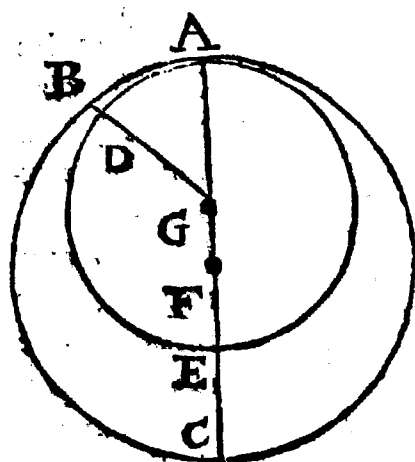
K, L. Junctæ IK, KL bisecentur in M & N.

a Cor. 1. 3. a Ambo circuli centrum habent in singulis per-
pendicularibus MC, NH, & proinde in earum
intersectione O. ergo secantes circuli idem cen-
trum habent. b Q.E.N.

b 5. 3.

PROP.

PROP. XI.

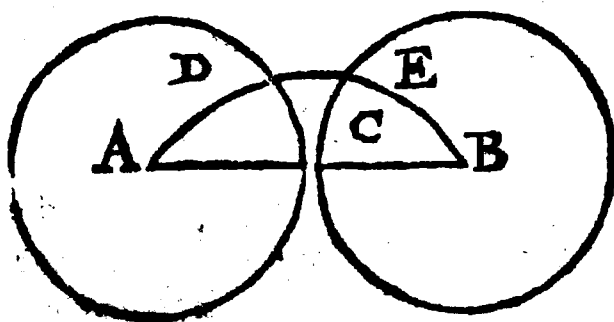


Si duo circuli
GADE, FABG
se se intus contingant,
atque accepta fuerint
eorum centra G, F;
ad eorum centra ad-
iuncta recta linea FG,
& producta, in A con-
tactum circulorum ca-
det.

Si fieri potest, recta FG protracta secet cir-
culos extra contactum A, sic ut non FGA, sed
FGDB sit recta linea. Ducatur GA. Et quia
GDA = GA, & GB = GA, (cum recta FGB
transeat per F centrum maioris circuli) erit GB
= GD. c Q.E.A.

a 15. def. 1.
b 7. 3.
c 9. ax.

PROP. XII.



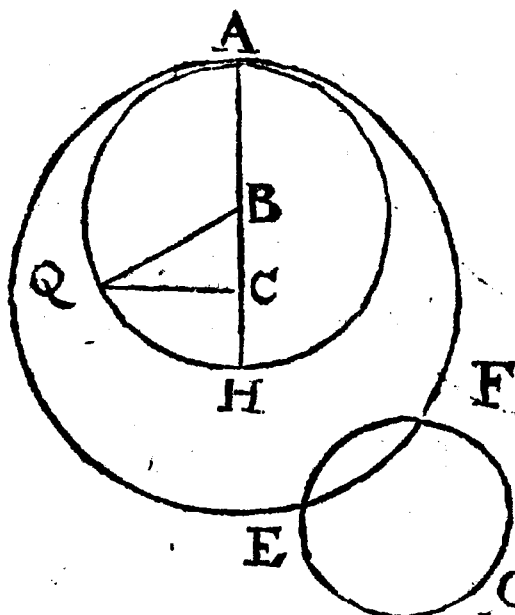
Si duo circuli ACD, BCE se se exterius contin-
gant, linea recta AB qua ad eorum centra A, B ad-
iungitur, per contactum C transibit.

Si fieri potest, sit recta ADEB secans circulos
extra contactum C in punctis D, E. Duc AC,
CB. erit AD + EB (AC + CB) = AD +
EB. b Q.E.A.

a 20. 1.
b 9. ax.

PROP.

PROP. XIII.



Circulus CAF circulum BAH non tangit in pluribus punctis, quam uno A, five intus, five extra tangat.

1. Tangat si fieri potest, intus in punctis A, H. a ergo recta CB cen-

tra connectens, si producat, cadet tam in A,

b 15. def. 1. quam in H. Quoniam igitur $CH = CA$, & BH

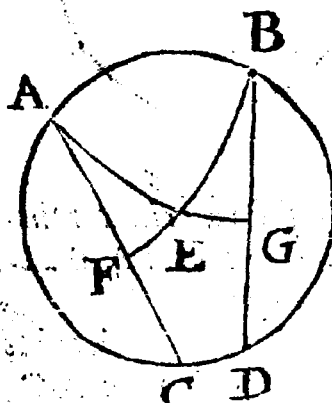
c 15. def. 1. $\angle CH$. erit $BA (\angle BH) \angle CA$. d Q. E. A.

d 9. ax.

e 2. 3.

2. Sin dicatur exterius contingere in punctis E & F, e ducta recta EF in utroque circulo erit. Circuli igitur se mutuo secant, quod non ponitur.

PROP. XIV.



In circulo EABC aequales rectae lineae AC, BD, aequaliter distant à centro E. & quae AC, BD aequaliter distans à centro, aequales sunt inter se.

Ex centro E duc perpendiculares EF, EG: a quae bisecabunt AC, DB. connecte EA, EB.

1. Hyp. $AC = BD$. ergo $AF = BG$. sed & $EA = EB$. ergo $FEQ = EAQ = EBQ$

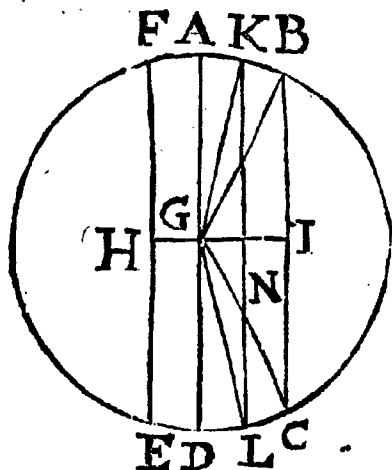
a 3. 3.

b 7. ax.

EBq—BGq c=EGq. d ergo FE=EG. Q.E.D. c 47. 1. &
 2. Hyp. EF=EG. ergo AFq c=EAq—EFq=3. ax.
 EBq—EGq c=G Bq. ergo AF d=G B. d Schol.
 e proinde AC=BD. Q.E.D. 48. 1.

PROP. XV.

c 6. ax.

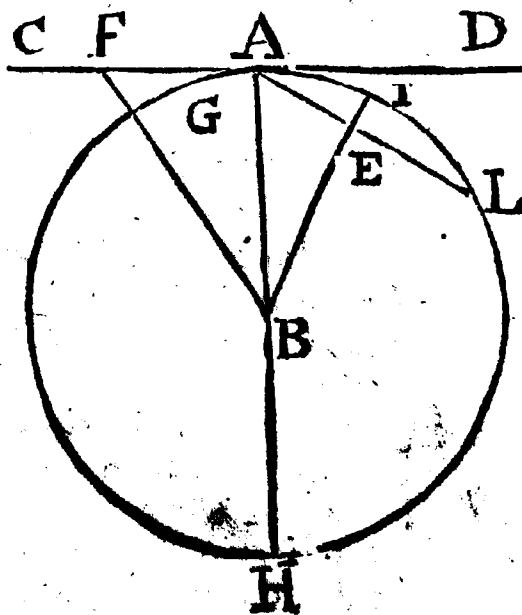


In circulo GABC
 maxima quidem linea
 est diameter AD; ali-
 arum autem centra G
 propinquior FE remo-
 tiore BC semper ma-
 jor est.

1. Duc GB, GC.
 Diameter AD (a 15. def. 1.
 GB + GC) b BC. b 20. 1.
 Q.E.D.

2. Sit distantia
 GI BC GH. accipe GN = GH. per N duc KL
 perpend. GL. junge GK, GL. & quia GK=GB,
 & GL=GC; estque ang. KGL BC, c erit c 24. 1.
 KL (FE) BC. Q.E.D.

PROP. XVI.



Quae CD
 ab extremi-
 tate diame-
 tri HA cujus-
 que circuli
 BALH ad
 angulos rectos
 ducitur, ex-
 tra ipsum cir-
 culum cadet,
 & in locum
 inter ipsam
 rectam line-
 am, & peri-
 pheriam com-
 prehen-

prehensum altera recta linea AL non cades, & semicirculi quidem angulus BAI quovis angulo acuto rectilineo BAL major est; reliquus autem DAI minor.

a 19. 1.

1. Ex centro B ad quodvis punctum F in recta AC duc rectam BF . Latus BF subtendens angulum rectum BAF *a* majus est latere BA , quod opponitur acuto BFA . ergo cum BA (BG) pertingat ad circumferentiam, BF ulterius porrigetur, adeoque punctum F ; & eadem ratione quodvis aliud rectæ AC , extra circumulum situm erit. Q.E.D.

b 19. 1.

2. Duc BE perpendic. AL . Latus BA oppositum recto angulo BEA *b* majus est latere BE , quod acutum BAE subtendit: ergo punctum E , adeoque tota EA cadit intra circumulum. Q.E.D.

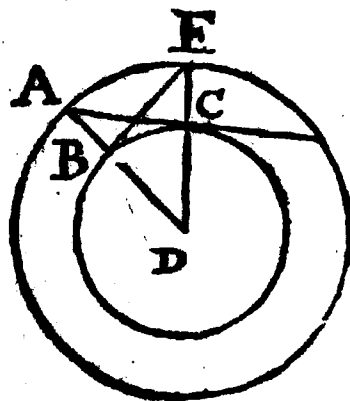
3. Hinc sequitur angulum quemvis acutum, nempe EAD angulo contactus DAI majorem esse. Idem angulum quemvis acutum BAL angulo semicirculi BAI minorem esse. Q.E.D.

Coroll.

Hinc, recta à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipsum circumulum tangit.

Ex hac propositione paradoxa consequuntur, & mirabilia bene multa, quæ vide apud interpretes.

PROP. XVII.



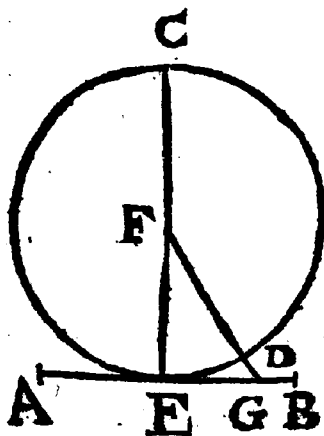
A dato puncto A rectam lineam AC ducere, quæ datum circumulum DBC tangat.

Ex D dati circuli centro ad datum punctum A ducatur recta DA secans peripheriam in B . Centro D describe per A alium circumulum AE ;

AE; & ex B duc perpendiculararem ad AD, quæ
occurrat circulo A E in E. duc E D occurrentem
circulo BC in C. ex A ad C ducta recta tanget
circulum D B C.

Nam DB $a =$ DC, & DE $a =$ DA, & ang. a 15. def. 1.
D communis est: b ergo ang. ACD $=$ EBD, b 4. 1.
rect. c ergo AC tangit circulum C. Q. E. F, c Cor. 16. 3.

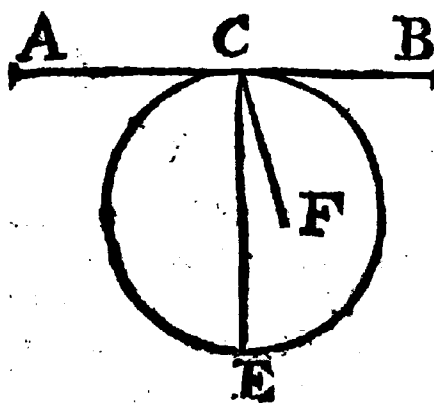
PROP. XVIII.



Si circulum FEDC
tangat recta quapiam li-
nea AB, à centro autem
ad contactum E adjunga-
tur recta quadam linea
FE; quæ adjuncta fuerit
FE ad ipsam contingentem
AB, perpendicularis erit.

Si negas, sit ex F cen-
tro alia quædam FG per-
pendicularis ad contin-
gentem, a secabi ea circulum in D. Quum igitur a 2. def. 3.
ang. FGE rectus dicatur b erit ang. FEG acu- b 16. 3.
tus. c ergo FE (FD) $\perp$ FG. d Q. E. A, b Cor. 17. 1.

PROP. XIX.

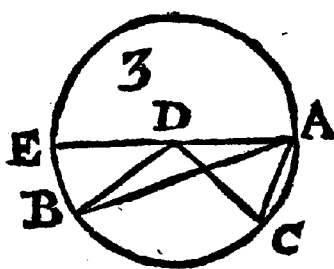
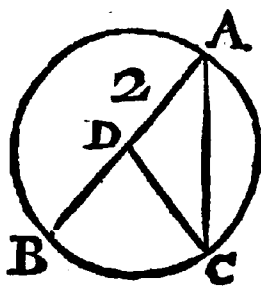
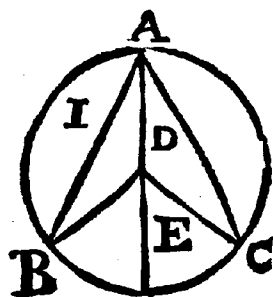


Si circulum tetige-
rit recta quapiam li-
nea AB, à contactu
autem C recta linea
CE ad angulos rectos
ipsi tangenti excite-
tur, inexcitata CB
erit centrum circuli.

Si negas, sit cen-
trum extra CE in F,
& ab F ad contactum ducatur FC. Igitur ang.
FCB $*$ rectus est; & a proinde par angulo ECB $*$ 18. 3.
recto per hypoth. b Q. E. A. a 11. ax.

PROP.

PROP. XX.



In circulo D A B C, angulus BDC ad centrum duplex est anguli BAC ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria B C basis angulorum.

Duc diametrum ADE.

a 32. I.

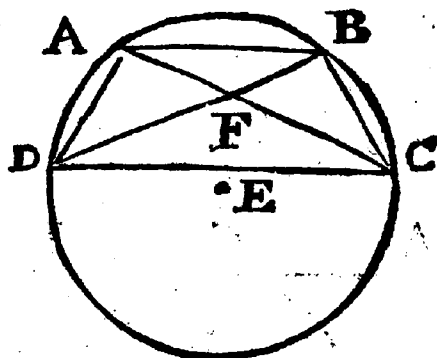
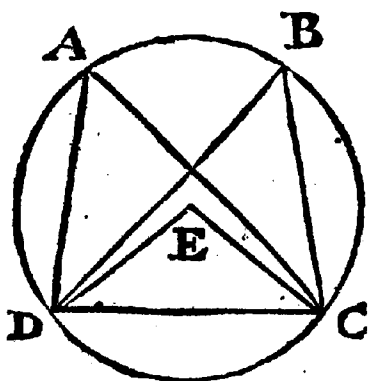
b 5. I.

c 2. ax.

d 20. ax.

Externus angulus BDE $a = DAB + DBA$ $b = 2 DAB$. Similiter ang. EDC $= 2 DAC$. ergo in primo casu c totus BDC $= 2 BAC$; sed in tertio casu d reliquus angulus BDC $= 2 BAC$. Q. E. D.

PROP. XXI.



In circulo E D A C qui in eodem segmento sunt anguli, DAC & DBC sunt inter se aequales.

1. Cas. Si segmentum DABC semicirculo sit majus, ex centro E, duc ED, EC. Eritque 2 ang.

a 20. 3.

A $a = E a = 2 B$. Q. E. D.

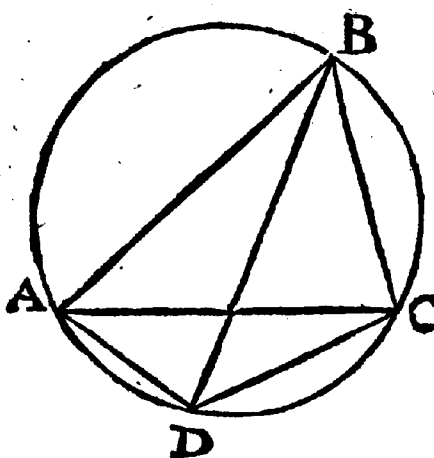
2. Cas. Sin segmentum semicirculo majus non fuerit, summa angulorum trianguli ADF æquatur summæ angulorum in triangulo BCF. Demantur hinc inde AFD $b = BFC$, & ADB $c =$

b 15. 1.

c per 1. cas. ACB, remanent DAC $= DBC$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXII.



*Quadrilaterorum
ABCD in circulo
descriptorum anguli
ADC, ABC, qui ex
adverso, duobus re-
ctis sunt aequales.*

Duc AC, BD.

*Ang. ABC +
BCA + BAC a 2 32. f.
= 2 Rect. Sed
BDA b = BCA, b 21. f.
& BDC b = BAC.*

ergo ABC + ADC = 2 Rect. Q.E.D.

c 1. ax.

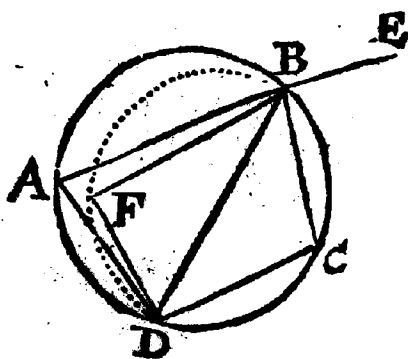
Coroll.

1. Hinc, si AB unum latus quadrilateri in circulo descripti producat, erit angulus externus EBC æqualis angulo interno ADC, qui opponitur ei ABC, qui est deinceps externo EBC ut patet ex 13. 1. & 3. ax.

**vide seq. diagram.*

2. Item circa Rhombum circulus describi nequit; quia adversi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt.

SCHOL.



*Si in quadrilatero
ABCD anguli A, C
qui ex adverso duobus
rectis æquantur, circa
quadrilaterum circulus
describi potest.*

*Nam circulus per
quoslibet tres angulos
B, C, D transibit (ut
patebit ex 5. 4.) dico eundem per A transire.
Nam si neget, transeat per F. ergo ductis rectis
BE, BF,*

a 22. 3.

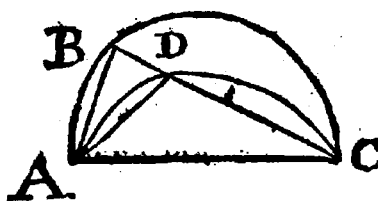
b hyp.

c 3. ax.

d 21. 1.

BF, FD, BD; ang. C+F a=2 Rect. b=C+A
c quare A=F. d Q.E.A.

P R O P. XXIII.



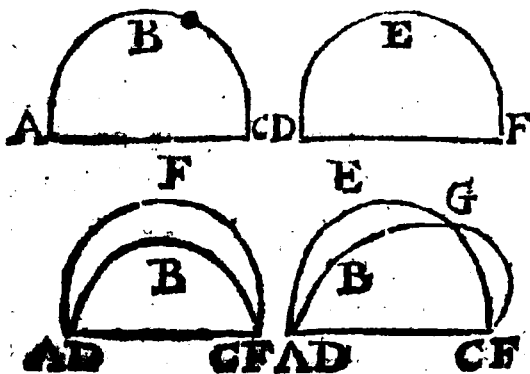
Super eadem recta
linea AC duo circulo-
rum segmenta ABC,
ADC similia & inæ-
qualia non consti-
tuentur ad easdem partes.

Nam si dicantur similia, duc CB secantem
circumferentias in D, & B, & junge AD, ac

a 10 def. 3. AB. Quia segmenta ponuntur similia, a erit ang.

b 16. 1. ADC=ABC. b Q.E.A.

P R O P. XXIV.



Super aqua-
libus rectis li-
neis AC, DF
similia circu-
lorum segmen-
ta ABC, DEF
sunt inter se æ-
qualia.

Basis AC
superposita basi DF ei congruet, quia AC=DF.
ergo segmentum ABC congruet segmento DEF
(alias enim aut intra cadet, aut extra, a atque
ita segmenta non erunt similia, contra Hyp. aut
saltem partim intra, partim extra, adeoque ip-
sum in tribus punctis secabit. b Q. E. A.) c pro-
inde segmentum ABC=DEF. Q.E.D.

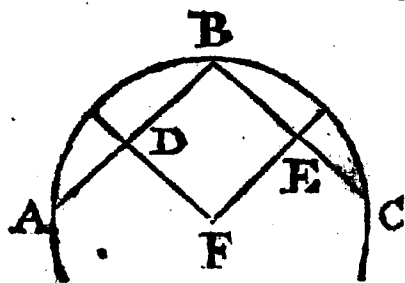
a 23. 3.

b 10. 3.

c 8. ax.

P R O P.

PROP. XXV.

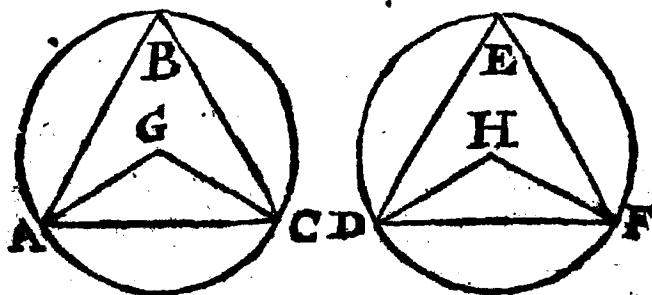


Circuli segmento ABC dato, describere circulum, cujus est segmentum.

Subtendantur ut-
cunque duæ rectæ AB,
BC, quas biseca in D,
& E. Ex D, & E duc perpendiculares DF, EF
occurrentes in puncto F. Hoc erit centrum cir-
culi.

Nam centrum a tam in DF, quam in EF a Cor. 1.3.
existit. ergo in communi puncto F. Q. E. F.

PROP. XXVI.



*In aequalibus circulis GABC, HDEF aequales an-
guli aequalibus peripheriis AC, DF insistant, siue ad
centra G, H, siue ad peripher. B, E constituti insistant.*

Ob circularum aequalitatem, est $GA = HD$,
& $GC = HF$, item per hyp. ang. $G = H$. a 4. 1.
a ergo $AC = DF$ Sed. & ang. $B = \frac{1}{2} G = \frac{1}{2} H = E$. b 20. 3.
H b = E. d ergo segmenta ABC, DEF similia, c hyp.
e & proinde paria sunt. f ergo etiam reliqua se- d 10. def. 3.
gmenta AC, DF aquantur. Q. E. D. e 24. 3.

Scholium.

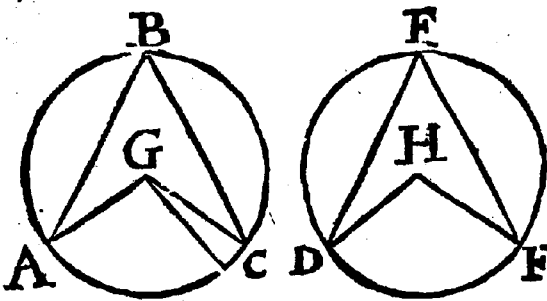


In circulo ABCD, sit ar-
cus AB par arcui DC; erit
AD parall. BC. Nam ducta
AC, erit ang. $ACB = CAD$. a 26. 3.
quare per 27. 1.

E 2

PROP.

PROP. XXVII.



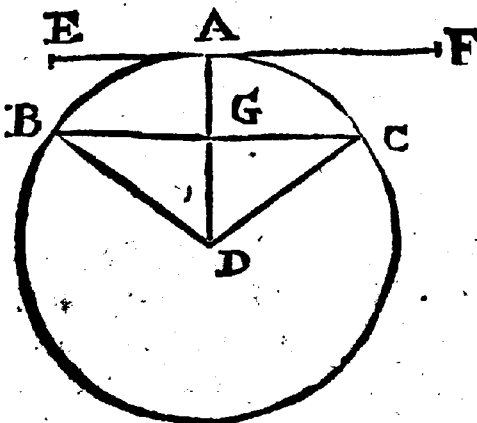
In aequalibus circulis, $GABC$, $HDEF$, anguli qui aequalibus peripheriis AC , DF insistant,

sunt inter se aequales, sive ad centra G , H , sive ad peripherias B , E constituti insistant.

Nam si fieri potest, sit alter eorum $AGC = DHF$. fiatque $AGI = DHF$. ergo arcus $AI = DF$ $b = AC$. c Q.E.A.

a 26. 3.
b hyp.
c 9. ax.

SCHOL.



Linea recta EF , quae ducta ex A medio puncto peripheriae alicujus BC , circulum tangit, parallela est rectae lineae BC , quae peripheriam illam subtendit.

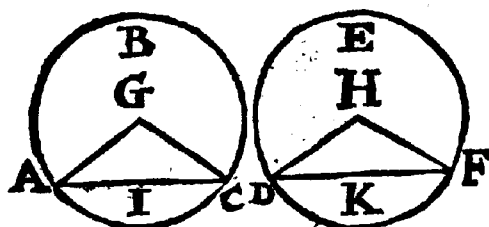
i Duc è centro D ad contactum

A rectam DA , & connecte DB , DC .

Latus DG commune est, & $DB = DC$, atque ang. $BDA = CDA$ (ob arcus BA , CA aequales) c ergo anguli ad basim DGB , DGC aequales, & d proinde recti sunt. Sed interni anguli GAE , GAF etiam recti sunt. f ergo BC , EF sunt parallelæ. Q.E.D.

a 27. 3.
b hyp.
c 4. 1.
d 10. def. 1.
e hyp.
f 28. 1.

PROP. XXVIII.



In equalibus
circulis GABC,
HDEF, aequales
recta linea AC,
DF aequales peri-
pheriis auferunt;

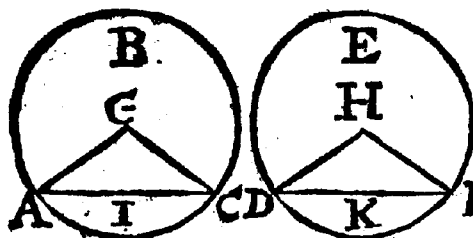
majorem quidem ABC majori DEF, minorem au-
tem AIC minori DKF.

E centrīs G, H, duc GA, GC; & HD, HF.
Quoniam $GA = HD$, & $GC = HF$, atque
 $AC = DF$; *b* erit ang. $G = H$. *c* ergo arcus
AIC = DKF. *d* proinde reliquus $ABC = DEF$.
Q.E.D.

a hyp.
b 8. 1.
c 26. 3.
d 3. ax.

Quod si subtensa AC sit $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ DF, erit
simili modo arcus AC $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ DF.

PROP. XXIX.



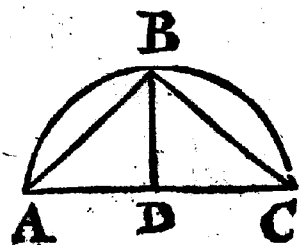
In equalibus
circulis GABC,
HDEF, aequales
peripherias ABC,
DEF aequales re-
cta linea AC,
DF subtendunt.

Duc GA, GC; & HD, HF. Quia $GA = HD$; & $GC = HF$; & (ob arcus AC, DF
a pares) etiam ang. $G = H$; *c* erit bas. $AC = DF$.
Q.E.D.

a hyp.
b 27. 3.
c 4. 1.

Hæc & tres proxime præcedentes intelligan-
tur etiam de eodem circulo.

PROP. XXX.



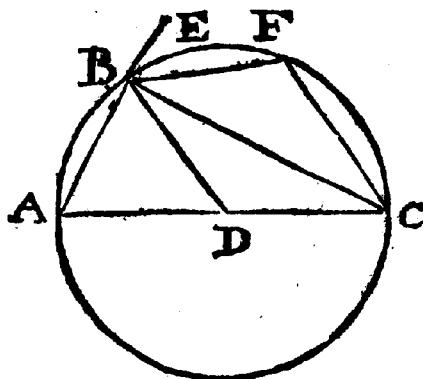
Datam peripheriam ABC
bisariam secare.

Duc AC; quam biseca in
D. ex D duc perpendicu-
lam DB occurrentem arcui
in B. Dico factum.

a const.
b 12. ax.
c 4. 1.
d 28. 3.

Jungantur enim AB , CB . Latus DB commune est; & $AD = DC$; & ang. $ADB = CDB$. ergo $AB = BC$. d quare arcus $AB = BC$. Q. E. F.

P R O P. XXXI.



In circulo angulus ABC , qui in semicirculo, rectus est; qui autem in majore segmento BAC , minor recto; qui vero in minore segmento BFC , major est recto. Et insuper angulus majoris

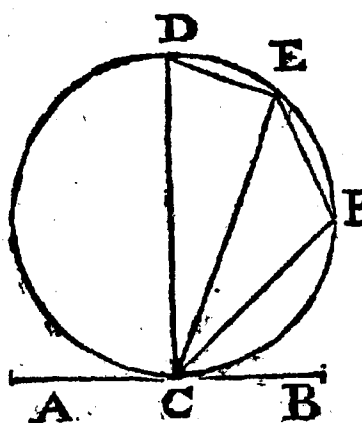
segmenti recto quidem major est, minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

Ex centro D duc DB . Quia $DB = DA$, erit ang. $A = DBA$. pariter ang. $DCB = DBC$.
 b ergo ang. $ABC = A + ACB = EBC$,
 c 32. 1. d proinde ABC , & EBC recti sunt. Q. E. D.
 d 17. def. 1. e ergo BAC acutus est. Q. E. D. ergo cum
 e Cor. 17. 1. $BAC + BFC = 2$ Rect. erit BFC obtusus.
 f 22. 3. denique angulus sub recta CB , & arcu BAC
 major est recto ABC . factus vero sub CB , &
 BFC peripheria minoris segmenti, recto EBC
 g 9. ax. minor est. Q. E. D.

S C H O L I U M.

In triangulo rectangulo ABC , si hypotenusa AC bisecetur in D , circulus centro D , per A descriptus transibit per B . ut facile ipse demonstrabis ex hac, & 21. 1.

PROP. XXXII.



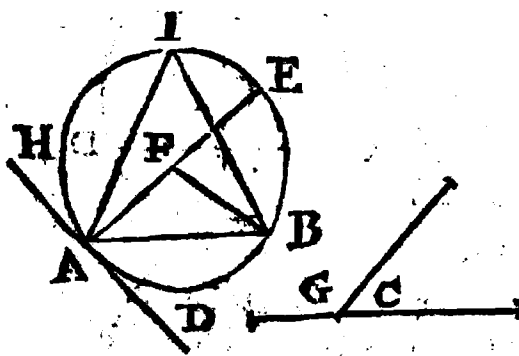
Si circulum tetigerit aliqua recta linea AB, à contactu autem producat quædam recta linea CE circulum secans: anguli ECB, ECA, quos ad contingentem facit, æquales sunt illis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis EDC, EFC:

Sit CD latus anguli EDC perpendiculare ad AB (a perinde enim est) b ergo CD est diameter, c ergo ang. CED in semicirculo rectus est. d ergo ang. D + DCE = Rect. e = ECB + DCE. f ergo ang. D = ECB. Q.E.D.

Cum igitur ang. ECB + ECA = 2 Rect. g Constr. b = D + F; aufer hinc inde æquales ECB, & f 3. ax. D, k remanent ECA = F. Q.E.D.

a 26. 3.
b 19. 3.
c 31. 3.
d 32. 1.
e Constr.
f 3. ax.
g 13. 1.
h 22. 3.
k 3. ax.

PROP. XXXIII.



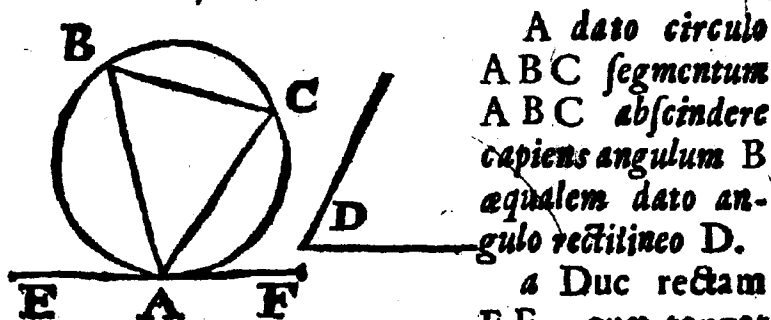
Super data recta linea AB describere circuli segmentum AIEB, quod capiat angulum AIB æqualem dato angulo rectilineo C.

a Fac ang. BAD = C. per A duc AE perpendicularem ad HD. ad alterum terminum datæ AB fac ang. ABF = BAF, cujus alterum latus secet AE in E. centro F per A describe circulum, quod transibit per B (quia ang. FBA b = FAB, b Constr. c ideoque FB = FA;) segmentum AIB est id c 6. 1. quod queritur.

a 23. 1.
b Constr.
c 6. 1.

Nam quia HD diametro AE perpendicularis
d cor. 16. 3. est, d tangit HD circulum, quem secat AB, ergo
e 32. 3. ang. ABe = BAD f = C. Q.E.F.
f Constr.

P R O P. XXXIV.



a 17. 3.

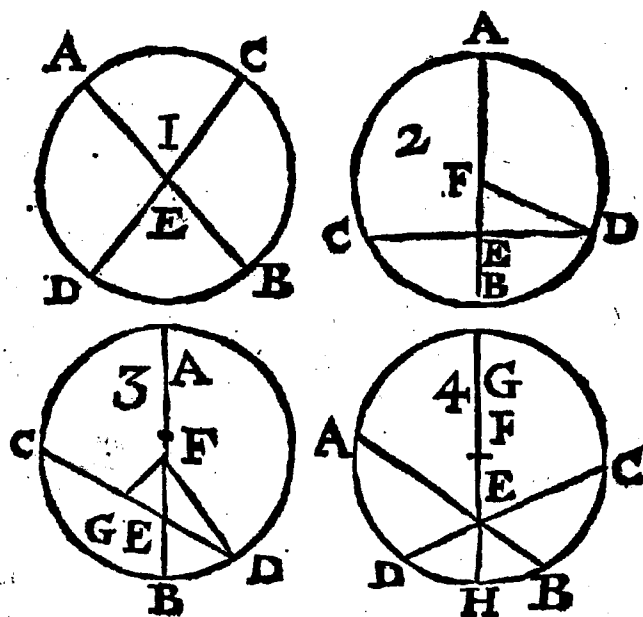
b 23. 1.

c 32. 3.

d Constr.

datum circulum in A. *b* ducatur item AC faciens
 ang. FAC = D. Hæc auferet segmentum ABC
 capiens angulum B c = CAF d = D. Q.E.F.

P R O P. XXXV.



Si in circulo FBCA duæ rectæ lineæ AB, DC
 sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum
 sub

sub segmentis AE, EB unius, aequale est ei quod sub segmentis CE, ED alterius comprehenditur, re-
ctangulo.

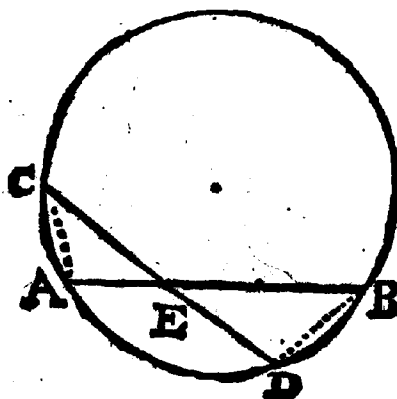
Cas. 1. Si rectae sese in centro secent, res cla-
ra est.

2. Si una AB transeat per centrum F, & re-
liquam CD bisecet, duc FD. Estque Rectang.
 $AEB + FEq\ a = FBq\ b = FDq\ c = EDq + a\ 5. 2.$
 $FEq\ d = CED + FEq. e$ ergo Rectang. $AEB = b\ scb. 48. 1.$
CED. Q.E.D. $c\ 47. 1.$

3. Si una AB diameter sit, alteramque CD $d\ hyp.$
secet inæqualiter, biseca CD per FG perpendi- $c\ 3. 4x.$
cularem ex centro.

Æquan- tur ista	{	Rectang. $AEB + FEq.$	$f\ 5. 2.$
		$f\ FBq\ (FDq)$	$g\ 47. 1.$
		$g\ FGq + GDq.$	$h\ 5. 2.$
		$FGq + b\ GEq + Rectang. CED.$	$k\ 47. 1.$
		$k\ FEq + CED.$	$l\ 3. 4x.$
Ergo Rectang. $AEB = CED.$			

4 Si neutra rectarum AB, CD per centrum
transeat, per intersectionis punctum E duc dia-
metrum GH. Per modo demonstrata Rectang.
 $AEB = GEH = CED.$ Q.E.D.

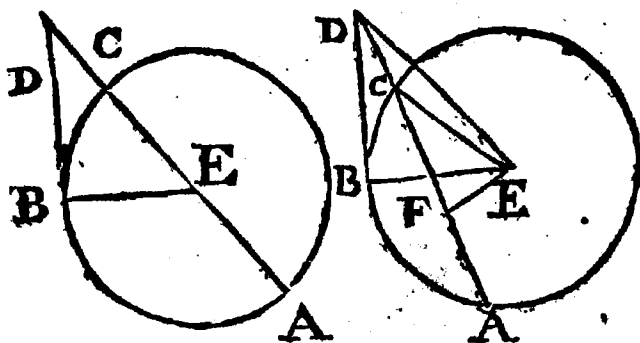


Facilius sic, & uni-
versaliter; connecte
AC & BD, atque ob
angulos $a\ CEA, DEB,$ $a\ 15. 1.$
 b ipsosque C, B (super $b\ 21. 3.$
eodem arcu AD) pa-
res; trigona $CEA,$
 $BED,$ c æquiangula $c\ cor. 32. 1.$
sunt. d ergo $CE. EA :: d\ 4\ 6.$
 $EB. ED. e$ proinde $CE\ c\ 16. 6.$

$xED = EA \times EB.$ Q.E.D.

Quæ ex 6. lib. citantur, tam his quam in seq.
ab hac minime pendent; quare iis uti licuit.

PROP. XXXVI.



Si extra circulum EBC sumatur punctum aliquod D, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ DA, DB; quarum altera DA circulum secet, altera vero DB tanget; Quod sub tota secante DA, & exteriorius inter punctum D, & convexam peripheriam assumpta DC comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente DB describitur, quadrato.

a 18. 3.

b 47. 1.

c 6. 2.

d 3. ax.

1. Cas. Si secans AD transeat per centrum E, jungæ EB; a faciet hæc cum DB rectum angulum; quare $DBq + EBq$ (ECq) $b = EDq$ $c = AD \times DC + ECq$ d ergo $AD \times DC = DBq$. Q.E.D.

a 3. 3.

b 47. 1.

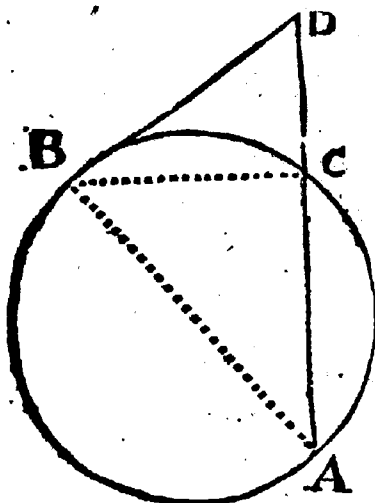
c 6. 2.

d 47. 1.

c 3. ax.

2. Cas. Sin AD per centrum non transeat, duc EC, EB, ED; atque EF perpend. AD, quare a bisecta est AC in F,

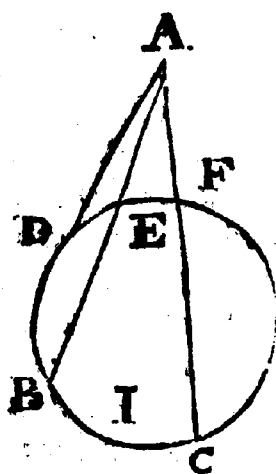
Quoniam igitur $BDq + EBqb = DEqb = EFq + FDqc = EFq + ADC + FCqd = ADC + CEq$ (EBq;) e erit $BDq = ADC$. Q.E.D.



Facilius ac universali-
us sic;

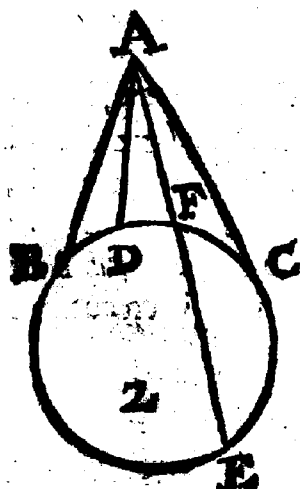
Duc AB, & BC, ac ob
angulos A, DBC a pa- a 32. 3.
res, & D communem,
triangula BDC, ADB
b æquiangula sunt. c er- b 32. 1.
go AD. DB::DB. CD. c 4. 6.
d quare $AD \times DC =$ d 17. 6.
DBq. Q. E. D.

Coroll.



1. Hinc, si à puncto quo-
vis A extra circulum assump-
to, plurimæ lineæ rectæ AB,
AC circulum secantes ducan-
tur, rectangula comprehensa
sub totis lineis AB, AC, &
partibus externis AE, AF in-
ter se sunt æqualia. Nam si
ducatur tangens AD; erit CAF
 $= ADq = BAE$.

a 36. 3.



2. Constat etiam duas re-
ctas AB, AC ab eodem puncto
A ductas, quæ circulum tan-
gant, inter se æquales esse.

Nam si ducatur AE se-
cans circulum; erit ABq $=$ a 36. 3.
EAF $=$ ACq.

3. Perspicuum quoque est ab eodem puncto A extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, AB, AC quæ circulum tangant.

Nam si tertia AD tangere dicatur, erit AD
c 2. cor. $c = AB$ $c = AC$. d Q. E. N.

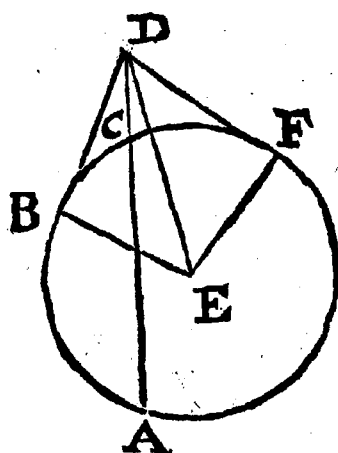
d 8. 3.

4. E contra constat, si duæ rectæ æquales AB, AC ex puncto quopiam A in convexam peripheriam incidant, & earum una AB circulum tangat, alteram quoque circulum tangere.

Nam si fieri potest, non AC, sed altera AD circulum tangat. ergo A D e = AC f = AB.
g Q. E. A.

e 2. cor.
f hyp.
g 8. 3.

P R O P. XXXVII.



Si extra circulum EBF sumatur punctum D, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ DA, DB; quarum altera DA circulum secet, altera DB in eum incidat; sit autem quod sub tota secante DA, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam assumpta DC, comprehen-

ditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente DB describitur quadrato, incidens ipsa DB circulum tanget.

a 17. 3. Ex D a ducatur tangens DF; atque ex E cen-
b hyp. tro duc ED, EB, EF. Quia DBq b = ADC
c 36. 3. $c = DFq$, d erit DB = DF. Sed EB = EF,
d 1. ax. & latus ED commune est; e ergo ang. EBD
sch. 48. 1. = EFD. Sed EFD rectus est, f ergo EBD
e 8. 1. etiam rectus est. g ergo DB tangit circulum.
f 12. ax. Q. E. D.

g cor. 16. 3.

Coroll.

h 8. 1. Hinc, b ang. EDB = EDF.

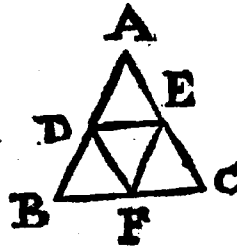
L I B.

LIB. IV.

Definitiones.

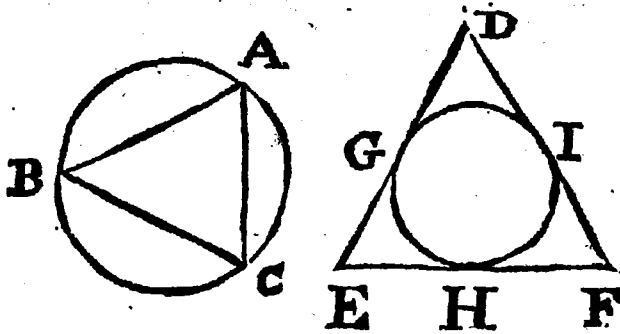
- I.  Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera ejus in qua inscribitur, tangunt.

Sic triangulum DEF est inscriptum in triangulo ABC.



- II. Similiter & figura circa figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circa quam illa describitur.

Ita triangulum ABC est descriptum circa triangulum DEF.



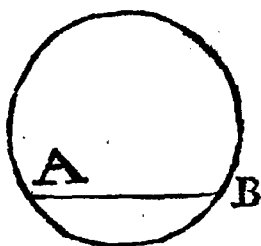
- III. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

IV. Figura vero rectilinea circa circumscriptum describi dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

V. Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ, cui inscribitur.

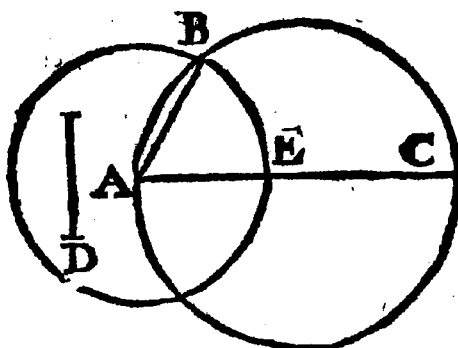
VI. Circulus autem circa figuram describi dicitur.

ECCLIDIS Elementorum
 dicitur, cum circuli peripheria singulostangit
 ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.



VII. Recta linea in cir-
 culo accommodari, seu coa-
 ptari dicitur, cum ejus extrema
 in circuli peripheria fuerint, ut
 recta linea AB.

P R O P. I. Probl. 1.



In dato circulo
 ABC rectam li-
 neam AB accom-
 modare aequalen
 datæ rectæ linea
 D, quæ circuli di-
 ametro AC non
 fit major.

a 3. post.

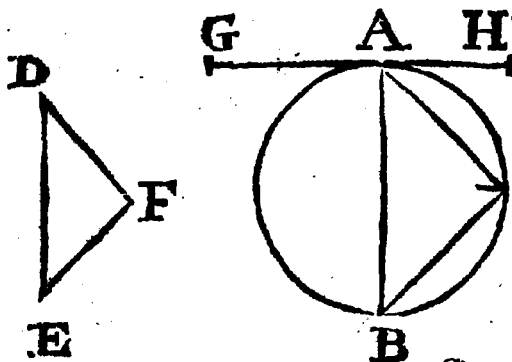
c 3. I.

b 15. def. 1.

c constr.

Centro A, spatio $AE = D$ a describe circum
 dato circulo occurrentem in B. Erit ducta AB
 $b = AE$ $c = D$. Q. E. F.

P R O P. II. Probl. 2.



In dato
 circulo ABC
 triangulum
 ABC descri-
 bere dato tri-
 angulo DEF
 equiangulum
 Recta GH
 circum dæ-

a 17. 3.

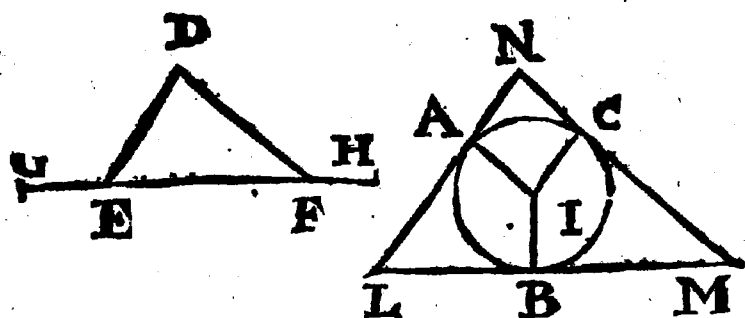
b 23. 1.

tum a tangat in A. b Fac ang. $HAC = E$; b &
 ang. $GAB = F$, & junge BC. Dico factum.

Nam

Nam ang. $Bc = HACd = E$; & ang. $Cc32.3.$
 $c = GABd = F$; e quare etiam ang. $BAC = D$. d *constr.*
 ergo triang. BAC circulo inscriptum triangulo $c32.1.$
 DEF æquiangulum est. $Q.E.F.$

PROP. III. Probl. 3.

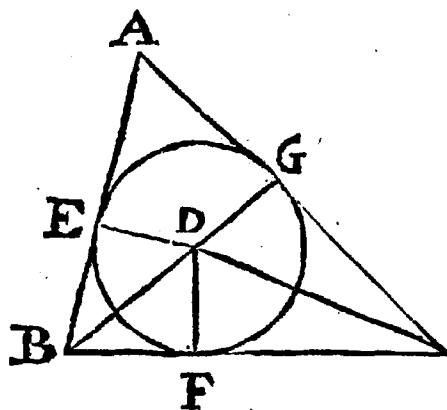


Circa datum circulum IABC triangulum LNM describere, dato triangulo DEF æquiangulum.

Produc latus EF utrinque. a Fac ad centrum $a13.1.$
 I ang. $AIB = DEG$. & ang. $BIC = DFH$.
 deinde in punctis A, B, C circulum b tangant $b17.3.$
 tres rectæ LN, LM, MN . Dico factum.

Nam quod coibunt rectæ LN, LM, MN ,
 atque ita triangulum constituent, patet; c quia $c13.2x.$
 anguli LAI, LBI d recti sunt, adeoque ducta $d18.3.$
 AB angulos faciet LAB, LBA duobus rectis mi-
 nores. Quoniam igitur ang. $AIB + Lc = 2$ e *Schol.*
 Rect. $f = DEG + DEF$; & $AIBg = DEG$, b erit $32.1.$
 ang. $L = DEF$. Simili argumento ang. $M = DFE$. $f13.1.$
 k ergo etiam ang. $N = D$. ergo triang. $LNMc$ *constr.*
 circulo circumscriptum dato EDF est æquian- $h3.2x.$
 gulum. $Q.E.F.$ $k32.1.$

PROP. IV. Probl. 4.



In dato trian-
gulo ABC cir-
culum EFG in-
scribere.

Duos angulos
B, & C a biseca
rectis BD, CD
coeuntibus in D.
Ex D b duc per-
pendiculares DE,

DF, DG. circulus centro D per E descriptus
transibit per G, & F, tangetque tria latera tri-
anguli.

c constr

d 12. ax.

e 26. 1.

Nam ang. DBE $c =$ DBF; & ang. DEB $d =$
DFB; & latus DB commune est: e ergo DE $=$
DF. Simili argumento DG $=$ DF. Circulus igitur
centro D descriptus transit per E, F, G; &
cum anguli ad E, F, G sint recti, tangit omnia
trianguli latera. Q.E.F.

Scholium

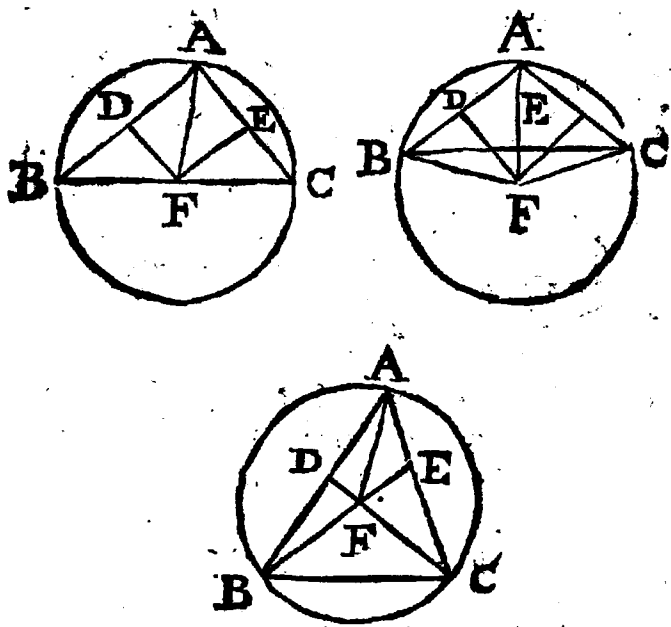
Petr. He-
riz.

Hinc, cognitis lateribus trianguli, inveniuntur
eorum segmenta, quae fiunt à contactibus circuli in-
scripti. Sic,

Sit AB 12, AC 18, BC 16. Erit AB +
BC $=$ 28. ex quo subduc 18 $=$ AC $=$ AE + FC,
remanet 10 $=$ BE + BF. ergo BE, vel BF $=$ 5.
proinde FC, vel CG $=$ 11. quare GA, vel
AE $=$ 7.

PROP.

PROP. V. Probl. 5.



Circa datum triangulum ABC circulum FABC describere.

Latera quævis duo BA, AC a biseca perpen- a 10. & 11.
dicularibus DF, EF concurrentibus in F. Hoc I,
erit centrum circuli.

Nam ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam
AD b = DB; & latus DF commune est; & ang. b *constr.*
FDA c = FDB, d erit FB = FA. eodem modo c *constr.* &
FC = FA. ergo circulus centro F per dati tri- 12. ax.
anguli angulos B, A, C transibit. Q.E.F; d 4. 1;

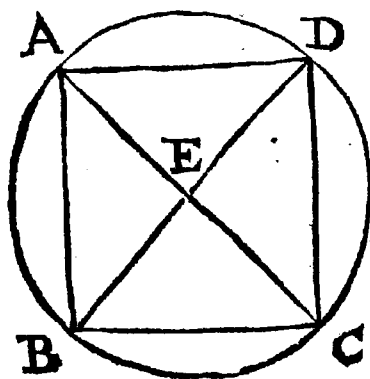
Coroll.

*Hinc, si triangulum fuerit acutangulum, * 31. 3.
centrum cadet intra triangulum; si rectangulum,
in latus recto angulo oppositum; si denique ob-
tusangulum, extra triangulum.

Schol.

Eadem methodo describetur circulus, qui
transeat per data tria puncta, non in una recta
linea existentia.

P R O P. IV. Probl. 6.



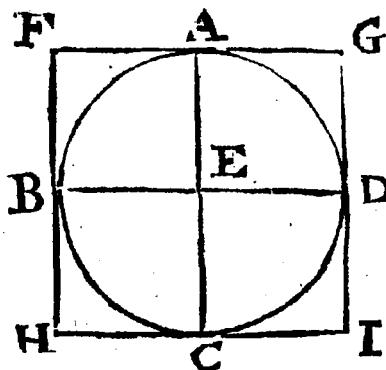
In dato circulo EABCD quadratum ABCD inscribere.

a Duc diametros AC, BD se mutuo secantes ad angulos rectos in centro E. junge harum terminos rectis AB, BC, CD, DA. Dico factum.

Nam quia 4 anguli ad

- b* 26. 3. E recti sunt, *b* arcus, & *c* subtensæ AB, BC, CD, DA pares sunt. ergo ABCD æquilaterum est; ejusque omnes anguli in semicirculis, adeoque *d* recti sunt. *e* ergo ABCD est quadratum, *e* 29 def. 1. dato circulo inscriptum. Q.E.F.

P R O P. VII. Probl. 7.



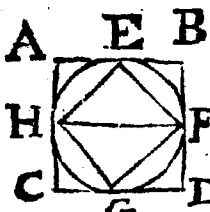
Circa datum circulum EABCD quadratum FHIG describere.

Duc diametros AC, BD se mutuo secantes perpendiculariter. per harum extrema *a* duc tangentes concurrentes in F, H, I, G. Dico

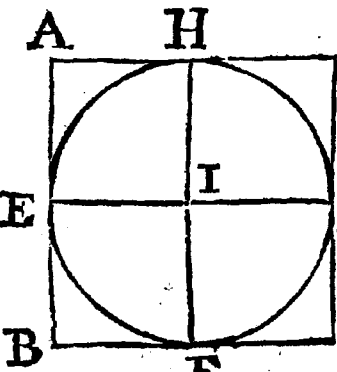
- factum. Nam ob angulos ad A, & C *b* rectos, *c* erit FG parall. HI. eodem modo FH parall. GI. ergo FHIG est parallelogrammum; & quidem rectangulum. sed & æquilaterum, quia $FG \text{ } d = HI \text{ } d = BD \text{ } e = CA \text{ } d = FH \text{ } d = GI$. quare FHIG est *f* quadratum, dato circulo circumscriptum. Q.E.F.

SCHOL.

SCHOL.

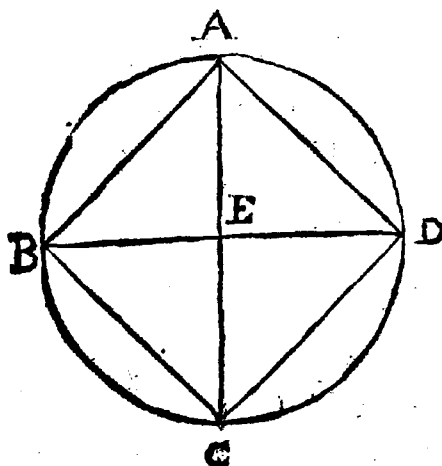

 Quadratum ABCD circulo circumscriptum, duplum est quadrati EFGH circulo inscripti. Nam rectang. HB = 2 HEF. D & HD = 2 HGF. per 41. 1.

PROP. VIII. Probl. 8.


 In dato quadrato ABCD circulum IEFGH inscribere. Latera quadrati biseca in punctis H, E, F, G; junge HF, EG sese secantes in I. circulus centro I per H descriptus quadrato inscribetur.

Nam quia AH, BF a pares ac b parallelæ a 7. ax. sunt, c erit AB parall. HF parall. DC. eodem b 28. 1. modo AD parall. EG parall. BC. ergo IA, c 33. 1. ID, IB, IC sunt parallelogramma. Ergo AH d = AE e = HI = EI = IF = IG. Circulus d 7. ax. igitur centro I per H descriptus transibit per e 34. 1. H, E, F, G, tangetque quadrati latera, cum anguli ad H, E, F, G sint recti. Q.E.F.

PROP. IX. Probl. 9.



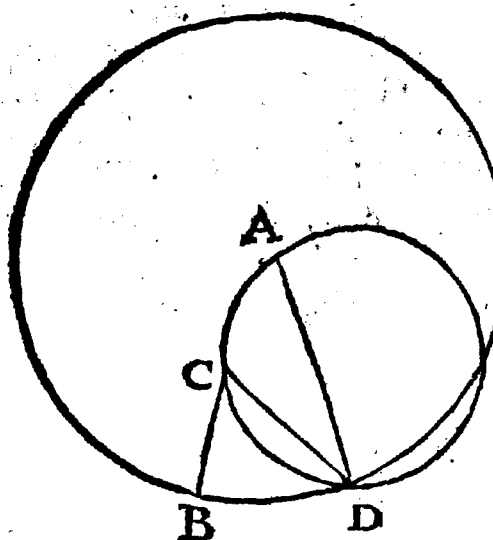
*Circa datum
quadratum ABCD
circulum EABCD
describere.*

Duc diametros
AC, BD secantes
in E. centro E per
A describe circu-
lum. Is dato qua-
drato circumscri-
ptus est.

Nam anguli

a 4. cor. 32. ABD, & BAC a semirecti sunt; b ergo EA = EB. eodem modo EA = ED = EC. Circulus
 1. igitur centro E descriptus per A, B, C, D dati
 b 6. I, quadrati angulos transit. Q.E.F.

PROP. X. Probl. 10.



*Isofceles tri-
angulum ABD
constituere, quod
habeat utrumque
eorum quæ ad ba-
sim sunt angulo-
rum B & ADB
duplum reliqui A.*

Accipe quamvis rectam AB, quam a secas in C, ita ut $AB \times BC = AC^2$.

Centro A per B describe circulum ABD; in hoc
b accomoda $BD=AC$, & junge AD. erit tri-
ang. ABD quod quæritur.

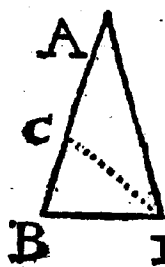
Nam duc DC ; & per CDA t describe circu-
lunt.

A II. 2.

b 1. 4.

C 5. 4.

Ium. Quoniam $AB \times BC = AC^2$. d. liquet BD d 37. 3.
 tangere circulum ACD, quem secat CD. e er- e 32. 3.
 go ang. $BDC = A$. ergo ang. $BDC + CDA = f = f 2. ax.$
 $A + CDA = g$ BCD. sed $BDC + CDA = g$ 32. 1.
 $BD \parallel CB$. & ergo ang. $BCD = CBD$. h 5. 1.
 ergo $DC \parallel DB$ m = AC. n quare ang. $CDA = k$ 1. ax.
 $A = BDC$. ergo $ADB = 2A = ABD$. l 6. 1.
 Q. E. F. m constr. n 5. 1.

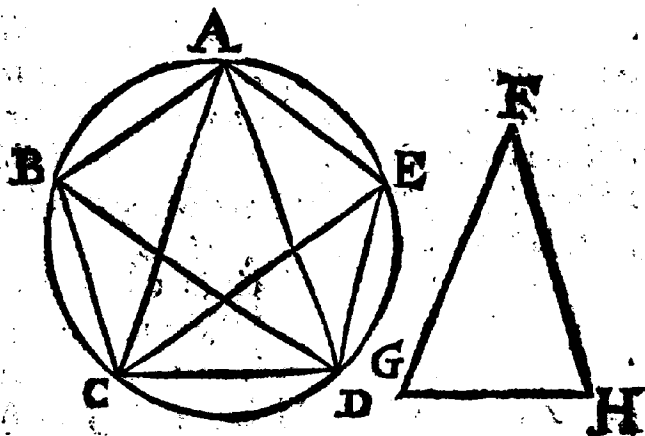


Hæc constructio Analytice inda-
 gatur sic; Factum sit; & angulum
 BDA bisecet recta DC. a ergo DA, a 3. 6.
 $DB :: CA, CB$. item ob ang. CDA
 $b = \frac{1}{2} ADB$ c = A, d est CA = DC. b constr.
 ac ob ang. DCB e = A + CDA = c hyp.
 $2A$ e = B, d erit $DB = DC$. f ergo d 6. 1.
 $DB = CA$. proinde DA. (e BA.) $CA :: CA$. e 32. 1.
 CB . g unde $BA \times CB = CA^2$. f 1. ax. g 17. 6.

Coroll.

Cum omnes anguli A, B, D h conficiant $\frac{1}{2}$ h 32. 1.
 2 Rect. (2 Rect.) liquet A esse $\frac{1}{2}$ 2 Rect.

P R Q P. XI. Probl. II.



In dato circulo ABCDE pentagonum æquilate-
 rum & æquilangulum ABCDE inscribere.

a 10. 4.

a Describe triangulum Iſoſceles FGH, habens utrumque angulorum ad baſim duplum anguli ad verticem. b Huic æquiangulum CAD inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & ADC c biſeca rectis DB, CE occurrentibus circumferentiæ in B, & E connecte rectas CB, BA, AE, ED. Dico factum.

d 26. 3.

e 29. 3.

f 27. 3.

g 2. 4x.

Nam ex conſtr. liquet quinque angulos CAD, CDB, BDA, DCE, ECA pares eſſe; quare d arcus e & ſubtenſæ DC, CB, BA, AE, DE æquantur. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero etiam æquiangulum, f quia ejus anguli BAE, AED, &c. inſiſtunt arcubus g æqualibus BCDE, ABCD, &c.

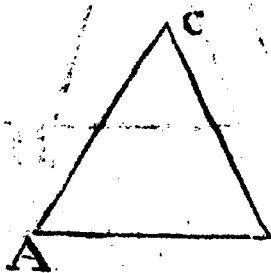
Hujus problematis praxis facillior tradetur ad 10. 13.

Coroll.

Hinc, angulus pentagoni æquilateri & æqui- anguli æquatur $\frac{2}{3}$ 2 Rect. vel $\frac{6}{3}$ Rect.

Schol.

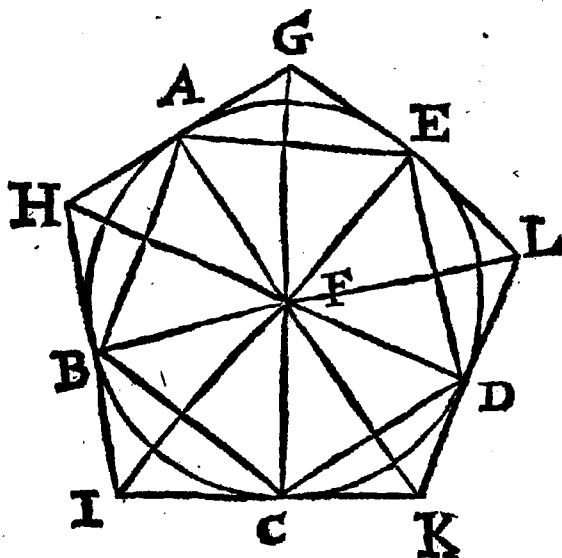
Pet. Herig. Universaliter figura imparium laterum inſcribuntur circulo beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſim multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum; parium vero laterum figura in circulo inſcribuntur ope Iſoſcelium triangulorum, quorum anguli ad baſim multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum.



Ut in triangulo Iſoſcele CAB, ſi ang. A = 3 C = B; AB erit latus Heptagoni. Si A = 4 C; erit AB latus Enneagoni, &c. Sin vero A = $1\frac{1}{2}$ C, erit AB latus quadrati. Et ſi A = $2\frac{1}{2}$ C, ſubten-

subtendet AB sextam partem circumferentiæ :
pariterque si $A = 3 \frac{1}{2} C$; erit AB latus octa-
goni, &c.

PROP. XII. Probl. 12.



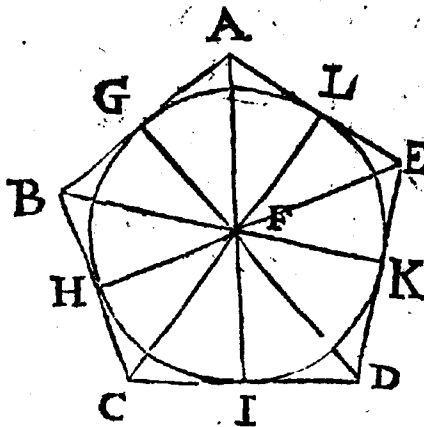
*Circa datum circulum FABCDE pentagonum
æquilaterum & æquiangulum HIKLG describere.*

a Inscribe pentagonum ABCDE æquilaterum a 11. 4.
& æquiangulum ; duc è centro rectas FA, FB,
FC, FD, FE, iisque totidem perpendiculares
GAH, HBI, ICK, KDL, LEG concurrentes
in punctis H, I, K, L, G. Dico factum. Nam
quia GA, GE ex uno puncto G b tangunt circu- b cor. 16. 3.
lum, c erit $GA = GE$. d ergo ang. $GFA = c$ 2. cor. 36.
 GFE . ergo ang. $AFE = 2 GFA$. eodem mo- 3.
do ang. $AFH = HFB$; & proinde ang. $AFB = d$ 8. 1.
 $2 AFH$. Sed ang. $AFE = AFB$. f ergo ang. e 27. 3.
 $GFA = AFH$. sed & ang. $FAH = FAG$; f 7. ax.
& latus FA est commune, b ergo $HA = AG = g$ 12. ax.
 $GE = EL$, &c. k ergo HG, GL, LK, KI, h 26. 1.
IH latera pentagoni æquantur : sed & anguli k 2 ax.
etiam, utpote l æqualium AGF, AHF, &c. du- l 2. cor. 32. 1.
pli ; ergo, &c.

Coroll.

Eodem pacto, si in circulo quæcunque figura æquilatera & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum, excitentur lineæ perpendiculares, hæ perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum & angulorum æqualium circulo circumscriptam.

P R O P. XIII. Probl. 13.



In dato pentagono æquilatero & æqui-
angulo ABCDE
circulum FGHIK in-
scribere.

Duos pentagoni
angulos A, & B a
bisectione rectis AF,
BF concurrentibus
in F. Ex F duc per-
pendiculares FG,

FH, FI, FK, FL. Circulus centro F per G descri-
ptus tanget omnia pentagoni latera.

Duc FC, FD, FE. Quoniam BA = BC;
& latus BF commune est; & ang. FBA =
FBC, d erit AF = FC; & ang. FAB = FCB.
Sed ang. FAB = $\frac{1}{2}$ BAE = $\frac{1}{2}$ BCD. ergo
ang. FCB = $\frac{1}{2}$ BCD. eodem modo anguli tota-
les C, D, E omnes bisecti sunt. Quum igitur
ang. FGB = FHB, & ang. FBH = FBG, &
latus FB sit commune, g erit FG = FH. simili-
ter omnes FH, FI, FK, FL, FG æquantur. Ergo
circulus centro F per G descriptus transit per
H, I, K, L; h tangitque pentagoni latera, cum
anguli ad ea puncta sint recti. Q.E.F.

Coroll.

Hinc, si duo anguli proximi figuræ æquilate-
ræ & æquiangulæ bisecentur, & à puncto, in quo
coeunt lineæ angulos bisecantes, ducantur rectæ
lineæ

9. 1.

b hyp.

c constr.

d 4. 1.

e hyp.

f 12. ax.

g 26. 1.

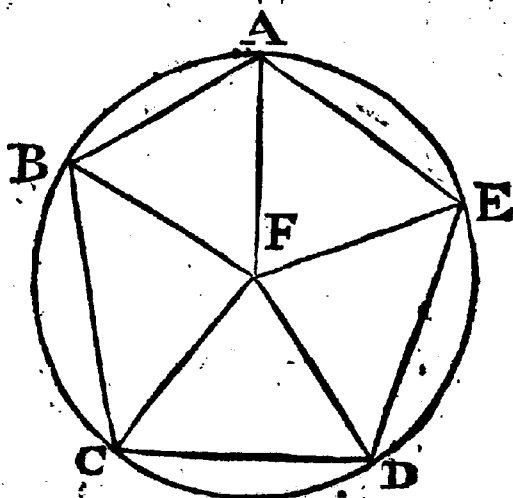
h cor. 16. 3.

linę ad reliquos figurę angulos, omnes anguli figurę erunt biseati.

Schol.

Eadem methodo in qualibet figura æquilatera & æquiangula circulus describetur.

P R O P. XIV. *Probl. 14.*



*Circa datum Pentagonum æquilaterum & æqui-
angulum ABCDE circulum FABCDE descri-
bere.*

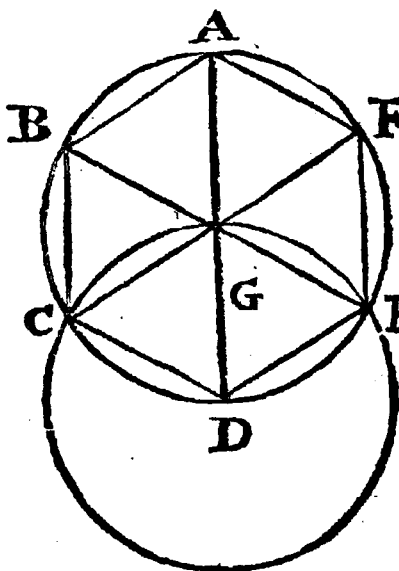
Duos pentagoni angulos biseca rectis AF, BF concurrentibus in F. Circulus centro F per A descriptus pentagono circumscribitur.

Ducantur enim FC, FD, FE. *a* Biseati itaque *a* cor. 13. 7^o sunt anguli C, D, E. *b* ergo FA, FB, FC, FD, *b* 6. 1, FE æquantur, ergo circulus centro F descriptus, per A, B, C, D, E, pentagoni angulos transibit, Q. E. F.

Schol.

Eadem arte circa quamlibet figuram æquila-
teram & æquiangulam circulus describetur.

P R O P.



In dato circulo GA^2
 $BCDEF$ hexagonum;
 & æquilaterum & æ-
 quiangulum $ABCD$ -
 EF inscribere.

Duc diametrum
 AD ; centro D per
 centrum G describe
 circulum, qui datum
 secet in C , & E . duc
 diametros CF , EB .
 junge AB , BC , CD ,
 DE , EF , FA . Dico
 factum.

- a 32. 1. Nam ang. CGD $a = \frac{1}{3} 2$ Rect. $a = DGE$ b =
 b 15. 1. $AGFb = AGB$. c ergo $BGC = \frac{1}{3} 2$ Rect. $= FGE$.
 c cor. 13. 1. d ergo arcus e & subtensæ AB , BC , CD , DE ,
 d 26. 3. EF æquantur. Hexagonum igitur æquilaterum
 e 29. 3. est: sed & æquiangulum f quia singuli ejus an-
 f 27. 3. guli arcubus insistant æqualibus. Q.E.F.

Coroll.

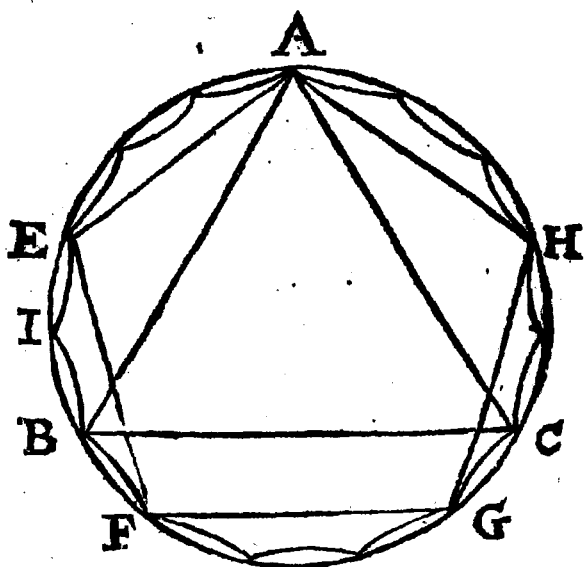
1. Hinc latus Hexagoni circulo inscripti semi-
 diametro æquale est.

2. Hinc facile triangulum æquilaterum ACE
 in circulo describetur.

Schol. Probl.

And. Terq. Hexagonum ordinatum super data recta CD ita
 a 1. 1. construes. a Fac triangulum CGD æquilaterum
 super data CD . centro G per C , & D descri-
 be circulum. Is capiet Hexagonum super data
 CD .

PROP. XVI. Probl. 16.



In dato circulo AEBC quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Dato circulo *a* inscribe pentagonum æquilaterum AEF^aGH; *b* itemque triangulum æquilaterum ABC. erit BF latus quindecagoni quæsitum.

Nam arcus AB *c* est $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{3}$ peripheriæ, cujus *c* constr. AF est $\frac{2}{3}$ vel $\frac{6}{15}$ ergo reliquus BF = $\frac{1}{3}$ periph.

ergo quindecagonum, cujus latus BF, æquilaterum est; sed & æquiangulum, *d* cum singuli ejus *d* 27. 3. anguli arcubus insistant æqualibus, quorum unusquisque est $\frac{1}{3}$ totius circumferentiæ. ergo, &c.

Schol.

Circulus dividitur Geometricè in partes

{	4, 8, 16, &c. per 6, 4, & 9, 1.
	3, 6, 12, &c. per 15, 4, & 9, 1.
	5, 10, 20, &c. per 11, 4, & 9, 1.
	15, 30, 60, &c. per 16, 4, & 9, 1.

Cæterum divisio circumferentiæ in partes datas etiamnum desideratur; quare pro figurarum quarumcunque, ordinatarum constructionibus sæpe ad mechanica artificia recurrendum est, propter quæ Geometriæ practici consulendi sunt.

L I B. V.

Definitiones.

I.  Ars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

II. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

III. Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

In omni ratione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur antecedens rationis; ea vero, ad quam alia refertur, consequens rationis dici solet. ut in ratione 6 ad 4; antecedens est 6, & consequens 4.

Nota.

Cujusque rationis quantitas innotescit dividendo antecedentem per consequentem. ut ratio 12 ad 5 effertur per $\frac{12}{5}$ item quantitas rationis A ad B est $\frac{A}{B}$. Quare non raro brevitatis causa, quantitates rationum sic designamus, $\frac{A}{B}$ $\square$, vel $\equiv$, vel $\supset \frac{C}{D}$; hoc est, ratio A ad B major est ratione C ad D, vel ei æqualis, vel minor. Quod probe animadvertat, quisque hæc legere volet.

Rationis, sive proportionis species, ac divisiones vide apud interpretes.

IV. Proportio vero est rationum similitudo.

Rectius quæ hic vertitur proportio, proportionalitas, sive analogia dicitur; nam proportio idem denotat quod ratio, ut plerisque placet.

V. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare.

VI. In

E, 12. | A, 4. B, 6. | G, 24. VI. In ead-
F, 30. | C, 10. D, 15. | H, 60. dem ratione
magnitudines

dicuntur esse, prima A ad secundam B, & tertia C ad quartam D, cum primæ A, & tertiæ C æquemultiplicia E, & F à secundæ B, & quartæ D æquemultiplicibus G, & H, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque E, F ab utroque G, H, vel una deficient, vel una æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur E, G; & F, H quæ inter se respondent.

Hujus nota est :: ut A. B :: C. D. hoc est A ad B, & C ad D in eadem sunt ratione. aliquando sic scribimus $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ id est, A.B :: C. D.

VII. Eandem autem habentes rationem (A. B :: C. D) proportionales vocentur.

E, 30. | A, 6. B, 4. | G, 28. VIII. Cum
F, 60. | C, 12. D, 9. | H, 63. vero æquemul-
tiplicium, E mul-

tiplex primæ magnitudinis A exceßerit G multiplicem secundæ B; at F multiplex tertiæ C non exceßerit H multiplicem quartæ D; tunc prima A ad secundam B majorem rationem habere dicetur, quam tertia C ad quartam D.

Si $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$, necessarium non est ex hac definitione, ut E semper excedat G; quum F minor est quam H; sed conceditur hoc fieri posse.

IX. Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit. Quorum secundus est instar duorum.

X. Cum autem tres magnitudines A, B, C proportionales fuerint, prima A ad tertiam C duplicatam rationem habere dicetur ejus, quam habet ad secundam B: at quum quatuor magnitudines A, B, C, D, proportionales fuerint, prima A ad quartam D triplicatam rationem habere dicetur

74 *Euclidis Elementorum*
dicetur ejus, quam habet ad secundam B; & semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Duplicata ratio exprimitur sic $\frac{A}{C} = \frac{A}{B} b k$. Hoc est, ratio A ad C duplicata est rationis A ad B. Triplicata autem sic $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} ter$. id est, ratio A ad D triplicata est rationis A ad B.

∴ denotat continue proportionales. ut A, B, C, D; item 2, 6, 18, 54 sunt ∴

XI. Homologæ, seu similes ratione, magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Ut si A.B :: C.D; tam A & C, quam B & D homologæ magnitudines dicuntur.

XII. Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Ut sit A.B :: C.D. ergo alterne, vel permutando, vel vicissim, A.C :: B.D. per 16. 5.

In hac definitione, & 5. sequentibus imponuntur nomina sex modis argumentandi, quibus mathematici frequenter utuntur; quarum illationum vis innuitur propositionibus hujus libri, quæ in explanationibus citantur.

XIII. Inversa ratio, est sumptio consequentis ceu antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.

Ut A.B :: C.D. ergo inverse, B.A :: D.C. per cor. 4, 5.

XIV. Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

Ut A.B :: C.D. ergo componendo, A + B.B :: C + D.D. per 18. 5.

XV. Divisio rationis, est sumptio excessus; quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

Ut

Ut $A. B :: C. D.$ *ergo dividendo*, $A - B. B :: C - D. D.$ *per* 17.5.

XVI. Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

Ut $A. B :: C. D.$ *ergo per conversam rationem*, $A. A - B :: C. C - D.$ *per* cor. 19.5.

XVII. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his alix multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione; cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel aliter; sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

XVIII. Ordinata proportio est, cum fuerit quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

Ut si $A. B :: D. E.$ *item* $B. C :: E. F.$ *erit ex æquo* $A. C :: D. F.$ *per* 22.5.

XIX. Perturbata autem proportio est; cum tribus positis magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

Ut si $A. B :: F. G.$ *item* $B. C :: E. F.$ *erit ex æquo perturbate* $A. C :: E. G.$ *per* 23.5.

XX. Quotlibet magnitudinibus ordine positis, proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, & ita deinceps, donec extiterit proportio,

Sint

Sint quotcunque A, B, C, D ; ex hac def,
 $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{D}$.

Axioma.

*Æquemultiplices eidem multiplici, sunt quoq;
inter se æquemultiplices.*

P R O P. I.



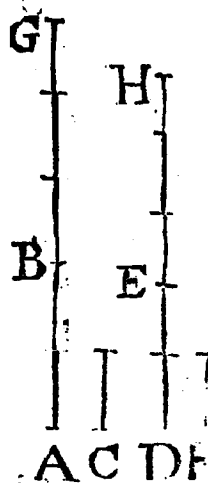
*Sì sint quotcunque magnitudines AB, CD ,
quotcunque magnitudinum E, F aequalium numero,
singula singularum, æquemultiplices; quam multiplex est unius E una magnitudo AB , tam multiplices erunt & omnes $AB+CD$ omnium $E+F$.*

Sint AG, GH, HB partes quantitatis AB ipsi E æquales. item CI, IK, KD partes quantitatis CD ipsi F pares. Harum numerus illarum numero æqualis ponitur. Quum igitur $AG+CI = E+F$; & $GH+IK = E+F$; & $HB+KD = E+F$, liquet $AB+CD$ æque saepe continere $E+F$, ac una AB unam E continet. Q.E.D.

2. ax.

P R O P.

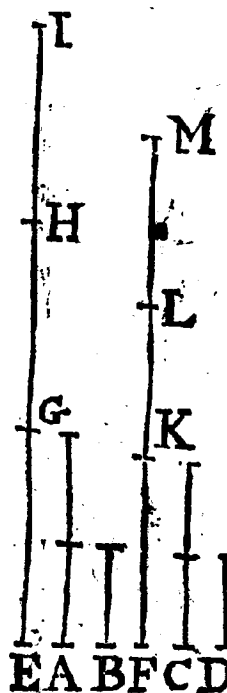
PROP. II.



Si prima AB secunda C æque fuerit multiplex, atque tertia DE quarta F; fuerit autem & quinta BG secunda C æque multiplex, atque sexta EH quarta F, erit & composita prima cum quinta (AG) secunda C æque multiplex, atque tertia cum sexta (DH) quarta F.

Numerus partium in AB ipsi C æqualium æqualis ponitur numero partium in DE ipsi F æqualium. Item numerus partium in BG ponitur æqualis numero partium in EH. *a a 2. ax.* ergo numerus partium in AB+BG æquatur numero partium in DE+EH. hoc est tota AG æquemultiplex est ipsius C, atque tota GH ipsius F. Q.E.D.

PROP. III.



Sit prima A secunda B æquemultiplex, atque tertia C quarta D; sumantur autem EI, FM æquemultiplices prima & tertia; erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æquemultiplex: altera quidem EI secunda B, altera autem FM quarta D.

Sint EG, GH, HI partes multiplicis EI ipsi A pares; item FK, KL, LM partes multiplicis FM ipsi C æquales.

a Harum numerus illarum numero æquatur. Porro A, id est EG, vel GH, vel GI ipsius B ponitur æquemultiplex atque C, vel FK, &c. ipsius D.

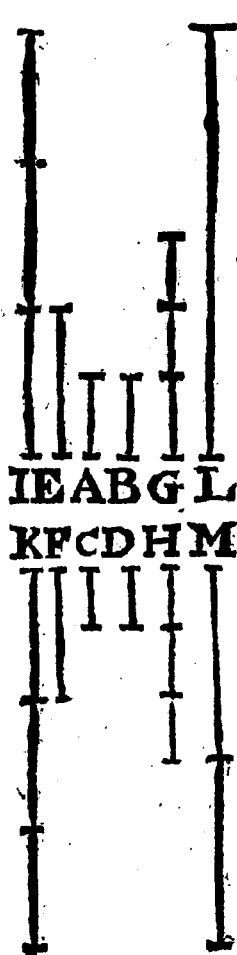
G

bergo

b 2. 5.
c 2. 5.

b ergo $EG + GH$ æquemultiplex est secundæ B, atque $FK + KL$ quartæ D. c Simili argumento EI ($EH + HI$) tam multiplex est ipsius B, quam FM ($FL + LN$) ipsius D. Q. E. D.

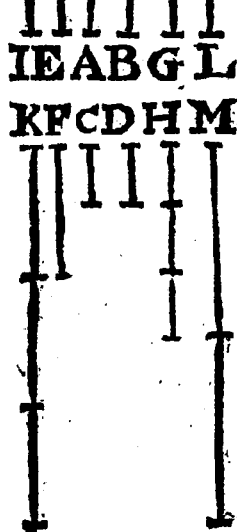
PROP. IV.



Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, & tertia C ad quartam D; etiam E & F æquemultiplices primæ A, & tertia C ad G, & H æquemultiplices secundæ B, & quartæ D, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondens, ita sumptæ fuerint. (E. G :: F. H.)

a 3. 5.

b hyp.



Sume I, & K ipsarum E, & F; item L & M ipsarum G, & H æquemultiplices. a Erit I ipsius A æquemultiplex atque K ipsius C; a pariterque L tam multiplex ipsius B quam M ipsius D. Itaque cum sit A. B b :: C. D; juxta 6. def. si I $\square, =, \rightrightarrows$ L; consequenter pari modo K $\square, =, \rightrightarrows$ M. ergo cum I, & K ipsarum E, & F sumptæ sint æquemultiplices, atque L, & M ipsarum G & H; erit juxta 7. def. E. G :: F. H. Q. E. D.

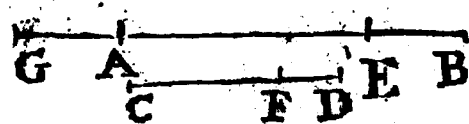
Coroll.

Hinc demonstrari solet inversa ratio.

Nam quoniam A. B :: C. D, si E $\square, =, \rightrightarrows$ G, c erit similiter F $\square, =, \rightrightarrows$ H. ergo liquet, quod si G $\square, =, \rightrightarrows$ E, esse H $\square, =, \rightrightarrows$ F. d 6. def. 5. d ergo B, A :: D. C. Q. E. D.

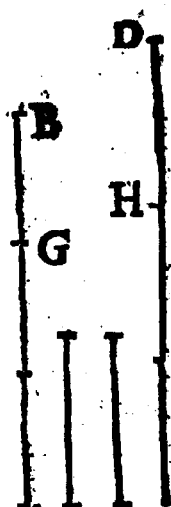
PROP.

PROP. V.

 Si magnitudo AB magnitudinis CD aequae fuerit multiplex, atque ablata AE ablata CF; etiam reliqua EB reliqua FD ita multiplex erit, ut tota AB totius CD.

Accipe aliam quandam GA, quae reliquae FD ita sit multiplex, atque tota AB totius CD, vel ablata AB ablata CF. *a* ergo tota GA + AE totius CF + FD aequemultiplex est, ac una AB unius CF, hoc est, ac AB ipsius CD. *b* ergo GE = AB. *c* proinde, ablata communi AE, manet GA = EB. ergo, &c.

PROP. VI.

 Si duae magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F sint aequemultiplices; & detrahantur quaedam sint, AG, & CH, earundem E, & F aequemultiplices; & reliquae GB, HD eisdem E, F aut aequales sint, aut aequae ipsarum multiplices.

Nam quia numerus partium in AB ipsi E aequalium ponitur aequalis numero partium in CD ipsi F aequalium; item numerus partium in AG aequali numero partium in CH. si hinc AG, inde CH detrahatur, & remanet numerus partium in reliqua GB aequalis numero partium in HD. ergo si GB sit B semel, erit HD etiam C semel. si GB sit E aliquoties, erit HD etiam C toties accepta. Q.E.D.

PROP. IX.

Quae ad eandem eandem habent rationem, aequales sunt inter se. Et ad quas eandem eandem habet rationem, ex quoque sunt inter se aequales.

1. Hyp. Sit $A, C :: B, C$. dico $A=B$.
 $A \ B \ C$ Nam sit $A \sqsubset$, vel $\sqsupset B$, a erit ideo a 8. 5.
 $\frac{A}{C} \sqsubset$, vel $\sqsupset \frac{B}{C}$. contra Hyp.

2. Hyp. Sit $C, B :: C, A$. dico $A=B$. nam
 sit $A \sqsubset B$, b ergo $\frac{C}{B} \sqsubset \frac{C}{A}$. contra Hyp. b 8. 5.

PROP. X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quae maiorem rationem habet, illa major est: ad quam vero eandem maiorem rationem habet, illa minor est.

1. Hyp. Sit $\frac{A}{C} \sqsubset \frac{B}{C}$. Dico $A \sqsubset B$. Nam
 $A \ B \ C$ si dicatur $A=B$, a erit $A, C :: B, C$. contra Hyp. a 7. 5.
 Sin $A \sqsupset B$, b erit $\frac{A}{C} \sqsupset \frac{B}{C}$ etiam contra Hyp. b 8. 5.

2. Hyp. Sit $\frac{C}{B} \sqsubset \frac{C}{A}$. Dico $B \sqsupset A$. Nam dic
 $B \sqsupset A$ c ergo $C, B :: C, A$. contra Hyp. vel dic $B \sqsubset A$. d ergo $\frac{C}{A} \sqsubset \frac{C}{B}$ etiam contra Hyp. c 7. 5.
 d 8. 5.

P R O P. XI.

G	_____	H	_____	I	_____
A	_____	C	_____	E	_____
B	_____	D	_____	F	_____
K	_____	L	_____	M	_____

Quæ eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.

Sit $A. B :: E. F.$ item $C. D :: E. F.$ dico $A. B :: C. D.$ sume ipsarum A, C, E æquemultiplices G, H, I ; atque ipsarum B, D, F æquemultiplices $K, L, M.$ Et quoniam $a A. B :: E. F.$ si $G \square, =,$
a hyp.
b 6. def. 5. $\neg K, b$ erit pari modo $I \square, =,$ $\neg M.$ pariterque quia $a E. F :: C. D.$ si $I \square, =,$ $\neg M, b$ erit H similiter $\square, =,$ $\neg L.$ ergo si $G \square, =,$
c 6. def. 5. $\neg K,$ erit similiter $H \square, =,$ $\neg L.$ & quare $A. B :: C. D. Q. E. D.$

Schol.

Quæ eisdem rationibus sunt eadem rationes, sunt quoque inter se eadem.

P R O P. XII.

G	_____	H	_____	I	_____
A	_____	C	_____	E	_____
B	_____	D	_____	F	_____
K	_____	L	_____	M	_____

Si sint magnitudines quæcunque $A, & B; C & D; E, & F$ proportionales; quemadmodum se habuerit una antecedentium A ad unam consequentium $B,$ ita se habebunt omnes antecedentes, A, C, E ad omnes consequentes, $B, D, F.$

Sume antecedentium æquemultiplices $G, H, I;$ & consequentium $K, L, M.$ Quoniam quam multiplex est una G unius $A,$ a tam multiplices sunt omnes G, H, I omnium $A, C, E;$ pariterque quam multiplex est una K unius $B,$ a tam multiplices sunt omnes K, L, M omnium $B, D, F.$ Porro
a 1. 5.
b hyp. $a A. B :: C. D :: E. F.$ si $G \square, =,$ $\neg K,$ erit similiter

H

$H \sqsubset, =, \supset L$, & $I \sqsubset, =, \supset M$, & proinde si $G \sqsubset, =, \supset K$, erit simili modo $G+H+I \sqsubset, =, \supset K+L+M$. c quare $A.B :: A+C+E. B+D+F$. c 6. def. 5.
Q E.D.

Coroll.

Hinc, si similia proportionalia similibus proportionalibus addantur, tota erunt proportionalia.

PROP. XIII.

G	_____	H	_____	I	_____
A	_____	C	_____	E	_____
B	_____	D	_____	F	_____
K	_____	L	_____	M	_____

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; tertia vero C ad quartam D maiorem habuerit rationem, quam quinta E ad sextam F; prima quoque A ad secundam B maiorem rationem habebit, quam quinta E ad sextam F.

Sume ipsarum A, C, E æquemultiplices G, H, I: ipsarumque B, D, F æquemultiplices K, L, M. Quia $A.B :: C.D$; si $H \sqsubset L$, a erit a 6. def. 5. $G \sqsubset K$. Sed quia $\frac{C}{D} \sqsubset \frac{E}{F}$, b fieri potest ut sit b 8. def. 5. $H \sqsubset L$, & I non $\sqsubset M$. ergo fieri potest ut $G \sqsubset K$, & I non $\sqsubset M$ c ergo $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{E}{F}$. Q E.D. c 8. def. 5.

S C H O L.

Quod si $\frac{C}{D} \supset \frac{E}{F}$, erit quoque $\frac{A}{B} \supset \frac{E}{F}$. Item si $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{C}{D} \sqsubset \frac{E}{F}$, erit $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{E}{F}$. & si $\frac{A}{B} \supset \frac{C}{D} \supset \frac{E}{F}$, erit $\frac{A}{B} \supset \frac{E}{F}$.

PROP. XIV.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; prima vero A, quam tertia C major fuerit; erit & secunda B major quam quarta D. Quod si prima A fuerit æqualis tertia C, erit & secunda B æqualis quartæ D; si vero A minor, & B minor erit.

a 8. 5.

b hyp.

c 13. 5.

d 10. 5.

e 7. 5.

f hyp.

g 11. & 9. 5.

Sit $A \sqsubset C$. a ergo $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{C}{B}$. b sed $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. e ergo $\frac{C}{D} \sqsubset \frac{C}{B}$. d ergo $B \sqsubset D$. Simili argumento si $A \sqsupset C$, d erit $B \sqsupset D$. Sin ponatur $A = C$; ergo $C. B e :: A. B f :: C. D$. g ergo $B = D$. Quæ E. D.

S C H O L.

A fortiori, si $\frac{A}{B} \sqsupset \frac{C}{D}$, atque $A \sqsubset C$, erit $B \sqsubset D$. Item si $A = B$, erit $C = D$. Et si $A \sqsubset$, vel $\sqsupset B$, erit pariter $C \sqsubset$, vel $\sqsupset D$.

PROP. XV.

Partes C & F cum pariter multiplicibus AB, & DE in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur. (AB. DE :: C. F.)



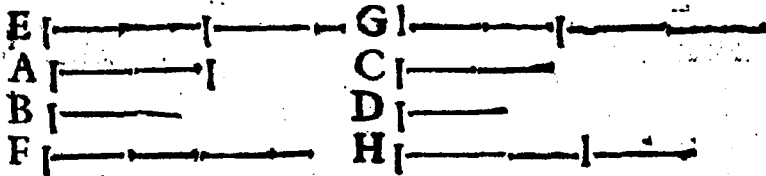
Sint AG, GB partes multiplicis AB ipsi C æquales: item DH, HE partes multiplicis DE ipsi F æquales. a Harum numerus illarum numero æquatur. ergo quum b AG. DH (AB.) DH+HE (DE) :: C. F. Q. E. D.

a hyp.

b 7. 5.

c 12. 5.

P R O P. XVI.



Si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales fuerint; & vicissim proportionales erunt. (A.C::B.D.)

Accipe E & F æquemultiples ipsarum A & B. ipsarumque C & D æquemultiples G & H. Itaque E.F a :: A.B. b :: C.D. a :: G.H. Quare si E $\square$, =, $\sqsupset$ G, erit similiter F $\square$, =, $\sqsupset$ H. d ergo A.C :: B.D. Q.E.D.

a 15. 53

b hyp.

c 11. 5. 8

14. 5.

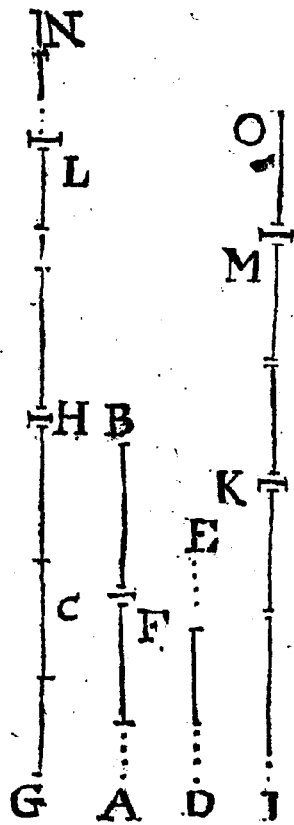
S C H O L.

Alterna ratio locum tantum habet, quando quantitates ejusdem sunt generis. Nam Heterogeneæ quantitates non comparantur.

d 6. def. 54

P O P. XVII.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint (A.B.CB :: DE.FE;) bæ quoque divisæ proportionales erunt. (A.C.CB :: DE.FE.)



Accipe GH, HL, IK, KM ordine æquemultiples ipsarum AC, CB, DF, FE. item LN, MO æquemultiples ipsarum CB, FE. Tota GL totius AB a tam multiplex est, quam una GH unius AC, b id b const. est quam IK ipsius DF; e hoc c 1. 5. est quam tota IM totius DE. Item HN (HL+LN) ipsius CB d æquemultiplex est, d 2. 5. ac KO (KM+MO) ipsius FE. Quum igitur per hyp. A.B. BC :: D.E. E.F. si GL $\square$, =, $\sqsupset$ HN, etiam similiter

a 1. 5.

b id b const.

c 1. 5.

d 2. 5.

- e 6. def. 5. militer e erit $LM \sqsubset, =, \supset KO$. Itaque ablati
hinc inde communibus HL, KM. si reliqua GH
f 5. ax. $\sqsubset, =, \supset LN$, ferit similiter $IK \sqsubset, =, \supset MO$.
g 6. def. 5. g unde $AC.CB :: DF.FE$. Q. E. D.

P R O P. XVIII.

*Si divisa magnitudines sint propor-
tionales (AB.BC :: DE.EF,) hæ quo-
que compositæ proportionales erunt
(AC.CB :: DF.FE.)*

*Nam si fieri potest, sit AC.CB ::
DF.FG $\supset$ FE. a ergo erit divisim
AB.BC :: DG.GF. b hoc est DG.
GF :: DE.EF. ergo cum DG $\sqsubset$ DE,
c erit GF $\sqsubset$ EF. Q. E. A. Simile
absurdum d sequetur, si dicatur AC.CB :: DF.
GF $\sqsubset$ FE.*

- a 17. 5.
b hyp. & II.
5.
c 14. 5.
d 9. ax.

P R O P. XIX.

*Si quemadmodum to-
tum AB ad totum DE,
E ita ablatum AC se ha-
buerit ad ablatum DF;
et reliquum CB ad reliquum FE, ut totum AB ad
totum DE, se habebit.*

- a hyp. Quoniam a $AB.DE :: AC.DF$, b erit permu-
tando $AB.AC :: DE.DF$. c ergo divisim AC .
b 16. 5. $CB :: DF.FE$. quare rursus b permutando AC .
c 17. 5. $DF :: CB.FE$; d hoc est $AB.DE :: CB.FE$. Q. E. D.
d hyp. & II.
5.

Coroll.

1. Hinc, si similia proportionalia similibus
proportionalibus subducantur, residua erunt pro-
portionalia.

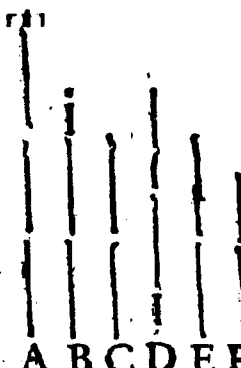
2. Hinc demonstrabitur conversæ ratio.

- Sit $AB.CB :: DE.FE$. Dico $AB.AC :: DE$.
DF. Nam a permutando $AB.DE :: CB.FE$. b er-
go $AB.DE :: AC.DF$. quare iterum permutan-
do, $AB.AC :: DE.DF$. Q. E. D.

P R O P.

PROP. XX.

Si sint tres magnitudines A, B, C; & alia D, E, F ipsis aequales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur (A.B :: D.E. atque B.C :: E.F;) ex aquo autem prima A major fuerit, quam tertia C; erit & quarta D major, quam sexta F. Quod si prima A tertia C fuerit æqualis; erit & quarta D æqualis sextæ F. Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

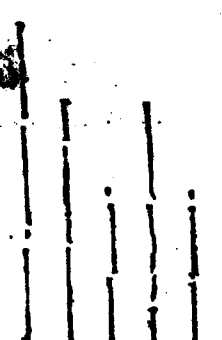


A B C D E F

Hyp. Si $A \sqsubset C$. quoniam a $E.F :: B.C$. a hyp.
 b erit inverse $F.E :: C.B$. c Sed $\frac{C}{B} \supset \frac{A}{B}$ d ergo b cor. 4. 5.
 $\frac{F}{E} \supset \frac{A}{B}$ vel $\frac{D}{E}$. e ergo $D \sqsubset F$. Q.E.D. c hyp. &
 8. 5.
 2. Hyp. Simili argumento, si $A \supset C$, ostendetur $D \supset F$. d schol. 13. 5.
 3. Hyp. Si $A = C$. quoniam $F.E :: C.B ::$ e 10. 5.
 f $A.B :: D.E$ g erit $D = F$. Q.E.D. f 7. 5.
 g 11. 5. &
 9. 5.

PROP. XXI.

Si sint tres magnitudines A, B, C; & alia D, E, F ipsis aequales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritq; perturbata earum proportio, (A.B :: E.F. atque B.C :: D.E;) ex aquo autem prima A quam tertia C major fuerit; erit & quarta D quam sexta F major. Quod si prima fuerit tertia æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.



A B C D E F

1. Hyp. $A \sqsubset C$. Quoniam a $D.E :: B.C$, a hyp.
 invertendo erit $E.D :: C.B$. atqui $\frac{C}{B} \supset \frac{A}{B}$. b 8. 5.
 c ergo

c schol. 13. c ergo $\frac{E}{D} \supset \frac{A}{B}$, hoc est $\frac{E}{F}$. d ergo $D \sqsubset F$

5.

Q.E.D.

d 10. 5.

2. Hyp. Similiter, si $A \supset C$, erit $D \supset F$.

3. Hyp. Si $A = C$, quoniam $E. D :: C. B ::$

e $A. B :: f E. F. g$ erit $D = F$. Q.E.D.

e 7. 5.

f hyp.

g 9. 5.

PROP. XXII.



Si sint quotcunque magnitudines A, B, C; & alie
ipsis aequales numero D, E,
F, quae binae & in eadem
ratione sumantur ($A. B ::$
 $D. E. \& B. C :: E. F.$) &
ex aequalitate in eadem ra-
tione erunt ($A. C :: D. F.$)

Accipe G, H ipsarum
A, D, & I, K ipsarum B, E;
item L, M ipsarum C, F
aequemultiplices.

Quoniam a $A. B :: D.$
E. b erit $G. I :: H. K.$ eodem
modo, erit $I. L :: K. M.$ er-
go si $G \sqsubset, =, \supset L$, c erit
 $H. \sqsubset, =, \supset M$; d ergo $A.$
 $C :: D. F.$ Eodem pacto si
ulterius $C. N :: F. O$, erit
ex aquali $A. N :: D. O.$
Q.E.D.

a hyp.

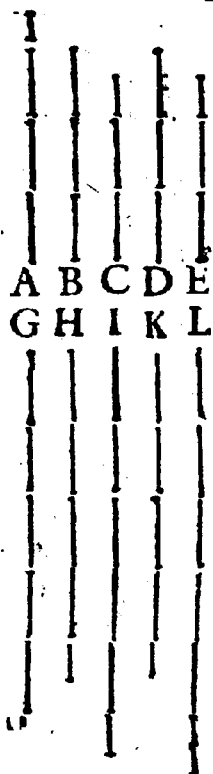
b 4. 5.

c 20. 5.

d 6. def. 5.

PROP.

PROP. XXIII.



Si sint tres magnitudines A, B, C, aliæq; D, E, F ipsæ æquales numero, quæ bina in eadem ratione sumantur; fuerit autem perturbata earum proportio. (A. B :: E. F. & B. C :: D. E.) etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt A. C :: D. F.
 Sumæ G, H, I, ipsarum A, B, D; item K, L, M ipsarum C, E, F æquemultiplices. erit G. H a :: A. B b :: E. F a :: L. M. porro quia a 15. 5. b B. C :: D. E. erit c H. I :: K. L. b hyp. ergo G, H, K, & I, L, M habent c 4. 5. le juxta 21. 5. quare si G $\sqsubset$, $\sqsupset$ K, erit similiter I $\sqsubset$, $\sqsupset$ M. d proinde A. C :: D. F. Q. E. D. d 6. def. 5.
 Eodem modo si plures fuerint magnitudinibus tribus, &c.

Coroll.

Ex his sequitur, rationes ex iisdem rationibus *22. & 23. compositas esse inter se easdem, item, earum 5. & 20. dem rationum easdẽ partes inter se easdem esse. def. 5.

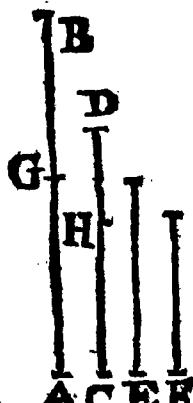
PROP. XXIV.

A ——— Si prima A B ad secundam C ——— B G C eandem habuerit rationem quam tertia DE ad quartam D ——— DE ad quartam F ——— E H F, habuerit autem & quinta BG ad secundam C eandem rationem, quam sexta EH ad quartam F; etiam composita prima cum quinta (AG) ad secundam C eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta (DH) ad quartam F.

Nam quia a. A B. C :: D E. F. atque ex hyp. a hyp. & in verse C. B G :: F. E H, erit b ex æquali A B. b 22. 5. B G :: D E, E H. ergo componendo A G. B G :: D H. E H. c item B G. C :: E H. F. b ergo rursus c hyp. ex æquo, A G. C :: D H. F. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXV.



Si quatuor magnitudines proportionales fuerint (AB. CD :: E. F.) maxima AB & minima F reliquæ CD & E majores erunt.

a hyp.

b 7. 5.

c 19. 5.

d hyp.

e (c. 14. 14.)
5.

Fiant $AG = E$, & $GH = F$. Quoniam $AB. CD :: E. F$ b :: $AG. CH$. c erit $AB. CD :: GB. HD$. d sed $AB > CD$. e ergo $GB < HD$. atque $AG + F = E + CH$. ergo $AG + F + GB < E + CH + HD$, hoc est $AB + F < E + CD$. Q. E. D.

Quæ sequuntur propositiones non sunt Euclidis, sed ex aliis desumptæ, ob frequentem eorum usum Euclidæis subjungi solent.

PROP. XXVI.

A ——— C ——— Si prima ad secundam
B ——— D ——— habuerit majorem pro-
E ——— portionem, quam tertia ad
quartam; habebit convertendo, secunda ad primam
minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

a 13. 5.

b 10. 5.

c 8. 5.

d cor. 4. 5.

Sit $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$. Dico $\frac{B}{A} > \frac{D}{C}$. Nam concipe $\frac{C}{D} = \frac{E}{B}$ a ergo $\frac{A}{B} < \frac{E}{B}$ b quare $A < E$. c ergo $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$ d vel $\frac{D}{C} > \frac{B}{A}$. Q. E. D.

PROP. XXVII.

A ——— C ——— Si prima ad secundam
B ——— D ——— habuerit majorem pro-
E ——— portionem, quam tertia ad
quartam; habebit quoque vicissim prima ad tertiam
majorem proportionem, quam secunda ad quartam.

a 10. 5.

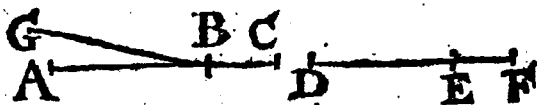
b 8. 5.

c 16. 5.

Sit $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$. Dico $\frac{A}{C} < \frac{B}{D}$. Nam puta $\frac{E}{B} = \frac{C}{D}$ a ergo $A < E$. b ergo $\frac{A}{C} < \frac{E}{C}$, c vel $\frac{B}{D} > \frac{A}{C}$. Q. E. D.

PROP.

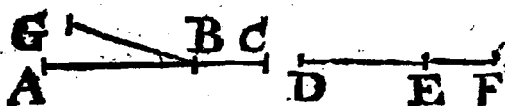
P R O P. XXVIII.



Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.

Sit $\frac{AB}{BC} \sqsubset \frac{DE}{EF}$. Dico $\frac{AC}{EC} \sqsubset \frac{DF}{EF}$. Nam cogita $\frac{GB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. a ergo $AB \sqsubset GB$. adde utrinque BC, a 10. §. b erit $AC \sqsubset GC$. c ergo $\frac{AC}{EC} \sqsubset \frac{GC}{EC}$. d hoc est $\frac{DF}{EF}$. b 4 ax. c 8. §. d 18. §. Q.E.D.

P R O P. XXIX.

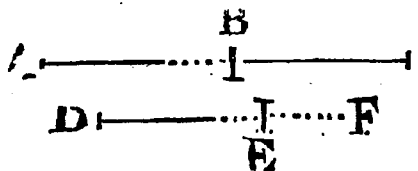


Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit quoque dividendo prima ad secundam maiorem proportionem quam tertia ad quartam.

Sit $\frac{AC}{EC} \sqsubset \frac{DF}{EF}$. Dico $\frac{AB}{BC} \sqsubset \frac{DE}{EF}$. Intellige $\frac{GC}{EC} = \frac{DF}{EF}$. a ergo $AC \sqsubset GC$. aufer commune a 10. §. BC, b erit $AB \sqsubset GB$. c ergo $\frac{AB}{BC} \sqsubset \frac{GB}{BC}$ d vel $\frac{DE}{EF}$. b 5. ax. c 8. §. d 17. §. Q.E.D.

P R O P.

Si composita prima



cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita ter-

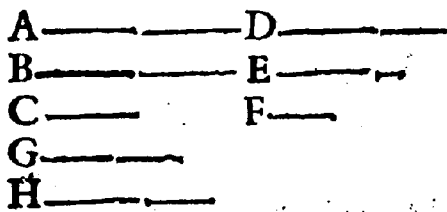
*tia cum quarta ad quartam; habebit, per conversio-
nem rationis, prima cum secunda ad primam mi-
norem rationem, quam tertia cum quarta ad tertiam.*

Sit $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$. Dico $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$. Nam quia

a hyp.
b 29. 5.
c 26. 5.
d 28. 5.

$\frac{AC}{BC} a \supset \frac{DF}{EF}$. b erit dividendo $\frac{AB}{BC} \supset \frac{DE}{EF}$. c conver-
 tendo igitur $\frac{BC}{AB} \supset \frac{EF}{DE}$. d ergo componendo
 $\frac{AC}{AB} \supset \frac{DF}{DE}$. Q.E.D.

PROP. XXXI.



Si sint tres magnitudines A, B, C, & alie ipsis equales numero D, E, F; sitque major propor-

zio primæ priorum ad secundam, quam primæ poste-
riorum ad secundam ($\frac{A}{B} \sqsubset \frac{D}{E}$;) item secundæ pri-
orum ad tertiam major, quam secundæ posteriorum
ad tertiam ($\frac{B}{C} \sqsubset \frac{E}{F}$;) erit quoque ex æqualitate
major proportio primæ priorum ad tertiam, quam
primæ posteriorum ad tertiam ($\frac{A}{C} \sqsubset \frac{D}{F}$.)

a 10. 5.
b 8. 5.;
c 13. 5.
d 10. 5.
e 8. 5.
f 22. 5.

Concipe $\frac{G}{C} = \frac{E}{F}$. *a* ergo $B \sqsubset G$. *b* ergo $\frac{A}{G} \sqsubset \frac{A}{B}$.
Rursus puta $\frac{H}{G} = \frac{D}{E}$. *c* ergo $\frac{H}{G} \supset \frac{A}{B}$; *d* ergo for-
tius $\frac{H}{G} \supset \frac{A}{G}$. *d* quare $A \sqsubset H$, *e* proinde $\frac{A}{C} \sqsubset \frac{H}{C}$,
f vel $\frac{D}{F}$. Q.E.D.

P R O P. XXXII.

$A \text{-----} D$ $B \text{-----} E$ $C \text{-----} F$ $G \text{-----} H$
*Si sint tres magni-
 tudines A, B, C, &
 alie ipfis numero
 equales D, E, F;
 hique major propor-
 tio primæ priorum ad secundam, quam secundæ po-
 steriorum ad tertiam ($\frac{A}{B} \sqsubset \frac{E}{F}$;) item secundæ pri-
 orum ad tertiam major, quam primæ posteriorum
 ad secundam ($\frac{B}{C} \sqsubset \frac{D}{E}$;) erit quoque ex æqualitate
 major proportio primæ priorum ad tertiam, quam
 primæ posteriorum ad tertiam ($\frac{A}{C} \sqsubset \frac{D}{F}$.)*

Intellige $\frac{G}{C} = DE$. a ergo $B \sqsubset G$. b ergo a 10. 5.
 $\frac{A}{G} \sqsubset \frac{A}{B}$. Rursus concipe $\frac{H}{G} = \frac{E}{F}$. c ergo $\frac{H}{G} \sqsupset \frac{A}{G}$. b 8. 5.
 aquare $A \sqsubset H$. b proinde $\frac{A}{C} \sqsubset \frac{H}{C}$ d vel $\frac{D}{F}$ d 13. 5.
 Q. E. D.

P R O P. XXXIII.

$A \text{-----} E \text{-----} B$ $C \text{-----} F \text{-----} D$
*Si fuerit major propor-
 tio totius A B ad totum
 CD, quam ablati AE ad
 ablatum CF; erit & reli-
 qui EB ad reliquum FD major proportio, quam to-
 tius AB ad totum CD.*

Quoniam $\frac{AB}{CD} a \sqsubset \frac{AE}{CF}$ b erit permutando a byp.
 $\frac{AB}{AE} \sqsubset \frac{CD}{CF}$. c ergo per conversionem rationis b 27. 5.
 $\frac{AB}{EB} \sqsupset \frac{CD}{FD}$. permutando igitur $\frac{AB}{CD} \sqsupset \frac{EB}{FD}$. c 39. 5.
 Q. E. D.

PROP. XXXIV.

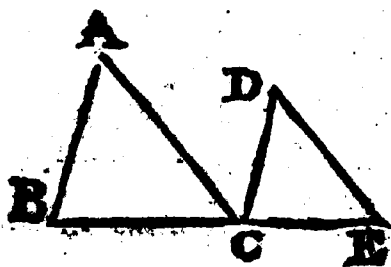
A ————— D —————
 B ————— E —————
 C ————— F —————
 G ————— H —————

Si sint quot-
 cunque magni-
 tudines, & alie
 ipsis æquales
 numero, sitque major proportio prima priorum ad
 primam posteriorum, quam secunda ad secundam;
 & hæc major quam tertia ad tertiam, & sic dein-
 cept: habebunt omnes priores simul ad omnes poste-
 riores simul, maiorem proportionem, quam omnes
 priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta
 quaque prima; minorem autem, quam prima priorum
 ad primam posteriorum; maiorem denique etiam,
 quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Horum demonstratio est penes interpretes; quos
 adeat, qui eam desiderat. nos omisimus, brevitatis
 studio; & quia illorum nullus usus in his elementis.

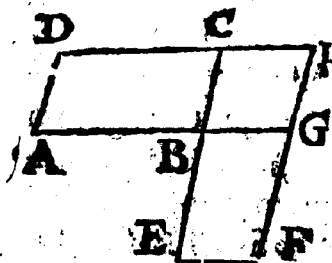
LIB. VI.

Definitiones.



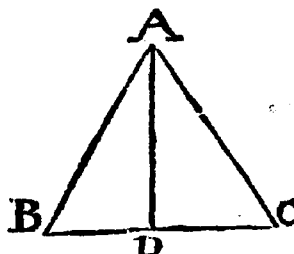
I. Similes figuræ rectilineæ sunt (ABC, DCE,) quæ & angulos singulos singulis æquales habent; atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

Ang. B = DCE; & AB, BC :: DC, CE
item ang. A = D; atque BA, AC :: CD, DE
denique ang. ACB = E. atque BC, CA ::
CE, ED.



II. Reciproce autem sunt (BD, BF,) cum in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint, (hoc est, AB, BG :: BE, BC.)

III. Secundum extremam & mediam rationem recta linea AB secta esse dicitur, cum ut tota AB ad majus segmentum AC, ita majus segmentum AC ad minus CB se habeat. (AB, AC :: AC, CB.)



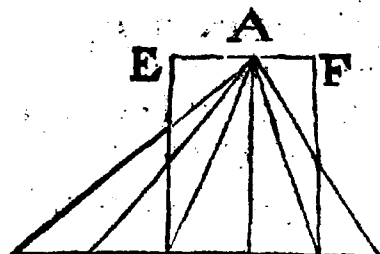
IV. Altitudo cujusque figuræ ABC est linea perpendicularis AD, à vertice A ad basim BC deducta.

V. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

Ut ratio A ad C, componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, nam $\frac{A}{B} + \frac{B}{C} a = \frac{A}{C} b = \frac{AB}{BC}$.

a 20. def. 5.
b 15. 5.

PROP. I.



Triangula ABC, ACD, & parallelogramma BCGE, CDEA, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases BC, CD.

a 3. I.

HG B C D I

a Accipe quorvis BG, HG, ipsi BC æquales; item $DI = CD$. & connecte AG, AH, AI.

b 38. I.

b Triangula ACB, ABG, AGH æquantur; b item triang. $ACD = ADI$. ergo triangulum ACH tam multiplex est trianguli ACB, quam basis HC basis BC. & æquemultiplex est triang. ACH trianguli ACD, ac basis CI basis CD.

c sch. 38. I.

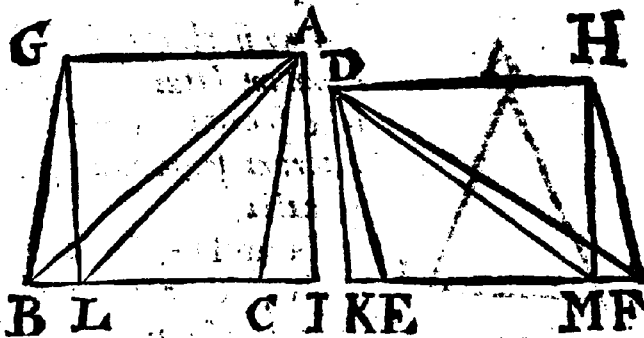
d 6. def. 5.

e 41. I. &

15. 5.

Verum si $HC \square, =, \supset CI$, c erit similiter triang. $AHC \square, =, \supset ACI$. d ideoque $BC, CD ::$ triang. ABC. ACD :: e Pgr. CE. CF. Q. E. D.

Schol.



Hinc, triangula ABC, DEF, & parallelogramma AGBC, DEFH, quorum aequales sunt bases BC, EF, ita se habent ut altitudines AI, DK.

a Sume $IL = CB$; & $KM = EF$; ac junge a 3. 1.
LA, LG, MD, MH. liquet esse triang. ABC. b 7. 5.
DEF :: b ALI. DKM :: c AI. DK. :: d Pgr. c 1. 6.
AGBC. DEFH. Q.E.D. d 41. 1. &

15. 5.

PROPOSITION III

Si ad unum trianguli ABC
latus BC, parallela ducta fuerit
recta quaedam linea DE, hac
proportionaliter secabit ipsius tri-
anguli latera ($AD. BD :: AE. EC$.) Et si trianguli latera pro-
portionaliter secta fuerint ($AD. BD :: AE. EC$) qua ad sectiones
CD, E adjuncta fuerit recta linea
DE, erit ad reliquum ipsius tri-
anguli latus BC parallela. Ducantur GD, BE.

1. Hyp. Quia triang. DEB = DEC; b erit a 37. 1.
triang. ADE. DBE :: ADE. ECD. atqui b 7. 5.
triang. ADE. DBE c :: AD. DB. & triang. c 1. 6.
ADE. DEG c :: AE. EC. d ergo AD. DB :: d 11. 5.
AE. EC.

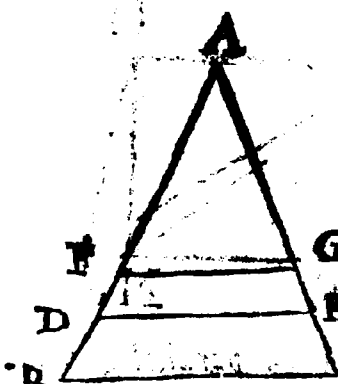
2. Hyp. Quia AD. DB :: AE. EC. & hoc e 1. 6.
est triang. ADE. DBE :: ADE. ECD;
erit triang. DBE = ECD. g ergo DE, BC f 9. 5.
sunt parallelæ. Q.E.D. g 39. 1. &

H 3

Schol.

Schol.

Imo si plures DE, FG, ad unum latus BC parallelae fuerint, erunt omnia laterum segmenta proportionalia.



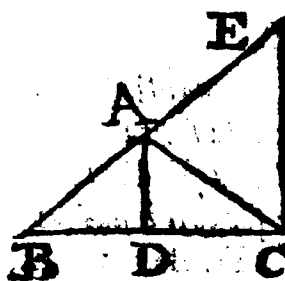
a 2. 6.

Nam DE, FA $\angle ::$ EG, GA, & componendo, Invertendoque FA. DA $::$ GA.EA, $\angle$ ac DA. DB $::$ EA. EC. ergo ex aequo DF. DB $::$ EG. EC. Q.E.D.

Coroll.

Si DF. DB $::$ EG. EC; $\angle$ erunt BC, DE, FG parallelae.

P R O P. III.



Si trianguli BAC angulus BAC bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea AD secuerit $\angle$ basim, basim segmenta eandem habebunt rationem quam reliqua ipsius trianguli latera (BD. DC $::$ AB. AC.)

Et si basim segmenta eandem habeant rationem quam reliqua ipsius trianguli latera (BD. DC $::$ AB. AC) recta linea AD quae a vertice A ad sectionem D ducitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum BAC.

Produce BA; & fac AE = AC. & junge CE.

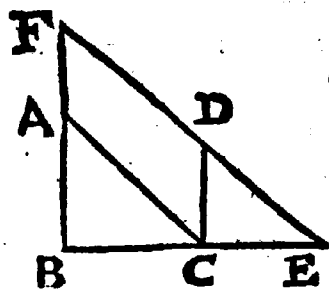
1. Hyp. Quoniam AE = AC, erit ang. AGE = Bb = $\frac{1}{2}$ BAC c = DAC. d ergo DA, CE parallelae sunt. e quare BA. AE (AC) $::$ BD. DC. Q.E.D.

2. Hyp. Quoniam BA. AC. (AE) $::$ BD. DC. ferunt DA, CE parallelae; g ergo ang. BAD = E; & ang. DAC g = ACE b = E. h erg. ang. BAD = DAC, bisectus igitur est ang. BAC Q.E.D.

P R O P.

a 5. 1.
b 32. 1.
c hyp.
d 27. 1.
e 2. 6.
f 2. 6.
g 29. 1.
h 5. 1.
k 1. 42.

PROP. IV.



*Æquiangularum trian-
gulorum ABC, DCE pro-
portionalia sunt latera, quæ
circum æquales angulos B,
DCE (AB. BC :: DC.
CE, &c.) & homologa
sunt latera AB, DC, &c.
quæ equalibus angulis ACB, E, &c. subtenduntur.*

Statue latus BC in directum lateri CE, &
produc BA, ac ED donec a occurrant.

a 32. 1. &

Quoniam ang. B = ECD. c sunt BF, CD 13. 4x.
parallelæ. Item quia ang. BCA = CED, c sunt b hyp.
CA, EF parallelæ. Figura igitur CAFD est c 28. 1.
parallelogramma. d ergo AF = CD; d & AC
= FD. Liquet igitur AB. AF (CD) e :: BC. d 34. 1.
CE. f permutando igitur AB. BC :: CD. CE. e 2. 6.
e item BC. CE :: FD. (AC) DE. f ergo per- f 16. 5.
mutando BC. AC :: CE. DE. quare etiam g ex
æquo AB. AC :: CD. DE. ergo, &c.

g 22. 5.

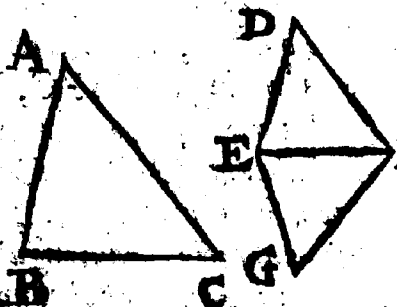
Coroll.

Hinc AB. DC :: BC. CE :: AC. DE.

Schol.

Hinc si in triangulo FBE ducatur uni lateri FE
parallela AC; erit triangulum ABC simile toti
FBE.

PROP. V.



*Si duo triangu-
la ABC, DEF latera
proportionalia habe-
ant (AB. BC :: DE.
EF. & AC. BC ::
DF. EF. Item AB.
AC :: DE. DF) æqui-
angula erunt triangu-*

*la, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus ho-
mologa latera subtenduntur.*

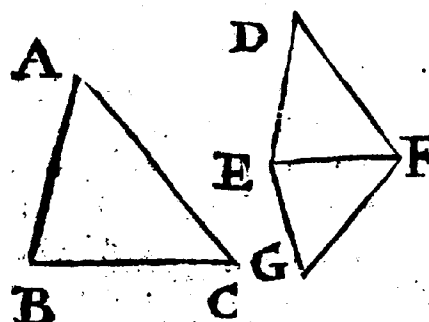
Ad latus EF a fac ang. FEG = B; & ang. a 23. 1.

H

EFG

- b 32. I. $EFG = C$, b quare etiam ang. $G = A$. ergo
 c 4. 6. GE . EF $c :: AB$. $BC :: d$ DE . EF . c ergo
 d hyp. $GE = DE$. Item GF . FE $c :: AC$. CB $d ::$
 e 11. 5. DF . FE . c ergo $GF = DF$. Triangula igitur
 & 9. 5. DEF , GEF sibi mutuo æquilatèra sunt. f ergo
 f 8. I. ang. $D = G = A$. f & ang. $FED = FEG = B$.
 g 32. I. g proinde & ang. $DFE = C$. ergo, &c.

P R O P. VI.

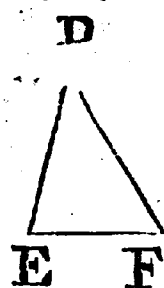
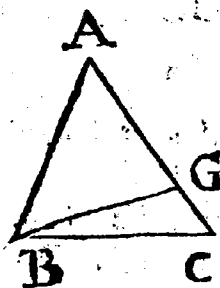


Si duo triangu-
 la ABC , DEF unum
 angulum B uni angu-
 lo DEF æqualem, &
 circum æquales an-
 gulos B , DEF latera
 proportionalia habu-
 erint ($AB.BC :: DE$.
 EF ;) æquiangula erunt triangu-
 la ABC , DEF ;

æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa
 latera subrenduntur.

Ad latus EF fac ang. $FEG = B$, & ang. EFG
 $= C$. a unde & ang. $G = A$. ergo GE . EF $b ::$
 AB . BC $c :: DE$. EF . d ergo $DE = GE$. atqui
 ang. DEF $e = B$ $f = GEF$. g ergo ang. $D = G$
 $= A$. b proinde etiam ang. $EFD = C$. Q. E. D.

P R O P. VII.



Si duo triangu-
 la ABC , DEF unum an-
 gulum A uni angulo D
 æqualem, circa autem
 alios angulos ABC , E
 latera proportionalia
 habeant ($AB.BC ::$
 $DE.EF$;) reliquorum autem simul utrumque C , F

aut minorem aut non minorem recto, æquiangula
 erunt triangu-
 la ABC , DEF , & æquales habebunt
 eos angulos circum quos proportionalia sunt latera.

Nam si fieri potest, sit ang. $ABC = B$. fac
 igitur ang. $ABG = E$; ergo cum ang. $A = D$,
 b erit

- a 32. I.
 b 4. 6.
 c hyp.
 d 9. 5.
 e hyp.
 f const.
 g 4. I.
 h 32. I.

a hyp.

h cor. 13.1

P R O P. VIII.



ADB, ADC, ~~tum totu~~

triangulo ABC, tum ipsa inter se, similia sunt.

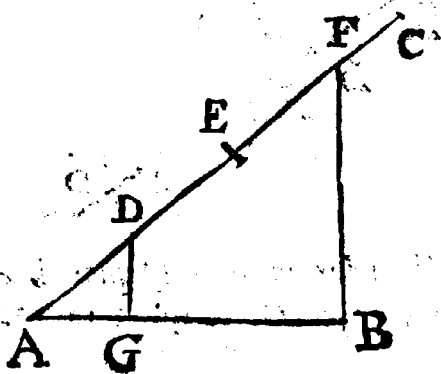
Nam ob angulos BAC , ADB *a* rectos, *b* ideo- *a hyp.*
que æquales, & B communem, trigona BAC , *b* 12 *ax.*
 ADB *c* similia sunt. Simili discursu, similia sunt *c* 32 & 4.6
triangula BAC , ADC . *d* proinde ADB , ADC *d* Vid. 21.6.
similia erunt. Q.E.D.

Coroll.

Hinc I. BD. DA e :: DA. DC.

e 1. def. 6.

PROP. IX.



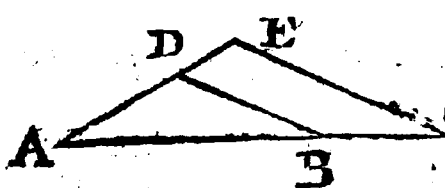
*A data recta
linea A B im-
peratam partem
 $\frac{1}{3}$ (AG) auferre.*

Ex A duc
infinitam AC ut-
cunq; in qua a su- 23. I;
me tres, AD, DE,
EF æquales ut-
cunque,

Duc infinitam AD, eique parallelam BH etiam infinitam. Ex his cape partes æquales AR, RS, SU, UN; & BZ, ZX, XT, TL; in singulis una pauciores, quam desiderentur in AB; tum rectæ a 33. 1. ducantur LR, TS, XV, ZN. hæ quinq̃uifecabunt b constr. c 2. 6. datam AB.

Nam RL, ST, UX, NZ a parallelæ sunt. ergo quum AR, RS, SU, UN b æquales sint, c erunt AM, MO, OP, PQ æquales. Similiter quia BZ=ZX, erit BQ=QP. ergo AB quinq̃uifecta est. Q.E.F.

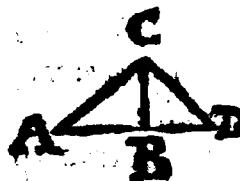
P R O P. XI.



Datis duabus rectis lineis AB, AD, Et tertiam proportionalem DE invenire.

Junge BD, & ex AB protrahita sumo BC=AD. per C duc a 2. 6. CE parall. BD. cui occurrat AD producta in E. Erit DE expetita.

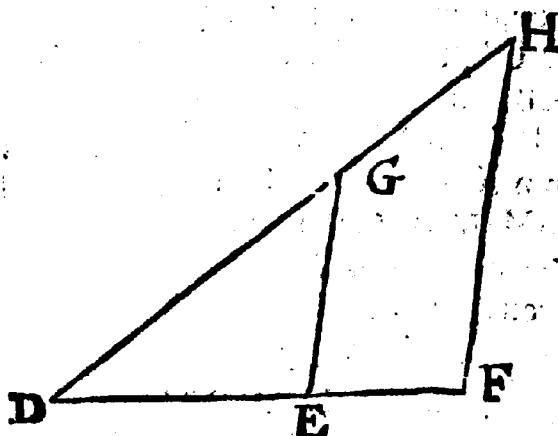
Nam AB. & BC (AD) :: AD. DE. Q.E.F. c 1 cor. 8. 6.



Vel sic, fac ang. ABC rectum, & ang. ACD etiam rectum. b erit AB.BC :: BC.BD.

P R O P.

PROP. XII.

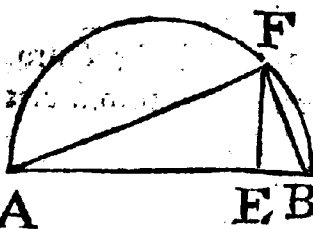


Tribus datis rectis lineis DE, EF, DG, quartam proportionalem GH. invenire.

Connectatur EG. per F, duc FH parall. EG, cui occurrat DG producta ad H. liquet esse DE, EF :: DG. GH. Q.E.F.

a 2. 6.

PROP. XIII.



Duabus datis rectis lineis AE, EB, mediam proportionalem EF adinvenire.

Super tota AB describe semicirculum AFB.

Ex E erige perpendicularem EF occurrentem peripheriæ in F. Dico AE. EF :: EF. EB. Ducantur enim AF, & FB. Ex trianguli & rectanguli AFB recto angulo deducta est FE basi perpendicularis; b ergo AE. FE :: FE. EB. Q.E.F.

Vel (in eadem figura) sint AB, BF duæ datæ, b liquet esse AB. BF :: BF. BE.

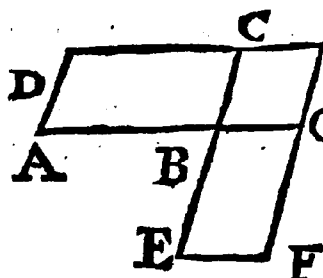
a 31. 3.
b cor. 8. 6.

Coroll.

Coroll.

Hinc, linea recta, quæ in circulo à quovis puncto diametri, ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta.

PROP. XIV.



Equalium, & unum
 ABC uni EBG æqualem
 habentium angulum, pa-
 rallelogrammorum BD,
 BF, reciproca sunt latera
 quæ circum æquales an-
 gulos. (AB. BG :: EB.

BC:) Et quorum parallelogrammorum BD, BF, unum angulum ABC uni angulo EBG æqualem habentium, reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

Nam latera AB, BG circa æquales angulos faciant unam rectam: a quare EB, BC etiam in directum jacebunt. Producantur FG, DC; donec occurrant.

a sch. 15. 1.

1. Hyp. AB, BG b :: BD. BH c :: BF. BH d :: b i. 6.
 BE. BC. ergo, &c. c 7. 5.

2. Hyp. BD. BH f :: AB. BG g :: BE. BC b :: d i. 6.
 BF. BH, k ergo Pgr. BD = BF. Q.E.D. c 11. 5.

f i. 6.

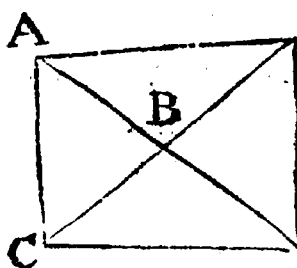
g hyp.

h i. 6.

k 11. & 9. 5

PROP.

P R O P. XV.



Æqualium, & unum
 ABC, uni DBE *æqualem*
habentium angulum trian-
gulorum AEC DBE, reci-
proca sunt latera, quæ cir-
cum æquales angulos (AB.
BE :: DB. BC:) Et quo-
rum triangulorum ABC, DBE, unum angulum
AEC uni DBE æqualem habentium reciproca sunt
latera, quæ circum æquales angulos (AB. BE ::
DB. BC.) illa sunt æqualia.

Latera CB, BD circa æquales angulos, sta-
uantur sibi in directum; a ergo ABÆ est recta
linea. ducatur CE.

1. Hyp. AB. BE b :: triang. ABC. CBE c ::
triang. DBE. CBE. d :: DB. BC. e ergo, &c.

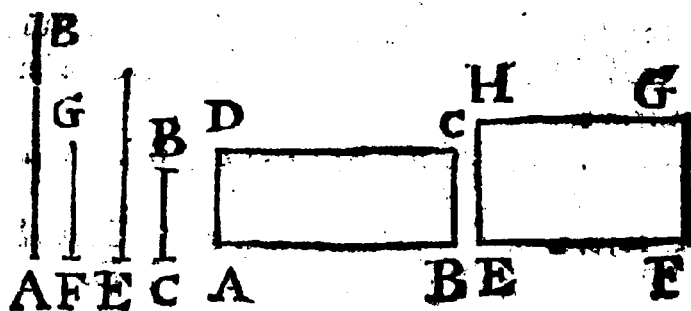
2. Hyp. Triang. ABC. CBE f :: AB. BE g ::
DB. BC h :: triang. DBE. CBE. k ergo triang.
ABC = DBE. Q.E.D.

g hyp.

h i. 6.

k i. 1. & 9. 5.

P R O P. XVI.



Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint
(AB. FG :: EF. CB,) quod sub extremis A B,
CB comprehenditur rectangulum AC, æquale est ei,
quod sub mediis EF, FG comprehenditur, rectan-
gulo EG. Et si sub extremis comprehensum rectan-
gulum AC æquale fuerit ei, quod sub mediis com-
prehenditur, rectangulo EG, illæ quatuor rectæ lineæ
proportionales erunt (AB. FG :: EF. CB.)

1. Hyp.

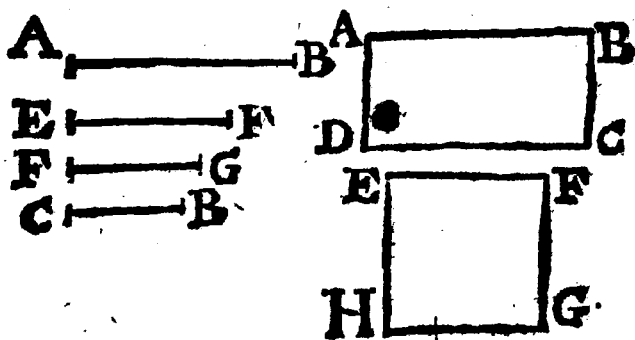
1. Hyp. Anguli B & F recti, ac a proinde pares a 12. ax. sunt; atque ex hyp. AB. FG :: EF. CB. b ergo b 14. 6. rectang. AC = EG. Q. E. D.

2. Hyp. c Rectang. AC = EG; atque ang. c hyp. B = F; d ergo AB. FG :: EF. CB. Q. E. D. d 14. 6.

Coroll.

Hinc ad datam rectam lineam AB facile est datum rectangulum EG applicare, e faciendo e 12. 6. AB. EF :: FG. BC.

P R O P. XVII.



Si tres rectae lineae sint proportionales (AB. EF :: EF. CB,) quod sub extremis AB, CB comprehenditur rectangulum AC, aequale est ei, quod à media EF describitur, quadrato EG. Et si sub extremis AB, CB comprehensum rectangulum AC, aequale sit ei, quod à media EF describitur, quadrato EG, illae tres rectae lineae proportionales erunt (AB. EF :: EF. CB.)

Accipe FC = EF.

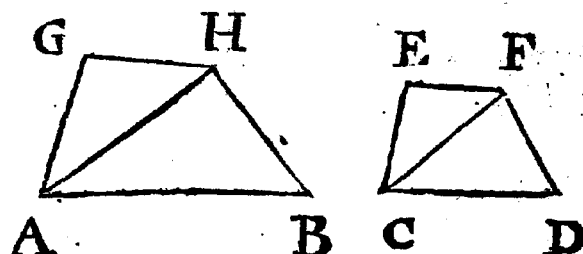
1. Hyp. AB. EF a :: EF (FG) CB. ergo a hyp. Rectang. AC b = EG c = EFq. Q. E. D. b 16. 6.

2. Hyp. Rectang. AC d = quadr. EG = c 29. def. 1. EFq. e ergo AB. EF :: EG (EF); BC. d hyp. e 16. 6.

Coroll.

Sit A in B = Cq. ergo A. C :: C. B.

P R O P. XVIII:



A data recta linea AB dato rectilineo CEDF simile similiterque positum rectilincum AGHB describere.

Datum rectilincum resolve in triangu-
la. *a* fac ang. $\angle ABH = D$; *a* & ang. $\angle BAH = DCF$; *a* & ang. $\angle AHG = CFE$; *a* & ang. $\angle HAG = FCE$. Rectilincum AGHB est quæsitum.

a 23. 1.

b constr.

c 32. 1.

d 2. ax.

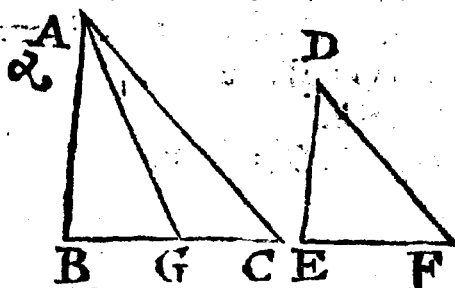
e 4. 6.

f 22. 5.

g 6. def. 6.

Nam ang. $\angle B = D$. & ang. $\angle BAH = DCF$.
c quare ang. $\angle AHB = CFD$; *b* item ang. $\angle HAG = FCE$; *b* & ang. $\angle AHG = CFE$. *c* quare ang. $\angle G = E$; & totus ang. $\angle GAB = \angle ECD$; & totus $\angle GHB = \angle FED$. Polygona igitur sibi mutuo æquiangula sunt. Porro ob trigona æquiangula, $AB : BH :: CD : DF$. & $AG : GH :: CE : EF$. item $AG : AH :: CE : CF$. & $AH : AB :: CF : CD$. funde ex æquo $AG : AB :: CE : CD$. eodem modo $GH : HB :: EF : FD$. *g* ergo polygona ABHG, CEDF similia similiterque posita exsunt. Q.E.F.

P R O P. XIX.



*Similia triangu-
la ABC,
DEF sunt in
duplicata rati-
one laterum ho-
mologorum BC
EF.*

a 11. 6.

a Fiat $BC : EF :: EF : BG$, & ducatur AG.

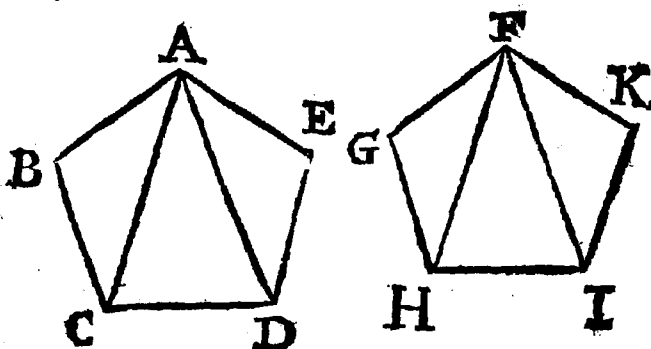
Quia

Quia AB.DE($b :: BC.EF$) $c :: EF.BG$. & ang. b cor. 4. 6.
 $B = E$; d erit triang. $ABG = DEF$: verum c const.
 triang. ABC . ABG $e :: BC$. BG ; & f $\frac{BC}{BG}$ d 15. 6.
 $= \frac{BC}{EF}$ bis; ergo triang. $\frac{ABC}{AEG}$ hoc est $\frac{ABC}{DEF}$ $g = f$ 10. def. 5;
 $\frac{BC}{EF}$ bis. Q. E. D. g 11. 5.

Coroll.

Hinc, si tres lineæ BC, EF, BG proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita est triangulum super primam BC descriptum ad triangulum super secundam EF simile similiterque descriptum. vel ita est triangulum super secundam EF descriptum ad triangulum super tertiam BG simile similiterque descriptum.

PROP. XX.



Similia polygona ABCDE, FGHIK in similia triangula ABC, FGH; & ACD, FHI, & ADE, FIK dividuntur, & numero aequalia, & homologa totis. ($ABC. FGH :: ABCDE. FGHIK :: ACD. FHI :: ADE. FIK$.) Et polygona ABCDE, FGHIK duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum BC ad homologum latus GH.

a hyp.

b 6. 6.

c hyp.

d 3. ax.

e 32. 1.

f 19. 6.

g hyp. &

16. 5.

h cor. 23. 5.

k 12. 5.

1. Nam ang. $Ba = G$; & AB. $BCa :: FG$. GH. b ergo triangula ABC, FGH æquiangula sunt. eodem modo, triangula AED, FKI assimulantur. cum igitur ang. $BCA b = GHF$; & ang. $ADE b = FIK$; totique anguli BCD, GHI; atque toti CDE, HIK c pares sint, d remanent ang. $ACD = FHI$; & ang. $ADC = FIH$; e unde etiam ang. $CAD = HFI$. ergo triangula ACD, FHI similia sunt. ergo, &c.

2. Quoniam igitur triangula BCA, GHF similia sunt, f erit $\frac{BCA}{GHF} = \frac{BC}{GH}$ bis. ob eandem causam $\frac{CAD}{HFI} = \frac{CD}{HI}$ bis. denique triang. $\frac{DEA}{IKF} = \frac{DE}{IK}$ bis. quare cum BC. GH $g :: CD$. HI $g :: DE$. IK, h erit triang. BCA. GHF :: CAD. HFI :: DEA. IKF :: k polyg. ABCDE. FGHIK :: $\frac{BC}{GH}$ bis.

Coroll.

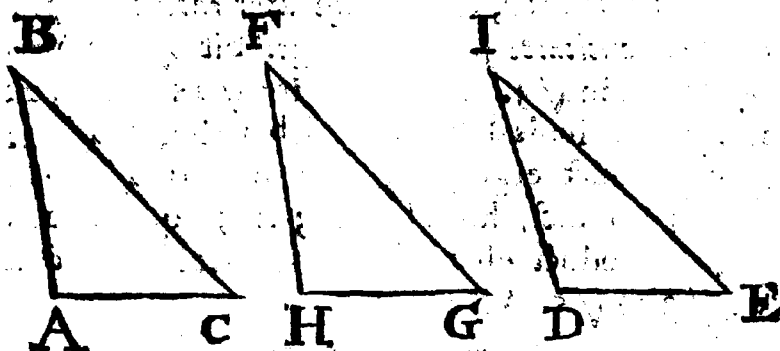
I. Hinc, si fuerint tres lineæ rectæ proportionales; ut est prima ad tertiam, ita erit polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum. vel ita erit polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.

Unde elicitor methodus figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data. Ut si velis pentagoni, cujus latus CD, aliud facere quintuplum, inter AB, & 5 AB inveni mediam proportionalem. Super hac * construe pentagonum simile dato. hoc erit quintuplum dati.

* 18. 6.

II. Hinc etiam, si figurarum similium homologa latera nota fuerint, etiam proportio figurarum innotescet; nempe inveniundo tertiam proportionalem,

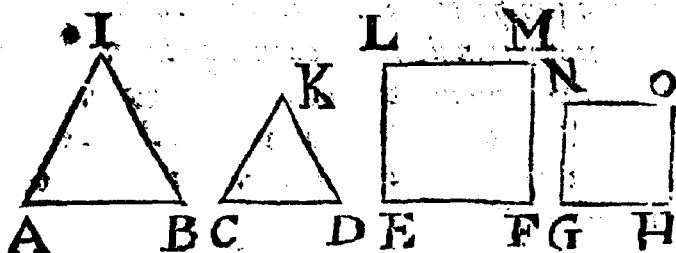
PROP. XXI.



Qua (ABC, DIE) eidem rectilineo HFG sunt similia, & inter se sunt similia.

Nam ang. $A = H = D$. & ang. $C = G = E$. def. 6. $a = E$; & ang. $B = F = I$. a item $AB. AC :: HF. HG :: DI. DE$. a & $AC. CB :: HG. GF :: DE. EI$. & $AB. BC :: HF. FG :: DI. IE$. a ergo ABC, DIE similia sunt. Q.E.D.

PROP. XXII.



Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint (AB. CD :: EF. GH) & ab eis rectilinea similia similiterque descripta proportionalia erunt. (ABI. CDK :: EM. GO.) Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint (ABI. CDK :: EM. GO.) ipsae etiam rectae lineae proportionales erunt. (AB. CD :: EF. GH)

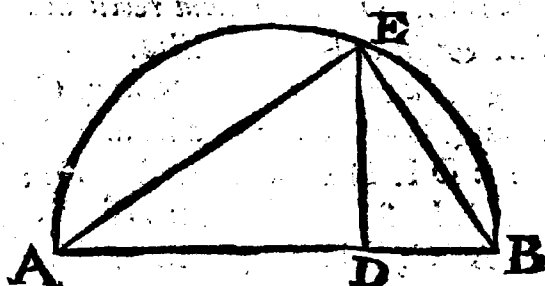
1. Hyp. $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ bis $= \frac{EM}{GO}$ a 19. 6. d ergo ABI. CDK :: EM. GO. Q.E.D.

2. Hyp. $\frac{AB}{CD} = \frac{EM}{GO}$ b hyp. $\frac{AB}{CD} = \frac{EM}{GO}$ c 20. 6. bis, d ergo AB. CD :: EF. GH. Q.E.D. d cor. 23. 5.

Schol.

Hinc deducitur, & demonstratur ratio multipli-
candi quantitates surdas. ex gr. Sit $\sqrt{5}$ multi-
plicandus in $\sqrt{3}$, dico provenire $\sqrt{15}$. Nam ex
multiplicationis definitione debet esse, 1. $\sqrt{3} ::$
 $\sqrt{5}$. product. ergo per hanc, q. 1. q. $\sqrt{3} ::$ q.
 $\sqrt{5}$. q. product. hoc est. 1. 3 :: 5. q. product.
ergo q. product. est 15. quare $\sqrt{15}$, est productus
ex $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$. Q. E. D.

T H E O R.



Petr. He-
rig.

Si recta linea AB secta sit utcumque in D, re-
ctangulum sub partibus AD, DB contentum, est
medium proportionale inter earum quadrata. Item
rectangulum contentum sub tota AB, & una parte
AD, vel DB, est medium proportionale inter qua-
dratum totius AB, & quadratum dictae partis
AD, vel DB.

Super diametrum AB describe semicirculum;
ex D erige normalem DE occurrentem periphe-
riae in E, junge AE, BE.

a cor. 8.6. Liquet esse AD. DE a :: DE. DB. b ergo

b 22. 6. ADq. DEq :: DEq. DBq. c hoc est, ADq.

c 17. 6. ADB :: ADB. DBq. Q. E. D.

d cor. 8.6. Porto, BA. AE d :: AE. AD. e ergo BAq.

e 22. 6. AEq :: AEq. ADq. f hoc est BAq. BAD ::

f 17. 6. BAD. ADq. Eodem modo ABq. ABD ::

ABD. BDq. Q. E. D.

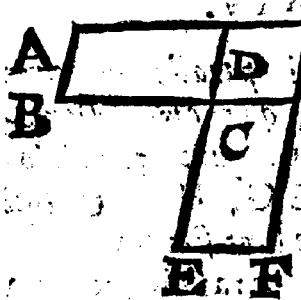
a 1. 6. Vel sic, fit Z=A+E. liquet esse Aq. AE :: aA.

E :: a AE. Eq. item Zq. ZA :: aZ. A :: aZA.

Aq. & Zq. ZE :: aZ. E :: ZE. Eq.

P R O P.

PROP. XXIII



Æquiangula parallelogramma AC, CF inter se rationem habent eam qua ex lateribus componitur. $\left(\frac{AC}{CF}\right)$

$$= \frac{BC}{CG} + \frac{DC}{CE}$$

Latera circa æquales angulos C a sibi in directum statuantur; & compleatur parallelogrammum CH.

Ratio $\frac{AC}{CF} = \frac{AC}{CH} + \frac{CH}{CF} = \frac{BC}{CG} + \frac{DC}{CE}$

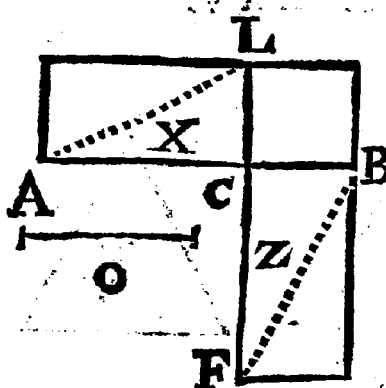
b 20. def. 1.
c 1, 6,

Q. E. D.

Coroll.

Hinc & ex 34. 1. patet primo, Triangula, quæ unum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere ex rationibus rectarum, AC ad CB, & LC ad CF, æqualem angulum continentium.

And. Tarq.
15. 5.



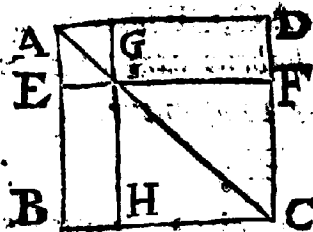
Patet secundo, Rectangula ac parallelogramma quæcunque rationem inter se habere compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratio cinaberis.

* 35. 1.

*Patet tertio, Quomodo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi possit. Sumto parallelogramma X & Z; quorum bases AC, CB; altitudines verò CL, CF. Fiat CL. CF :: CB. O. * erit X. Z :: AC. O.*

* 14. 6. &
1. 6.

PROP. XXIV.



In omni parallelogrammo
ABCD, quæ circa diamet-
rum AC sunt parallelo-
gramma EG, HF, & toti
& inter se sunt similia.

Nam parallelogramma

EG, HF habent singula unum angulum cum
toto communem. & ergo toti & singuli mutuo æqui-
angula sunt. Item tam triangula ABC, AEI,
IHC, quam triangula ADC, AGI, IFC sunt
inter se æquiangula. b ergo AE. EI :: AB. BC,
b atque AE. AI :: AB. AC; b & AI. AG :: AC.
AD. c ex æquali igitur, AE. AG :: AB. AD.
d 1. def. 6. d ergo Pgr. EG. BD similia sunt. eodem modo
HF, BD similia sunt. ergo, &c.

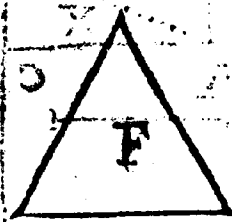
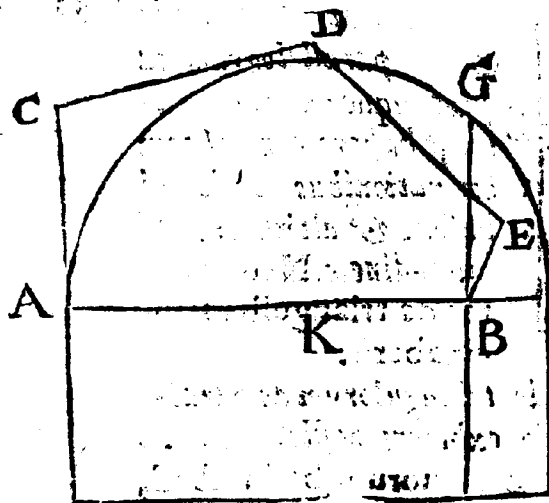
a 29. 1.

b 4. 6.

c 22. 5.

d 1. def. 6.

PROP. XXV.



1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

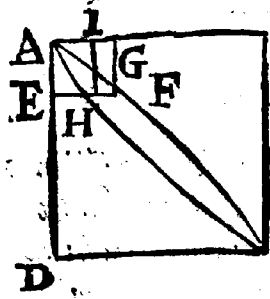
Dato rectilineo ABEDC finite similiterque posi-
tum P, idem que alteri dato F æquale, constitueret.

a 45. 1. a Fac rectang. AL=ABEDC. b item super
b 44. 1. BL fac triang. BM=F. Inter AB, BH c in-
c 13. 6. veni mediam proportionalem NO. super NO
d fac

d fac polygonum P simile dato ABEDC. Erit *d* 18. 6.
hoc æquale dato F. e cor. 20. 6.

Nam ABEDC (AL.) P :: e AB. BH f :: f 1. 6.
AL. BM. ergo P g = BM h = F. Q. E. F. g 14. 5.
h constr.

PROP. XXVI.

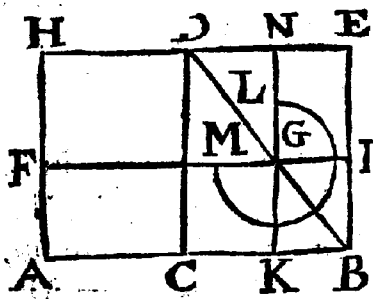


si à parallelogrammo
ABCD parallelogrammum
AGFE ablatum sit, & simile
toti, & similiter positum, com-
munem cum eo habens angu-
lum EAG, hoc circa eandem
cum toto diametrum AC con-
sistet.

Si negas AC esse communem diametrum,
esto diameter AHC secans EF in H. & ducatur
HI parall. AE. Parallelogramma EL, DB a si-
milia sunt. b ergo AE. EH :: AD. DC c :: AE.
EF. d proinde BH = EF. f Q. E. A.

a 24. 6.
b 1. def. 6.
c hyp.
d 9. 5.
f 9. ax.

PROP. XXVII.



Omnium parallelo-
grammorum AD, AG
secundum eandem rectam
lineam AB applicatorum,
deficientiumque figuris
parallelogrammīs CE,
KI similibus, similiterque
positis, ei AD, quod à dimidia describitur, maxi-
mum est AD, quod ad dimidium est applicatum, si-
mile existens defectui KI.

Nam quia GE a = GC, addito communi a 43. 1.
KI, b erit KE = CI c = AM. adde commune b 2. ax.
CG, d erit AG = Gnom. MBL. sed Gnom. c 36. 1.
MBL e = CE (AD.) ergo AG = AD. d 2. ax.
Q. E. D. e 9. ax.



* 27. 6.

218.6.

b/cb.45.1.

C 25.6.

id const. c

24.6.

e constr.

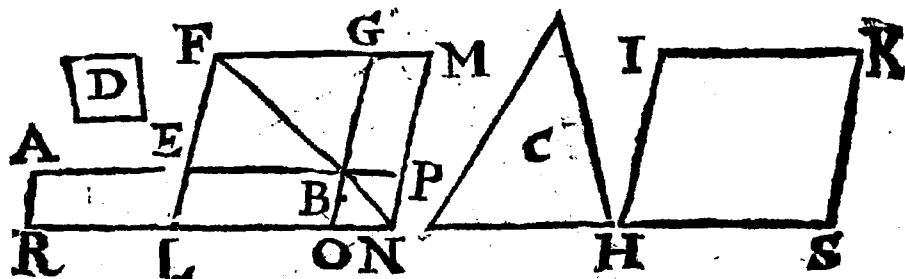
13. ax.

h 42. I.

731 10

9089 1 1

P R O P. XXIX.



*Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C
equale parallelogrammum AN applicare, excedens
figura parallelogramma OP, qua simili sit paral-
lelogrammo alteri dato D.*

Biseca AB in E. super EB a fac Pgr. EG si a 18. 6.
mile dato D. b sitque Pgr. HK = EG + C, & b 25. 6.
simile dato D vel E G. fac FE L c = IH, c & c 3. 1.
FGM = IK. per L, M duc parallelas RN,
MN; & AR parall. NM. Produc ABP, GBO.
Duc diametrum FBN. Pgr. AN est quæsitum.

Nam parallelogramma D, HK, LM, EG
 d similia sunt. e ergo Pgr. OP simile est Pgro d *constr.*
 LM, vel D. item $LMf = HKf = EG + C.$ e 24.6.
 g ergo $C = Gnom.$ ENG. atqui $ALb = LBf$ *constr.*
 $k = BM.$ l ergo $C = AN.$ Q.E.F. g 3. ax.

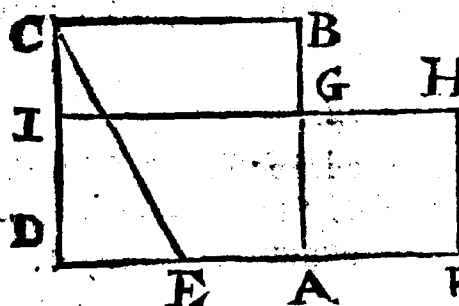
g 3. ax.

h 36.1

k 43. I

 $12.8x + 1.4x^2$

PROP. XXX.



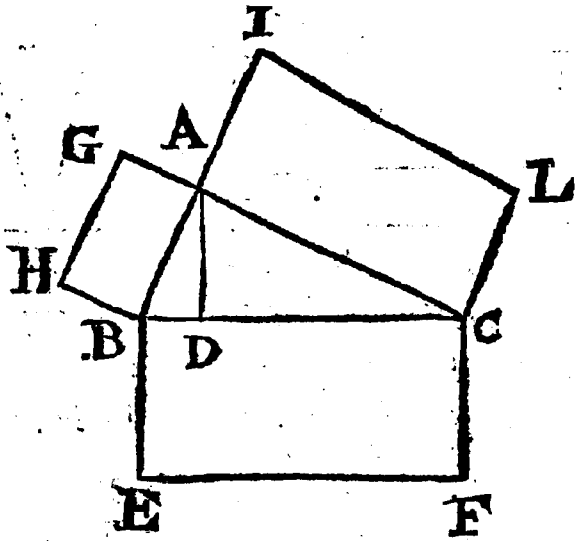
Propositam rectam lineam terminatam AB, extrema ac media ratione secare. (AB. AG :: AG. GB.)

a Seca AB in G, ita ut $AB \times BG = AG^2$. *a* 11. 2.
b ergo BA. AG :: AG. GB. Q.E.F. *b* 17. 6.

b 17.6.

PROP.

PROP. XXXI.



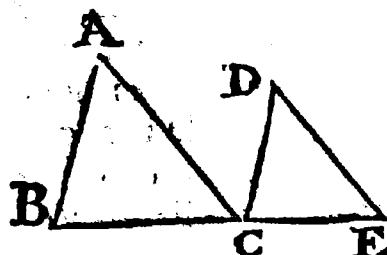
In rectangulis triangulis BAG, figura quævis BF à latere BC rectum angulum BAC subtendente, descripta, æqualis est figuræ BG, AL, quæ priori illi BF similes, & similiter posita à lateribus BA, AC rectum angulum continentibus describuntur.

Ab angulo recto BAC demitte perpendiculari a cor. 8.6. latere AD. Quoniam DC. CA :: a CA. CB, b cor. 20.6. b erit AL. BF :: DC. CB. Item ob DB. BA :: c 24.5. a BA. BC, b erit BG. BF :: DB. BC. c ergo d sch. 14.5. AL + BG. BF :: DC + DB (BC.) BC. ergo AL + BG = BF. Q.E.D.

Coroll.

Ex hæc propositione, addi possunt, & subtrahi figure quævis similes, eadem methodo, quæ quadrata adduntur & subtrahuntur, in schol. 47.1.

PROP. XXXII.

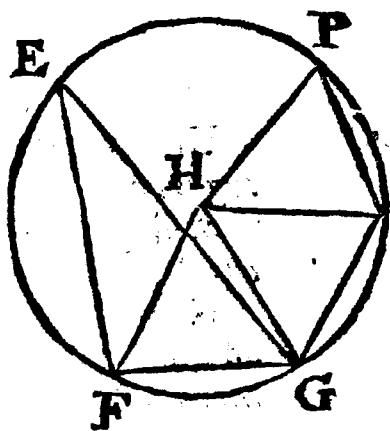
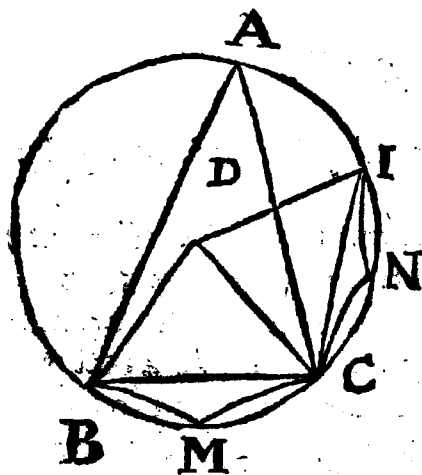


Si duo trian-
gula ABC, DCE, quæ dno
latera duobus lateribus
proportionalia habeant
(AB.AC::DC.DE.)

secundum unum angu-
lum ACD composita fuerint, ita ut hómologa eorum
latera sint etiam parallela (AB ad DC, & AC ad
DE) tum reliqua illorum triangulorum latera
BC, CE in rectam lineam collocata reperientur.

Nam ang. Aa = ACD a = D; & AB. 229. 1.
ACb:: DC. DE. c ergo ang. B=DCE. ergo bhyp.
ang. B+A d=ACE. sed ang B+A+ACB e= c 6. 6.
Rect. f ergo ang. ACE+ACB=2 Rect. g ergo d 2 42.
BCE est recta linea. Q.E.D. e 32. 1.
f 1. ex.
g 14. 1.

PROP. XXXIII.



In aequalibus circulis DBCA, HFGP, anguli
BDC, FHG eandem habent rationem cum peri-
pheriis BC, FG, quibus insistant; sive ad centra
(ut BDC, FHG,) sive ad peripherias A, E
constituti insistant: insuper vero & sectores BDC,
FHG, quippe qui ad centra consistant.

Duc

Duc rectas BC, FG. Accommoda CI=CB;
& GL=FG=LP; & junge DI, HL, HP.

- a 28. 3. Arcus BC a=CI, a item arcus FG, GL, LP
b 27. 3. æquantur. b ergo ang. BDC = CDI b & ang.
FHG=GHL=LHP. Ergo arcus BI tam mul-
tiplex est arcus BC, quam ang. BDI anguli
BDC. pariterque æquemultiplex est arcus FP
arcus FG, atque ang. FHP anguli FHG. Ve-
rum si arcus BI $\square$, =, $\square$ F P, c erit similiter
d 6. def. 5. ang. BDI $\square$, =, $\square$ FHP. ergo arc. BC. FG d ::
e 15. 5. ang. BDC. FHG e :: BDC. FHG f :: A. E.
f 20. 3. $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$

Q. E. D.

- Rursus ang. BMC g = CN I; b atque idcirco
g 27. 3. segm. BCM = CIN. k item triang. BDC =
h 24. 3. CDI. l ergo sector BDCM = CDIN. Simili-
k 4. 1. ratione sectores FHG, GHL, LHP æquantur.
l 2. ax. Quum igitur prout arcus BI $\square$, =, $\square$ FGP, ita
m 6. def. 5. similiter sector BDI $\square$, =, $\square$ FHP. m erit sect.
BDC. FHG :: arc. BC. FG. Q. E. D.

Coroll.

Prop. 5. Hinc 1. Ut sector ad sectorem, sic angulus ad
angulum.

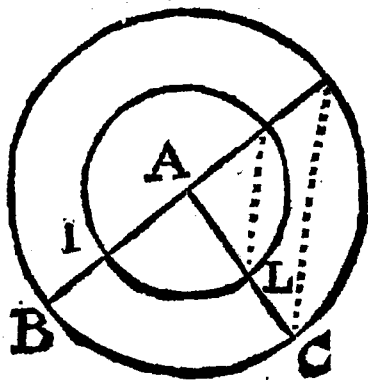
2. Ang. BDC in centro est ad 4 rectos, ut ar-
cus BC cui insistit ad totam circumferentiam.

Nam ut ang. BDC ad rectum, sic arcus BC
ad quadrantem. ergo BDC est ad 4 rectos, ut
arcus BC ad 4 quadrantes, id est ad totam cir-
cumferentiam. item ang. A. 2 Rect :: arc. BC.
periph.

Hinc 3. Inæqualium circularum arcus IL, BC,
qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, ut
I A L & B A C, sive ad peripheriam, sunt si-
miles.

Nam I L. periph. :: ang. I A L, (B A C.)
4 Rect. item arc. BC. periph :: ang. B A C.
4 Rect.

4 Rect. ergo IL. periph :: BC. periph. proinde
arcus IL, & BC sunt similes. Unde



4. Duæ semidiametri AB, AC à concentricis
peripheriis arcus auferunt similes IL, BC,

LIB. VII.

Definitiones.

I.  Nititas est, secundum quam unumquodque eorum quæ sunt, unum dicitur.

II. Numerus autem est, ex unitatibus composita multitudo.

III. Pars est numerus numeri, minor majoris, quum minor metitur maiorem.

* *Omnis pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cujus est pars, metitur; ut 4 dicitur tertia pars numeri 12, quia metitur 12 per 3.*

IV. Partes autem, cum non metitur.

Partes quæcunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos maxima communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur. ut 10 dicitur $\frac{2}{3}$ numeri 15, eo quod maxima communis mensura, nempe 5, metitur 10 per 2, & 15. per 3.

V. Multiplex vero major minoris, cum majorem metitur minor.

VI. Par numerus est, qui bifariam dividitur.

VII. Impar vero numerus, qui bifariam non dividitur; vel, qui unitate differt à pari.

VIII. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

IX. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

X. Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

XI. Primus numerus est, quem sola unitas metitur.

XII. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

XIII.

XIII. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

XIV. Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

In hac definitione & precedenti unitas non est numerus.

XV. Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

Hinc, in omni multiplicatione unitas est ad multiplicatorem ut multiplicatus ad productum.

Nota, quod saepe cum multiplicandi sunt quilibet numeri, puta A in B, litterarum conjunctio productum denotat. Sic $AB = A \text{ in } B$. item $CDE = C \text{ in } D \text{ in } E$.

XVI. Cum autem duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur; Qui vero numeri sese mutuo multiplicarint, latera illius dicentur. *Sic $2 (C) \text{ in } 3 (D) = 6 = CD$ est numerus planus.*

XVII. Cum vero tres numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquem, qui procreatus erit, solidus appellabitur; Qui autem numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur. *Sic, $2 (C) \text{ in } 3 (D) \text{ in } 5 (E) = 30 = CDE$ est numerus solidus.*

XVIII. Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur. *Sit A latus quadrati; quadratus sic notatur, AA, vel Aq.*

XIX. Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter, vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur. *Sit A latus cubi; cubus notatur sic, AAA, vel Ac.*

In hac definitione, & tribus precedentibus, unitas est numerus.

XX. Nu-

XX. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æquemultiplex est, vel eadem pars; vel deniq; cum pars primi secundum, & eadem pars tertii æque metitur quartum, vel vice versa. $A. B :: C. D.$ hoc est, $3. 9 :: 5. 15.$

XXI. Similes plani, & solidi numeri sunt, qui proportionalia habent latera.

Latera nempe non qualibet, sed quædam.

XXII. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

Ut 6. & 28. Numerus vero qui suis ipsius partibus minor est, abundans appellatur; qui vero major, diminutus. ut 12 est abundans, 15 est diminutus.

XXIII. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

In divisione, unitas est ad quotientem, ut dividendus ad divisum. Nota, quod numerus alteri lineola interjecta subscriptus divisionem denotat. Sic $\frac{A}{B} = A$ divis. per B. item $\frac{CA}{B} = C$ in A divis. per B.

Termini sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportionem minores sumi nequeunt.

Postulata.

1. **P**ostuletur, cuilibet numero quotlibet summi posse æquales, vel multiplices.
2. Quolibet numero sumi posse maiorem.
3. Additio, subtractio, multiplicatio, divisio, extractionesque radicum, seu laterum, numerorum quadratorum, & cuborum concedantur etiam, tanquam possibilia.

Axiomata.

1. **Q**uicquid convenit uni æqualium numerorum, convenit & reliquis æqualibus numeris.

2. Partes eidem parti, vel iisdem partibus, eadem, sunt quoque inter se eadem.

3. Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem, eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

4. Quorum idem numerus, vel æquales, eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

6. Omnis numerus seipsum metitur per unitatem.

7. Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Hinc nullus numerus primus planus est aut solidus, quadratus, vel cubus.

8. Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

9. Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producit.

10. Numerus quocunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus quæmcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum & ablarum, metitur & reliquum.

P R O P. I.

A...E...G.B 8 5 3 Si duobus numeris
 C...F...D $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{1}$ inaequalibus propositis
 H--- (AB, CD) detra-
 hatur semper minor

CD de maiore AB (& reliquus EB de CD &c.)
 alterna quadam detractioe, neque reliquus unquam
 præcedentem metiatur, quoad assumpta sit unitas
 GB; qui principio propositi sunt numeri AB, CD
 primi inter se erunt.

Si negas, habeant AB, CD communem men-
 suram, numerum H. Ergo H metiens CD,
 a 11. ax. 7. & etiam AE metitur; proinde & reliquum EB;
 b 12. ax. 7. a ergo & CF, atque b idcirco reliquum FD;
 a quare & ipsum EG, sed totum EB metiebatur;
 b ergo & reliquum GB metitur, numerus uni-
 c 9. ax. 1. tatem. c Q. E. A.

P R O P. II.

9 6 Duobus nume-
 A.....E.....B 15 9 6 ris datis AB, CD
 6 3 non primis inter se,
 C.....F...D $\frac{9}{6}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{3}{0}$ maximam eorum
 G--- communem mensu-
 ram FD reperire.

Detrahe minorem numerum CD ex maiori
 a 6. ax. 7. AB, quoties potes. Si nihil relinquitur, a patet
 ipsum CD esse maximam communem mensu-
 ram. Si relinquitur aliquid EB, deme hunc ex
 CD; & reliquum FD ex EB, & sic deinceps,
 donec aliquis FD præcedentem EB metiatur.
 b 1. 7. (nam b hoc fiet antequam ad unitatem perveni-
 atur.) Erit FD maxima communis mensura.
 c constr. Nam FD c metitur EB, d ideoque & CF;
 d 11. ax. 7. e proinde & totum CD; d ergo ipsum AE; atque
 e 12. ax. 7. idcirco totum AB metitur. Liqueat igitur FD
 communem esse mensuram. Si maximam esse
 negas,

negas, sit major quæpiam G. ergo G metiens CD, d metitur AE, e & reliquum EB, d ipsumque CF. e proinde & reliquum FD, g major minorem. h Q. E. A.

g suppos.
h 9. ax. 1.

Coroll.

Hinc, numerus metiens duos numeros, metitur quoq; maximam eorum communem mensuram.

PROP. III.

A 12 Tribus numeris datis A, B, C
B 8 non primis inter se, maximam
D 4 eorum communem mensuram E
C 6 reperire.

E .. 2 Inveni D maximam communem mensuram duorum A, B. Si D metitur tertium C, li-

quet D maximam esse trium communem mensuram. Si D non metitur C, erunt saltem D, & C compositi inter se, ex coroll. præcedentis. Sit igitur ipsorum D, & C maxima communis mensura E. erit E is quem quæris.

Nam E æ metitur C, & D; æ ac D ipsos A, & æ confit. B metitur; b ergo E metitur singulos A, B, C; b 11. ax. 7. nec major aliquis (F) eos metietur; nam si hoc asseras, æ ergo F metiens A, & B, eorum maximam communem mensuram D metitur. Eodem modo, F metiens D, & C, æ eorum maximam communem mensuram E, d major minorem, metitur. e Q. E. A.

c cor. 27.

d suppos.
e 9. ax. 1.

Coroll.

Hinc, numerus metiens tres numeros, maximam quoq; eorum communem mensuram metitur.

P R O P. IV.

- A 6 Omnis numerus A, omnis
 B 7 numeri B, minor majoris, aut
 B 18 pars est, aut partes.
 B 9. Si A & B primi sint in-
 a 4. def. 7. ter se, a erit A tot partes nu-
 meri B, quot sunt in A unitates. (ut $6 =$
 b 3. def. 7. $\frac{6}{7} \cdot 7$.) Sin A metlatur B, b liquet A esse par-
 tem ipsius B. (ut $6 = \frac{1}{3} 18$.) denique si A &
 c 4. def. 7. Baliter composui inter se fuerint, c maxima
 communis mensura determinabit, quot partes A
 conficiat ipsius B, ut $6 = \frac{2}{3} 9$.

P R O P. V.

A 6 D 4
 6 6 4 4
 B G C 12. E ... H ... F 8

Si numerus A numeri BC pars fuerit, & alter
 D alterius EF eadem pars; & simul uterque
 (A+D) utriusque simul (BC+EF) eadem pars
 erit, quæ unus A unius BC.

Nam si BC in suas partes BG, GC ipsi A
 æquales; atque EF in suas partes FH, HF ipsi
 D æquales resolvantur; & erit numerus partium
 in BC æquali numero partium in EF. Quum
 a hyp. igitur $A + D = BG + EH = GC + HF$, erit
 b const. & $A + D$ toties in BC + EF, quoties A in BC.
 2. ax. 1. Q. E. D.

Vel sic brevius. Sit $a = \frac{x}{2}$ & $b = \frac{y}{2}$. quare $2a =$
 x & $2b = y$. c Ergo $2a + 2b = x + y$. Ergo $a + b =$
 $\frac{x+y}{2}$.

PROPO. VI.

$\begin{matrix} 3 & 3 & & 4 & 4 \end{matrix}$ Si nu-
A... G... B6 D.... H.... E8 merus AB
C..... 9 F..... 12 numeri C
partes fuerit; & alter DE alterius F eadem partes;
& simul uterq; (AB+DE) utriusq; simul (C+F)
eadem partes erit, quæ unus AB unius C.

Divide AB in suas partes AG, GB; & DE in
suas DH, HE. Patrum in utroque AB, DE æ-
qualis est multitudo, ex hypoth. Quam igitur
AG a fit eadem pars numeri C, quæ DH nume- a hyp.
ri F, b erit AG+DH eadem pars compositi C+ b 5. 7.
F, quæ unus AG unius C. b Eodem modo GB+
HE eadem pars est ejusdem C+F, quæ unus
GB unius C; c ergo AB+DE eadem partes est c 2. ax. 7.
ipſius C+F, quæ AB ipſius C. Q. E. D.

Vel ſic. Sit $a = \frac{2}{3}x$, & $b = \frac{2}{3}y$, & $x+y = g$. ob 3
 $a = 2x$, & $3b = 2y$, eſt $3a + 3b = 2x + 2y = 2g$.
ergo $a+b = \frac{2}{3}g = \frac{2}{3} : x+y$.

PROPO. VII.

$\begin{matrix} 5 & 3 & & 6 & 6 \end{matrix}$ Si numerus
A.... E... B8 A B numeri
6 10 6 CD pars fue-
G..... C..... F.... D 16 rit; qualis ab-
lati AB ab-
lati CF; & reliquus EB reliqui ED eadem pars
erit, qualis totus AB totius CD.

a Sit EB eadem pars numeri GC, quæ AB ip- a 1. post. 7.
ſius CD, vel AE ipſius CF. b ergo AE+EB ea- b 5. 7.
dem eſt pars ipſius CF+GC, quæ AE ipſius CF,
vel AB ipſius CD. c ergo GF=CD. aufer com- c 6. ax. 1.
munem CF, d manet GC=FD. e ergo EB ea- d 3. ax. 1.
dem eſt pars reliqui FD (GC) quæ totus AB to- e 2. ax. 7.
tius CB. Q. E. D.

Vel ſic. Sit $a+b=x$, & $c+d=y$, atque tam
 $x=3y$, quam $a=3c$; dico $b=3d$. Nam $3c+3d$
 $=3y=x$, $g=a+b$. aufer utrinque $3c$ $g=a$, & f 1. 2.
remanet $3d=b$. Q. E. D.

PROP. VIII.

Si nume.
 A.....H.. G..E..L..B 16 pars AB nu-
 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80 82 84 86 88 90 92 94 96 98 100
 C.....F.....D 24 partes fuerit,
 quales abla-
 tas AE ablati GB, & reliquus EB reliqui ED ea-
 dem partes erit, quales totus AB totius CD.

Seca AB in AG, GB partes numeri CD; item
 AB in AH, HE partes numeri CF; & sume
 a 3. ax. 1. GL=AH=HB; & quare HG=EL. & quia
 b constr. b AG=GB, & etiam HG=LB. Cum igitur
 c 3. ax. 1. totus AG eadem sit pars totius CD, quæ abla-
 d 7. 7. tus AH ablati CF; d erit reliquus HG, vel
 EL, eadem etiam pars reliqui ED, quæ AG
 ipsius CD. Eodem pacto, quia GB eadem
 pars est totius CD, quæ HE, vel GL, ipsius CF,
 d erit reliquus LB eadem pars reliqui FD, quæ
 GB totius CD; ergo EL+LB (EB) eadem
 est partes reliqui FD, quæ totus AB totius CD.
 Q. E. D.

Vel sit facilius. Sit $a + b = x$. & $c + d = y$.
 e 9. ax. 7. Item ita $y = \frac{2}{3} x$, quam $c = \frac{2}{3} a$; vel e quod
 idem est, $y = 2 x$; & $3 c = 2 a$. Dico $d = \frac{2}{3} b$.
 f 1. 2. Nam $3 c + 3 d = 3 y = 2 x = 2 a + 2 b$.
 g 1. ax. 1. ergo $3 c + 3 d = 2 a + 2 b$. aufer utrinque
 h 3. ax. 1. $3 c = 2 a$; & h manet $3 d = 2 b$. Ergo $d = \frac{2}{3} b$.
 k 3. ax. 1. Q. B. D.

18. ax. 7. CD R O P. IX.

Si numerus A numeri
 BC pars fuerit, & alter D
 alterius EF eadem pars; &
 vicissim quæ pars est, aut
 partes primus A tertii D,
 eadem pars erit, vel eadem
 partes, & secundus BC quarti EF.

Ponitur $A \sqsupset D$. Sint igitur BG, GC, & EH, HF partes numerorum BC, EF, hæ ipsi A, illæ ipsi D partibus. Utrunque multitudo partium æqualis ponitur. Liquet vero BG a eandem esse partem, aut easdem partes ipsius EH, quæ GC ipsius HF; b quare BC (BG+GC) ipsius EF (EH+HF) eadem pars est aut partes, quæ unus BG (A) unius EH (D.) Q. E. D.

Vel sic; sit $a = \frac{b}{3}$, & $c = \frac{d}{3}$, vel $3a = b$, & $3c = d$; c estque $\frac{c}{a} = (\frac{3c}{3a} =) \frac{b}{d}$. c 5. 15.

PROP. X.

A .. G .. B 4
C 6
D H E 10
F 15
Si numerus AB numeri C partes fuerit, & alter DE alterius F eadem partes; & vicissim quæ partes est primus AB tertii DE, aut pars, eadem partes erit & secundus C quarti F, aut pars.

Ponitur $AB \sqsupset DE$, & $C \sqsupset F$. Sint AG, GB, & DH, HE partes numerorum C, & F, tot nempe in AB, quot in DE. Constat AG ipsius C eandem esse partem, quæ DH ipsius F. a quare vicissim AG ipsius DH, pariterque GB ipsius HE, & b proinde conjunctim A B ipsius D E eadem pars erit, aut partes, quæ C ipsius F. Q. E. D.

Vel sic; sit $a = \frac{2}{3} b$, & $c = \frac{2}{3} d$. vel $3a = 2b$, & $3c = 2d$. Est $\frac{c}{a} = \frac{3c}{3a} = \frac{2d}{2b} = \frac{d}{b}$.

PROP. XI.

A ... E ... B 7
C ... F ... D 14
Si fuerit, ut totus AB ad totum CD, ita ablatum AE ad ablatum CF; & reliquus EB ad reliquum FD

FD erit, ut totus AB ad totum CD.

a 4. 7. Sit primo $AB \supset CD$; a ergo AB vel pars
 b 20. def. 7. est, vel partes numeri CD; b eademque pars est,
 c 7. vel 8. 7 vel partes ipse AE ipsius CF; c ergo reliquus EB
 reliqui FD eadem pars est, aut partes, quæ totus
 AB totius CD. b ergo $AB. CD :: EB. FD$.
 Sin fuerit $AB \sqsubset CD$; eodem modo erit juxta
 modo ostensa, $CD. AB :: FD. EB$. ergo inverten-
 do, $AB. CD :: EB. FD$.

PROP. XII.

A, 4. C, 2. E, 3. Si sint quocunque nu-
 B, 8. D, 4. F, 6. meri proportionales ($A.B$
 $:: C.D :: E.F$) erit quem-
 admodum unus antecedentium A ad unum conse-
 quentium B, ita omnes antecedentes ($A+C+E$) ad
 omnes consequentes ($B+D+F$.)

Sint primo, A, C, E minores quam B, D, F.
 a 10. def. 7. ergo (propter easdem rationes) a erit A eadem
 b 5. & 6. 7. pars aut partes ipsius B, quæ C ipsius D. b ergo
 conjunctim $A+C$ eadem erit pars aut partes
 ipsius $B+D$, quæ unus A unius B. Similiter
 $A+C+B$ eadem pars est, aut partes ipsius
 c 20. def. 7. $B+D+F$, quæ A ipsius B. c ergo $A+C+B$
 $E. B+D+F :: A.B. Q. E. D.$ Sin A, C, E,
 ipsis B, D, F majores ponantur, idem ostendetur
 invertendo.

PROP. XIII.

Si quatuor numeri proporti-
 A, 3. C, 4. onales sint ($A. B :: C. D$.) &
 B, 9. D, 12. vicissim proportionales erunt
 ($A. C :: B. D$.)

Sint primo A & C ipsis B & D minores,
 a 20. def. 7. atque $A \supset C$. Ob eandem proportionem, a erit
 A eadem pars, aut partes ipsius B, quæ C ipsius
 b 9. & 10. 7 D. b ergo vicissim A ipsius C eadem pars est, aut
 partes, quæ B ipsius D, ergo $A. C :: B. D$. Sin
 A &

$A \perp C$; atque A & C majores fluctuantur, quam B & D , eadem res erit, proportionibus invertendo;

PROP. XIV.

$A, 9. D, 6.$ Si sint quotcunque numeri A ,
 $B, 6. E, 4.$ B, C , & alii totidem D, E, F
 $C, 3. F, 2.$ illis aequales multitudine, qui bini
 sumantur, & in eadem ratione
 $(A.B :: D.E. \& B.C :: E.F)$ etiam ex aequalitate
 in eadem ratione erunt. $(A.C :: D.F.)$

Nam quia $A.B :: D.E$, a erit vicissim, $A.D ::$ a 13. 7.
 $B.E :: a C.F$. a ergo iterum permutando, $A.C$
 $:: D.F. Q.E.D.$

PROP. XV.

1. D. Si unitas numerum quem-
 $B \dots 3. E \dots 6.$ piam B metiatur; aequa au-
 tem alter numerum D alte-
 rum quendam numerum E metiatur; & vicissim
 aequa unitas tertium numerum D metietur, & se-
 cundum B quartum E .

Nam quia 1 est eadem pars ipsius B , quae D
 ipsius E , a erit vicissim 1 eadem pars ipsius D , a 9. 7.
 quae B ipsius E . Q. E. D.

PROP. XVI.

$B, 4. A, 3.$ Si duo numeri A, B sese
 $A, 3. B, 4.$ mutuo multiplicantes fecerint
 $AB, 12. BA, 12.$ aliquos AB, BA , geniti ex
 ipsis AB, BA aequales inter
 se erunt.

Nam quia $AB = A$ in B , a erit 1 in A toties, a 15. def. 7.
 quoties B in AB . b ergo vicissim 1 in B toties
 erit, quoties A in AB , atqui quoniam $BA = B$
 in A , a erit 1 in B toties, quoties A in BA . ergo
 quoties 1 in AB , toties 1 in BA ; & e proinde c 4. ax. 7.
 $AB = BA. Q.E.D.$ b 15. 7.

PROP.

PROP. XVII.

A, 3. Si numerus A duos nu-
 B, 2. C, 4. meras B, C multiplicans se-
 AB, 6. AC, 12. cerit aliquos AB, AC; ge-
 niti ex ipsis eandem ratio-
 nem habebunt, quam multiplicati. (AB. AC ::
 B. C.)

- a 15. def. 7. Nam quia $AB = A$ in B, a erit 1 toties in
 A, quoties B in AB. a item quia $AC = A$ in C,
 erit 1 toties in A, quoties C in AC. ergo quo-
 b 20. def. 7 ties B in AB, toties C in AC, quare B. AB ::
 c 13. 7. C. AC. c ergo vicissim, B. C :: AB. AC.
 Q. E. D.

PROP. XVIII.

C, 4. C, 5. Si duo numeri A, B,
 A, 3. B, 9. numerum quempiam C
 AC, 15. BC, 45. multiplicantes fecerint a-
 liquos AC, BC; geniti
 ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multipli-
 cantes. (A. B :: AC. BC.)

- a 16. 7. Nam $AC a = CA$; & $BC a = CB$; sic idem
 c multiplicans A & B producit AC, & BC.
 b 17. 7. b ergo A. B :: AC. BC. Q. E. D.

Sabat.

Ex his pendet modus vulgaris reducendi fra-
 ctiones. ($\frac{4}{3}, \frac{7}{5}$) ad eandem denominationem.
 Nam duc 9 tam in 3, quam in 5, proveniunt
 $\frac{27}{3} = \frac{27}{3}$, quoniam ex his, 3. 5 :: 27. 45. Item
 duc 5 in 7, & 9, prodeunt $\frac{35}{4} = \frac{7}{9}$, quia 7. 9 ::
 35. 45.

PROP. XIX.

A, 4. B, 6. C, 8. D, 12. Si quatuor nu-
 AD, 48. BC, 48. meri proportiona-
 les fuerint, (A. B ::
 C. D;) qui ex primo & quarto fit numerus AD,
 aequalis est ei, qui ex secundo & tertio fit, numero
 BC.

BC. Et si qui ex primo & quarto fit numerus AD, equalis sit ei, qui ex secundo & tertio fit, numero BC, ipsi quatuor numeri proportionales erunt. (A. B :: C. D.)

1. Hyp. Nam A C. A D a :: C. D b :: A. a 17. 7.
B c :: AC. BC. d ergo AD = BC. Q. E. D. b hyp.
2. Hyp. Quoniam e AD = BC, erit A C. c 18. 7.
AD f :: AC. BC. Sed AC. AD g :: C. D. & d 9. 5.
AC. BC h :: A. B. k ergo C. D :: A. B. Q. E. D. e hyp.
f 7. 5.
g 17. 7.
h 18. 7.
k 11. 5.

PROP. XX.

A. B. C. Si tres numeri proportionales fuerint (A. B :: B. C.)
4. 6. 9. qui sub extremis continetur
AC, 36. BB, 36. (AC) equalis est ei, qui
D, 6. à medio efficitur (BB.) Et si
qui sub extremis continetur (AC) equalis fuerit ei
(Bq) qui sub medio, ipsi tres numeri proportionales erunt ($\frac{A}{B} :: \frac{B}{C}$.)

1. Hyp. Nam sume D = B. a ergo A B :: a 1. 4x 7.
D (B.) C. b quare A C = B D, a vel B B. b 19. 7.
Q. E. D.
2. Hyp. Quia AC c = BD, d erit A. B :: D c hyp.
(B.) C. Q. E. D. d 19. 7.

PROP. XXI.

A :: G. B 5. E 10. Numeri. AB,
C. H. D 3. F 6. CD minimi omnium eandem cum
eis rationem habentium (E, F) metiuntur aque numeros E, F eandem cum eis rationem habentes, major quidem AB maiorem E, minor vero CD minorem F.

Nam A B. C D a :: E. F. b ergo vicissim a hyp.
AB. E :: CD. F. c ergo AB eadem pars est, b 13. 7.
vel partes ipsius E, quæ CD ipsius F. Non partes; nam si ita, sint AG, GB partes numeri E;
& CH, HD partes numeri F. c ergo AG. E :: CH.
CH.

d 13. 7. CH. F; & permutando, AG. CH $d :: E. Fe ::$
 c hyp, AB. CD, ergo AB, CD non sunt minimi in sua
 ratione, contra hypoth. ergo, &c.

P R O P. XXII.

A, 4. D, 12. Si fuerint tres numeri A, B,
 B, 3. E, 8. C, & alii ipsis multitudine a-
 C, 2. F, 6. quales D, E, F, qui bini su-
 mantur, & in eadem ratione;
 fuerit autem perturbata eorum proportio ($A.B :: E.$
 $F \& B.C :: D.E$;) etiam ex aequalitate in eadem ra-
 tione erunt ($A.C :: D.F$.)

a hyp. Nam quia $A.B :: E. F$, b erit $AF = BE$; &
 b 19. 7. quia $B.C :: d D.E$, b erit $BE = CD$. c ergo
 c 1. ex. 1. $AF = CD$. d quare $A.C :: D.F$. Q. E. D.
 d 19. 7.

P R O P. XXIII.

A, 9. B, 4. Primi inter se numeri A, B,
 C --- D --- minimi sunt omnium eandem
 E -- cum ea rationem habentium.

Si fieri potest, sint C & D
 minores quam A & B, atque in eadem ratione.

a 21. 7. a ergo C metitur A æque, ac D metitur B,
 puta per eundem numerum E: quoties igitur

b 23. def 7. i in E, b toties erit C in A, c quare vicissim quo-
 c 15. 7. ties i in C, toties E in A. simili discursu quoties
 i in D, toties E in B. ergo E utrumque A & B
 metitur; qui proinde inter se primi non sunt,
 contra Hypoth.

P R O P. XXIV.

A, 9. B, 4. Numeri A, B, minimi omni-
 C --- um eandem cum ea rationem
 D --- E -- habentium, primi inter se sunt.

Si fieri potest, habeant A
 & B communem mensuram C; is metiatur A

a 9. ex. 7. per D, & B per E; a ergo $CD = A$, & $CE = B$.
 b quare

b quare $A. B :: D. E.$ Sed $D \& E$ minores sunt *b* 17. 7.
quam $A \& B$, utpote eorum partes. Ergo A
& B non sunt minimi in sua ratione, contra
hypoth.

PROP. XXV.

Si duo numeri A, B primi inter
 $A, 9. B, 4.$ *se fuerint, qui unum eorum A*
 $C, 3. D =$ *metitur numerus C, ad reliquum*
B primus erit.

Nam si affirmes aliquem D numeros $B \& C$
metiri, *a* ergo D metiens C , metitur A . ergo *a* 11. *ax.* 7.
 $A \& B$ non sunt primi inter se, contra Hypoth.

PROP. XXVI.

$A, 5. C, 8.$ *Si duo numeri A, B ad*
 $B, 3.$ *quempiam C primi fuerint,*
 $AB, 15. E ----$ *etiam ex illis genitus AB*
 $F ----$ *ad eundem C primus erit.*

Si fieri potest, sit ipsorum
 $AB, \& C$ communis mensura numerus E . sitque
 $\frac{AB}{E} = F$; *a* ergo $AB = EF$; *b* quare $E.A :: B. F.$ *a* 9. *ax.* 7.

Quia vero A primus est ad C quem E metitur, *b* 19. 7.
c erunt $E \& A$ primi inter se; *d* adeoque in sua *c* 25. 7.
proportione minimi, & *e* proinde æque metiuntur *d* 23. 7.
 $B, \& F$; nempe E ipsum $B, \& A$ ipsum F . *c* 21. 7.
Quum *e* 21. 7.
igitur E utrumque B, C metiatur, non erunt illi
primi inter se, contra Hypoth.

PROP. XXVII.

$A, 4. B, 5.$ *Si duo numeri, A, B, primi*
 $Aq, 16.$ *inter se fuerint, etiam ex uno*
 $D, 4.$ *eorum genitus (Aq) ad reli-*
quum B primus erit.

Sume $D = A$; ergo *a* singuli $D, \& A$ primi sunt *a* 1. *ax.* 7.
b quare $A D$, vel Aq , ad B primus est. *b* 26. 7.
 $Q. E. D.$

PROP. XXVIII.

A, 5. C, 4. Si duo numeri A, B ad
 B, 3. D, 2. duos numeros C, D, u-
 terque ad utrumque, primi
 $\overline{AB}$, 15. $\overline{CD}$, 8. fuerint, & qui ex eis gi-
 gmentur AB, CD, primi inter se erunt.

a 26. 7. Nam quia A & B ad C primi sunt, a erit AB
 ad C primus. Eadem ratione erit AB ad D
 b 26. 7. primus, b ergo AB ad CD primus est. Q. E. D.

PROP. XXIX.

A, 3. B, 2. Si duo numeri A, B primi
 Aq, 9. Bq, 4. inter se fuerint, & multipli-
 Ac, 27. Bc, 8. cans uterque seipsum fecerit a-
 liquem (Aq, & Bq,) & ge-
 niti ex ipsis (Aq, Bq) primi inter se erunt; & si
 qui in principio A, B genitos ipsos Aq, Bq multipli-
 cantes fecerint aliquos (Ac, Bc,) & hi primi inter
 se erunt: & semper circa extremos hoc eveniet.

a 27. 7. Nam quia A primus est ad B, a erit Aq ad B
 primus, & quia Aq primus ad B, a erit Aq ad
 Bq primus. Rursus quia tam A ad B & Bq,
 b 28. 7. quam Aq ad eisdem B, & Bq primi sunt, b erit
 A x Aq, id est Ac, ad B x Bq, id est Bc, primus.
 Et sic porro de reliquis.

PROP. XXX.

8 5 Si duo numeri
 A B C 13. D ---- AB, BC primi
 inter se fuerint,
 etiam uterque simul (AC) ad quemlibet illorum
 AB, BC primus erit. Et si uterque simul AC ad
 unum aliquem illorum AB primus fuerit, etiam qui
 in principio numeri AB, BC primi inter se erunt.

1. Hyp. Nam si AC, AB compositos velis,
 a 12. ax. 7. sit D communis mensura. a Is metietur reli-
 quum BC. ergo AB, BC non sunt primi inter se,
 contra Hypoth.

2. Hyp.

3. Hyp. Positis AC, AB inter se primis, vis
D ipsorum AB, BC communem esse mensuram.
b Is igitur totum AC metitur. quare AC, AB b 10. ax. 7.
non sunt primi inter se, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc numerus, qui ex duobus compositus, ad
unum illorum primus est, ad reliquum quoque
primus est.

PROP. XXXI.

Omnis primus numerus A ad omnem
A 5, B, 8. numerum B, quem non metitur, pri-
mus est.

Nam si communis aliqua mensura metiatur
utrumque A, B; a non erit A primus numerus, a 11. def. 7.
contra Hypoth.

PROP. XXXII.

A, 4. D, 3. Si duo numeri A, B, se mu-
B, 6. E, 8. tuo multiplicantes fecerint a-
AB, 24. liquem AB; genitum autem ex
ipsis AB metiatur aliquis pri-
mus numerus D; is etiam unum eorum, qui a prin-
cipio, A, vel B metietur.

Pone numerum D non metiri A; sit vero
 $\frac{AB}{D} = E$, a ergo $AB = DE$. b quare D. A :: a 9. 42. 7.
B. E. c est vero D ad A primus. d ergo D & b 19. 7.
A minimi sunt in sua ratione; e proinde D me- c hyp. 6.
tetur B, aequae ac A metitur E. liquet igitur pro- 31. 7.
positum. d 23. 7.
e 21. 7.

PROP. XXXIII.

A, 12. Omnem compositum numerum A, ali-
B, 2. quis primus numerus B metitur.

Unus vel plures numeri a metian-
tur A, quorum minimus sit B. is primus erit. a 13. def. 7
nam

a 13. def. 7. nam si diceretur compositus, a eum minor aliquis
 b 11. ax. 7. metietur, b qui proinde ipsum A metietur, quare
 B non est minimus eorum, qui A metiuntur;
 contra Hypoth.

P R O P. XXXIV.

*Omnis numerus A, aut primus est, aut
 A, 9. eum aliquis primus metitur.*

Nam A necessario vel primus est,
 vel compositus. Si primus, hoc est quod asseri-
 mus. Si compositus, a ergo eum aliquis primus
 metitur. Q. E. D.

P R O P. XXXV.

A, 6. B, 4. C, 8.

D, 2.

H. I. K. ---

E, 3. F, 2. G, 4.

L ---

*Numeris datis quocunque A, B, C reperire mini-
 mos omnium E, F, G eandem rationem cum eis ha-
 bentium.*

Si A, B, C primi sint inter se, ipsi in sua rati-
 one minimi a erunt. Si compositi sint, b esto
 eorum maxima communis mensura D, qui ipsos
 metiatur per E, F, G. Hi minimi erunt in rati-
 one A, B, C.

a 9. ax. 7. Nam D ductus in E, F, G c producit ABC.
 d 17. 7. d ergo hi & illi in eadem sunt ratione. Jam puta
 e 21. 7. alios H, I, K minimos esse in eadem; e qui pro-
 pterea aequae metientur A, B, C nempe per nu-
 f 9. ax. 7. merum L. f ergo L in H, I, K ipsos A, B, C
 g 1. ax. 1. protreabit. g ergo $ED = A = HL$. h unde E.
 h 19. 7. $H :: L. D$. Sed $E \nmid H$; i ergo $L \nmid D$. ergo
 k suppos. D non est maxima communis mensura ipsorum
 l 20. def. 7. A, B, C; contra Hypoth.

Coroll.

Hinc, maxima communis mensura quotlibet
 nume-

/ numerorum metitur ipsos per numeros, qui mi-
 nimi sunt omnium eandem rationem cum ipsis
 habentium. Ex quo patet methodus vulgaris re-
 ducendi fractiones ad minimos terminos.

P R O P. XXXVI.

*Duobus numeris datis A, B, reperire, quem illi
 minimum metiuntur, numerum.*

A, 5. B, 4. I. *Cas.* Si A, & B primi
 AB, 20. sint inter se, est AB quæsitus.
 D ----- Nam liquet A & B metiri
 E --- F --- AB. Si fieri potest, metian-
 tur A & B aliquem D = AB;
 puta per E, & F. a ergo AE = D = BF. b quare
 A. B :: F. E. Quia vero A, & B c primi sunt
 inter se, d adeoque in sua ratione minimi, e æque
 metientur A ipsum F, ac B ipsum E. Atqui
 B. E f :: AB. AE (D.) g ergo AB etiam metie-
 tur D, seipso minorem. Q. E. A.

a 9. ax. 7.
 b 19. 7.
 c hyp.
 d 23. 7.
 e 21. 7.
 f 17. 7.
 g 20. def. 7.
 h 35. 7.
 k 19. 7.
 l 17. ax. 7.
 m 9. ax. 7.
 n 19. 7.
 o conftr.
 p 21. 7.
 q. 17. 7.
 r 20. def. 7.

A, 6. B, 4. E --- 2. *Cas.* Sin
 C, 3. D, 2. G --- H --- A, & B inter se
 AD, 12. compositi fue-
 rint, b reperian-
 tur C, & D minimi in eadem ratione. k ergo
 A D = BC. Erit A D, vel B C quæsitus.

Nam l liquet B, & A ipsum A D, vel B C
 metiri Puta A, & B meriti F = A D, nempe
 A per G, & B per H. m ergo A G = F = B H.
 n unde A. B :: H. G o :: C. D. p proinde æque
 metitur C ipsum H, ac D ipsum G. atqui D. G
 q :: A D. A G (F.) ergo A D r metitur F, major
 minorem Q. E. A.

Coroll.

Hinc, si duo numeri multiplicent minimos
 eandem rationem habentes, major minorem, &
 minor majorem, producet numerus minimus,
quem illi metiuntur.

P R O P. XXXVII.

A, 2. B, 3.

E, ... 6.

C --- F --- D

Si duo numeri A, B nu-
merum quempiam CD me-
tiantur; etiam minimus E,
quem illi metiuntur, eundem
CD metietur.

Si negas, aufer E ex CD, quoties fieri potest,
a hyp. & relinquatur FD $\neg$ E. quum igitur A & B a me-
b constr. tiantur E, b & B ipsum CF, c etiam A, & B me-
c 11. ax. 7. tiuntur CF; a metiuntur autem totum CD; d
d 12. ax. 7. ergo etiam reliquum FD metiuntur. ergo E non
est minimus, quem A, & B metiuntur, contra hyp.

P R O P. XXXVIII.

A, 3. B, 4. C, 6.

D, 12.

Tribus numeris datis A, B, C,
reperire minimum, quem illi me-
tiuntur.

a 36. 7.

a Reperi D minimum, quem duo A, & B
metiuntur; quem si tertius C metiatur, patet D
esse quæsitum. Quod si C non metiatur D, sit
E minimus, quem C, & D metiuntur. Erit
E requisitus.

A, 2. B, 3. C, 4.

D, 6. E, 12.

F ---

Nam singulos. A, B, C
metiri E constat ex 11. ax.

7. Quod vero nullum ali-
um F minorem metiantur,

b 37. 7.

facile ostenditur. Nam si affirmas, b ergo D
metitur F; b proinde E eundem F metitur, ma-
jor minorem. Quod est absurdum.

Coroll.

Hinc, si tres numeri numerum quempiam me-
tiantur; etiam minimus, quem illi metiuntur,
eundem metietur.

PROP. XXXIX.

A, 12. Si numerum A quispiam numerus
B, 4, C, 3. B metiatur, ille A quem B meti-
tur, partem habebit C, à metiente B
denominatam.

Nam quia $\frac{A}{B} = C$, b erit $A = BC$. c ergo $\frac{A}{C} = B$. Q. E. D. a hyp.
b 9. ax. 7.
c 7. ax. 7.

PROP. XL.

A, 15. Si numerum A partem habuerit
B, 3. C, 5. quamlibet B, metiatur illum nume-
rus C, à quo ipsa pars B denomi-
natur.

Nam quia $BC = A$, b erit $\frac{A}{C} = B$. Q. E. D. a hyp. c
9. ax. 7.
b 7. ax. 7.

PROP. XLI.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ G, 12. Numerum reperire G, qui minimus
H --- mur cum sit, habeas datas partes,
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

a Invenitur G minimus, quem denominato- a 38. 7.
b 39. 7.
res 2, 3, 4 metiuntur. b Liqueat G habere partes,
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Si fieri potest, H $\rightarrow$ G habeat easdem
partes; c ergo 2, 3, 4 metiuntur H, & proinde c 40, 6.
G non est minimus, quem 2, 3, 4 metiuntur,
contra constr.

L I B. VIII.

P R O P. I.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E - F -- G --- H ----



S fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D ; extremi vero ipsorum A, D primi inter se fuerint ; ipsi A, B, C, D minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

Nam, si fieri potest, sint alii totidem E, F, G, H minores in illa ratione. *a* ergo ex æquali A, D :: E. H. ergo A, & D primi numeri, *b* adeoque in sua ratione minimi, *c* æque metiuntur E, & H, seipsis minores. Q. E. A.

P R O P. II.

I.

A, 2. B, 3.

Aq, 4. AB, 6. Bq, 9.

Ac, 8. AqB, 12. ABq, 18. Bc, 27.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque jusserit quispiam, in data ratione A ad B.

Sint A, & B minimi in data ratione. Erunt Aq, AB, Bq tres minimi deinceps in ratione A ad B.

a 17. 7. Nam AA. AB *a* :: A. B *a* :: AB. BB. item
b 24. 7. quia A, & B *b* primi sunt inter se, *c* erunt Aq, Bq
c 29. 7. inter se primi ; *d* proinde Aq, AB, Bq sunt
d 1. 8. :: minimi in ratione A ad B.

e 17. 7. Dico porro, Ac, AqB, ABq, Bc in ratione A ad B quatuor esse minimos. Nam AqA, AqB *e* :: A. B *e* :: ABA (AqB.) ABB. *e* atque A, B :: ABq. BBq. (Bc) Quum igitur Ac, & Bc

Bc si inter se primi sint, g erunt Ac, AqB, f 29. 7.
 ABq, Bc quatuor :: minimi in ratione A ad B. g 1. 8. c
 Eodem modo quotvis proportionales investiga-
 bis. Q. E. F.

Coroll.

1. Hinc, si tres numeri minimi sunt propor-
 tionales, extremi quadrati erunt; si quatuor,
 cubi.

2. Extremi quocunque proportionales per
 hanc propof. inventi in data ratione minimi, in-
 ter se primi sunt.

3. Duo numeri, minimi in data ratione, me-
 tiuntur omnes medios quocunque minimorum
 in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex
 illorum multiplicatione in alios quosdam nu-
 meros.

4. Hinc etiam liquet ex constructione, series
 numerorum 1, A, Aq, Ac; 1, B, Bq, Bc; Ac,
 AqB, ABq, Bc, constare æquali multitudine
 numerorum; ac proinde extremos numeros
 quocunque minimorum continue proportiona-
 lium, esse ultimos totidem continue proportio-
 nalium ab unitate. ut extremi Ac, Bc continue
 proportionalium Ac, AqB, ABq, Bc, sunt ultimi
 totidem proportionalium ab unitate 1, A, Aq,
 Ac; & 1, B, Bq, Bc.

5. 1, A, Aq, Ac; & B, BA, BAq; ac Bq, ABq
 sunt :: in ratione 1 ad A. item, B, Bq, Bc; &
 A, AB, ABq; ac Aq, AqB sunt :: in ratione
 1 ad B.

PROP. III.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 24.

Si sint quot-
 cunque numeri

A, B, C, D deinceps proportionales, minimi omni-
 um eandem cum eis rationem habentium; illorum
 extremi A, D sunt inter se primi.

a 2. 8.

Nam si 4 inveniantur totidem numeri minimi in ratione A ad B, illi non alii erunt, quam A, B, C, D; ergo juxta 2. cotoll. præcedentis extremi A & D primi sunt inter se. Q. E. D.

P R O P. IV.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.

Rationibus da-

H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.

et quocunque in

I--K--L--

minimis terminis

(A ad B, & C ad

D) reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

a 36. 7.

b 3. post. 7.

c 9. ax. 7.

d 18. 7.

e 7. 5.

f 21. 7.

g 37. 7.

a Reperi E minimum, quem B, & C metiuntur; & B ipsum E b æque metiatur, ac A alterum F, puta per eundem H. b item C ipsum E, ac D alterum G æque metiuntur: erunt F, E, G minimi in datis rationibus. Nam $AHc = F$; & $BHc = E$. d ergo $A. B :: AH. BHc :: F. E$. Similiter $C. D :: E. G$. sunt igitur F, E, G deinceps proportionales in datis rationibus. Imo minimi sunt in iisdem: nam puta alios I, K, L minimos esse. f ergo A & B ipsos I & K, spatiterque C & D ipsos K & L æque metiuntur. ergo B, & C eundem K metiuntur. g Quare etiam E eundem K metitur, seipso minore. Q. E. A.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.

Datis vero quibus rationibus A ad B, & C ad D, ac E ad F. reperi, ut prius, tres H, G, I minimos deinceps in rationibus A ad B, & C ad D. tunc si E numerum I metiatur, b sume alterum N, quem F æque metiatur; erunt quatuor H, G, I, K, deinceps minimi, in datis rationibus, quod non aliter probabimus, quam in priori parte.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.

H, 24. G, 29. I, 15.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

Sin E non metiatur I, sit K minimus, quem E, & I metiuntur; & quoties I ipsum K, toties G ipsum L, & H ipsum M metiatur. quoties vero E ipsum K, toties F ipsum N metiatur. Erunt M, L, K, N minimi deinceps in datis rationibus; quod demonstrabimus, ut prius.

P R O P. V.

Plani numeri

C, 4. E, 3.

D, 6. F, 16. ED, 18.

$\frac{CD}{ED} = \frac{C}{E} + \frac{D}{F}$

C D, E F rationem habent ex lateribus compositam.

$$\left(\frac{CD}{EF} = \frac{C}{E} + \frac{D}{F} \right)$$

Nam quia CD. ED a :: C. E; a & ED. EF :: a 17. 7.

D. F. atque $\frac{CD}{EF} = \frac{CD}{ED} + \frac{ED}{EF}$, c erit ratio b 20 def. 5. c 11. 5.

$$\frac{CD}{EF} = \frac{C}{E} + \frac{D}{F}. Q. E. D.$$

P R O P. VI.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

F, 4. G, 6. H, 9.

Si sint quocunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E; primus autem A secundum B non metiatur, neque alius quispiam ullum metietur.

Quoniam A non metitur B, a neque quilibet proxime sequentem metietur, quia A. B :: B. C ::

C. D, &c. b Accipe tres F, G, H minimos in ratione A ad B. quoniam igitur A non metitur B, a neque F metietur G. c ergo F non est unitas. d sed F, & H inter se primi sunt; ergo quum e sit ex æquo A. C :: F. H, & F non metiatur H, neque A ipsum C metietur; proinde nec B ipsum D, nec C ipsum E, &c. quia

A. C e :: B. D e :: C. E, &c. Eodem modo

sumptis quatuor vel quinque minimis in ratione
A ad B, ostenderetur A ipsos D, & E; ac B ipsos
E, & F non metiri, &c. Quare nullus alium me-
tiatur. Q. E. D.

P R O P. VII.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

*Si sint quotcunque numeri deinceps proportiona-
les A, B, C, D, E; primus autem A extremum E
metiatur; is etiam metitur secundum B.*

a 6. 7.

Si negas A metiri B, a ergo nec ipsum E me-
tiatur, contra Hypoth.

P R O P. VIII.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81. Si inter duos
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27. numeros A, B
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108. medii continua
proportione ce-
ciderint numeri C, D; quot inter eos medii con-
tinua proportione cadunt numeri, tot & inter alios
E, F eandem cum illis habentes rationem, medii
continua proportionem cadent. (L, M.)

a 35. 7.

b 14. 7.

c hyp.

d 3. 8.

e 21. 7.

f constr.

a Sume G, H, I, K minimos :: in ratione
A ad C; b erit ex æquali, G. K :: A. B c :: E. F.
Atqui G, & K d primi sunt inter se; e quare G
æque metitur E, ac K ipsum F. per eundem nu-
merum metiatur H ipsum L, & I ipsum M.
f itaque E, L, M, F ita se habent ut G, H, I, K;
hoc est ut A, B, C, D. Q. E. D.

P R O P. IX.

1.

E, 2. F, 3.

G, 4. H, 6. I, 9.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.

*Si duo numeri
A, B, sint inter se
primi, & inter
eos medii conti-
nua proportione
ceciderint numeri, C, D; quot inter eos medii con-
tinua*

tinua

tinua proportione ceciderint numeri, totidem (E, G, & F, I) & inter utrumque eorum ac unitatem medii continua proportione cadent.

Constat 1, E, G, A; & 1, F, I, B esse $\therefore$; & totidem quot A, C, D, B, nimirum ex 4 coroll. 2. 8. Q. E. D.

PROP. X.

A, 8. I, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. DF, 6. G, 9.
D, 2. F, 3.
I.

Si inter duos numeros A, B, & unitatem continue proportionales ceciderint numeri

(E, D, & F, G,) quot inter utrumque ipsorum, & unitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportionem cadent, I, K.

Nam B, DF, G; & A, DqF (I,) DG (K,) B sunt $\therefore$, per 2. 8. ergo, &c.

PROP. XI.

A, 2. B, 3. Duorum quadratorum
Aq, 4. AB, 6. Bq, 9. numerorum Aq, Bq unus
medius proportionalis est
numerus AB. & quadratum Aq ad quadratum
Bq, duplicatam habet lateris A ad latus B ratio-
nem.

a Liqueat Aq, AB, Bq, esse $\therefore$. b proinde etiam a 17. 7.
am $\frac{Aq}{Bq} = \frac{A}{B}$ bis. Q. E. D. b 10. def 5.

PROP.

P R O P. XII.

Ac, 27. AqB, 36. ABq, 48. Bc, 64. *Duorum
A, 3. B, 4.
Aq, 9. AB, 12. Bq, 16.
cuborum nu-
merorum Ac,
Bc duo medij
proportionales sunt numeri AqB, ABq. Et cubus
Ac ad cubum Bc triplicatam habet lateris A ad
latus B rationem.*

a 2. 1. a Nam Ac, AqB, ABq, Bc sunt $\therefore$ in ratione
b 10. def. 5. A ad B. b proinde $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$ ter. Q. E. D.

P R O P. XIII.

A, 2. B, 4. C, 8.
Aq, 4. AB, 8. Bq, 16. BC, 32. Cq, 64.
Ac, 8. AqB, 16. ABq, 32. Bc, 64. BqC, 128.
BCq, 256. Cc, 512.

*Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales,
A, B, C; & multiplicans quisque seipsum faciat
aliquos; qui ab illis producti fuerint Aq, Bq, Cq
proportionales erunt: & si numeri primum positi A,
B, C multiplicantes jam factos Aq, Bq, Cq, fece-
rint aliquos Ac, Bc, Cc; ipsi quoque proportionales
erunt, & semper circa extremos hoc eveniet.*

a 2. 8. Nam Aq, AB, Bq, BC, Cq a sunt $\therefore$ b ergo
b 14. 7. ex æquo Aq.Bq :: Bq, Cq. Q. E. D.

a Item Ac, AqB, ABq, Bc, BqC, BCq, Cc
sunt $\therefore$, b ergo iterum ex æquo, Ac. BC :: Bc.
Cc. Q. E. D.

P R O P. XIV.

Aq, 4. AB, 12. Bq, 36. *Si quadratus nu-
A, 2. B, 6. merus Aq quadra-
tum numerum Bq
metiatur, & latus unius (A) metietur latus alterius
(B:) & si unius quadrati latus A metietur latus al-
terius B, & quadratus Aq quadratum Bq metietur.*

a 2. & 11. 8. 1. Hyp. Nam Aq AB a :: AB. Bq; cum
igitur ex hyp. Aq metiatur Bq; idem Aq se-
cundum

cundum AB *b* metietur, atqui A q. AB :: A. B. *b* 7. 8.
 c ergo etiam A metitur B. Q. E. D. c 20 def. 7.

2. Hyp. A metitur B. c ergo tam Aq ipsum
 AB, c quam AB ipsum Bq metitur; d & proinde d 11. ex. 7.
 Aq metitur Bq. Q. E. D.

P R O P. XV.

A, 2. B, 6. Si cubus nu.
 Ac, 8. AqB, 24. ABq, 72. Bc, 216. *mērus Ac cu-*
bum numerum
 Bc metiatur, & latus unius (A) metietur latus
 alterius (B:) Et si latus A unius cubi Ac latus B
 alterius Bc metiatur, & cubus Ac cubum Bc
 metietur.

1. Hyp. Nam Ac, AqB, ABq, Bc a sunt $\frac{2}{3}$. a 2. & 12. 8.
 ergo Ac, *b* metiens extremum Bc, c etiam se- *b* hyp.
 cundum AqB metietur. atqui Ac. AqB :: A. B. c 7. 8.
 d ergo etiam A metietur B. Q. E. D.

2. Hyp. A metitur B; d ergo Ac metitur AqB, d 20 def 7.
 isque ABq, & hic Bc; c ergo Ac metietur Bc. c 11. ex. 7.
 Q. E. D.

P R O P. XVI.

A, 4. B, 9. Si quadratus numerus Aq
 Aq, 16. Bq, 81. *quadratum numerum Bq non*
metiatur, neque A latus unius
alterius latus B metietur: & si A latus unius qua-
drati Aq non metiatur B latus alterius Bq, neque
quadratus Aq quadratum Bq metietur.

1. Hyp. Nam si affirmes A metiri B, a etiam a 14. 8.
 Aq ipsum Bq metietur, contra hyp.

2. Hyp. Vis Aq metiri Bq; a ergo A ipsum
 B metietur, contra hyp.

P R O P. XVII.

A, 2. B, 3. Si cubus numerus Ac cu-
 Ac, 8. Bc, 27. bum numerum Bc non metia-
 tur, neque A latus unius latus
 B alterius metietur. Et si latus A unius cubi Ac
 latus B alterius Bc non metiatur, neque cubus Ac
 cubum Bc metietur.

a 15. 8.

1. Hyp. Dic A metiri B; a ergo Ac metietur
 Bc. contra Hypoth.

2. Hyp. Dic Ac metiri Bc; a ergo A ipsum B
 metietur. contra Hyp.

P R O P. XVIII.

C, 6. D, 2. Duorum similium pla-
 CD, 12. norum numerorum CD,

E, 9. F, 3. DE, 18. EF, unus medius pro-
 EF, 27. portionalis est numerus
 DE: & planus CD

ad planum EF duplicatam habet lateris C ad latus
 homologum E rationem.

*21. def. 7. Quoniam * ex hyp. C. D :: E. F; permu-
 a 17. 7. tando erit C. E :: D. F. atqui C. E a :: CD.

b 11. 5. DE; a & D. F :: DE. EF. b ergo CD. DE ::
 DE. EF. Q. E. D.

c 20. def. 5. c Ergo ratio CD ad EF duplicata est rationis
 CD ad DE; hoc est rationis C ad E, vel D
 ad F.

Coroll.

Hinc perspicuum est, inter duos similes pla-
 nos cadere unum medium proportionalem; in
 ratione laterum homologorum.

PROP. XIX.

CDE, 30. DEF, 60 FGE, 120. FGH, 240.

CD, 6. DF, 12. FG, 24.

C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

Duorum similium solidorum CDE, FGH, duo medii proportionales sunt numeri DFE, FGE. Et solidus CDE ad solidum FGH triplicatam rationem habet lateris homologi C ad latus homologum F.

Quoniam ex * hyp. $C. D :: F. G$; & $D. E :: G. H$; erit a permutando $C. F :: D. G$ a 13. 7. $E. H$. atque $CD. DF :: C. F$; & $DF. FG :: b 17. 7. D. G$. c quare $CD. DF :: DF. FG :: E. H$. c 11. 5. d ergo $CDE. DFE :: DFE. FGE :: E. H$. d 17. 7. $FGE. FGH$. ergo inter CDE, FGH cadunt duo medii proportionales, DFE, FGE. Q. E. D. e Liqueat igitur rationem CDE ad FGH triplicatam esse rationis CDE ad DFE, vel C ad F. Q. E. D. e 10. def. 1.

Coroll.

Hinc, inter duos similes solidos cadunt duo medii proportionales, in ratione laterum homologorum.

PROP. XX.

A, 12. C, 18. B, 27.

D, 2. E, 3. F, 6. G, 9.

Si inter duos numeros A, B, unus medius proportionalis cadat numerus C, similes plani erunt illi numeri, A, B.

a Accipe D, & E minimos in ratione A ad a 35. 7.

C, vel C ad B. b ergo D æque meretur A, ac E b 21. 7.

ipsum C, puta per eundem F. b item D æque me-

ritur C ac E ipsum B, puta per eundem G. c er- c 9. ax. 7.

go $DF = A$, & $EG = B$. d quare A, & B plani d 16. def. 7,

sunt numeri. Quia vero $EF = C = DG$;

e erit $D. E :: F. G$, & vicissim $D. F :: E. G$. e 19. 7.

f ergo plani numeri A, & B etiam similes sunt. f 21. def. 7.

Q. E. D.

PROP.

PROP. XXI.

A 16. C, 24. D, 36. B, 54.

E, 4. F, 6. G, 9.

H, 2. P, 2. M, 4. K, 3. L, 3. N, 6.

*Si inter
duos nume-
ros A, B duo
medii pro-
portionales cadant numeri C, D, similes solidi erunt
illi numeri, A, B.*

a 2. 8. a Sume E, F, G minimos :: in ratione A ad

b 20. 8. C. b ergo E, & G sunt numeri plani similes.

c 21. def. 7 hujus latera sint H & P; illius K & L: c ergo H.

d cor 18. 8. K :: P. L :: d E. F. Atque B, F, G ipsos A, C,

e 21. 7. D e æque metiuntur, puta per eundem M;

idemque ipsos, C, D, B æque metiuntur, puta

f 9. ax. 7. per eundem N f ergo A = EM = HPM, f &

g 17. def. 7. B = GN = KLN; g quare A & B solidi sunt

numeri. Quoniam vero C f = FM; & D f =

h 17. 7. FN, erit M. N b :: FM. FN k :: C D l :: E.

k 7. 5. F :: H. K :: P. L. m ergo A, & B sunt numeri

l constr. solidi similes. Q. E. D.

m 21. def. 7

L E M M A.

AE, BF, CG, DH, *Si proportionales*

A, B, C, D, *numeri A, B, C, D*

E, F, G, H. *proportionales nu-*
meros AE, BF, CG,

DH metiantur per numeros E, F, G, H, erunt ei

[*E, F, G, H*] *proportionales.*

a 19. 7. Nam ob AEDH a = BFCG, a & AD = BC,

b 1. ax. 7. b erit AEDH = BFCG, & hoc est EH = FG.

c 9. ax. 7.

a ergo E. F :: G. H. Q. E. D.

Coroll.

a 15. def. 7. Hinc $\frac{Bq}{Aq} = \frac{B}{A}$ in $\frac{B}{A}$. d Nam I. B :: B. Bq. d &

e lcm. præc. I. A :: A. Aq. e ergo I. $\frac{B}{A} :: \frac{B}{A} \cdot \frac{Bq}{Aq}$. d ergo $\frac{Bq}{Aq}$
 $\frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$. Similiter $\frac{B}{Ac}$ in $\frac{Bq}{Ac} = \frac{BC}{Acc}$. & sic de

reliquis.

P R O P.

P R O P. XXII.

Aq, B, C. Si tres numeri, Aq, B, C
4, 8, 16. deinceps sint proportionales,
primus autem Aq fit quadratus;
& tertius C quadratus erit.

Nam ob $AqC = Bq$, b erit $C = \frac{Bq}{Aq} = Q. \frac{B}{A}$ a 20. 7.
b 7. ax. 7.

Liquet vero $\frac{B}{A}$ esse numerum, d ob $\frac{Bq}{Aq}$, vel C au.
merum. ergo si tres, &c. c cor. lem.
præc. d hyp. & 14. 8.

P R O P. XXIII.

Ac, B, C, D. Si quatuor numeri Ac,
8, 12, 18. 27. B, C, D deinceps sint pro-
portionales, primus autem
Ac fit cubus; & quartus D cubus erit.

Nam quia $AcD = BC$, b erit $D = \frac{BC}{Ac}$ a 19. 7.
b 7. ax. 7.

$\frac{B}{Ac} \times C$; hoc est (ob $AcC = d Bq$, & b proinde
c cor. lem. præc. d 20. 7.

$C = \frac{Bq}{Ac}$) $D = \frac{B}{Ac} \times \frac{Bq}{Ac} = \frac{Bc}{Acc} = C: \frac{B}{Aq}$ e 15. 8.

e liquet vero ipsum $\frac{B}{Aq}$ esse numerum, quia $\frac{Bc}{Acc}$
vel D numerus ponitur; ergo si quatuor nume-
ri, &c.

P R O P. XXIV.

A, 16. 24. B, 36. Si duo numeri A, B ra-
C, 4. 6. D, 9. tionem habeant inter se,
quam quadratus numerus
C ad quadratum numerum D, primus autem A fit
quadratus; & secundus B quadratus erit.

Inter C, & D numeros quadratos, * adeoque * 8. 8.

Inter A, & B eandem rationem habentes, a cadit a 11. 8.
unus

b hyp. unus medius proportionalis. Ergo *b* cum *A* quadratus sit, *c* etiam *B* quadratus erit. Q.E.D.

Coroll.

1. Hinc si fuerint duo numeri similes *AB*, *CD* (*A. B :: C. D*) primus autem *AB* sit quadratus, etiam secundus *CD* quadratus erit.

* 11. & 18. * Nam *AB. CD :: Aq. Cq.*

8. 2. Liquet ex his, proportionem cuiusvis numeri quadrati ad quemlibet non quadratum, exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. unde non erit, *Q. Q :: 1. 2. nec 1. 5. :: Q. Q. &c.*

P R O P. XXV.

C, 64. 96, 144. D, 216. Si duo numeri A, 8. 12. 18. B, 27. A, B rationem inter se habeant, quam cubus numerus C ad cubum numerum D, primus autem A sit cubus, & secundus B cubus erit.

a 12. 8. a Inter *C*, & *D* cubos, *b* adeoque inter *A* & *B* eandem rationem habentes, cadunt duo medii proportionales. ergo propter *A c* cubum, *d* etiam *B* cubus erit. Q. E. D.

Coroll.

1. Hinc etiam si fuerint duo numeri *ABC*, *DEF* (*A. B :: D. E. & B. C :: E. F.*) primus autem *ABC* cubus fuerit, etiam secundus *DEF* cubus erit.

* 12. & 19. * Nam *ABC. DEF :: Ac = Dc.*

8. 2. Patet etiam ex his, proportionem cuiusvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum non posse reperiri in duobus numeris cubis.

P R O P. XXVI.

A, 20. C, 30. B, 45. Similes plani numeri D, 4. E, 6. F, 9. A, B rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum

a 18. 8. Inter *A*, & *B* cadit unus medius proportionalis

nalis C. *b* sume tres D, E, F minimos $\therefore$ in ra² b 2. 8.
 tione A ad C: *c* Extremi D, F quadrati erunt: *c* cor. 2. 8.
 atque ex æquali A. B *d* :: D. F. ergo A. B :: *d* 11. 7.
 Q. Q. Q. E. D.

P R O P. XXVII.

A, 16. C, 24. D, 36. B, 54. *Similes solidi*
 E, 8. F, 12. G, 18. H, 27. *numeri A, B, ra-*
tionem habent
inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

a Inter A, & B cadunt duo medii proportio- a 19. 8.
 nales, puta C & D: *b* sume quatuor E, F, G, H b 2. 8.
 minimos $\therefore$ in ratione A ad C. *b* Extremi E,
 H cubi sunt. At A, B *c* :: E. H :: C. C. Q. E. D. c 14. 7.

Schol.

1. Ex his infertur, nullos numeros habentes *Vide Cla-*
 proportionem superparticularem, vel superbi- *um,*
 partientem, vel duplam, aut aliam quamcunque
 multiplam non denominatam à numero qua-
 drato, esse similes planos.

2. Nec duo quivis primi numeri, neque duo
 quicunque inter se primi, qui quadrati non sint,
 similes esse possunt.

M

L I B.

LIB. IX.

PROP. I.

A, 6. B, 54.

Aq, 36. 108. AB, 324.



Si duo similes plani numeri A, B multiplicantes se mutuo faciant quendam AB, productus AB quadratus erit.

a 17. 7.

b 18. 8.

c 8. 8.

d 22. 8.

Nam $A.B.4 :: Aq. AB$; cum igitur inter A, & B b cadat unus medius proportionalis, c etiam inter Aq, & AB cadet unus med. port. ergo cum primus Aq sit quadratus, d etiam tertius AB quadratus erit. Q. E. D.

x 19. 7.

y 1. 2x. 7.

Vel sic. Sint ab, cd similes plani, nempe $a. b :: c. d. x$ ergo $ad = bc$. quare $abcd$, vel $adbc y = adad = Q : ad$.

PROP. II.

Si duo numeri A, B se mutuo multiplicantes faciant AB quadratum, similes plani erunt, A, B.

A, 6.

B, 54.

Aq, 36.

AB, 324.

a 17. 7.

b 11. 8.

c 8. 8.

d 20. 8.

Nam $A. B.4 :: Aq. AB$; quare cum inter Aq, AB b cadat unus medius proportionalis, c etiam unus inter A, & B medius cadet. d ergo A, & B sunt similes plani. Q. E. D.

PROP. III.

A, 2. Ac, 8. Acc, 64.

Si cubus numerus Ac seipsum multiplicans procreet aliquem Acc, productus Acc cubus erit.

a 15. def. 7.

b 17. 7.

c 8. 8.

Nam $1. A.4 :: A. Aq. b :: Aq. Ac$. ergo inter 1, & Ac cadunt duo medii proportionales. Sed $1. Ac.4 :: Ac. Acc.$ c ergo inter Ac, & Acc cadunt etiam duo

duo medii proportionales. Proinde cum Ac sit
cubus, d erit Acc cubus. Q. E. D. d 23. 8.

Vel sic; aa (Ac) in se ductus facit aaaaaa,
(Acc;) hic cubus est, cujus latus aa.

P R O P. IV.

Ac, 8. Bc, 27. Si cubus numerus Ac
Acc, 64. AcBc, 216. cubum numerum Bc mul-
tiplicans, faciat aliquem
AcBc, factus AcBc cubus erit.

Nam Ac. Bc a :: Acc. AcBc. sed inter Ac a 17. 7d
& bc b cadunt duo medii proportionales; ergo b 12. 8;
inter Acc, & Ac Bc totidem cadunt. itaque cum c 8. 8,
Acc sit cubus, d erit AcBc etiam cubus. Q. E. D. d 23. 8;

Vel sic. AcBc = aaabbb (ababab) = C: ab.

P R O P. V.

Ac, 8. B, 27. Si cubus numerus Ac
Acc, 64. AcB, 216. numerum quendam B mul-
tiplicans, faciat cubum
AcB; & multiplicatus B cubus erit.

Nam Acc. AcB a :: Ac. B. Sed inter Acc, & a 17. 7d
AcB b cadunt duo medii proportionales. ergo b 12. 8.
totidem cadent inter Ac, & B. quare cum Acc c 8. 8.
bus sit, d etiam B cubus erit. Q. E. D. d 23. 8;

P R O P. VI.

A, 8. Aq, 64. Ac, 512. Si numerus A se-
ipsum multiplicans fa-
ciat Aq cubum; & ipse A cubus erit.

Nam quia Aq a cubus, & AqA (Ac) b cu- a hyp.
bus, c erit A cubus. Q. E. D. b 19. def. 7.

c 5. 9.

P R O P. VII.

A, 6. B, 11. AB, 66. Si compositus numerus
D, 2. E, 3. A numerum quempiam B
multiplicans, quempiam
faciat AB, factus AB solidus erit.

M 2

Quoniam

a 13. def. 7. Quoniam A compositus est, a metitur cum a.
 b 9. ax. 7. liquis D, puta per E. b ergo $A = DE$; c quare
 c 17. def. 7. $DEB = AB$ solidus est. Q. E. D.

P R O P. VIII.

1. a, 3. a^2 , 9. a^3 , 27. a^4 , 81. a^5 , 243. a^6 , 729.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint (1, a, a^2 , a^3 , a^4 , &c.) tertius quidem ab unitate a^2 quadratus est, & unum intermittentes omnes (a^4 , a6, a8, &c.) quartus autem a^3 est cubus; & duos intermittentes omnes (a6, a9, &c.) septimus vero a6, cubus simul & quadratus; & quinque intermittentes omnes (a^{12} , a18, &c.)

Nam 1. $a^2 = Q. a$. & $a^4 = aaaa = Q. aa$.
 & a6 = aaaaaa = Q. aaa, &c.

2. $a^3 = aaa = C. a$. & a6 = aaaaaa = C. aa. & aaaaaaaa = C. aaa, &c.

3. a6 = aaaaaa = C. aa = Q. aaa, ergo, &c.

a byp.

b 20. 7.

c 22. 8.

d 23. 8.

Vel juxta Euclidem; quia 1. a a :: a. a^2 , b erit $a^2 = Q. a$; a. ergo cum a^2 , a^3 , a^4 sint :: c erit tertius a etiam quadratus, pariterq; a6, a8, &c. Item quia 1. a a :: a². a^3 , erit $a^3 b = a^2$ in a = C: a d ergo quartus ab a^3 , nempe a6, etiam cubus erit, &c. ergo a6 cubus simul & quadratus existit, &c.

P R O P. IX.

1. a, 4. a^2 , 16. a^3 , 64. a^4 , 256, &c.

1. a, 8. a^2 , 64. a^3 , 512. a^4 , 4096.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint (1, a, a^2 , a^3 , &c.) qui vero (a) post unitatem sit quadratus; & reliqui omnes, a^2 , a^3 , a^4 , &c. quadrati erunt. At si a, qui post unitatem, sit cubus, & reliqui omnes a^2 , a^3 , a^4 , &c. cubi erunt.

a 22. 8.

1. Hyp. Nam a^2 , a^4 , a6, &c. quadrati sunt ex præc. Item quia a ponitur quadratus, a erit tertius a^3 quadratus, pariterque a^5 , a7, &c. ergo omnes.

2. Hyp.

2. Hyp. a cubus ponitur, b ergo a^4 , 27. a 10 b 23. 8.
cubi sunt: atqui ex præced. a^3 , 26, 29, &c. cubi
sunt. denique quia 1. $a :: a.aa$, c erit $a^2 = Q$. c 20. 7.
a. cubus autem in se d facit cubum; ergo a^2 cu- d 3. 9.
bus est, & e proinde ab eo quartus a^5 , pariterque c 23. 8.
 a^8 , a^{11} , &c. cubi sunt, ergo omnes. Q. E. D.

Clarius forsitan sic; Sit quadrati a latus b. er-
go series a, a^2 , a^3 , a^4 , &c. aliter exprimeretur sic,
bb, b^4 , b^6 , b^8 , &c. liquet vero hos omnes qua-
dratos esse; & sic etiam exprimi posse; Q: b, Q:
bb, Q: bbb, Q: bbbb, &c.

Eodem modo, si b latus fuerit cubi a, series
ita nominari potest; b^3 , b^6 , b^9 , b^{12} , &c. vel
C: b, C: b^2 , C: b^3 , C: b^4 , &c.

P R O P. X.

1, 2, a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , 26. Si ab unitate quot-
I, 2, 4, 8, 16, 32, 64. cunque numeri deinceps
proportionales fuerint
(1, 2, a^2 , a^3 , &c.) qui vero post unitatem (a) non
sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præ-
ter a^2 tertium ab unitate, & unum intermittentes
omnes (24, 26, 28.) At si a, qui post unita-
tem, non sit cubus, neque ullus alius cubus erit præ-
ter a^3 quartum ab unitate, & duos intermittentes
omnes, 26, 29, 212, &c.

1. Hyp. Nam si fieri potest, sit a^4 quadratus
numerus, quoniam igitur $a.a^2$. $a :: a^4$. a^5 , atq;
inverse a^5 . $a^4 :: a^2$. a; sintque a^5 , & a^4 b qua-
drati, proutque a quadratus, c erit a etiam
quadratus, contra Hyp.

2. Hyp. Si fieri potest, sit a^4 cubus, quoniam
igitur d ex æquo a^4 . 26 :: a. a^3 , atque in-
verse 26. $a^4 :: a^5$. a; b sintque 26, & a^4 cubi,
& primus a^3 cubus; e etiam a cubus erit, con-
tra Hypoth.

a hyp.
b suppos. &
8. 9.
c 24. 8.

d 14. 7.

e 25. 8.

P R O P. XI.

1, a, a², a³, a⁴, a⁵, a⁶

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

Si ab u-

nitate quot-

cunq; numeri

deinceps proportionales fuerint (1, a, a², a³, &c.)
 minor maiorem metitur per aliquem eorum qui in
 proportionalibus sunt numeris.

a 5 ax. 7. &
 20. def. 7.

Quoniam 1. a :: a. aa, a erit $\frac{aa}{a} = a = \frac{aaa}{aa}$.

b 14. 7.

item quia 1. aa b :: a. aaa. a erit $\frac{aaa}{a} = aa =$

$\frac{a^4}{aa} = \frac{a^5}{a^3}$ &c. denique quia 1. a³ b :: a. a⁴,

a erit $\frac{a^4}{a} = a^3 = \frac{a^6}{a^3}$ &c.

Coroll.

Hinc, si numerus qui metitur aliquem ex pro-
 portionalibus, non sit unus proportionalium,
 neque numerus per quem metitur, erit aliquis ex
 proportionalibus.

P R O P. XII.

1, a, a², a³, a⁴,

1, 6, 36, 216, 1296.

B, 3.

Si ab unitate quocunq;

numeri deinceps proportio-

nales fuerint (1, a, a²,a³, a⁴,) quicunque pri-

morum numerorum B ultimum a⁴ metiuntur, idem

(B) & eum (a) qui unitati proximus est, metientur.

a 31. 7.

b 27. 7.

c 25. 7.

Dic B non metiri a, a ergo B ad a primus est;

b ergo B ad a² primus est; & c proinde ad a⁴

quem metiri ponitur. Q. E. A.

Coroll.

1. Itaque omnis numerus primus ultimum
 metiens, metitur quoque omnes alios ultimum
 præcedentes.

2. Si

2. Si aliquis numerus non metiens proximum unitati, metiatur ultimum, erit numerus compositus.

3. Si proximus unitati sit primus numerus, nullus alius primus numerus ultimum metietur.

P R O P. XIII.

$1, a, a^2, a^3, a^4.$

Si ab unitate

$1, 5, 25, 125, 625.$

quotcunque numeri

$H - - G - - F - - E - -$

deinceps proportio-

nales fuerint ($a,$

$a^2, a^3, \&c.$) qui vero post unitatem (a) primus sit; maximum nullus alius metietur, prater eos qui sunt in numeris proportionabilibus.

Si fieri potest, alius quispiam E metiatur a^4 , nempe per F ; a erit F alius extra a, a^2, a^3 . a cor. 12. 9. Quia vero E metiens a^4 non metitur a , b erit b 2 cor. 12. E numerus compositus; c ergo eum aliquis primus metitur, d qui proinde ipsum a^4 metitur; c 33. 7. c ideoque alius non est, quam a . ergo a metitur E . Eodem modo ostendetur F compositus e 3 cor. 12. numerus, metiens a^4 , adeoque a ipsum F metiri. 9. itaque quum $EF f = a^4 = a$ in a^3 , g erit a $E :: F$. f 9. ax. 7. a^3 . ergo cum a metiatur E , b æque F metietur g 19. 7. a^3 , puta per eundem G . k Nec G erit a , vel a^2 . h 20. def. 7. ergo, ut prius, G est numerus compositus, & a k cor. 11. 9. eum metitur. quum igitur $FG f = a^3 = a^2$ in a , g erit a $F :: G$. a^2 ; & proinde, quia A metitur F , b æque G metietur a^2 , scilicet per eundem H ; k qui non est a . ergo quum $GH = a^2 = aa$, l 20. 7. l erit H . $a :: a$. G . ergo quia a metitur G (ut m 20. def. 7. prius) metiam H metietur a , numerum primum. $Q. F. N.$

P R O P. XIV.

A, 30.

B, 2. C, 3. D, 5.

E = F =

*Si minimum numerum A
primi numeri B, C, D me-
tiantur; nullus alius nume-
rus primus E illum metie-*

tur, prater eos, qui à principio metiebantur.

a 9. ax. 7. Si fieri potest, sit $\frac{A}{E} = F$. a Ergo $A = EF$.

b 32. 7. b Ergo singuli primi numeri B, C, D ipsorum
E, F unum metiuntur; non E, qui primus po-
nitur; ergo F, minorem scilicet ipso A; contra
Hypoth.

P R O P. XV.

A, 9. B, 12. C, 16.

D, 3. E, 4.

*Si tres numeri A, B, C
deinceps proportionales, fue-
rint minimi omnium ean-*

*dem cum ipsis rationem habentium; duo quilibet
compositi, ad reliquum primi erunt.*

a 35. 7. a Sume D, & E minimos in ratione A ad B.
b 2. 8. b ergo $A = Dq$; b & $C = Eq$; b & $B = DE$. Quia
c 24. 7. vero D ad E c primus est, d erit D + E primus ad
d 30. 7. singulos D, & E. * ergo D in D + E c = $Dq +$
e 26. 7. DE (f A + B) ad E primus est, g ideoque ad C
e 3. 2. vel Eq. Q. E. D. Pari pacto DE + Eq (B + C)
f prius. ad D primus est, & proinde ad A = Dq. Q. E. D.
g 27. 7. Denique quia B ad D + E h primus est; is ad
h 26. 7. hujus quadratum k $Dq + 2 DE + Eq$ (A + 2
k 4. 2. B + C) primus erit. l quare idem B ad A + B + C,
l 39. 7. adeoque ad A + C primus erit, Q. E. D.

PROP. XVI.

A, 3. B, 5. C --- Si duo numeri A, B primi inter se fuerint; non erit ut primus A ad secundum B, ita secundus B ad alium quempiam C.

Dic A. B :: B. C. ergo quum A & B in sua ratione a minimi sint, A b metietur B æque ac B a 23. 7. ipsum C; sed A c seipsum etiam metitur; ergo b 21. 7. A & B non sunt primi inter se, contra Hypoth. c 6. ex 7.

PROP. XVII.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ---

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, extremi autem ipsorum A, D primi inter se sint; non erit ut primus A ad secundum B, ita ultimus D ad alium quempiam E.

Dic A. B :: D. E. ergo vicissim A. D :: B. E. ergo quum A & D in sua ratione a minimi sint, a 23. 7. b metietur A ipsum B; c quare B ipsum C, & C b 21. 7. sequentem D, d adeoq; A eundem D metietur. c 20. def. 9. Ergo A & D non sunt primi inter se, contra d 11. ex 7. Hypoth.

PROP. XVIII.

A, 4. B, 6. C, 9. Duobus numeris datis A, B, Bq, 36. considerare an possit ipsis tertius proportionalis C inveniri.

Si A metiatur Bq per aliquem C, a erit AC a 9. ex 7. = Bq. unde b liquet esse A. B :: B. C. Q. E. F. b per 20. 7.

A, 6. B, 4. Bq, 16. Sin A non metiatur Bq, non erit aliquis tertius proportionalis.

Nam dic A. B :: B. C. a ergo AC = Bq. c proinde c 7. ex 7. Bq
A = C. Scilicet A metitur Bq, contra Hypoth.

PROP.

P R O P. XIX.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. Tribus nume-
 BC, 216. ri datis A, B, C,

considerare an
 possit ipsis quartus proportionalis D inveniri.

a 9. ax 7. Si A metiatur BC per aliquem D, a ergo
 b ax. 19. 7. $AD = BC$; b constat igitur esse A. B :: C. D.
 Q. E. F.

Sin A non metiatur BC, non datur quartus
 proportionalis; quod ostendetur, prout in præ-
 cedenti.

P R O P. XX.

Primi numeri plures sicut
 A, 2. B, 3. C, 5. omni proposita multitudine
 D, 30. G. --- ne primorum numerorum
 A, B, C.

a 38. 7. a Sit D minimus, quem A, B, C metiuntur.
 b 38. 7. si D+1 primus sit, res patet; si compositus,
 c suppos. b ergo aliquis primus, puta G, metitur D+1,
 d constr. qui non est aliquis trium A, B, C; nam si ita,
 e 12. ax 7. quum is c totum D+1, & d ablatum D metiatur,
 e idem reliquam unitatem metietur. Q. E. A.
 Ergo propositorum primorum numerorum mul-
 titudo aucta est per D+1; vel saltem per G.

P R O P. XXI.

A 1 5 3 3 2 2
 A.... E.... B... F... C... G... D 20.
 Si pares numeri quocunque AB, BC, CD com-
 ponantur, totus AD par erit.

a 6. def. 7. a Sume $EB = \frac{1}{2} AB$ & $FC = \frac{1}{2} BC$, & $GD = \frac{1}{2}$
 b 12. 7. CD . b liquet $EB + FC + GD = \frac{1}{2} AD$. Ergo
 c 6. def. 7. AD est par numerus. Q. E. D.

PROP. XXII.

$\overset{I}{A} \dots \overset{I}{F} \cdot \overset{I}{B} \dots \overset{I}{G} \cdot \overset{I}{C} \dots \overset{I}{H} \cdot \overset{I}{D} \dots \overset{I}{L} \cdot \overset{I}{E} 21.$

$\overset{9}{A} \dots \overset{7}{B} \dots \overset{5}{C} \dots \overset{3}{D} \dots$
*Si impares numeri quocunque AB, BC, CD, DE
 componentur, multitudo autem ipsorum sit par, totus
 AE par erit.*

Detracta unitate ex singulis imparibus, a manebunt AE, BG, CH, DL numeri pares, & b proinde compositus ex ipsis par erit; adde his b 21. 9.
 e parem numerum conflatum ex residuis unitatibus, c totus idcirco AE par erit. Q. E. D. c hyp. d 21. 7.

PROP. XXIII.

$\overset{7}{A} \dots \overset{5}{B} \dots \overset{3}{C} \dots \overset{1}{D} 14.$ *Si impares numeri quocunque
 AB, BC, CD
 componentur, mul-*

titudo autem ipsorum sit impar; & totus AD impar erit.

Nam dempto CD uno imparium, reliquorum aggregatus AC a est par numerus. huic adde a 22. 9.
 CD—1; b totus AE est etiam par; quare reli- b 21. 9.
 tata unitate totus AD c impar erit. Q. E. D. c 7. def. 7.

PROP. XXIV.

$\overset{4}{A} \dots \overset{6}{B} \dots \overset{8}{C} \dots \overset{10}{D} 10.$ *Si à pari numero AC
 par AB detrahatur, &
 reliqua BC par erit.*

Nam si BD (BC—1) impar fuerit, a erit BC (BD+1) par. Q. E. D. a 7. def. 7.
 Sin BD parem dicas, propter AB b parem, c erit b hyp.
 AD par; a ideoque AC (AD+1) impar, contra Hypoth. ergo BC est par. Q. E. D. c 21. 9.

P R O P. XXV.

$\begin{matrix} 6 & 1 & 3 \\ A \dots D & C \dots B \end{matrix}$ 10. Si à pari numero AB
 7 impar AC detrabatur,
 & reliquus CB impar
 erit.

a 7. def. 7. Nam AC—1 (AD) a est par. b ergo DB
 b 24. 9. est par. c ergo CB (DB—1) est impar. Q.E.D.
 c 7. def. 7. P R O P. XXVI.

$\begin{matrix} 4 & 6 & 1 \\ A \dots C \dots D & B \end{matrix}$ 11. Si ab impari numero
 7 AB impar CB detra-
 batur, reliquus AC par
 erit.

a 7. def. 7. Nam AB—1 (AD) & CB—1 (CD) a sunt
 b 24. 9. pares. b ergo AD—CD (AC) est par. Q.E.D.

P R O P. XXVII.

$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ A & D \dots C \dots B \end{matrix}$ Si ab impari numero
 5 AB par detrabatur. CB,
 reliquus AC impar erit.
 Nam AB—1 (DB)

a 7. def. 7. a est par ; & CB ponitur par. b ergo reliquus
 b 24. 9. CD par est. c ergo CD+1 (CA) est impar.
 c 7. def. 7. Q.E.D.

P R O P. XXVIII.

A, 3. Si impar numerus A parem nume-
 B, 4. rum B multiplicans fecerit aliquem
 AB, 11. AB, factus AB par erit.

a hyp & 15. Nam AB a componitur ex im-
 def. 7. pari A toties accepto, quoties unitas continetur
 b 21. 9. in B pari. b ergo AB est par numerus.

Schol.

Eodem modo, si A sit numerus par, erit AB
 par.

PROP. XXIX.

A, 3. Si impar numerus A, imparem nu-
 B, 5. merum B multiplicans fecerit aliquem
 AB, 15. AB, factus AB impar erit.

Nam AB a componitur ex B im. a 15. def. 7.
 pari numero toties accepto, quoties unitas inclu-
 ditur in A etiam impari. b ergo AB est impar. b 23. 9.
 Q. E. D.

Scholium.

B, 12 (C, 4. 1. Numerus A impar numerum
 A, 3. B parem metiens, per numerum
 parem C eum metitur.

Nam si C impar dicatur, quoniam a B = AC, a 9. ax. 7.
 b erit B impar, contra Hypoth. b 29. 9.

B, 15 (C, 5. 2. Numerus A impar nume-
 A, 3. rum B imparem metiens, per nu-
 merum C imparem eum metitur.

Nam si C dicatur par; a erit AC, vel B par, a 28. 9.
 contra Hypoth.

B, 15 (C, 5. 3. Omnis numerus (A & C)
 A, 3. metiens imparem numerum B, est
 impar.

Nam si utervis A, vel C dicatur par, a erit a 28. 9.
 B numerus par, contra Hypoth.

PROP. XXX.

B, 24 (C, 8. D, 12 E, 40
 A, 3 A, 3

Si impar numerus A parem numerum B metia- a hyp.
 tur, & illius dimidium D metietur. b 1. Schol.

a Sit $\frac{B}{A} = C$. b ergo C est numerus par. 29. 9.

Sit igitur $E = \frac{1}{2}C$, erit $B = CA = 2EA = 2D$. c 9. ax. 7.
 f ergo $EA = D$; & g proinde $\frac{D}{A} = E$. Q. E. D. d 1. 2.
 e hyp. f 7. ax. 1.
 g 7. ax. 7.

PROP.

P R O P. XXXI.

A, 5. B, 8. C, 16. D --- Si impar numerus A ad aliquem numerum B primus sit, & ad illius duplum C primus erit.

a 3 schol. Si fieri potest, aliquis D metiatur A, & C.
 29. 9. a ergo D metiens imparem A impar erit, b ideo-
 b 30. 9. que ipsum B paris C semissem metietur. ergo
 A, & B non sunt primi inter se, contra Hypoth.

Coroll.

Sequitur hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum progressionis duplæ primus est, primum quoque esse ad omnes numeros illius progressionis.

P R O P. XXXII.

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. Numerorum
 A, B, C, D, & c.
 à binario duplorum unusquisque pariter par est tantum.

a 6. def. 7. Constat omnes A, B, C, D a pares esse; atque
 b 20. def. 7. b ÷ nimirum in ratione dupla, & c proinde
 c 11. 9. quemque minorem metiri maiorem per aliquem
 d 8. def. 7. ex illis. d Omnes igitur B, C, D sunt pariter pares.
 e 13. 9. Sed quoniam A primus est, e nullus extra
 eos eorum aliquem metietur. Ergo pariter pares
 sunt tantum. Q. E. D.

P R O P. XXXIII.

A, 30. B, 15. Si numerus A dimidium B
 D --- E --- habeat imparem, A pariter impar est tantum.

a hyp.

b 9 def. 7. Quoniam impar numerus B a metitur A per 2
 c 8. def. 7. parem, b est B pariter impar. Dic etiam pariter
 d 9. ax. 7. parem. c ergo eum par aliquis D per parem E
 e 19. 7. metitur. unde $2 B d = A d = DE$. e quare 2.
 E ::

E :: D. B. ergo ut $\frac{2}{1}$ metitur parem E, g sic D f 6. def. 7.
par imparem B metitur. Q. F. N. g 20. def. 7.

PROP. XXXIV.

A, 24. Si par numerus A, neque à binario
duplus sit, neque dimidium habeat impa-
rem; pariter par est, & pariter impar.

Liquet A esse pariter par, quia dimidium
imparem non habet. Quia vero si A bifarietur,
& rursus ejus dimidium, & hoc semper fiat, tan-
dem incidemus in aliquem $\frac{2}{1}$ imparem (quia a 7. def. 7.
non in binarium, quoniam A à binario duplus
non ponitur) is metietur A per parem numerum
(nam b alias ipse A impar esset, contra Hypoth.) b 2 fch, 19.
ergo A est etiam pariter impar. Q. E. D. 9.

PROP. XXXV.

A 8.

4 8

B ..., F G 12.

C 18.

9 6 4 8

D H L ... K N 27.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportiona-
les A, BG, C, DN, detrahantur autem FG à se-
cundo, & KN ab ultimo, æquales ipsi primo A; erit
ut secundi excessus BF ad primum A, ita ultimi
excessus DK ad omnes A, BG, C ipsum anteceden-
tes.

Ex DN deme NL = BG, & NH = C.

Quoniam DN, C. (HN) a :: HN. BG. a hyp.
(LN) a :: LN. A. (KN) b erit dividendo b 17. 9.
ubique, DH. HN :: HL. LN :: LK. KN. c quare c 12. 5.
DK. C + BG + A :: LK. (d BF.) KN. (A.) Q. E. D. d 3. an. F.

Coroll.

Hinc e componendo, DN + BG + C. A + c 18. 5.
BG + C :: BG. A.

P R O P. XXXVI.

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G, 62. H, 124. L, 248. F, 496.

M, 31.

N, 465.

P ---

Q ---

Si ab unitate quoruncunque numeri 1, A, B, C, D, deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus E fiat primus, & totus hic E in ultimum D multiplicatus faciat aliquem F; factus F erit perfectus.

Sume totidem, E, G, H, L etiam in proporti-

- a 14. 7. one dupla continue; ergo a ex æquo A. D ::
b 19. 7. E. L. b ergo $AL = DE$ c = F. d ergo $L = \frac{F}{2}$
c hyp. quare E, G, H, L, F sunt :: in ratione dupla.
d 7. ax. 7. Sit $G - E = M$, & $F - E = N$. e ideo M. E ::
e 35. 9. N $E + G + H + L$. f at $M = E$. g ergo $N =$
f 3. ax. 1. $E + G + H + L$. h ergo $F = 1 + A + B +$
g 14. 5. $C + D + E + G + H + L = E + N$.
h 2. ax. 1. Quinetiam quia D k metitur DE (F,) l etiam
k 7. ax. 7. singuli 1, A, B, C m metientes D, m nec non E,
l 11. ax. 7. G, H, L metiuntur F. Porro nullus alius eun-
m 11. 9. dem F metitur. Nam si aliquis, sit P, qui metia-
n 9. ax. 7. tur F per Q. æ ergo $PQ = F = DE$. o ergo
o 19. 7. E. Q :: P. D. ergo cum A primus numerus
p 13. 9. metiatur D, & p proinde nullus alius P, eundem
q 20. def. 7 metiatur, q consequenter E non metitur Q. qua-
r 31. 7. re cum E primus ponatur, r idem ad Q primus
s 23. 7. erit. s ergo E & Q in sua ratione minimi sunt,
t 21. 7. & t propterea E ipsum P ac Q ipsum D æque
u 13. 9. metiuntur. u ergo Q est aliquis ipsorum A, B, C.
x 19. 7. Sit igitur B; ergo cum ex æquo sit B. D :: E. H;
y 14. 5. æ ideoque $BH = DE = F = PQ$. x adeoque
Q. B :: H. P. y erit $H = P$. ergo P est etiam
aliquis ipsorum A, B, C, &c. contra Hypoth.
ergo nullus alius præter numeros prædictos eun-
z 22. def. 7. dem F metietur; q proinde F est numerus per-
fectus. Q. E. D.

LIB. X.

Definitiones.

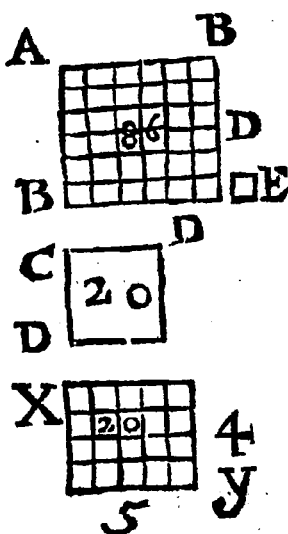
I. mmensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II. Commensurabilitatis nota est $\square$, ut A $\square$ B; hoc est, linea A 8 pedum commensurabilis est lineae B 13 pedum; quia D linea unius pedis singulas A & B metitur. Item $\sqrt{18} \square \sqrt{50}$; quia $\sqrt{2}$ singulas $\sqrt{18}$, & $\sqrt{50}$ metitur. Nam $\sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$; & $\sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$. quare $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50} :: 3 \cdot 5$.

III. Incommensurabiles autem sunt, quorum nullam communem mensuram contingit reperiri.

Incommensurabilitas significatur nota $\square$, ut $\sqrt{6} \square \sqrt{25}$ (5); hoc est $\sqrt{6}$ incommensurabilis est numero 5, vel magnitudini hoc numero designata; quia harum nulla est communis mensura, ut postea patebit.

IV. Rectae lineae potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.



Hujusce commensurabilitatis nota est $\square$, ut AB $\square$ CD; h.e. linea AB sex pedum potentia commensurabilis est linea CD, quæ exprimitur per $\sqrt{20}$. quia spatium E unius pedis quadrati metitur tam ABq (36) quam rectangulum XY (20,) cui æquale est quadratum linea CD ($\sqrt{20}$.) Eadem nota $\square$ nonnunquam valet potentia tantum commensurabilis.

IV. Incommensurabiles vero potentia, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

Hujusmodi incommensurabilitas denotatur sic; $5 \square \vee \sqrt{8}$; hoc est, numeri vel lineæ 5, & $\vee \sqrt{8}$ sunt incommensurabiles potentia; quia harum quadrata 25, & $\sqrt{8}$ sunt incommensurabilia.

V. Quæ cum ita sint, manifestum est cuicumque rectæ propositæ, rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles; alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea Rationalis.

Hujus nota est ρ .

VI. Et huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales, ρ .

VII. Huic vero incommensurabiles Irrationales vocentur.

Hæ sic denotantur ρ .

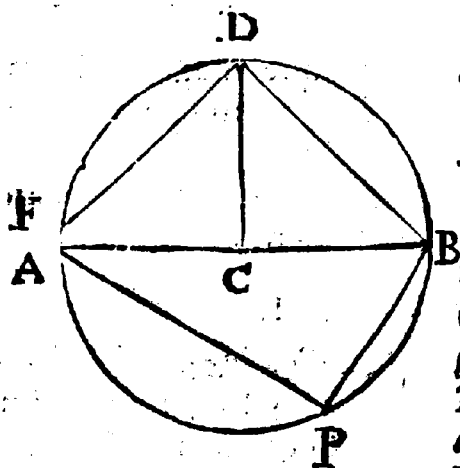
VIII. Et quadratum, quod à proposita recta sit, dicatur Rationale $\rho\rho$.

IX. Et huic commensurabilia quidem Rationalia $\rho\rho$.

X. Huc vero incommensurabilia, Irrationa-
lia dicantur, p^a.

XI. Et rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationa-
les, p^a.

Schol.



Ut postrema 7 de-
finitiones exemplo
aliquo illustrentur,
fit circulus ADBP,
cujus semidiameter
CB; huic inscriban-
tur latera figurarum
ordinatarum, Hexa-
goni quidem BP,
Trianguli AP, qua-
drati BD, pentagoni
FD. Itaque si juxta

5 defn. semidiameter CB fit Rationalis exposita,
numero 2. expressa, cui reliquæ BP, AP, BD, FD
comparanda sunt, ærit BP a = BC = 2. quare a cor. 15. 4.
BP est p^a BC, juxta 6. def. Item AP b = $\sqrt{12}$ b 67. 14
(nam ABq (16) — BPq (4) = 12) quare AP
est p^a BC, etiam juxta 6. def. atque APq
(12) est p^a BC, per def. 9. Porro BD b = $\sqrt{DCq}$
+ BCq = $\sqrt{8}$; unde BD est p^a BC; & BDq
p^a. Denique, FDq = 10 — $\sqrt{20}$ (ut patebit ex
proxi ad 10. 13. tradenda) crit p^a, juxta 10 def.
& proinde FD = $\sqrt{10 - \sqrt{20}}$ est p^a, juxta 11
defn.

Postulatum.

Postuletur, quamlibet magnitudinem toties
posse multiplicari, donec quamlibet magni-
tudinem ejusdem generis excedat.

Axiomata.

1. **M**agnitudo quocunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem quam illa metitur.

3. Magnitudo metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

P R O P. I.

Duabus magnitudinibus inaequalibus AB, C *propositis*, si à majore AB auferatur majus quam dimidium (AH) & ab eo (HB) quod reliquum est, rursus detrahatur majus quam dimidium (HI,) & hoc semper fiat, relinquetur tandem quaedam magnitudo IB, quæ minor erit proposita minore magnitudine C.

a post. 10.

a Accipe C toties, donec ejus multiplex DE proxime excedat AB; sintque $AC \sqsubset DF = FG = GE = C$. Deme ex AB plusquam dimidium AH, & à reliquo HB plusquam dimidium HI; & sic deinceps, donec partes AH, HI, IB æque multæ sint partibus DF, FG, GE. Jam liquet FE, quæ non minor est quam $\frac{1}{2}$ DE, majorem esse quam HB, quæ minor est quam $\frac{1}{2}$ AB $\supset$ DE. Pariterque GE quæ non minor est quam $\frac{1}{2}$ FE, major est quam IB $\supset$ $\frac{1}{2}$ HB. ergo C, vel $GE \sqsubset IB$. Q. E. D.

Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH, & ex reliqua HB rursus dimidium HI, & ita deinceps.

P R O P.

PROP. II.

D Si duabus magnitudinibus inaequalibus
B propositis (AB, CD) detrahatur semper
F minor AB de maiore CD, altera quadam
G detractiōe, & reliqua minime præceden-
 tem metiatur; incommensurabiles erunt
 ipsa magnitudines.

Si fieri potest, sit aliqua E communis
 mensura. Quoniam igitur AB detracta
 ex CD, quoties fieri potest, relinquit ali-
 quam FD se minorem, & FD ex AB re-
 linquit GB, & sic deinceps, tandem re-
 linquetur aliqua GB—E. ergo E b metiens AB, b hyp.
 c ideoque CF, b & totam CD; d etiam reliquam c 2. ax. 10.
 FD metitur. c proinde & AG; d ergo & reliquam d 3. ax. 10.
 GB, seipsa minorem. Q. E. A.

PROP. III.

D Duabus magnitudinibus commensurabi-
 libus datis, AB, CD, maximam earum
 communem mensuram FB reperire.

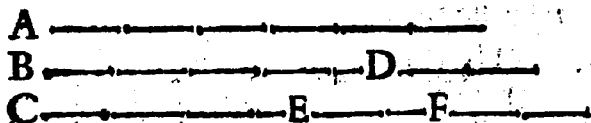
BE Deme AB ex CD, & reliquum ED
F ex AB, & FB ex ED, donec FB metiatur
 ED, (quod tandem fiet, a quia per Hyp. a 2. 10.
 AB—CD) erit FB quaesita.

G Nam FB b metitur ED, a ideoque ip- b constr.
 sam AE; sed & seipsam, d ergo etiam c 2. ax. 10.
 AB, & c propterea CE, d adeoque & to- d 1. ax. 10.
 tam, CD. Proinde FB communis est
 mensura ipsarum AB, CD. Dic G communem
 quoque esse mensuram, hac maiorem; ergo G
 metiens AB, & CD, e metitur CE, & f reliquam e 2. ax. 10.
 ED, e ideoque AF, & f proinde reliquam FB, f 3. ax. 10.
 major minorem. Q. E. A.

Coroll.

Hinc, magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

P R O P. IV.



Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis A, B, C; maximam earum mensuram communem invenire.

a 3. 10.

a Inveni D maximam communem mensuram duarum quarumcunque A, B; a item E ipsarum D & C maximam communem mensuram; erit E quaesita.

b constr. &

2. ax. 10.

c cor. 3. 10.

a Nam perspicuum est E metiens D & C b metiri tres A, B, C. Puta aliam F hac majorem eadem metiri. c ergo F metitur D; c proinde & E, ipsorum D, C maximam communem mensuram, major minorem. Q. E. A.

Coroll.

Hinc quoque, magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum communem mensuram.

P R O P. V.



se rationem habent, quam numerus ad numerum.

a 3. 10.

b 20. def. 7.

a Inventa C ipsarum A, B maxima communis mensura; quoties C in A & B, toties I contineatur in numeris D & E. b ergo C. A :: 1. D; quare inverse A, C :: D. 1. b atqui etiam C, B ::

B :: I. E. c ergo ex æquali A.B :: D. E :: N.N. c 22. 5.
Q. E. D.

PROP. VI.

E —————

F.1. Si duæ mag-

A —————

C.4. nitudines A, B

B —————

D.3. inter se propor-

tionem habeant, quam numerus C ad numerum D;
commensurabiles erunt magnitudines A, B.

Qualis pars est i numeri C, a talis fiat E ip-
sius A. Quoniam igitur E.A b :: I. C. atq; A. B
c :: C. D; d ex æquo erit E. B :: I. D. ergo
quum i e metiatur numerum D, f etiam E meti-
tur B; sed & ipsum A g metitur. b ergo A □ B.
Q. E. D.

a sch. 10. 6.
b constr.
c hyp.
d 22. 5.
e 5. ax. 7.
f 20. def. 7.
g constr.
h 1. def. 10.

PROP. VII.

A —————

Incommensurabiles

B —————

magnitudines A, B in-

ter se proportionem non habent, quam numerus ad
numerum.

Dic A. B :: N. N. a ergo A □ B, contra a 6. 10.
Hypoth.

PROP. VIII.

A —————

Si duæ magnitudines

B —————

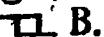
A, B inter se proportio-

nem non habeant, quam numerus ad numerum, in-
commensurabiles erunt magnitudines.

Putā A □ B a ergo A.B :: N. N, contra a 5. 10.
Hypoth.

PROP. IX.

A  Quæ à rectis lineis longitu-
 B  dine commensurabilibus sunt
 E, 4. quadrata, inter se proportio-
 F, 3. nem habent, quam quadratus
 numerus ad quadratum numerum: & quadrata in-
 ter se proportionem habentia, quam quadratus nume-
 rus ad quadratum numerum, & latera habebunt
 longitudine commensurabilia. Quæ vero à rectis
 lineis longitudine incommensurabilibus sunt qua-
 drata, inter se proportionem non habent, quam qua-
 dratus numerus ad quadratum numerum: & qua-
 drata inter se proportionem non habentia, quam qua-
 dratus numerus ad quadratum numerum, neque la-
 tera habebunt longitudine commensurabilia.

1. Hyp. A:  B. Dico Aq. Bq :: Q. Q.
 Nam a sit A. B :: num. E. num. F. ergo

b 20. 6. Aq. $\frac{A}{B}$ bis $c = \frac{E}{F}$ bis. $d = \frac{Eq}{Fq}$ e ergo Aq.
 c sch. 23. 5. Bq $(\frac{A}{B} \text{ bis}) c = \frac{E}{F} \text{ bis}$. $d = \frac{Eq}{Fq}$

d 11. 8. Bq :: Eq. Fq :: Q. Q. Q. E. D.

e 11. 5. 2. Hyp. Aq. Bq :: Eq. Fq :: Q. Q. Dico A

f 20. 6.  B. Nam $\frac{A}{B}$ bis $(\frac{Aq}{Bq}) g = \frac{Eq}{Fq}$ $h = \frac{E}{F}$

g hyp. bis. i ergo A. B :: E. F :: N. N. k quare A 

h 11. 8. B. Q. E. D.

i sch. 23. 5. 3. Hyp. A  B. Nego esse Aq. Bq :: Q. Q.

k 6, 10. Nam dic Aq. Bq :: Q. Q. Ergo A  B, ut
 modo ostensum est, contra Hypoth.

4. Hyp. Non Aq. Bq :: Q. Q. Dico A 
 B. Nam puta A  B; ergo Aq. Bq :: Q. Q. ut
 modo diximus, contra Hypoth.

Coroll.

Lineæ  sunt etiam ; at non contra. Sed
 lineæ  non sunt idcirco . Lineæ vero 
 sunt etiam .

PROP. X.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint (C. A :: B. D;) prima vero C secunda A fuerit commensurabilis; & tertia B quarta D commensurabilis erit. Et si prima C secunda A fuerit incommensurabilis, & tertia B quarta D incommensurabilis erit.

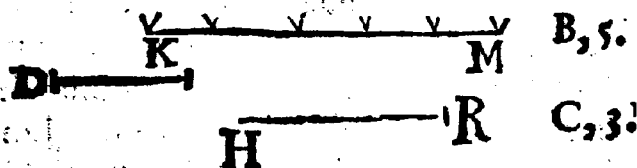
C A B D Si C $\square$ A, a ideo erit C. A :: N. a 5. 10.
N :: B. D. b ergo B $\square$ D. Sin C b 6. 10.
 $\square$ A, ergo c non erit C. A :: N. N :: B. D. c 7. 10.
d quare B $\square$ D. Q. E. D. d 8. 10.

LEMMA 1.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Huic Lemmati satisficient duo quilibet numeri plani non similes, quales sunt numeri habentes proportionem superparticularem, vel superbipartientem, vel duplam; vel etiam duo quicvis numeri primi. vid. Schol. 27. 8.

LEMMA 2.



Invenire lineam HR, ad quam data recta linea KM fit in ratione datorum numerorum B, C.

a Divide KM in partes æquales æque multas a sch. 10. 6. unitatibus numeri B. harum tot, quot unitates sunt in numero C, b componant rectam HR. b 3, 1. liquet esse KM. HR :: B. C.

LEMMA 3.

Invenire lineam D, ad cujus quadratum data recta KM quadratum fit in ratione datorum numerorum B, C.

Fac

a 2. lem. 10 Fac B. C a :: KM. HR. ac inter KM, & HR
 10. b Inveni mediam proportionalem D. Erit KMq.
 b 13. 6. Dq c :: KM. HR d :: B. C.
 c 20. 6.
 d constfr.

P R O P. XI.

A ————— B. 20. *Proposita recta*
 E ————— C. 16. *linea, A invenire*
 D ————— *duas rectas lineas*
incommensurabiles; alteram quidem D longitudine
tantum, alteram vero E etiam potentia.

a 2 lem. 10 1. Sume numeros B. C, a ita ut non sit B. C ::
 10. Q. Q. b fiatque B. C :: Aq. Dq. c liquet A $\square$
 b 3 lem. 10 D. Sed Aq d $\square$ Dq. Q. E. F.
 10. 2. d Fac A. E :: E. D. Dico Aq $\square$ Eq.
 c 9. 10. Nam A. D e :: Aq. Eq. ergo cum A $\square$ D,
 d 6. 10. ut prius, ferit Aq $\square$ Eq. Q. E. F.
 d 13. 6.
 e 20. 6.
 f 10. 10.

P R O P. XII.

Quae (A, B) eidem magnitudini C
sunt commensurabiles, & inter se sunt
commensurabiles.
 Quia A $\square$ C, & C $\square$ B, a sit A.
 C :: N N :: D. E. at-
 D, 18. E, 8. que C. B :: N. N :: F.
 F, 2. G, 3. G. b sumantur tres nu-
 A B C H, 5. I, 4. K, 6. meri H, I, K $\square$ N ::

In rationibus D ad E, & F ad G. Jam
 quia A. C c :: D. E c :: H. I. ac C. B c :: F. G.
 c constfr. et I. K. d erit ex aequali A. B :: H. K :: N. N.
 d 22. 5. e ergo A $\square$ B. Q. E. D.
 e 6. 10.

Schol.

Hinc, omnis recta linea rationali lineae
 12. 10. & commensurabilis, est quoque p rationalis. Sit
 def. 6. omnes rectae rationales inter se commensurabi-
 les sunt, saltem potentia. Item, omne spatium
 def. 9. rationali spatio commensurabile, est quoque ra-
 tionale; & omnia spatia rationalia inter se com-
 men-

mensurabilia sunt. Magnitudines vero, quarum altera est rationalis, altera irrationalis, sunt inter def. 7. & 10 se incommensurabiles.

PROP. XIII.

A ————— Si sint duae magnitudines A,
C ————— B; & altera quidem A eidem
B ————— C sit commensurabilis, altera
vero B incommensurabilis; incommensurabiles erunt
magnitudines A, B.

Dic B $\sqsupset$ A. ergo cum C a $\sqsupset$ A, b erit C a hyp.
 $\sqsupset$ B, contra Hypoth. b 12. 10.

PROP. XIV.

Si sint duae magnitudines commensurabiles A, B; altera autem ipsarum A magnitudini cuiuspiam C incommensurabilis fuerit; & reliqua B eidem C incommensurabilis erit.

Put a B $\sqsupset$ C. ergo cum A $\sqsupset$ a B, a hyp.
A B C b erit A $\sqsupset$ C, contra Hyp. b 12. 10.

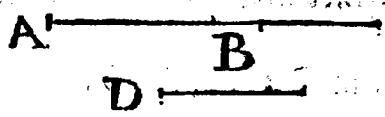
PROP. XV.

A ————— Si quatuor rectae li-
B ————— neae proportionales fue-
C ————— rint (A B :: C. D ;)
D ————— prima vero A tanto plus
possit quam secunda B, quantum est quadratum re-
ctae lineae sibi commensurabilis longitudine; & ter-
tia C tanto plus poterit, quam quarta D, quantum
est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima A tanto plus possit quam
secunda B, quantum est quadratum rectae lineae
sibi incommensurabilis longitudine; & tertia C tan-
to plus poterit, quam quarta D, quantum est quadra-
tum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. a hyp.

Nam quia A. B a :: C. D. b erit Aq. Bq :: b 22. 6.
Cq. Dq. c ergo dividendo Aq — Bq. Bq :: Cq — c 17. 5.
Dq.

- d 22. 6. Dq. Dq. *d* quare $\sqrt{}$: Aq—Bq. B :: $\sqrt{}$: Cq—Dq.
 e cor. 4. 5. D. *c* invertendo igitur B. $\sqrt{}$: Aq—Bq :: D. $\sqrt{}$:
 f 22. 5. Cq—Dq. fergo ex æquali A. $\sqrt{}$: Aq—Bq ::
 C. $\sqrt{}$: Cq—Dq. proinde si A $\square$, vel $\square \sqrt{}$
 g 10. 10. Aq—Bq, *g* erit similiter C $\square$, vel $\square \sqrt{}$:
 Cq—Dq. Q. E. D.

P R O P. XVI.

 Si duæ magnitudines
 commensurabiles AB,
 BC componantur, &

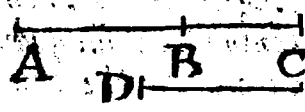
tota magnitudo AC utrique ipsarum AB, BC com-
 mensurabilis erit: quod si tota magnitudo AC uni
 ipsarum AB, vel BC commensurabilis fuerit; &
 quæ à principio magnitudines AB, BC commensu-
 rabiles erunt.

- a 3. 10. 1. Hyp. a Sit D ipsarum AB, BC communis
 b 1. ax 10. mensura. b ergo D metitur AC. c ergo AC $\square$
 c 1. def. 10. AB, & BC. Q. E. D.
 2. Hyp. a Sit D communis mensura ipsarum
 d 3. ax. 10. AC, AB; d ergo D metitur AC—AB (BC;) &
 c proinde AB $\square$ BC. Q. E. D.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus
 composita, commensurabilis sit alteri ipsarum,
 eadem & reliquæ commensurabilis erit.

P R O P. XVII.

 Si duæ magnitudines in-
 commensurabiles AB, BC
 componantur, & tota magni-

tudo AC utrique ipsarum AB, BC incommensura-
 bilis erit: Quod si tota magnitudo AC uni ipsa-
 rum AB incommensurabilis fuerit, & quæ à prin-
 cipio magnitudines AB, BC incommensurabiles
 erunt.

1. Hyp.

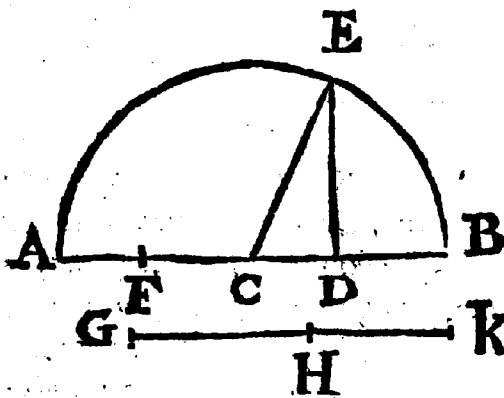
1. Hyp. Si fieri potest, sit D ipsarum AC, AB communis mensura. a ergo D metitur a 3. ax. 10. AC—AB (BC) b ergo AB $\sqsupset$ BC, contra b 1. def. 10. Hypoth.

2. Hyp. Dic AB $\sqsupset$ BC, c ergo AC $\sqsupset$ c 16. 10. AB, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliquæ incommensurabilis erit.

P R O P. XVIII.



Si fuerint
duæ rectæ lineæ
inaequales AB,
GK; quartæ au-
tem parti qua-
drati, quod fit à
minori GK, æ-
quale parallelo-
grammū ADB
ad maiorem AB

applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes AD, DB longitudine commensurabiles ipsam dividat; major AB tanto plus poterit quam minor GK, quantum est quadratum rectæ lineæ FD sibi longitudine commensurabilis. Quod si major AB tanto plus possit, quam minor GK, quantum est quadratum rectæ lineæ FD sibi longitudine commensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori GK, æquale parallelogrammum ADB ad maiorem AB applicetur, deficiens figura quadrata, in partes AD, DB longitudine commensurabiles ipsam dividet.

a 10. 1.
b 28. 6.

a Bliteca GK in H, & b fac rectang. ADB = c 8. 2.

GHq: abscinde AF = DB. Estque ABq c = d constt, &

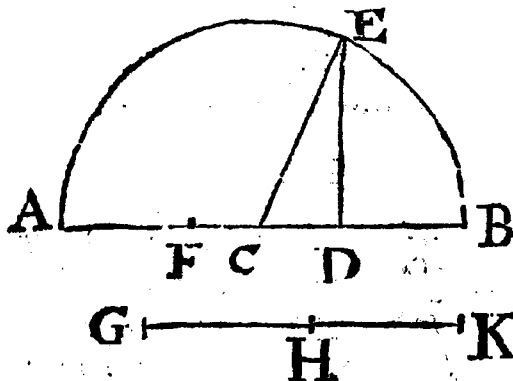
* ADB d (4 GHq, vel GKq) + FDq. Jam 4. 2, primo

e 16. 10. primo, Si $AD \perp DB$, erit $AB \perp DB$ e $\perp$
 f constr. $2 DB$ f $(AF + DB, \text{ vel } AB - FD)$ g ergo
 g cor. 16. $AB \perp FD$. Q. E. D. Sin secundo, $AB \perp$
 10. FD , h erit ideo $AB \perp AB - FD$ (2 DB)
 h cor. 16. k ergo $AB \perp DB$. l quare $AD \perp DB$,
 10. Q. E. D.

k 12. 10.

l 16. 10.

PROP. XIX.

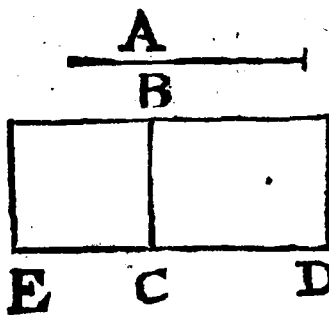


Si fuerint
 duæ rectæ lineæ
 inæquales, AB,
 GK; quarta
 autem parti
 quadrati, quod
 fit à minore
 GK, æquale
 parallelogram-

um ADB ad maiorem AB applicetur, deficiens
 figura quadrata; & in partes incommensurabiles
 longitudine AD, DB, ipsam AB dividat; major
 AB tanto plus poterit, quam minor GK, quantum
 est quadratum rectæ lineæ FD, sibi longitudine in-
 commensurabilis. Quod si major AB tanto plus
 possit, quam minor GK, quantum est quadratum re-
 ctæ lineæ FD sibi longitudine incommensurabilis;
 quarta autem parti quadrati, quod fit à minore
 GK, æquale parallelogrammum ADB ad maiorem
 AB applicetur, deficiens figura quadrata; in partes
 longitudine incommensurabiles AD, DB ipsam AB
 dividet.

Facta puta, & dicta eadem, quæ in præce-
 denti. Itaque primo, Si $AD \perp DB$, a erit pro-
 b 13. 10. pterea $AB \perp DB$; b quare $AB \perp 2 DB$
 (AB - FD) c ergo $AB \perp FD$. Q. E. D.
 c cor. 17. Secundo, Si $AB \perp FD$; c ergo $AB \perp$
 10. $AB - FD$ (2 DB;) d quare $AB \perp DB$, &
 d 13. 16. e proinde $AD \perp DB$. Q. E. D.
 e 17. 10.

PROP. XX.



Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum BD, rationale est.

Exponatur A, p. & a de- a 46. 1.

scribatur BE quadratum ex BC. Quoniam DC.

CE (BC) b :: BD. BE. & DC c $\square$ BC; d e- b 1. 6.

rit rectang. BD $\square$ quad. BE. ergo quum quad. c hyp.

BE c $\square$ Aq; f erit BD $\square$ Aq. proinde re- d 10. 10.

ctang. BD est pv. Q. E. D.

e hyp. & 9.

Not. Tria sunt genera linearum rationalium in- des. 10.

ter se commensurabilium. Aut enim duarum linea- f 12. 10.

rum rationalium longitudine inter se commensura-

bilium altera æqualis est exposita rationali; aut neu-

tra rationali exposita æqualis est, longitudine tamen

ei utraque est commensurabilis; aut denique utraque

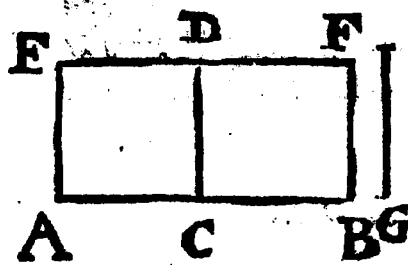
exposita rationali commensurabilis est solum poten-

tia. Hi sunt modi illi, quos innuit præsens theo-

rema.

In numeris, sit BC, $\sqrt{8}$ ($2\sqrt{2}$) & CD, $\sqrt{18}$ ($3\sqrt{2}$) erit rectang. BD = $\sqrt{144} = 12$.

PROP. XXI.



Si rationale DB ad rationalem DC applicetur, latitudinem CB efficit rationalem, & ei DC ad quam applicatum est

DB, longitudine commensurabilem.

a 1. 6.

Exponatur G, p. & describatur DA quadra. b hyp.

tum ex BC. quoniam BD. DA a :: BC. CA; c sch. 12. 10

atque, BD. DA b sunt pa, & ideoque $\square$; d erit d 10. 10.

BC

c sch. 12. 10 $BC \perp CA$. at CD (CA) b est ρ . e ergo BC est ρ . Q. E. D.

In numeris, sit rectang. DB , 12; & DC , $\sqrt{8}$.
erit CB , $\sqrt{18}$. atqui $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. & $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

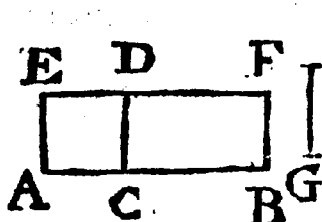
L E M M A.

A ———
B ———
C ———

Duas rectas rationales potentia solum commensurabiles invenire.

a 11. 10. Sit A exposita ρ . a Sume $B \perp A$, a & $C \perp B$.
b sch. 12. 10 b liquet B , & C esse quæsitæ.

P R O P. XXII.



Quod sub rationalibus DC , CB potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum DB , irrationale est; & recta linea H ipsum potens, irrationalis; vocetur autem Media.

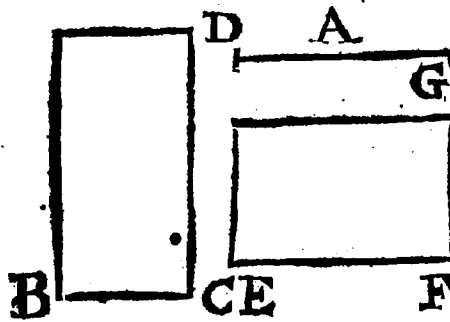
Sit G exposita ρ . & describatur DA quadratum ex DC ; sitque $Hq = DB$. Quoniam $AC:CB$ a DA . DB . b atque $AC \perp CB$, c erit $DA \perp DB$ (Hq). d atqui $Gq \perp DA$. e ergo $Hq \perp Gq$. f ergo H est ρ . Q. E. D. vo
c 10. 10. cetur autem Media, quia $AC:H :: H:CB$.
d hyp. & 9. In numeris, sit DC , 3; & CB , $\sqrt{6}$. erit re-
def. 10. ctangulum DB (Hq) $\sqrt{54}$. quare H est $\sqrt{54}$.
e 13. 10. Mediæ nota est μ , Medii vero $\mu\nu$; pluraliter μa .
f def. 11. 10

S C H O L.

Omne rectangulum, quod potest contineri sub duabus rectis rationalibus potentia solum commensurabilibus, est Medium; quævis continetur sub duabus rectis irrationalibus; atque omne

omne Medium potest contineri sub duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus, ut exemp. gr. $\sqrt{24}$ est $\mu\nu$. quia continetur sub $\sqrt{3}$, & $\sqrt{8}$, qui sunt ρ^c $\square$. et si posset contineri sub $v\sqrt{6}$, & $v\sqrt{96}$ irrationalibus; nam $\sqrt{24} = v\sqrt{576} = v\sqrt{6}$ in $v\sqrt{96}$.

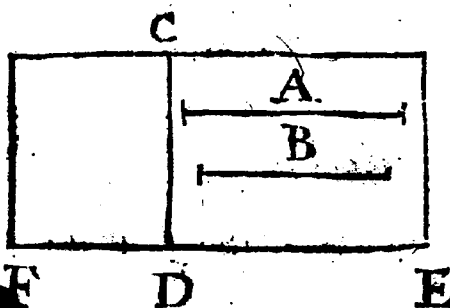
PROP. XXIII.



Quod (BD) a media A fit, ad rationalem BC applicatum, latitudinem CD rationalem efficit, & ei BC, ad quam applicatum est BD longitudine incommensurabilem.

Quoniam A est μ , a erit Aq rectangulo ali- a sch. 12. 10
cui (EG) æquale contento sub EF, & FG b 1. ax. 1.
 ρ^c $\square$. b ergo BD = EG. c quare BC.EF :: FG. c 14. 6.
CD. d ergo BCq. EFq :: FGq. CDq. sed BCq, d 22. 6.
& EFq e sunt ρ^2 , f ideoque $\square$. g ergo FGq $\square$ e hyp.
CDq. Ergo quum FG sit ρ^c , b erit CD ρ^c . Por. f sch. 12. 10
ro, quia EF. FG k :: EFq. EG (BD;) ob g 10. 10.
EF $\square$ FG, l erit EFq $\square$ BD. verum EFq h sch. 12. 10
m $\square$ CDq. n ergo rectang. BD $\square$ CDq. k 1. 6.
quum igitur CDq. BD o :: CD. BC. p erit CD l 10. 10.
 $\square$ BC. ergo, &c. m sch. 12. 10.

PROP. XXIV.



Media A commensurabilis B, media est. Ad CD ρ^c a fac rectang. CE = Aq; a & a 11. 6. rectang. CF = Bq. Quoniam b hyp. DE

Aq (CE) est $\mu\nu$, b & CD ρ^c , c erit latitudo c 23. 10.

d 1. 6. DE ρ $\perp$ CD. Quoniam vero CE. CF a ::
 e hyp. ED. DF, & GE e $\perp$ CF, ferit ED $\perp$ DF.
 f 10. 10. g ergo DF est ρ $\perp$ CD. h ergo rectang. CF
 g 2. & 13. (Bq) est $\mu\nu$ & proinde B est μ . Q. E. D.

10. Nota quod signum $\perp$ plerumque valet poten-
 h 22. 10. tia tantum commensurabile, ut in hac demonstratio-
 ne, & in praced. & c. quod intellige, ut ex usu erit,
 & juxta citationes.

Coroll.

Hinc liquet spatium medio spatio commen-
 surabile medium esse.

L E M M A.

A. ————— Duas rectas medias A, B
 B. ————— longitudine commensurabi-
 C. ————— les; item duas A, C po-
 tentia tantum commensurabiles invenire.

a lem. 22. a Sit A μ quævis; sume b B $\perp$ A; c & C $\perp$ A.
 10. & 13. 6 d Factum esse liquet.

b 2. lem. 10

P R O P. XXV.

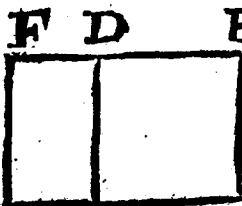
10.

c 3. lem. 10

10.

d constr.

& 24. 10.



Quod sub DC, CB mediis
 longitudine commensurabilibus
 rectis lineis continetur rectangu-
 lum DB, medium est.

Super DC contruatur qua-
 dratum DA. Quoniam AC.
 (DC) CB a :: DA. DB, & DC

a 1. 6.

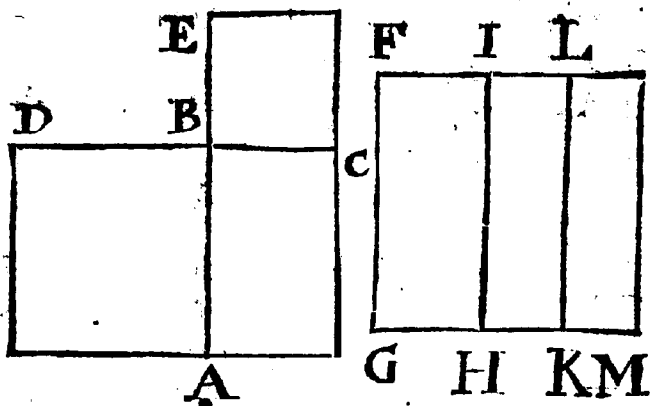
b 10. 10.

c 24. 10.

$\perp$ CB; b erit DA $\perp$ DB. c ergo DB est $\mu\nu$.
 Q. E. D.

P R O P.

PROP. XXVI.



Quod sub mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum AC, vel rationale est, vel medium.

Super rectas AB, BC a describe quadrata AD, CE, atque ad FG ρ , b fac rectangula FH = AD, b & IK = AC, a b & LM = CE.

Quadrata AD, CE, hoc est, rectangula FH, LM e sunt μa , & $\square$; ergo eandem habentes rationem GH, KM sunt $d \rho$, & $e \square$. f ergo GH x KM est $\rho \nu$. atqui quia AD, AC, CE, hoc est FH, IK, LM g sunt $\therefore$; & b proinde GH, HK, KM etiam $\therefore$, k erit HKq = GH x KM; l ergo HK est ρ ; vel $\square$, vel $\square$ IH (GF;) si $\square$, m ergo rectang. IK vel AC est $\rho \nu$. Sin $\square$. n ergo AC est $\mu \nu$. Q. E. D.

a 46. 1.
b cor. 16. 6
c hyp. &
24. 20.
d 23. 10.
e 10. 10.
f 10. 10.
g sch. 22. 6.
h 1. 6.
k 17. 6.
l 12. 10.
m 20. 10.
n 12. 10.

LEMMA.



Erunt primo Aq, Eq, Aq + Eq, Aq - Eq a $\square$. a 10.
Erunt secundo, Aq, Eq, Aq + Eq, Aq - Eq $\square$ 16. 6.
AE, & 2 AE. Nam A. E b :: Aq. AE b :: AE. b i. .
Eq. ergo cum A c $\square$ E. d erit Aq $\square$ AE, e & c hyp r
2 AE. item Eq d $\square$ AE, e & 2 AE. c quare cum d 10. 10.
Aq + Eq $\square$ Aq, & Eq; & Aq - Eq $\square$ Aq, & i 4. 0.
O z Eq,

f 14. 10. Eq, f erunt $Aq + Eq$, f & $Aq - Eq \sqsubset AE$, &
2 AE.

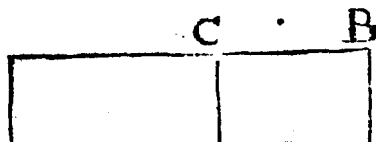
Hinc erunt tertio, Aq , Eq , $Aq + Eq$, $Aq - Eq$,
2 AE $g \sqsubset Aq + Eq + 2 AE$; & $Aq + Eq - 2 AE$.

g 14. 10. & g & $Aq + Eq + 2 AE \sqsubset Aq + Eq - 2 AE$.

17. 10. b (Q. A - E.)

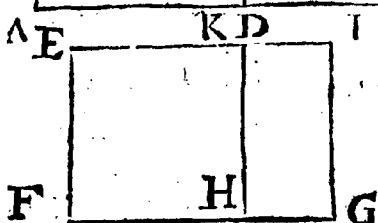
h cor. 7. 20.

PROP. XXVII.



Medium AB non su-
perat medium AC ra-
tionali DB.

a cor. 16. 6.



Ad EF p^c , a fac EG
= AB, a & EH =
AC Rectangula AB,
AC, hoc est, EG, EH
b sunt μa , c ergo FG,
& FH sunt $p^c \sqsubset EF$.

b hyp.

c 23. 10.

d 3. ax. 1. itaque si KG, d id est DB sit $p^c v$. e erit HG $\sqsubset$

e 21. 10. HK; fquare HG $\sqsubset$ FH. g ergo FGq $\sqsubset$ FHq.

f 13. 10. sed FH est p^c . b ergo FG est p^c . verum prius

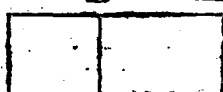
g lem. 26. erat FG p^c . Quæ repugnant.

10.

h sch. 12. 10

SCHOL.

F D E



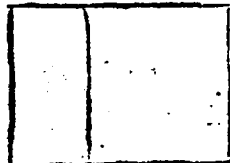
a hyp.

b cor. 16.

10.

c sch. 12. 10

F D E



a sch 12. 10

b 16. 10.

c sch. 12. 10

B C A

1. Rationale AE superat ra-
tionale AD rationali CE.

Nam AE a $\sqsubset AD$; b ergo
AE $\sqsubset CE$ c quare CE est $p^c v$.
Q. E. D.

2. Rationale AD cum ratio-
nali CF facit rationale AF.

Nam AD a $\sqsubset CF$; b quare
AF $\sqsubset AD$, & CF. c proinde
AF est $p^c v$. Q. E. D.

P R O P. XXVIII.

Medias invenire (C, & D) qua rationale CD contineant.

a Sume A, & B ρ $\square$. *b* fac A, C :: a lem. 21.
C. B. & atque A. B :: C. D. Dico 10.
factum. Nam AB (Cq) d est $\mu\nu$; b 13. 6.
d unde C est μ . quum vero A. B e :: c 12. 6.
C. D, ferit C $\square$ D. g ergo D est μ . d 22. 10.
A C B D porro permutando A. C :: B. D. e hoc e constr.
est C. B :: B. D. b ergo Bq = CD. f 10. 10.
atqui Bq e est ρ v. b ergo CD est ρ v. Q. E. F. g 24. 10.
In numeris, sit A, $\sqrt{2}$, & B, $\sqrt{6}$. ergo C est h 17. 6.
v $\sqrt{12}$. fac $\sqrt{2}$. $\sqrt{6}$:: v $\sqrt{12}$. D. vel v $\sqrt{4}$. v $\sqrt{h}$ sch. 12. 10
36 :: v $\sqrt{12}$. D. erit D, v $\sqrt{108}$. atqui v $\sqrt{9}$ 2 in
v $\sqrt{108} = v \sqrt{1296} = \sqrt{36} = 6$. ergo CD est 6.
item C. D :: 1. $\sqrt{3}$. quare C $\square$ D.

P R O P. XXIX.

Medias invenire potentia tantum commensurabiles D, & E, qua medium DE contineant.

a Sume A, B, C ρ $\square$. Fac A. D a lem. 21.
b :: D. B. c & B. C :: D. E. Dico 10.
factum. b 13. 6.
Nam AB d = Dq & AB e est $\mu\nu$; c 12. 6.
A D B C E ergo D est μ . & B f $\square$ C. g ergo d 17. 6.
D $\square$ E. h ergo E est μ . porro, e 22. 10.
B. C f :: D. E, & permutando B. D :: C. E. f constr.
h hoc est D. A :: C. E. l ergo DE = AC. Sed g 10. 10.
AC m est $\mu\nu$. ergo DE est $\mu\nu$. Q. E. D. h 24. 10.
In numeris sit A, 20; & B, $\sqrt{200}$; & C, $\sqrt{80}$. k constr. &
Ergo D est $\sqrt{\sqrt{80000}}$; & E v $\sqrt{12800}$. Ergo cor. 4. 5.
DE = $\sqrt{\sqrt{1024000000}} = \sqrt{32000}$. & D. E l 16. 6.
:: $\sqrt{10}$. 2. quare D $\square$ E. m 22. 6.

S C H O L.

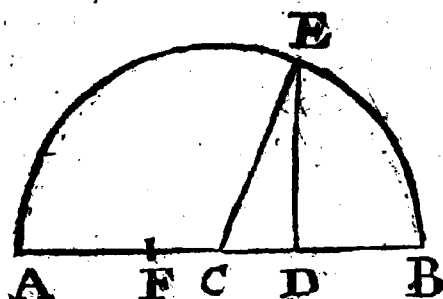
A, 6. C, 12.
 B, 4. D, 8.
 $\overline{AB}, 24.$ $\overline{CD}, 96.$

A, 6. C, 5.
 B, 4. D, 8.
 $\overline{AB}, 24.$ $\overline{CD}, 40.$

• Invenire duos numeros planos similes vel dissimiles.

Sume quoscunque quatuor numeros proportionales, A. B :: C. D. liquet AB, & CD esse similes planos. Planos autem dissimiles quocunque reperies ope scholii 27. 8.

L E M M A.



1. Duos numeros quadratos (DEq & CDq) invenire, ita ut compositum ex ipsis (CEq) quadratum etiam sit.

Sume AD, DB numeros planos similes (quorum ambo pares sint, vel ambo impares) nimirum AD, 24. & DB, 6. Horum summa, (AB) est 30; differentia (FD) 18, cujus semissis (CD) est 9. a Habent vero plani similes AD, DB unum medium numerum proportionalem, nempe DE. patet igitur singulos numeros CE, CD, DE rationales esse; proinde CEq (b $CDq + DEq$) est numerus quadratus requisitus.

Facile itaque inveniuntur duo numeri quadrati, quorum excessus sit quadratus, vel non quadratus numerus, nempe ex eadem constructione,

c 3. ax. 1. erit $CEq - CDq = DEq$.

Quod si AD, DB sint numeri plani dissimiles,

les, non erit media proportionalis (DE) numerus rationalis; proinde quadratorum CEq, CDq excessus (DEq) non erit numerus quadratus.

LEMMA 2.

2. Duos numeros quadratos B, C invenire, ita ut compositus ex ipsis D, non sit quadratus. item, quadratum numerum A dividere in duos numeros B, C non quadratos.

A, 3. B, 9. C, 36. D, 45.

1. Sume numerum quemlibet quadratum B, sitque $C = 4B$; & $D = B + C$. Dico factum.

Nam B est Q. ex constr. item quia B. C ::

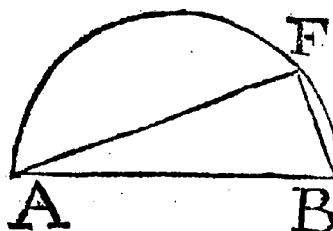
1. 4 :: Q. Q. a erit C etiam quadratus. Sed quoniam $B + C$, (D) C :: 5. 4 :: non Q. Q. b non b cor. 24. 8. erit D numerus quadratus. Q. E. F.

A, 36. B, 24. C, 12. D, 3. E, 2. F, 1.

2. Sit A numerus quivis quadratus. Accipe D, E, F numeros planos dissimiles, sitque $D = E + F$. fac D. E :: A. B. & D. F. :: A. C. Dico factum.

Nam quia D. E + F :: A. B + C. & $D = E + F$, erit $A = B + C$. Jam dic B quadratum esse. a 14. 5. b ergo A & B, & c proinde D & E, sunt numeri b 21. def. 7. c 26. 8. plani similes, contra Hypoth. idem absurdum sequetur, si C dicatur quadratus, ergo, &c.

PROP. XXX.



C E D

Invenire duas rationales AB, AF potentia tantum commensurabiles, ita ut major AB plus possit, quam minor AF, quadrato rectæ lineæ BF longitudine sibi commensurabilis.

a 1. lem.

29. 10.

b 3. lem.

10. 10.

c 1. 4.

d constr.

e 6. 10.

f sch. 12. 10

g 9. 10.

h 31. 3.

k 47. 1.

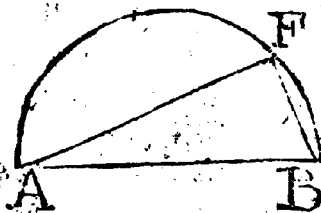
l 9. 10.

Exponatur AB, ρ . a Summe CD, CE numeros quadratos, ita ut $CD = CE$ (ED) sit non Q. b Fiatque $CD \cdot ED :: ABq \cdot AFq$. In circulo super AB diametrum descripto c aptetur AF, ducaturq; BF. Sunt AB, AF, quas peris.

Nam $ABq \cdot AFq d :: CD \cdot ED$. e ergo $ABq \cdot AFq$, verum AB est ρ . f ergo AF est ρ . sed quia CD est Q: at ED non Q: g erit AB $\perp$ AF, porro, ob ang. b rectum AFB, est $ABq = AFq + BFq$; cum igitur $ABq \cdot AFq :: CD \cdot ED$. per conversionem rationis erit $ABq \cdot BFq :: CD \cdot CE :: Q \cdot Q$. l ergo $AB \perp BF$. Q. E. F.

In numeris; sit AB, 6; CD, 9. CE, 4; quare ED, 5. Fac $9 \cdot 5 :: 36$. (Q. 6) AFq . erit $AFq = 36 - 10 = 26$. proinde $AF \sqrt{26}$. ergo $BFq = 36 - 10 = 26$. quare BF est 4.

PROP. XXXI.



C E D

Invenire duas rationales AB, AF potentia tantum commensurabiles, ita ut major AB plus possit, quam minor AF, quadrato rectæ lineæ BF sibi longitudine incommensurabilis.

a 2. lem.

29. 10.

Exponatur AB, ρ . a accipe numeros CE, ED quadratos, ita ut $CD = CE + ED$ sit non Q. & in peliquis imitare constructionem precedentis. Dico, factum.

Nam,

Nam, ut ibi, AB, AF sunt ρ $\square$; item ABq.
BFq :: CD. ED. ergo cum CD sit non Q.
erunt AB, BF $\square$. Q. E. F.

b 9. 10.

In numeris, sit AB, 5. CD, 45. CE = 36;
ED = 9. Fac 45. 9 :: 25 (ABq.) 5 (AFq.)
ergo AF = $\sqrt{5}$. proinde BFq = 45 - 25 =
20. quare BF = $\sqrt{20}$.

PROP. XXXII.

A $\square$ *Invenire duas medias*
B $\square$ *C, D potentia tantum*
C $\square$ *commensurabiles, quæ*
D $\square$ *rationale CD contine-*
ant, ita ut major C plus possit, quam minor D,
quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensura-
bilis.

a Accipe A, & B ρ $\square$; ita ut $\sqrt{Aq - Bq}$ $\square$ a 30. 10.
A. b Fiatque A. C :: C. B, c atque A. B :: C. b 13. 6.
D. Dico factum. c 12. 6.

Nam quia A, & d B sunt ρ $\square$, e erit C (f $\sqrt{d}$ constr.
AB) μ . item g ideo C $\square$ D: b ergo D etiam e 22. 10.
u. porro quia A. B d :: C. D; & permutatim A. f 17. 6.
C :: B. D :: C. B; & Bq d est ρv , erit CD g 10. 10.
h (Bq) ρv . Denique quia $\sqrt{Aq - Bq}$ d $\square$ h 24. 10.
A, l erit $\sqrt{Cq - Dq}$ $\square$ C. ergo, & c. Sin $\sqrt{k}$ 17. 6.
Aq - Bq $\square$ Aq, erit $\sqrt{Cq - Dq}$ $\square$ C. l 15. 10.

In numeris, sit A, 8; B, $\sqrt{48}$ ($\sqrt{64 - 16}$)
ergo C = $\sqrt{AB} = v \sqrt{3072}$. & D = $v \sqrt{1728}$,
quare CD = $v \sqrt{5308416} = \sqrt{2304}$.

PROP. XXXIII.

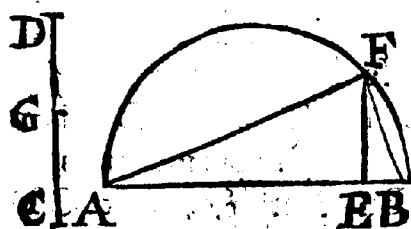
A $\square$ *Invenire duas medias*
D $\square$ *D, E potentia solum*
B $\square$ *commensurabiles, quæ*
C $\square$ *medium DE contine-*
E $\square$ *ant, ita ut major D plus*
possit, quam minor E, quadrato rectæ lineæ sibi
longitudine commensurabilis.

Sume

a 30. 10.
b lem. 21.
10.
c 13. 6.
d 12. 6.
e constr.
f sch. 12. 10
g 22. 10.
h 10. 10.
k 24. 10.
l 22. 10.
m 16. 6.
n 15. 10.

a Sume A, & C ρ , $\square$; ita ut $\sqrt{Aq - Cq} \square$
A. b sume etiam B $\square$ A, & C; & fac A. D ϵ ::
D. B d :: C. E. Erunt D, & E quæsitæ.
Nam quoniam A, & C e sunt ρ , e & B $\square$
A & C, f erit B ρ , & D ($\sqrt{AB}$) g erit μ
e Quia vero A. D :: C. E. erit permutando A.
C :: D. E. ergo cum A $\square$ C, h erit D $\square$ E;
k ergo E est μ . porro, l quia D. B :: C. E; l &
BC est $\mu\nu$, etiam DE ei m æquale est $\mu\nu$. denique
propter A. C :: D. E. e quia $\sqrt{Aq - Cq} \square$
A, n erit $\sqrt{Dq - Eq} \square$ D. ergo, &c. Sin $\sqrt{Aq - Cq} \square$ A, erit $\sqrt{Dq - Eq} \square$ Eq.
In numeris, sit A, 8; C, $\sqrt{48}$; B, $\sqrt{28}$. erit
D $\sqrt{3072}$; & E $\sqrt{588}$. quare D. E :: $2\sqrt{3}$.
& DE = $\sqrt{1344}$.

PROP. XXXIV.



Invenire duas rectas
lineas AF, BE potentia
incommensurabiles, quæ
faciant compositum qui-
dem ex ipsarum qua-
drasis rationale, rectan-
gulum vero sub ipsis contentum, medium.

a 31. 10.
b 10. 1.
c 28. 6.
d 12. 6.
e cor. 8. 6.
& 17. 6.
f 7. 5.
g 19. 10.
h 10. 10.
k 31. 3. &
47. 1.
l constr.
m 1. 24. 1.
n 22. 10.
o 24. 10.
p sch. 22. 6.

a Reperiantur AB, CD ρ $\square$; ita ut $\sqrt{ABq - CDq} \square$ AB. b biseca CD in G. c fac rectang.
& $ABB = GCq$. Super AB diametrum duc se-
micirculum AEB. erige perpendicularem EF.
duc AF, BE. Hæ sunt quæ indagandæ erant.
Nam AE. BE d :: BA x AE. AB x BE. Sed
BA x AE e = AFq; e & AB x BE = FBq. f ergo
AE. BE :: AFq. FBq. ergo cum AE g $\square$
EB, h erit AFq $\square$ FBq. Quinetiam ABq
(k AFq + FBq) l est $\rho\nu$. denique EFq l =
h 22. 10. AEB l = CGq. m ergo EF = CG. ergo CD x
o 24. 10. AB = 2 EF x AB. atqui CD x AB. n est $\mu\nu$.
p sch. 22. 6. o ergo AB x EF, p vel AF x FB, est $\mu\nu$. Q. E. D.

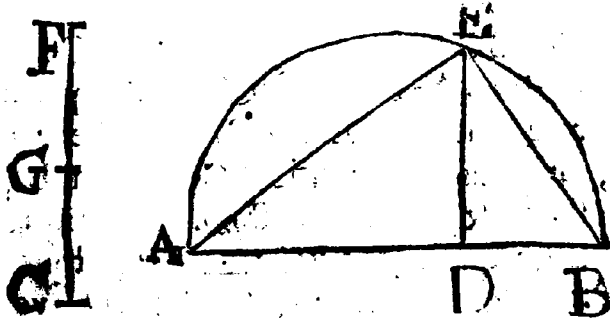
Ex-

Explicatio per numeros.

Sit AB, 6. CD, $\sqrt{12}$. quare $CG = \sqrt{12} = \sqrt{3}$. Est vero $AE = 3 + \sqrt{6}$. & $EB = 3 - \sqrt{6}$. & unde AF erit $\sqrt{18 + \sqrt{216}}$. Et FB, $\sqrt{18 - \sqrt{216}}$. item $AFq + FBq$ est 36, & $AF \times FB = \sqrt{108}$.

Cæterum AE invenitur sic. Quia BA (6.) $AF :: AF. AE$; erit $6 AE = AFq = AEq + 3 (BFq.)$ ergo $6 AE - AEq = 3$. pone $3 + e = AE$. ergo $18 + 6e - 9 - 6e - ee$, hoc est $9 - ee = 3$. vel $ee = 6$. quare $e = \sqrt{6}$. proinde $AE = 3 + \sqrt{6}$.

PROP. XXXV.



Invenire duas rectas lineas AE, EB potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, rationale.

a Sume AB, & CF $\mu \sqcap$, ita ut $AB \times CF = 32. 10$; sit $\rho \gamma$, atque $\sqrt{ABq - CFq} \sqcap AB$. & reliqua fiant, ut in præcedenti. erunt AE, EB, quas petis.

Nam, ut isthic ostensum est, $AEq \sqcap EBq$: item $ABq (AEq + EBq)$ est $\mu \nu$. & denique $AB \times CF$ b est $\rho \gamma$, idcirco & c $AB \times DE$, d hoc b constr! est, $AE \times EB$, est $\rho \gamma$. ergo, &c.

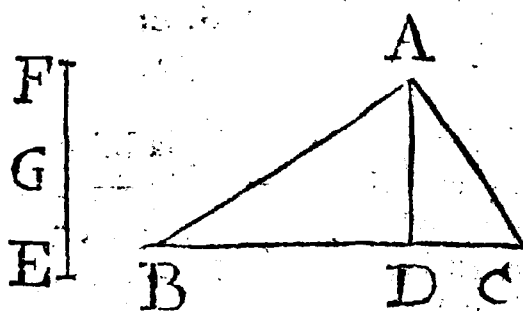
c schol. 12.

10.

d sch. 22. 6.

PROP.

PROP. XXXVI.

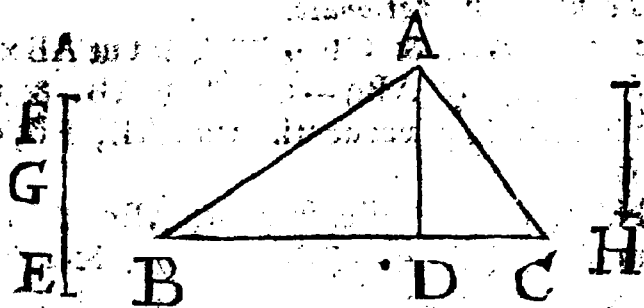


Invenire du-
as rectas lineas
BA, AC poten-
tia incommen-
surabiles, quæ
saciant & com-
positum ex ipsa-
rum quadratis

medium, & rectangulum sub ipsis comprehensum
medium, incommensurabilequod composito ex ipsa-
rum quadratis.

- a 33. 10. a Accipe BC & EF μ $\perp$; ita ut BC $\times$ EF sit
 $\mu\nu$. & $\sqrt{BCq - EFq} \perp BC$. & reliqua fiant,
ut in præcedentibus. Erunt BA, AC exoptata.
Nam, ut prius, BAq $\perp$ ACq; item BAq +
ACq est $\mu\nu$. & BA $\times$ AC est $\mu\nu$. Denique BC
b $\perp$ EF, atque c ideo BC $\perp$ EG, estque BC.
c 13. 10. EG d :: BCq. BC $\times$ EG, (BC $\times$ AD, vel BA
d 1. 6. $\times$ AC) e ergo BCq (ABq + ACq) $\perp$ BA $\times$
e 14. 10. AC, ergo, &c.

Schol.



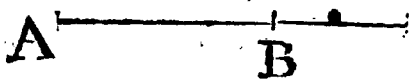
Invenire duas medias longitudine & potentia
incommensurabiles.

- a 36. 10. a Sume BC μ . sitque BA $\times$ AC $\mu\nu$, & $\perp$
b 13. 6. BCq (BAq + ACq.) b Fac BA. H :: H.
AC. Sunt BC, & H μ $\perp$. Nam BC est μ .
c 17. 6. a & BA $\times$ AC (c Hq) est $\mu\nu$. quare H est etiam
 μ .

μ . d item $BA \times AC \sqsupset BCq$; ergo $Hq \sqsupset d$ 14. 10. ;
 BCq . ergo, &c.

Principium senariorum per compositionem.

P R O P. XXXVII.

 Si duæ rationales
 AB , BC potentia
 tantum commensurabiles componantur, tota AC
 irrationalis est; vocetur autem ex binis nominibus.

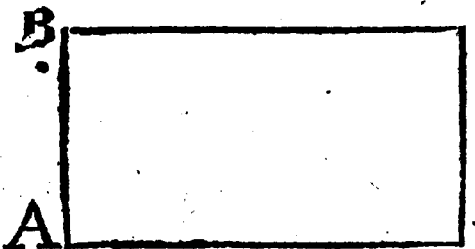
Nam quia $AB a \sqsupset BC$, b erit $ACq \sqsupset a$ hyp.
 ABq . Sed $AB a$ est $p.c$ ergo AC est p . Q.E.D. b lem. 25.

P R O P. XXXVIII.

 Si duæ mediæ AB , BC
 potentia tantum commen-
 surabiles componantur; quæ rationale contineant,
 tota AC irrationalis est; vocetur autem ex binis
 mediis prima.

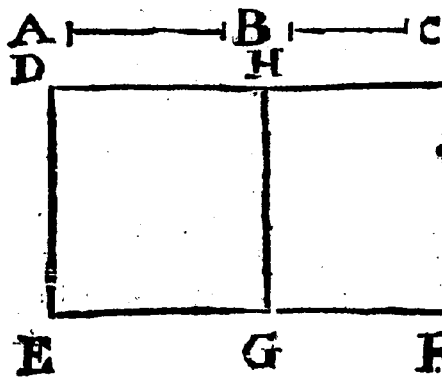
Nam quoniam $AB a \sqsupset BC$, b erit $ACq \sqsupset a$ hyp.
 $AB \times BC, p.v.$ c ergo AC est p . Q.E.D. b lem. 26.

L E M M A.

 Quod sub li-
 nea rationali
 AB , & irratio-
 nali BC conti-
 netur rectangu-
 lum AC , irrationale est.

Nam si rectang. AC dicatur $p.v$; quum AB sit a hyp.
 p ; b erit latitudo BC etiam p . contra Hyp. b 21. 10.

PROP. XXXIX.



Si duae mediae
AB, BC potentia
tantum commensu-
rabiles componan-
tur, quae medium
contineant, tota AC
irrationalis erit;
vocetur autem ex bi-
nis mediis secunda.

Ad expositam

a cor. 16. 6. DE ρ a fac rectang. DF = ACq; b & DG =
b 47. 1. & ABq + BCq.

11. 6. Quoniam ABq ϵ $\sqcup$ BCq, d erit ABq +
c hyp. BCq, hoc est DG $\sqcup$ ABq; sed ABq ϵ est $\mu\nu$.

d 16. 10. e ergo DG est $\mu\nu$. verum rectang. ABC poni-
e 24. 10. tur $\mu\nu$; e ideoque 2 ABC (f HF) est $\mu\nu$; g er-
f 4. 2. go EG, & GF sunt ρ . quia vero DG ϵ $\sqcup$ HF;
g 23. 10. atque DG. HF :: k EG. GF l erit EG $\sqcup$

h lem. 26. GF. m ergo tota EF est ρ . n quare rectang. DF
i. est $\rho\nu$. o ergo $\sqrt{DF}$, id est AC, est ρ . Q. E. D.

k 1. 6.

PROP. XL.

l 10. 10. Si duae rectae lineae AB,
m 37. 10. A B C BC potentia tantum com-

n lem. 38. mensurabiles componantur, quae faciant compositum
10. quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem
o 11. def. 10. sub ipsis continetur, medium; tota recta linea AC,

irrationalis erit: vocetur autem major.

a hyp. Nam quia ABq + BCq a est $\rho\nu$, & b $\sqcup$ 2
b sch. 12. 10 ABC ϵ $\mu\nu$, & proinde ACq (d ABq + BCq +
c hyp. & 24. 2 ABC) ϵ $\sqcup$ ABq + BCq $\rho\nu$, ferit AC ρ .

10. Q. E. D.

d 4. 2.

e 17. 10.

f 11. def. 10

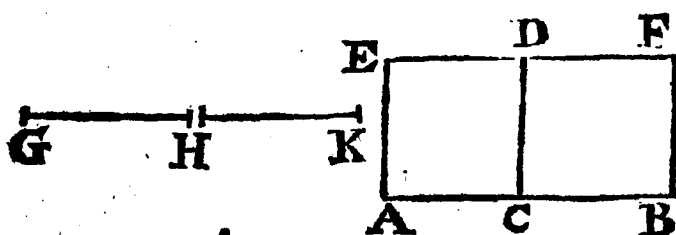
PROP.

PROP. XLI.

 Si duæ rectæ li-
neæ AC, CB po-
tentia incommensurabiles componantur, quæ faciant
compositum quidem ex ipsarum quadratis medium,
quod autem sub ipsis continetur, rationalq; tota recta
linea AB irrationalis erit: vocetur autem rationale
ac medium potens.

Nam 2 rectang. ACB, a p^s b $\square$ ACq + a hyp. &
CBq c $\mu\nu$. d ergo 2 ACB d $\square$ ABq. quare sch. 12. 10.
e AB est p. Q. E. D. b sch. 12. 10
c hyp.
d 17. 10
e II. def. 10

PROP. XLII.

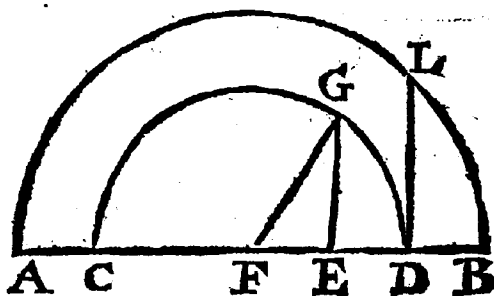


Si duæ rectæ lineæ GH, HK potentia incommen-
surabiles componantur, quæ faciant & compositum
ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis
continetur medium, incommensurabileque composito
ex quadratis ipsarum; tota recta linea GK irratio-
nalis erit: vocetur autem bina media potens.

Ad expositam FB p^s, fiant rectang. AF = GKq,
& CF = GHq + HKq Quoniam GHq +
HKq (CF) a est $\mu\nu$; latitudo CB b erit p^s. Item a hyp.
quia 2 rectang. GHK (c AD) a est $\mu\nu$, etiam b 23. 18.
AC b erit p^s. Porro quia rectang. AD a $\square$ CF, c 4. 2.
d atque AD. CF :: AC. CB, e erit AC $\square$ CB d 2. 6.
f Quare AB est g p. ergo rectang. AF, id est, e 10. 10.
GKq est p^s. b proinde GK est p. Q. E. D. f 37. 10.
g lem. 38.
10.
h II. def. 10

PROP.

P R O P. XLIII.

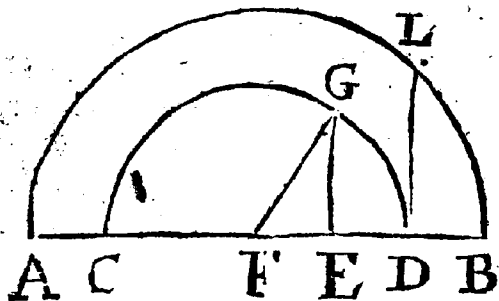


Quæ ex binis nominibus AB, ad unum duntaxat punctum D dividitur in nomina AD, DB.

Si fieri potest, binomium AB alibi in E secetur in alia nomina AE, EB. Liqueat AB secari utrobique inæqualiter, quia $AD \nparallel DB$, & $AE \nparallel EB$.

Quoniam rectangula ADB, AEB *a* sunt $\mu\alpha$;
a 37. 10. *a* & singula ADq, DBq, AEq, EBq sunt $\rho^{\circ}\alpha$; *b* 2-
b sch. 27. 10 deoque ADq + DBq, *b* & AEq + EBq etiam
 $\rho^{\circ}\alpha$, *b* idcirco ADq + DBq = AEq + EBq.
c sch. 5. 2. *c* hoc est, 2 AEB – 2 ADB est $\rho^{\circ}\nu$. *d* ergo AEB
d sch. 12. 10 – ADB $\rho^{\circ}\nu$. ergo $\mu\nu$ superat $\mu\nu$ per $\rho^{\circ}\nu$. *e* Q. E. A.
e 27. 10.

P R O P. XLIV.

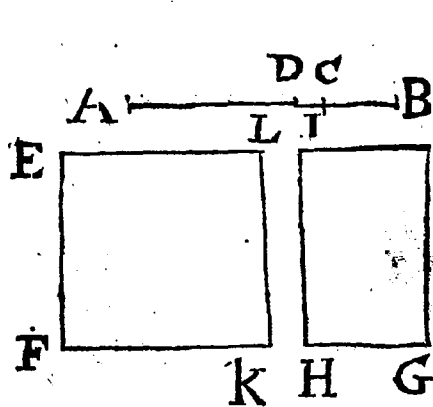


Quæ ex binis mediis prima AB, ad unum duntaxat punctum D dividitur in nomina AD, DB.

Putat AB dividi in alia nomina AE, EB. quo
a 38. 10. posito, singula ADq, DBq, EBq, *a* sunt $\mu\alpha$; *a* &
b sch. 27. 10 rectangula ADB, AEB, eorumque dupla, sunt
c sch. 5. 2. $\rho^{\circ}\alpha$. *b* ergo 2 AEB – 2 ADB, *c* hoc est ADq
d 27. 10. + DBq = AEq + EBq est $\rho^{\circ}\nu$. *d* Q. E. A.

P R O P.

PROP. XLV.



*Quæ ex binis mediis
secunda AB, ad unum
duntaxat punctum C
dividitur in nomina
AC, CB.*

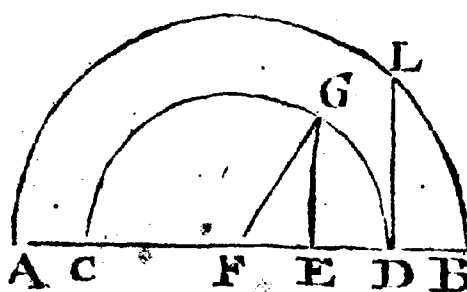
*Dic alia esse no-
mina AD, DB. Ad
expositam EF ρ , fac
rectang. EG = ABq.
& EH = ACq +*

CBq; item EK = ADq + DBq.

*Quoniam ACq, CBq a sunt $\mu\alpha$ $\square$; b erit a 39. 10.
ACq + CBq (EH) $\mu\nu$. c ergo latitudo FH b 16. & 24.
est ρ a quin & rectang. ACB, d ideoque 2 ACB 10.
e (IG) est $\mu\nu$: c ergo HG, est etiam ρ . Cum c 23. 10.
igitur EH f $\square$ IG, g atque EH. IG :: FH: d 24. 10.
HG; h erunt FH, HG $\square$. k ergo FG est bino- e 4. 2.
mium; cujus nomina FH, HG. Simili argu- f lem. 26. 10.
mento FG est bin. cujus nomina FK, KG, contra g 1. 6.
43. hujus.*

*h 10. 10.
k 37. 10.*

PROP. XLVI.



*Major AB ad unum duntaxat punctum D divi-
ditur in nomina AD, DB.*

*Concipe alia nomina AE, EB. quo posito re-
ctangula ADB, AEB a $\mu\alpha$; a & tam ADq + a 40. 10.
DBq, quam AEq + EBq sunt ρa . b ergo ADq b sch. 27. 10
+ DBq = AEq + EBq, c hoc est, 2 AEB — c sch. 5. 24.
2 ADB est ρv . d Q. F. N.*

d 27. 10.

PROP.

P R O P. XLVII.

Rationale ac medium potens
 AB, ad unum duntaxat punctum D dividitur in nomina AD, DB.

- a 41. 10. Dic alia nomina AE, EB. a ergo tam AEq + EBq, quam ADq + DBq sunt $\mu\alpha$. a & re-
 b sch. 27. ctangula AEB, ADB, sunt $\rho^c\alpha$. b ergo 2 AEB
 10. = 2 ADB, c hoc est, ADq + DBq = AEq +
 c sch. 5. 2. EBq est $\rho^c v$. Q. E. A.
 d 27. 10.

P R O P. XLVIII.

Bina media potens
 AB, ad unum duntaxat punctum C dividitur in nomina AC, CB.

Vis AB dividi in alia nomina AD, DB. Ad expositam EF ρ^c , fiant rectang. EG = ABq, & EH = ACq + CBq, & EK = ADq + DBq. Quoniam ACq + CBq, nempe EH, a est μv , b erit latitudo FH ρ^c . Item quia 2 ACB, c hoc est, IG, est a μv , b erit HG etiam ρ^c . Ergo cum EH a $\square$ IG, sitque EH. IG d :: FH. HG, e erit FH $\square$ HG. f ergo FG est bin. cujus nomina FH. HG. Eodem modo ejusdem nomina erunt FK, KG; contra 43 hujus.

- a 42. 10.
 b 23. 16.
 c 4. 2.
 d 1. 6.
 e 10. 10.
 f 37. 10.

Definitiones secundæ.

EXposita rationali, & quæ ex binis nominibus, divisa in nomina; cujus majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I. Siquidem majus nomen expositæ rationali com-

commensurabile sit longitudine, vocetur tota ex binis nominibus prima.

I I. Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, vocetur ex binis nominibus secunda.

I I I. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

Rursus, si majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis;

I V. Si quidem majus nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta.

V. Si vero minus nomen, vocetur quinta.

V I. Quod si neutrum ipsorum nominum, vocetur sexta.

P R O P. XLIX.

A 4 C 5 B

D —————

E ————— G

F

H —————

Invenire ex binis nominibus primam, EG.

a Sume AB, AC a sch. 29. numeros quadra- 10.

tos, quorum excessus CB non Q. exponatur D p. b 2. lem.

b accipe quamvis EF □ D. c fac AB. CB :: 10. 10.

EFq. FGq. erit EG bin. 1. c 3. lem.

Nam EF d □ D. e ergo EF p. f item 10. 10.

E Fq □ F Gq. g ergo F G est etiam p. item d constr.

d quia EFq. FGq :: AB. CB :: Q. non Q. h erit e 6. def. 10.

EF □ F G. denique quia per conversionem f 6. 10.

rationalis EFq. EFq — FGq :: AB. AC :: Q. Q. g sch. 12.

k erit EF □ √ EFq — FGq. l ergo E G est 10.

bin. 1. Q. E. F. h 9. 10.

k 9. 10.

Explicatio per numeros.

l 1. def. 46.

Sit D, 8. EF, 6. AB, 9. CB, 5. quare cum 10.

P 2

9. 5.

9. 5 :: 36. 20. erit FG, $\sqrt{20}$. proinde EG est 6
+ $\sqrt{20}$.

P R O P. L.

A 4 C 5 B *Invenire ex binis nomi-*
D ————— *nibus secundam, EG.*
E ———|—————G Accipe AB, & AC
 F numeros quadratos, quo-
H ————— rum excessus CB sit non

*Proba ut
præceden-
tem.*

Q. Sit D exposita ρ . sume FG $\sqsupset$ D. Fac CB.
AB :: FGq. EFq. Erit EG quæsitæ.

Nam FG $\sqsupset$ D, quare FG est ρ . item EFq
 $\sqsupset$ FGq. ergo EF est etiam ρ . item quia FGq.
EFq :: CB. AB :: non Q. Q. est FG $\sqsupset$ EF.
denique quia CB. AB :: FGq. EFq, inverſeque
AB. CB :: EFq. FGq, erit ut in præcedenti,
a 2. def. 48. EF $\sqsupset$ $\sqrt{EFq - FGq}$. a è quibus EG est bin.
10. 2. Q. E. F.

In numeris, sit D, 8 ; FG, 10 ; AB, 9 ; CB, 5.
erit EF, $\sqrt{180}$. quare EG est 10 + $\sqrt{180}$.

P R O P. LI.

A 4 C 5 B *Invenire ex binis no-*
 L 6 *minibus tertiam, DF.*

a 3. def. 29.
10.

G ————— a Sume numeros
D ———|—————F AB, AC quadratos,
 E quorum excessus CB
H ————— non Q. ſitq; L nume-

rus non Q, proxime major quam CB, nempe u-
nitæ, vel binario. ſit G exposita ρ . b Fac L. AB
b 3. lem 10 :: Gq. DEq. b & AB. CB :: DEq. EFq. erit DF
10. bin 3.

c conſtr. 6. Nam quia DEq c $\sqsupset$ Gq, d est DE ρ . item
10. Gq. DEq :: L. AB :: non Q. Q. e ergo G $\sqsupset$
d ſch. 12. 10 DE. item quia DEq e $\sqsupset$ EFq, d etiam EF
e 6. 10. est ρ quinetiam quia DEq. EFq :: AB. CB ::
f 9. 10. Q. non Q. ſeſt DE $\sqsupset$ EF. porro, quia per
conſtr.

constr. & ex æquali Gq. EFq :: L. CB :: non Q.
 Q. (nam g L, & CB non sunt similes plani nu- g sch. 27. 8.
 meri) h erit G etiam $\square$ EF. denique ut in h 9. 10.
 præced. $\sqrt{DEq} - EFq \square DE$. k ergo DF est k 3. def. 48.
 bin. 3. Q. E. F. 10.

In numeris, sit AB, 9; CB, 5; L, 6; G, 8. erit
 DE, $\sqrt{96}$ & EF, $\sqrt{\frac{480}{9}}$. quare DF = $\sqrt{96}$
 + $\sqrt{\frac{480}{9}}$.

PROP. LII.

A ... 3 C 6 B *Invenire ex binis nomi-*
 G ————— *bis quartam, DF.*
 D ————— | ————— F a Sume quemvis nume- a sch. 29.
 E rum quadratum AB, a quæ 10.
 H ————— divide in AC, CB non
 quadratos. sit G exposita p. b accipe DE $\square$ b 2. lem. 10
 G. c Fac AB. CB :: DEq. EFq. erit DF bin. 4. c 3. lem. 10
 (Nam ut in 49. hujus, DF ostendetur bin. 10.
 item, quia per constr. & conversionem rationis
 DEq. DEq - EFq :: AB. AC :: Q. non Q.
 d erit DE $\square$ $\sqrt{DEq} - EFq$. e ergo DF est d 9. 10.
 bin. 4. Q. E. F. 8: e 4. def. 48

In numeris, sit G, 8; DE, 6. erit EF $\sqrt{24}$. 10.
 ergo DF est 6 + $\sqrt{24}$.

PROP. LIII.

A ... 3 C 6 B *Invenire ex binis nomi-*
 G ————— *nibus quintam, DF.*
 D ————— | ————— F Accipe quemvis nu-
 E merum quadratum AB,
 HF *cujus segmenta AC,*
 CB sint non Q. sit G exposita p. sume EF $\square$
 G. fac CB. AB :: EFq. DEq. erit DF bin. 5.

Nam ut in 50. hujus, erit DE bin. & quia
 per constr. & invertendo DEq. EFq :: AB. a 9. 10.
 CB, ideoque per conversionem rationis DEq. b 5. def. 48
 DEq - EFq :: AB. AC :: Q. non Q. a erit 10.

DE $\sqrt{\text{DEq} - \text{EFq}}$. *ergo* DF est bin. 4.
Q. E. F.

In numeris, sit G, 7; EF, 6. erit DE $\sqrt{54}$. quare
DF est $6 + \sqrt{54}$.

P R O P. LIV.

A 5 C 7 B *Invenire ex binis nomi-*
L 9 *nibus sextam.*

G _____ Accipe AC, CB pri-
D _____ F mos numeros utcumque,
E sic ut AC + CB (AB)

H _____ sit non Q. sume etiam
quemvis L num. Q. sit G expol. $\frac{p}{q}$. fiatque L.
AB :: Gq. DEq. $\frac{p}{q}$ que AB. CB :: DEq. EFq. erit
DF. bin. 6.

Nam ut in 51. hujus, DF ostendetur bin.
item quod DE, & EF $\sqrt{\text{TL}}$ G. denique igitur
quia per const. & conversionem rationis DEq.

b fch 27. 8. DEq - EFq :: AB. AC :: non Q. Q. (Nam
AB primus est ad AC, bideoque ei dissimilis)

c 9. 10. *ergo* DE $\sqrt{\text{TL}}$ $\sqrt{\text{DEq} - \text{EFq}}$. *ergo* DF est
d 6. def. 48. bin. 6. Q. E. E.

In numeris, sit G, 6; DE $\sqrt{48}$. erit EF $\sqrt{28}$
quare DF est $\sqrt{48} + \sqrt{28}$.

p 10. 10. AG. GE :: AH. GI p erunt AH, GI; hoc est LM, MN $\square$. item iisdem positis,

7. OM $\square$ MP. Nam per Hyp. AE, $\square$ EC, q ergo EC $\square$ GE. q quare EF $\square$ GE. sed EF. GE :: EK. GI. r ergo EK $\square$ GI, hoc est SM $\square$ MN. atqui SM. MN :: OM. MP. r ergo OM $\square$ MP.

8. Sin ponatur AE $\square$ $\sqrt{AEq - ECq}$, spatet AG, GE, AE esse $\square$. unde LM $\square$ MN. nam AG. GE :: AH. GI :: LM. MN.

Hic bene perspectis, facile sex sequentes Propositiones expediemus.

PROP. LV.

Si spatium AD contineatur sub rationali AB, & ex binis nominibus prima AC, (AE + EC;) recta linea OP spatium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Suppositis iis, quæ in lemmate proxime præcedenti descripta, & demonstrata sunt, liquet rectam OP posse spatium AD. a item AG, GE, lem. 54. 10 AE sunt $\square$. ergo cum AE b sit p^c $\square$ AB, b hyp. c erunt AG, & GE, p^c $\square$ AB. d ergo rectangula AH, GI, hoc est quadrata LM, MN sunt d 20. 10. p^c a. ergo OM, MP sunt p^c e $\square$. f proinde OP e lem. 54. est bin. Q. E. D.

10. *In numeris, sit AB, 5; AC, 4 + $\sqrt{12}$. quare rectang. AD = 20 + $\sqrt{300}$ = quadr. LN. ergo OP est $\sqrt{15} + \sqrt{5}$; nempe bin. 6.*

PROP. LVI.

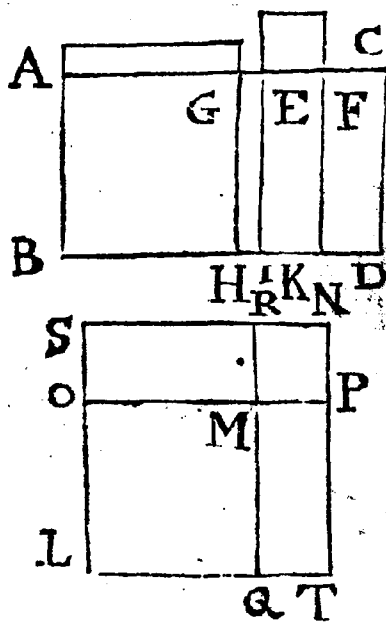
Si spatium AD contineatur sub rationali AB,
& ex binis nominibus secunda AC (AE + EC;) *recta* linea OP spatium AD potens, irrationalis est,
quæ ex binis mediis prima appellatur.

Rursus adhibito lemmate ad 54. hujus, erit
OP = $\sqrt{AD}$. a item AE, AG, GE sunt $\square$. a hyp. &
ergo quum AE b sit ρ , $\square$ AB, c erunt AG, GE lem. 54. 10
etiam ρ $\square$ AB. ergo rectangula AH, GI; b hyp.
hoc est OMq, MPq d sunt μa . e quinetiam c scb. 12. 10
OM $\square$ MP. denique EF $\square$ EC, & EC d 21. 10.
f $\square$ AB. f quare EF est ρ $\square$ AB. g ergo c lem. 54.
EK; hoc est SM, vel OMP est ρv . h Proinde 10.
OP est 2 μ prima. Q. E. D. f hyp. 12.

In numeris, sit AB, 5; & AC, $\sqrt{48}$: +6. er- 10.
go rectang. AD = $\sqrt{1200}$: +30 = OPq. g 10. 10.
ergo OP est $v\sqrt{675} + v\sqrt{75}$; nempe bimed. 1. h 38. 10.

Vide Schem. 57.

PROP. LVII.



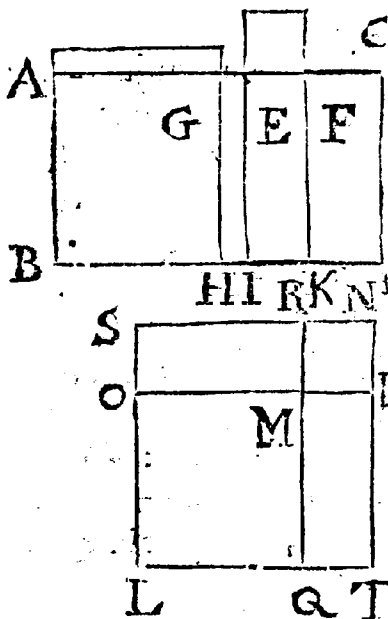
Si spatium AD
contineatur sub ratio-
nali AB, & ex binis
nominibus tertia AC
(AE+EC;) *recta*
linea OP spatium
AD potens, irratio-
nalis est, quæ ex binis
mediis secunda dici-
tur.

Ut prius, OPq =
AD. item rectangu-
la AH, GI, hoc est
OMq, MPq sunt
 μa . a item EK, vel a hyp. &
OMP est μv . b ergo 22. 10.
OP est bimed. 2. b 39. 10.

In

In numeris, sit $AB, 5$; $AC, \sqrt{32} + \sqrt{24}$. quare
 AD est $\sqrt{800} + \sqrt{600} = OPq$. proinde OP est
 $\sqrt[3]{450} + \sqrt[3]{50}$; hoc est bimed. 2.

PROP. LVIII.



Si spatium AD continetur sub rationali AB , & ex binis nominibus quarta AC ($AE + EC$;) recta linea OP spatium potens, irrationalis est, quæ vocatur major.

Nam iterum OMq a $TLMPq$ rectang. vero AI , hoc est $OMq + MPq$ b est p'v. c item EK , vel OMP est μv . d ergo OP ($\sqrt{AD}$) est major. Q. E. D.

In numeris, sit $AB, 5$; & $AC, 4 + \sqrt{8}$. ergo rectang. AD est $20 + \sqrt{200}$. quare OP est $\sqrt[3]{20 + \sqrt{200}}$.

PROP. LIX.

Si spatium AD continetur sub rationali AB , & ex binis nominibus quinta AC ; recta linea OP spatium AD potens, irrationalis est, quæ rationale & medium potens appellatur.

Rursus OMP $TLMPq$ rectang. vero AI , vel $OMq + MPq$ est μv . a item rectang. EK , vel OMP est p'v. b ergo OP ($\sqrt{AD}$) est potens p'v, & μv . Q. E. D.

In numeris, sit $AB, 5$; & $AC, 2 + \sqrt{8}$. ergo rectang. $AD = 10 + \sqrt{200} = OPq$. quare OP est $\sqrt[3]{10 + \sqrt{200}}$.

OP

Don
ational
ommi
AE-
OP
atio-
cans

Only
g. re.
dq+
tem

ergo

AB,
OP.
ONA.



ergo
OP

22

24.2.83

LN ::

- LN :: LN. IK. c quare DI. LM :: LM. IL
 h 17. 6. h ergo $DI \times IL = LMq.$ ergo cum ACq $\square$ CBq. hoc est DH $\square$ IK, & l proinde DI $\square$ IL, m erit DL $\square \sqrt{DLq - LGq}$. Q. E. D.
 m 18. 10. 6. Sin ponatur ACq $\square$ CBq, n erit DL $\square \sqrt{DLq - LGq}$.
 n 19. 10.

Hoc lemma præparationis vicem subcat pro 6. sequentibus propositionibus.

PROP. LXI.

Quadratum ejus quæ ex binis nominibus (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus primam.

- a hyp. Suppositis iis, quæ in lemmate proxime antecedenti descripta & demonstrata sunt. Quoniam AC, CB a sunt $\rho \square$, b erit rectang. DK $\square$ ACq; c ergo DK est $\rho v.$ d ergo DL $\square$ DE ρ . rectang. vero ACB, ideoque 2 ACB (LF) e est $\mu v.$ f ergo latitudo LG est $\rho \square$ d 21. 10. DE g ergo etiam DL $\square$ LG. h item DL $\square \sqrt{DLq - LGq}$. ex quibus k sequitur DG esse bin. 1. Q. E. D.
 f 23. 10.
 g 13. 10.
 h lem. 60.
 k 1. def 48.

PROP. LXII.

Quadratum ejus, quæ ex binis mediis primæ (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus secundam.

10. Rursus adhibito lemmate proxime præcedenti; Rectang. DK $\square$ ACq. a ergo DK est $\mu v.$ b ergo latitudo DK est $\rho \square$ DE. Quia vero c hyp. & ro rectang. ACB, ideoque LF (2 ACB) fcb. 12. 10. e est $\rho v.$ d erit LG $\rho \square$ DE. e ergo DL, d 21. 10. LG sunt $\square$. f item DL $\square \sqrt{DLq - LGq}$. e 13. 10. LGq. g ex quibus patet DG esse bin. 2. Q. E. D.
 f lem. 60.
 10.
 g 2. def. 48.
 81.

PROP. LXIII.

Quadratum ejus, quæ ex binis mediis secunda (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus tertiam.

Ut in præced. DL est $\rho^2 \sqcap$ DE. porro quia rectang. ACB, ideoque LF (2 ACB) a est a hyp & $\mu\nu$, b erit LG $\rho^2 \sqcap$ DE. c quinetiam DL $\sqcap$ 24. 10. LG. c itemque DL $\sqcap \sqrt{DLq} = LGq$. d ergo b 23. 10. DG est bin. 3. Q. E. D. c lem. 60. 10.

PROP. LXIV.

Quadratum Majoris (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus quartam.

Rursus ACq + CBq, hoc est DK a est $\rho^2 \nu$. a hyp. & b ergo DL est $\rho^2 \sqcap$ DE. item ACB, ideoque sch. 12. 10. LF (2 ACB) c est $\mu\nu$. d ergo LG est $\rho^2 \sqcap$ b 21. 10. DE. e proinde etiam DL $\sqcap$ LG. denique c hyp. & quia AC $\sqcap$ BC, f erit DL $\sqcap$ DLq = 24. 10. LGq. g unde DG. est bin. 4. Q. E. D. d 23. 10. c 13. 10. f lem. 60. 10.

PROP. LXV.

Quadratum ejus, quæ rationale ac medium potest, (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus quintam.

Iterum, DK est $\mu\nu$. a ergo DL est $\rho^2 \sqcap$ a 13. 10. DE. item LF est $\rho^2 \nu$. b ergo LG est $\rho^2 \sqcap$ DE. b 21. 10. c ergo DL $\sqcap$ LG. d item DL $\sqcap \sqrt{DLq} =$ c 13. 10. LGq. e proinde DG est bin. 5. d lem. 60. 10.

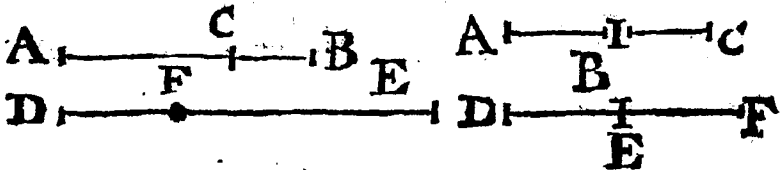
PROP. LXVI.

Quadratum ejus, quæ bina media potest (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus sextam.

Ut

a byp. Ut prius, DL & LG sunt p^c $\sqsubset$ DE.
 b 14. 10. Quia vero ACq + CBq (DK) a $\sqsubset$ ACB,
 c 1. 6. bideoque DK $\sqsubset$ LF (2 ACB) estque DK.
 d 10. 10. LF c :: DL. LG. d erit DL $\sqsubset$ LG e denique
 e lem. 60. 10 DL $\sqsubset$ $\sqrt{DLq - LGq}$. f ex quibus liquet
 f 6. def. 48. DG esse bin. 6. Q. E. D.
 10.

L E M M A.



Sint AB, DE $\sqsubset$; fiatque AB. DE :: AC
 BF.

a 19. 5. Dico 1. AC $\sqsubset$ DF. ut patet ex 10. 10.
 item CB $\sqsubset$ FE. a quia AB. DE :: CB. FE.

2. AC. CB :: DF. FE. Nam AC. DF ::
 AB. DE :: CB. FE. ergo permutando AC.
 CB :: DF. FE.

b 1. 6. 3. Rectang. ACB $\sqsubset$ DFE. Nam ACq.
 c prius. ACB b :: AC. CB c :: DF. FE :: DFq. DFE.
 d 10. 10. quare permutando ACq. DFq :: ACB. DFE.
 ergo cum ACq $\sqsubset$ DFq, d erit ACB $\sqsubset$
 DFE.

e 22. 6. 4. ACq + CBq $\sqsubset$ DFq + FEq. Nam
 f 10. 10. quia ACq. CBq c :: DFq. FEq. erit componen-
 do ACq + CBq. CBq :: DFq + FEq. FEq. ergo
 cum CBq $\sqsubset$ FEq, f erit ACq + CBq $\sqsubset$
 DFq + FEq.

g 10. 10. 5. Hinc, si AC $\sqsubset$, vel $\sqsubset$ CB, g erit pa-
 riter DE $\sqsubset$, vel $\sqsubset$ EF.

PROP. LXVII.

A ———|————B

C

D ———|————E

F

Ei, quæ ex
binis nominibus
(AC + CB)
longitudine com-
mensurabilis DE.

Et ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

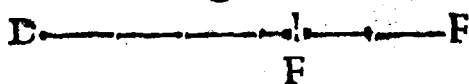
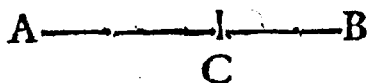
Fac AB. DE :: AC. DF. a sunt AC, DF a lem. 66.
□ ; a & CB, FE □. quare cum AC, & CB 10.
b sint ρ □, c erunt DF, FE ρ □. ergo DE b hyp.
est etiam bin. Quia vero AC. CB a :: DF. c lem. 66.
FE. si AC □, vel □ √ ACq — BCq, 10. & fcb.
d etiam similiter DF □, vel □ √ DFq — 12.10.
FEq. item si AC □, vel □ ρ expof. e erit si- d 15. 10.
militer DF □, vel □ ρ expof. at si CB □
vel □ ρ, e erit pariter FE □ vel □ ρ. Sin e 12.10. &
vero utraque AC, CB □ ρ, erit utraque etiam 14.10.
DF, FE □ ρ. g Hoc est, quodcunque bino- g Per def.
mium fuerit AB, erit DE ejusdem ordinis. 48.10.
Q. E. D.

PROP. LXVIII.

Ei, quæ ex binis mediis (AC + CB) longi-
tudine commensurabilis DE, Et ipsa ex binis mediis
est, atque ordine eadem.

a Fiat AB. DE :: AC. DF. b ergo AC □ a 12.6.
DF, & CB □ FE. ergo cum AC & CB b lem. 66,
c sint μ, d etiam DF, & FE erunt μ. & cum 10.
AC c □ CB, e erit FD □ FE. f ergo DE c hyp.
est 2 μ. Si igitur rectang. ACB sit ρ γ, quia d 24. 10.
DFE b □ ACB, g etiam DFE est ρ γ ; & si e 10. 10.
illud μ γ. b hoc etiam erit μ γ. k Id est, si AB f 38. 10.
sit bimed. 1. si bimed. 2. erit DF ejusdem ordi- g fcb. 12.10
nis. Q. E. D. h 14. 10.
k 38. vel
39.10.

P R O P. LXIX.



Majori (AC + CB) commensurabilis DE, & ipsa major est.

Fac AB. DE :: AC. DF. Quoniam AC

a hyp. *a* $\square$ CB, *b* erit DF $\square$ FE. item ACq + *b lem.* 66. CBq *a* est $\rho'v$; proinde cum DFq + FEq *b* $\square$ 10. ACq + CBq, *c* etiam DFq + FEq est $\rho'v$. *c sch.* 12. 10. denique rectang. ACB *a* est μv . *d* ergo rectang. *d* 24. 10. DFE est μv (quia DFE *b* $\square$ ACB.) *e* Quare *e* 40. 20. DE est major. Q. E. D.

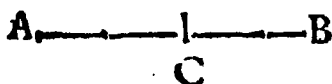
P R O P. LXX.

Rationale ac medium potenti (AC + CB) commensurabilis DE, & ipsa rationale ac medium potens est.

Iterum fac AB. DE :: AC. DF. Quia AC

a hyp. *a* $\square$ CB, *b* etiam DF $\square$ FE. item quia *b lem.* 66. ACq + CBq *a* est μv , *c* erit DFq + FEq μv . 10. denique quia rectang. ACB *c* est $\rho'v$, *d* etiam *c* 24. 10. DFE est $\rho'v$. *e* ergo DE est potens $\rho'v$, ac μv . *d sch.* 12. 10. Q. E. D. *e* 41. 10.

P R O P. LXXI.

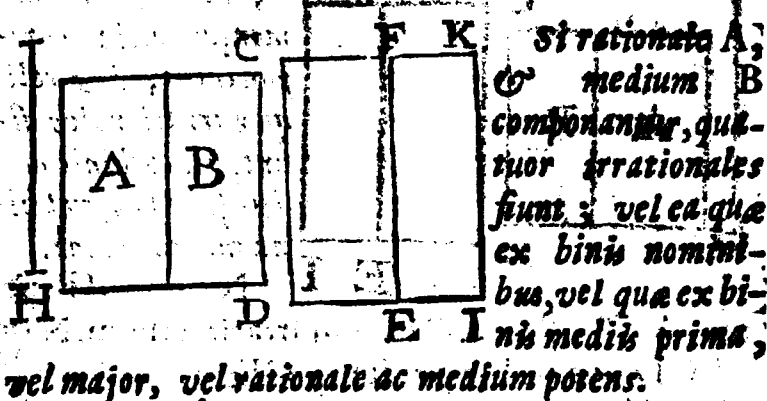


Bina media potenti (AC + CB) commensurabilis DE, & ipsa bina media potens est.

a hyp. Divide DE, ut in præced. Quia ACq *a* $\square$ *b lem.* 66. CBq, *b* erit DFq $\square$ FEq. item quia ACq + CBq *a* est μv , *c* erit DFq + FEq etiam μv . 10. pariterque quia ACB *a* est μv , *d* etiam DFE est μv . *d* 24. 10. denique quia ACq + CBq $\square$ ACB, *e* erit

e erit DFq + FEq $\square$ DFE. f è quibus sequitur e 14. 10.
DE esse potentem 2μ . Q. E. D. f 42. 10.

P R O P. LXXII



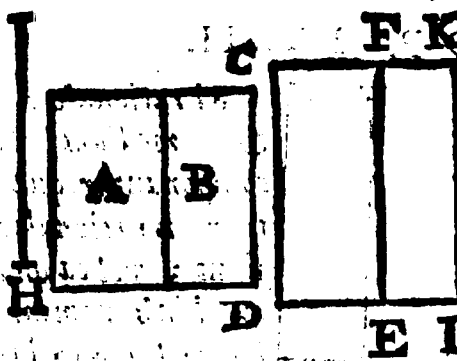
Nimirum si $Hq = A + B$, erit H una 4 linearum, quas theorema designat. Nam ad CD expositum ρ , a fiat rectang. $CE = A$; item FI a cor. 16. 6. $= B$; b ideoque $CI = Hq$. Quoniam igitur A b 2. ax. 1. est ρ , etiam CE est ρ . c ergo latitudo CF c 21. 10. est ρ $\square$ CD. & quia B est μ , erit FI μ . d 23. 10. d ergo FK est ρ $\square$ CD. e ergo CF, FK sunt e 13. 10. ρ $\square$. Tota igitur CK f est bin. Si igitur A f 37. 10. $\square$ B, hoc est $CE \square FI$, g erit $CF \square FK$. ergo g 1. 6. si $CF \square \sqrt{CFq - FKq}$, h erit CK bin. 1. & h 1. def. proinde $H = \sqrt{CI}$ k est bin. Si ponatur CF 48. 10. $\square \sqrt{CFq - FKq}$, l erit CK bin. 4. quare k 55. 10. H ($\sqrt{CI}$) m est major. Sin $A \square B$; g erit 14. def. 48. $CF \square FK$; proinde si $FK \square \sqrt{FKq - CFq}$, 10. n erit CK bin. 2. o quare H est 2μ prima. de m 58. 10. nique si $FK \square \sqrt{FKq - CFq}$, p erit CK bin. 5. n 2. def. 48. q unde H erit potens ρ ac μ . Q. E. D. 10.

o 56. 10.
p 5. def. 48.
10.
q 59. 10.

Q

P R O P.

PROP. LXXIII.



Si duo media A, B, inter se incommensurabilia componantur, dua reliqua irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel binaria media potens.

Nempe H potens A+B est una dictarum irrationalium. Nam ad CD, expol. p, fac rectang. CE=A, & FI=B. unde Hq = CI. Quoniam igitur CE, & FI a sunt, uterunt latitudines CE, FK p' CD. item quia CE FI; estque CE. FI c:: CE. FK, d erit CE FI FK. e ergo CK est bin. 3. nempe, si CE FI CFq-FKq. unde H = CI f erit 2 μ 2a. Sin vero CE FI CFq-FKq, g erit CK bin. 6. & b proinde H est potens 2 μ d. Q. E. D.

Principium Senariorum per
detractionem:

PROP. LXXIV.

Si à rationali DF rationalis DE auferatur, potentia tantum commensurabilis existens toti DF; reliqua EF irrationalis est: vocetur autem apotome.

Nam EFq a DEq; sed DEq b est p' v c ergo EF est p. Q. E. D.

In numeris, sit DF, 2; DE, √3. EF erit 2-√3.

P R O P. LXXV.

D **E F** Si à media DF media DE
 _____ auferatur, potentia tantum
 commensurabilis existens toti DF, quæ cum tota
 DF rationale contineat, reliqua EF irrationalis est;
 vocetur autem media apotome prima.

Nam EFq a $\square$ rectang. FDE. ergo cum a sch. 26.
 FDE b sit p^v, c erit EF p. Q. E. D. 10.

In numeris, sit DF v $\sqrt{54}$; & DE v $\sqrt{24}$. ergo b hyp.
 EF est v $\sqrt{54} - v\sqrt{24}$. c 20. cor.
 11. def. 10.

P R O P. LXXVI.

D **E F** Si à media DF media DE
 _____ auferatur, potentia tantum
 commensurabilis existens toti DF, quæ cum tota
 DF medium contineat; reliqua EF irrationalis est;
 vocetur autem media apotome secunda.

Quia DFq, & DEq, a sunt $\mu\alpha$ $\square$, a hyp.
 b erit DFq + DEq $\square$ DEq c quare DFq b 16. 10.
 + DEq est $\mu\nu$. item rectang. FDE, c ideoque c 24. 10.
 2 FDE a est $\mu\nu$. ergo EFq (d DFq + DEq - d cor. 7. 2.)
 2 FDE) c est p^v. quare EF est p. Q. E. D. c 27. 10.

In numeris, sit DF, v $\sqrt{18}$; & DE, v $\sqrt{8}$. erit
 EF v $\sqrt{18} - v\sqrt{8}$.

P R O P. LXXVII.

A **B** **C** Si à recta linea AC recta
 _____ auferatur AB, potentia in-
 commensurabilis existens toti BC, quæ cum tota AC
 faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis ra-
 tionale, quod autem sub ipsis continetur medium, re-
 liqua BC irrationalis est: vocetur autem minor. a hyp.

Nam ACq + ABq a est p^v. ac rectang. ACB b sch. 12. 10
 a est $\mu\nu$. b ergo 2 CAB $\square$ ACq + ABq c 7. 2.
 (c 2 CAB + BCq;) d ergo ACq + ABq $\square$ d 17. 10.
 BCq. e ergo BC est p. Q. E. D. e 11. def. 10

In numeris, sit AC, $\sqrt{18} + \sqrt{108}$. AB $\sqrt{18 - \sqrt{108}}$. ergo BC est $\sqrt{18 + \sqrt{108}}$.
 $\sqrt{18 - \sqrt{108}}$.

P R O P. LXXVIII.

D ——— E ——— F

Si à recta linea DF re-
 sta auferatur DE potentia
 incommensurabilis existens toti DF, quæ cum tota
 DF faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis
 medium, quod autem sub ipsis continetur, rationale;
 reliqua EF irrationalis est: vocetur autem cum rati-
 onali medium totum efficiens.

a hyp. & Nam 2 FDE a est p. v. b & DFq + DEq est
 sch. 12. 10. μ . v. c ergo 2 FDE $\sqsupset$ DFq + DEq d (2 FDE
 b hyp. + EFq) e ergo EF est p. Q. E. D.

c sch. 12. 10 In numeris, sit DF, $\sqrt{216} + \sqrt{72}$. DE,
 d 7. 2. $\sqrt{216} - \sqrt{72}$. ergo EF est $\sqrt{216 + \sqrt{72}}$
 e sch 12. 10 $\sqrt{72} - \sqrt{216} - \sqrt{72}$.

& 11. def.
 10.

P R O P. LXXIX.

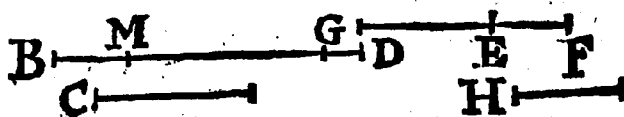
D ——— E ——— F

Si à recta DF recta auferatur
 DE, potentia incommensurabilis
 existens toti DE, quæ cum tota faciat & compo-
 situm ex ipsarum quadratis, medium; & quod sub
 ipsis continetur, medium, incommensurabileque com-
 posito ex quadratis ipsarum, reliqua irrationalis est:
 vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

a hyp. & Nam 2 FDE; & DFq + DEq a sunt μ a;
 24. 10. b ergo EFq (c DFq + DEq - 2 FDE) est p.
 b 27. 10. d proinde EF est p. Q. E. D.

c cor. 7. 2. Exempl. gr. sit DF, $\sqrt{180} + \sqrt{60}$. DE,
 d 11 def. 10 $\sqrt{180} - \sqrt{60}$. EF erit $\sqrt{180 + \sqrt{60}}$
 $60 - \sqrt{180} - \sqrt{60}$.

LEMMA.



Si idem sit excessus inter primam magnitudinem BG, & secundam C (MG) qui inter tertiam magnitudinem DF, & quartam H (EF;) erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem BG, & tertiam DF, qui inter secundam C, & quartam H.

Nam quia a æqualibus BM, DE adjectæ sunt inæquales MG, EF, a hoc est C, H; erit excessus a hyp. totorum BG, DF, b æqualis excessui adjectorum, b 15. ax. 1. C, H. Q. E. D.

Coroll.

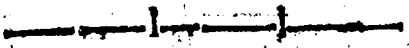
Hinc; quatuor magnitudines Arithmetice proportionales, vicissim erunt Arithmetice proportionales.

PROP. LXXX.

B I D C Apotoma AB una tantum congruit recta lineæ rationalis BC, potentia tantum commensurabilis existens toti AB.

Si fieri potest, alia BD congruat. a ergo re- a 22. 10.
ctangula ACB, ADB; b ideoque eorum dupla b 24. 10.
sunt μa . cum igitur $ACq + BCq = 2 ACB$ c cor. 7. 2.
 $ABqc = ADq + DBq = 2 ADB$. ergo vicissim d lem. 79.
 $ACq + BCq = ADq + BDq$ d $= 2 ACB =$ 10.
 $2 ADB$. Sed $ACq + BCq = ADq + BDq$ e est e hyp. &
p'v. f ergo $2 ACB = 2 ADB$ est p'v. Q. E. D. 27. 10.
f sch. 12. 10.
g 27. 10.

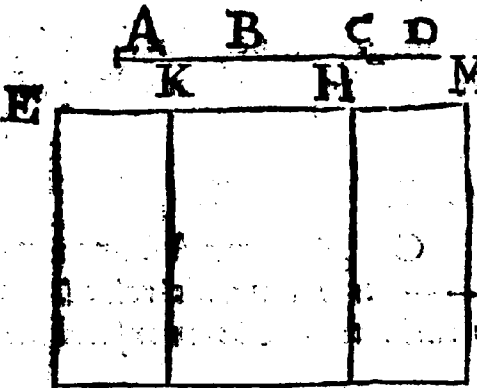
PROP. LXXXI.


 Media Apotoma pri-
 ma AB una tantum
 congruit recta linea media BC, potentia solum com-
 mensurabilis existens toti, & cum tota rationale
 continens.

Dic etiam BD congruere. igitur quoniam
 tam ACq, & BCq; quam ADq, & BDq a sunt
 a hyp. b 16. & 24. $\mu\alpha$ $\square$. etiam ACq+BCq, & ADq+BDq
 10. erunt $\mu\alpha$. c sed rectangula ACB, ADB; d adeoq;
 c hyp. 2 ACB, & 2 ADB sunt $\rho\alpha$. e ergo 2 ACB
 d sch. 12. 10. = 2 ADB; f hoc est ACq+BCq = ADq
 e sch. 27. + BDq est $\rho\alpha$. g Q. B. A.
 10.

f 7. 2. &
 lem. 79. 10.
 g 27. 10.

PROP. LXXXII.


 Media Apoto-
 ma secunda AB
 una tantum con-
 gruit recta linea
 media BC, po-
 tentia solum com-
 mensurabilis exi-
 stens toti, & cum
 tota medium con-
 tinens.

Si fieri potest,
 congruat alia BD. Ad EF ρ fiant rectang. EG =
 ACq+BCq; item rectang. EL = ADq+BDq.
 Item EI = ABq. Jam 2 ACB+ABq = ACq+
 BCq = EG, ergo cum EI = ABq, a erit KG = 2
 ACB. porro ACq, & BCq b sunt $\mu\alpha$ $\square$.
 c Ergo EG (ACq+BCq) est $\mu\alpha$. d ergo la-
 titudo EH ρ $\square$ EF. e Quinetiam rectang.
 ACB; f ideoque 2 ACB (KG) est $\mu\alpha$. d ergo
 KH est etiam ρ $\square$ EF. denique quia ACq+
 BCq, id est, EG, g $\square$ 2 ACB (KG) estque
 EG.

a 4. 2. & 3.
 ex. 1.
 b hyp.
 c 24. 10.
 d 23. 10.
 e hyp.
 f 24. 10.
 g lem. 26.
 10.

ft.
= Dq
q+
= 1
1-
ng.
go
q+
pe
G

Minori AB, una tan-
 tum congruit recta li-
 nea (BC) potentia incommensurabilis existens toti,
 & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum
 quadratis rationale; quod autem sub ipsis continetur
 medium.

Puto alium BD congruere. Cum igitur ACq
+ B Cq, & A Dq + B Dq a sint p_a, eorum ex- a hyp.
cessus (2 B A C B —; 2 A D B) c est p_u, d Q. E. A; b lem. 97
quia ACB, & ADB sunt p_a per hypoth.

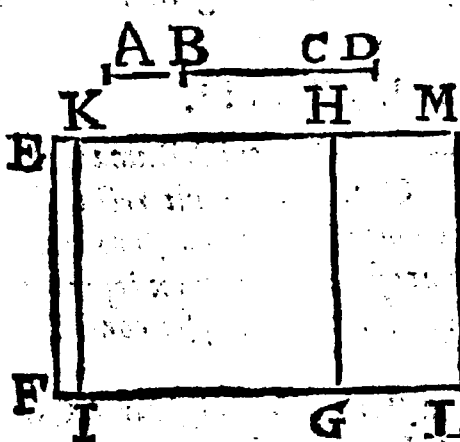
 Ei (AB,) quæ cum
A B D C rationali medium totum
facit, una tantum congruit rectæ lineæ BO, potentia
incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens
compositum quidem ex ipsarum quadratis medium,
quod autem sub ipsis consistetur, rationale.

Dic aliam BD etiam congruere. & ergo re- a hyp.
 Angula ACB, ADB. b ideoque 2 ACB, & 2 b sch. 12. 10
 ADB sunt p^a. ergo 2 ACB = 2 ADB; c hoc c lem. 79.
 est, A Cq + B Cq = A Dq + B Dq d est p^a 10.
 Q. E. A: quum A Cq + B Cq, & A Dq + b sch. 27. 10
 BDq sint μ a per hypoth.

Q. 4

PROF.

PROP. LXXXV.



Ei (AB,) quæ
cum medio medium
totum facit una
tantum congruit re-
cta linea BC poten-
tia incommensura-
bilis existens toti,
& cum tota faciens
& compositum ex
ipsarum quadratis
medium, & quod

sub ipsis continetur, medium, incommensurabile quo
composito ex ipsarum quadratis.

Suppositis iis quæ facta & ostensa sunt in 82
huius; liquet EH, & KH esse $\square$ EF. Porro
igitur quia $ACq + CBq$, hoc est, rectang. EG
a $\square$ ACB, b ideoque EG $\square$ 2 ACB (KG)
estque EG. KG :: c EH. KH; erit EH $\square$
KH. ergo EK est apotome, cujus congruens KH.
Haud aliter KM eidem apotomæ EK. congruere
ostendetur; contra 80 huius.

a hyp.

b 14. 10.

c 1. 6.

Definitiones tertia.

Exposita rationali, & apotoma, si tota plus
possit quam congruens quadrato rectæ lineæ
sibi longitudine commensurabilis;

I. Si quidem tota expositæ rationali longitu-
dine sit commensurabilis, vocetur apotome pri-
ma.

II. Si vero congruens expositæ rationali lon-
gitudine sit commensurabilis, vocetur apotome
secunda.

III. Quod si neque tota, neque congruens
expositæ rationali sit longitudine commensura-
bilis, vocetur apotome tertia.

Rur;

Rursus, si tota plus possit quam congruens quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis;

IV. Si quidem tota expositæ rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quarta.

V. Si vero congruens expositæ rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quinta.

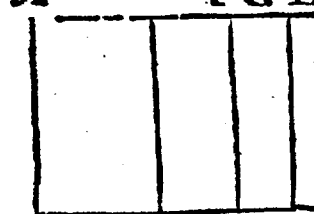
VI. Quod si neque tota, neque congruens, expositæ rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome sexta.

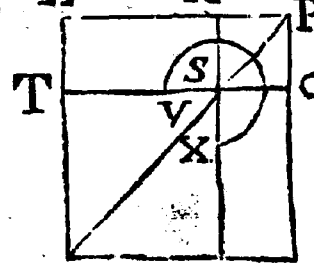
P R O P. LXXXVI, 87, 88, 89, 90, 91.

A ... 4 C ... 5 B *Invenire apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam.*
 D —————
 E ————— F

G
 H —————
 Apotomæ inveniuntur, subductis minoribus binomiorum nominibus ex majoribus. Exemp. gr. Sit $6 + \sqrt{20}$, bin. 1. erit $6 - \sqrt{20}$, apot. 1. &c. Quare de earum inventione plura repetere nihil est necesse.

L E M M A.

A D F G E *Si rectangulum AC sub rectis AB, AD. producat*

 B I C N K H I *AD ad E, & bisecetur DE in F. fitque rectang. AGE = FEq. & compleantur rectangula AI, DK, FH. Fiant vero quadratum LM = AH, & quadratum NO = GI, producanturque NSR, OST.*



Dico primo, rectangul.
 $AI = LM + NO = TOq + SOq$. ut patet ex constr.

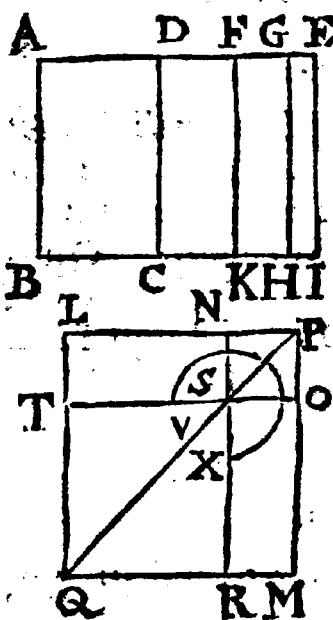
Q R M

Se

Secundo, *Rectang.* $DK = LO$. Nam quia
 a *constr.* *rectang.* $AGE = EEq$, b sunt AG, FB, GE
 b 17. 6. $\therefore$, adeoque AH, FI, GI ; & hoc est, LM ,
 c 1. 6. FI, NO ; atqui LM, LO, NO d sunt ; ergo
 d sch. 22. 6. $FI = e LO = f DK = g NM$.
 e 9. 5. Tercio, *Hinc*, $AC = AI - DK - FI =$
 f 35. 1. $LM + NO - LO - NM = TR$.
 g 43. 1. Quarto, b *Liquet* DF, FE, DE esse $\square$.
 h 16. 10. Quinto, *Si* $AE \perp DB$, & $AE \perp \sqrt{AEq}$
 k 18. 10. & $- DEq$, k erunt $AG, GE, AE \perp$.
 l 10. 10. Sexto, *Item*, quia $AE \perp DB$, m erunt $AE,$
 l hyp. $FE \perp$, n ideoque AI, FI ; hoc est, $LM + NO$
 m 13. 10. & LO sunt $\square$.
 n 1. 6. & Septimo, *Item* quia $AG \perp GE$, n erunt AH
 o 10. 10. GI , hoc est, $LM, NO \perp$.
 * prius. Octavo, *Sed* quia $AE \perp DE$, o erunt $FE,$
 o 14. 10. $GE \perp$, n ideoque *rectang.* $FI \perp GI$, hoc est LO
 p 2. 6. $\perp NO$, quare cum LO, NO p :: TS, SO q erunt
 q 10. 10. $TS, SO \perp$.
 r 19. 10. Nono, *Si* ponatur $AE \perp \sqrt{AEq} - DEq$;
 & 17. 10. r erunt $AG, GE, AE \perp$.
 s 1. 6. & 10 Decimo, *f* Quare *rectang.* AH, GI , hoc est
 10, TOq, SOq erunt $\square$.

P R O P.

P R O P. XCII.



Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & Apotoma prima AD (AE = DE;) recta linea TS spatium AC potens, apotome est.

Adhibe lemma proxime antecedens pro præparatione ad demonstrationem hujus. Igitur $TS = \sqrt{AC}$. item AG, GE, AB sunt $\perp$; ergo cum AE $\perp$ AB; erunt AG, & GE $\perp$ AB. & ergo rectangula AH & GI, hoc est TOq & SOq sunt p^a . d item TO,

a hyp.
b 12. 10.
c 20. 10.
d lem. 91.
10.
e 74. 10.

SO sunt p^a $\perp$, & proinde TS est apotome. Q. E. D.

P R O P. XCIII.

Vide Schem. præced.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma secunda AD (AE = DE;) recta linea TS spatium AC potens; media est apotome prima.

Rursus juxta lemma antecedens, AG, GE, AE sunt $\perp$. cum igitur AE $\perp$ AB, erunt AE, GE etiam $\perp$ AB. & ergo rectangula AH, GI, hoc est TOq, SOq, sunt μa ; d item TO $\perp$ SO. Denique quia DE $\perp$ AB. p^a f erit rectang. DI, ejusque semissim DK, vel LO, hoc est TOS p^a g è quibus sequitur TS ($\sqrt{AC}$) esse mediet apot. 1. Q. E. D.

a hyp.
b 13. 10.
c 22. 10.
d lem. 74.
10.
e hyp.
f 20. 10.
g 75. 10.

PROP. XCIV.

Vide idem.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma tertia AD (AE — DE;) recta linea TS spatium AC potens, media est apotome secunda.

Ut in præcedenti TO, & SO sunt μ . Quoniam igitur DE a est p^c $\perp$ AB, b erit rectang. DI, c ideoque DK; vel TOS μv . d ergo TS = $\sqrt{AC}$ est medix apot. 2. Q. E. D.

a hyp.

b 22. 10.

c 24. 10.

d 76. 10.

PROP. XCV.

Vide idem.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma quarta AD (AE — DE) recta linea TS spatium AC potens, minor est.

Rursus TO a $\perp$ SO. Quoniam igitur AE b est p^c $\perp$ AB, c erit AI, (TOq + SOq) p^v . atqui ut prius rectang. TOS est μv . d ergo TS = $\sqrt{AC}$ est minor. Q. E. D.

a lem. 91.

10.

b hyp.

c 20. 10.

d 77. 10.

PROP. XCVI.

Vide idem.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma quinta AD (AE — DE;) recta linea TS spatium AC potens, est quæ cum rationali medium totum efficit.

Rursus enim TO $\perp$ SO. itaque cum AE a sit p^c $\perp$ AB, b erit AI, hoc est TOq + SOq μv . Sed prout in 93 rectang. TOS est p^v . c proinde TS = $\sqrt{AC}$ est quæ cum p^v facit totum μv . Q. E. D.

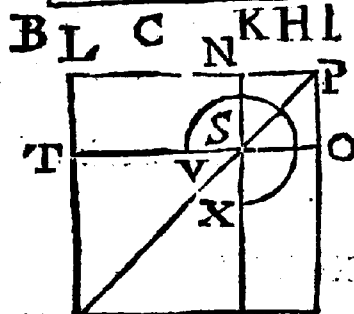
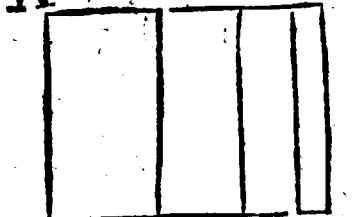
a hyp.

b 22. 10.

c 78. 10.

PROP. XCVII.

A D F G E



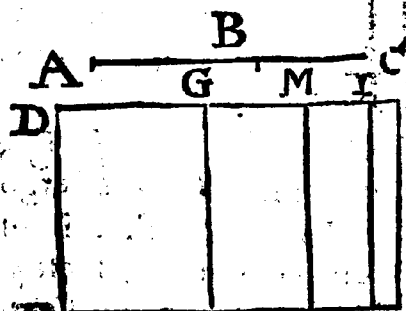
Q R M

$= \sqrt{AC}$ est quæ cum $\mu\nu$ facit totum $\mu\nu$,
Q. E. D.

Si spatium AC conti-
neatur sub rationali AB,
& apotoma sexta AD
(AE - DE;) recta
linea TS spatium AC
potens, est quæ cum me-
dio medianum totum effi-
cit.

Idem, ut sæpe prius;
TO $\square$ SO. item ut in
96, TOq + SOq est
 $\mu\nu$. rectang. vero TOS
est p^2 , ut in 94. a deni- a lem. 91.
que TOq + SOq 10.
 $\square$ TOS. b ergo TS b 79. 10.

LEMMA.



F N H K

Ad rectam quam-
vis DE * applicen- * cor. 16. 6.
tur rectang. DF =
ABq, & DH =
ACq, & IK =
BCq; & sit GL
bisecta in M; ducta
que sit MN parall.
GF.

Erit primo, Rectang. DK = ACq + BCq, ut
construatio indicat.

Secundo, Rectang. ACB = GN, vel MK.
Nam DK a = ACq + BCq b = 2 ACB + a constr.
ABq. at ABqa = DF. ergo GK c = 2 ACB. b 7. 2.
& d proinde GN, vel MK = ACB. c 3. ax. 14

Tertio, Rectang. DIL = MLq. Nam quia d 7. ax. 14
ACq. ACBe :: ACB. BCq; hoc est DH. e 1. 6.
MK

f 17. 6. $MK :: MK. IK$, e erit $DI.ML :: ML. IL$. f ergo $DIL = MLq$.

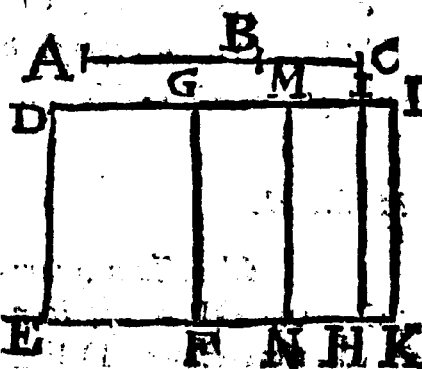
Quarto, Si ponatur $AC \perp BC$, erit $DK \perp ACq$. Nam $A Cq + B Cq (DK) g \perp ACq$.

Quinto, Item, $DL \perp \sqrt{DLq - GLq}$.
h 10. 10. Nam quia $DH (ACq) \perp IK (BCq)$ h erit DI
k 18. 10. $\perp IL$. k ergo $\sqrt{DLq - GLq} = DL$.

Sexto, Item $DL \perp GL$. Nam $A Cq + BCq \perp l \angle ACB$; hoc est, $DK \perp GK$. m ergo $DL \perp GL$.

Septimo, Si ponatur $AC \perp BC$, n erit $DL \perp \sqrt{DLq - GLq}$.

PROP. XCVIII.



Quadratum apotome AB ($AG = BC$) et rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen primam.

Fac ut in lemma te proxime precedenti.

Quantum igitur AC, BC a sunt $p \perp$;
b lem. 97. h erit $DK (ACq + BCq) \perp ACq$; e ergo
10. DK est p . d quare DL est $p \perp DE$. e item
c sch. 12. 10. DK est p . g proinde $DL \perp GL$; b sed DHq
d 21. 10. $\perp GLq$. k ergo DG est apotome, & l quidem
e 22. & 24. prima (quia m $AC \perp BC$, & propterea DL
10. $\perp \sqrt{DLq - GLq}$) Q. E. D.

g 13. 10.

h sch. 12. 10.

k 74. 10.

l. def. 85.

m 10.

n lem. 97.

10.

PROP.

PROP. XCIX.

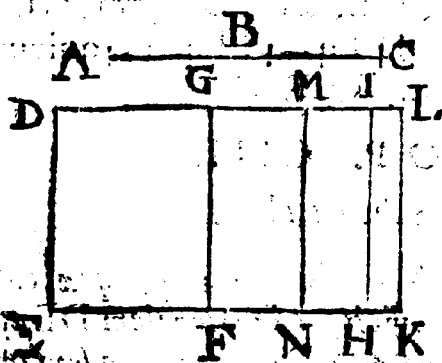
Vide Schema subsequens.

Quadratum mediae apotomae primae AB (AC-BC) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen secundam.

Rursus (supposito lemmate precedenti) quia AC, & BC a sunt μ $\sqcup$ b, erit DK (ACq+BCq) $\sqcup$ ACq; c quare DK est μ v. d ergo DL est ρ $\sqcup$ DE. e item GK (2. ACB) est ρ v f ergo GL est ρ $\sqcup$ DE; g quare DL $\sqcup$ GL. h Sed DLq $\sqcup$ GLq. k ergo DG est apotome. quia vero DL l $\sqcup$ $\sqrt{DLq - GLq}$, m erit DG apotome secunda. Q.E.D.

a hyp.
b lem. 97.
10.
c 24. 10.
d 23. 10.
e hyp. &
sch. 12. 10.
f 21. 10.
g 13. 10.
h sch. 12.

PROP. C.



Quadratum mediae apotomae secundae AB (AC-BC) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen tertiam.

Iterum DK est

μ n, & quare DL est ρ $\sqcup$ DE. item GK est μ v. a unde GL est ρ $\sqcup$ DE; b item DK $\sqcup$ GK, c quare DL $\sqcup$ GL; d at DLq $\sqcup$ GLq. e ergo DG est apot., & quidem f 32. g quia DL $\sqcup$ $\sqrt{DLq - GLq}$. Q.E.D.

a 23. 10.
b lem. 26.
10.
c 1. 6. &
10. 10.
d sch. 12.
10.
e 74. 10.
f 3. def. 85.
10.

PROP. CI.

Vide Schema preced.

Quadratum minoris AB (AC-BC) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen quartam.

g lem. 97.
10.

tionalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen quartam.

Utr prius, $ACq + BCq$, hoc est DK est p^2v ;
 a 21. 10. a ergo DL est p^2 $\square$ DE. at rectang. ACB, ide-
 * hyp. oque GK (2 ACB) * est μv , b quare GL est p^2
 b 23. 10. $\square$ DE. c ergo DL $\square$ GL. d at DLq $\square$
 c 13. 10. GLq. quia vero * $ACq \square BCq$, e erit DL $\square$
 d sch. 12. 10. $\sqrt{DLq - GLq}$: f ergo DG conditiones habet
 e lem. 97. apotomæ quartæ. Q. E. D.

10.

f 4. def. 85.

10.

P R O P. CII.

Vide Schem. præced.

Quadratum ejus AB ($AC - BC$), quæ cum
 rationali medium totum efficit, ad rationalem DE
 applicatum, facit latitudinem DG apotomen quin-
 tam.

Rursus enim, DK est μv , a quare DL est p^2
 b 21. 10. $\square$ DE. item GK est p^2v , b unde GL est p^2 . $\square$
 c 13. 10. DE. c ergo DL $\square$ GL, d sed DLq $\square$ GLq.
 d sch. 12. 10. porro, DL e $\square \sqrt{DLq - GLq}$. ex quibus,
 e lem. 97. DG f est apot. quinta. Q. E. D.

10.

f 5. def. 85.

10.

P R O P. CIII.

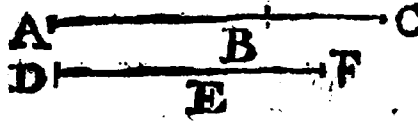
Vide Schema idem.

Quadratum ejus AB ($AC - BC$), quæ cum
 medio medium totum efficit, ad rationalem DE ap-
 plicatum, facit latitudinem DG apotomen sextam.

Haud aliter, quam antea, DK, & GK sunt
 a 23. 10. μa ; a quare DL & GL sunt p^2 $\square$ DE. item
 b hyp. & DK b $\square$ GK, c quare DL $\square$ GL. d ergo
 lem. 97. 10. DG est apot. b cum igitur $ACq \square BCq$, ideo-
 c 10. 10. que DL $\square \sqrt{DLq - GLq}$, e erit DG. apot.
 d 74. 10. sexta. Q. E. D.
 e 6. def. 85.

10.

PROP. CIV.


 Recta linea DE a-
 potomæ AB (AC-
 BC) longitudine com-
 mensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine ca-
 dem.

LEMMA.

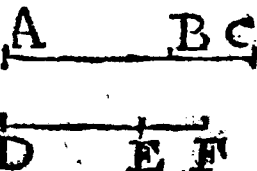
Sit AB. DE :: AC. DF. & AB $\perp$ DE.

Dico AC + BC $\perp$ DF + EF.

Nam AC.BC a :: DF.EF. ergo componendo
 AC+BC. BC :: DF+EF.EF. ergo permutando
 AC + BC. DF+EF :: BC. EF. a at BC $\perp$ EF, a lem. 66.
 b ergo AC+BC $\perp$ DF+EF. Q.E.D. 10.

a Fac AB. DE :: AC. DF. b Igitur AC + b 10. 10.
 BC $\perp$ DF+EF. ergo cum AC+BC c binomi. a 12. 6.
 um sit, d erit DF+EF ejusdem ordinis binomi- b lem. 103.
 um: e quare DF-EF ejusdem ordinis apotome 10.
 est, cujus AC-BC. Q.E.D. c hyp.

PROP. CV.


 Recta linea DE medix apoto-
 mæ AB (AC-BC) commensu-
 rabilis, & ipsa medix apotome
 est, atque ordine eadem.

Iterum a fac AB. DE :: AC. DF. b quare a 12. 6.
 AC + BC $\perp$ DF + EF. c ergo DF + EF est b lem. 103.
 bimed. ejusdem ordinis, cujus AC + BC. 10.
 d proinde & DF-EF medix apotome erit ejus- c 68. 10.
 dem classis, cujus AC-BC. Q.E.D. d 75 & 76.
 10.

P R O P. CVI.

Recta linea DE

Minori AB (AC
-BC) commensu-

rabilis, & ipsa minor est.

a lem. 103. Fiat $AB : DE :: AC : DF$. a estque $AC + BC$
 10. $\perp DF + EF$. atqui $AC + BC$ b est Major,
 b hyp. c ergo $DF + EF$ quoque Major est. d & proinde
 c 69. 10. $DF - EF$ est Minor. Q. E. D.

d 77. 10.

P R O P. CVII.

Recta linea DE commensu-
 rabilis ei AB ($AC - BC$) quæ
 cum rationali medium totum
 efficit, & ipsa cum rationali me-
 dium totum efficiens est.

Nam ad modum præcedentium ostendemus
 a 78. 10. $DF + EF$ esse potentem ρr , & μr . a ergo DF
 $- EF$ est ut dicitur.

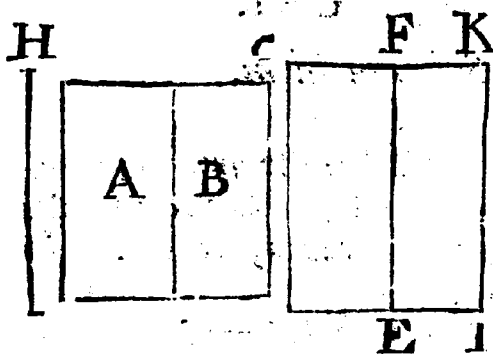
P R O P. CVIII.

Recta linea DE com-
 mensurabilis ei AB
 ($AC - BC$) quæ cum
 medio medium totum ef-

ficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est.

Nam, ad normam præcedentium, erit $DF +$
 a 79. 10. EF potent $2 \mu a$. a ergo $DF - EF$ erit ut in pro-
 pos.

PROP. CIX.



Medio B à rationali A+B detracto, recta linea H, qua reliquum spatium A potest, una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel Minor.

Ad CD ρ , fac rectang. CI = A+B; & FI = B. quare CE = A: (Hq) Quoniam igitur CI b est ρy , erit CK ρ $\square$ CD. sed quia FI b est μv , d erit FK ρ $\square$ CD. e unde CK $\square$ FK f ergo CF est apotome. Si igitur CK $\square$ CKq - FKq g erit CF apot. prima; b quare CE (H) est apotome. sin CK $\square$ CKq - FKq, k erit CF apot. quinta. & proinde H (CE) l erit Minor. Q. E. D.

PROP. CX.

Vide Schem. preced.

Rationali B à medio A+B detracto; alia duae irrationales fiunt, vel mediae apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Ad CD expos. ρ fiant rectang. CI = A+B; & FI = B, a unde CE = A = Hq Quoniam igitur CI b est μv , c erit CK ρ $\square$ CD. sed quia FI b est ρy , d erit FK ρ $\square$ CD. e unde CK $\square$ FK. f ergo CF est apot. g nempe secunda; si CK $\square$ CKq - FKq, b quare H ($\sqrt{CE}$) est mediae apot. prima. Sin vero CK $\square$ CKq - FKq, k erit CF apot. quinta. & pr. inde H ($\sqrt{CE}$) l erit faciens μv cum ρy . Q. E. D.

P R O P. CXI.

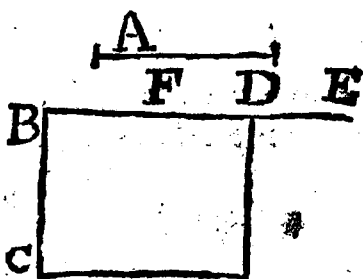
Vide Schema idem.

Media B à medio A+B detractio quod sit incom-
mensurabile toti A+B; reliqua dua irrationalia
sunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio
medium totum efficiens.

Ad CD ρ fiant rectang. $CI = A + B$; &
a 3. ax. 1. $FI = B$, a quare $CE = A = Hq$. Quoniam
b 23. 10. igitur CI est $\mu\nu$. b erit CK $\rho \perp$ CD. eodem
c hyp. modo erit FK $\rho \perp$ CD. item quia CI $\rho \perp$
d 10. 10. FI, d erit CK $\perp$ FK; e quare CF est apotome,
e 74. 10. f tertia scilicet, si CK $\perp \sqrt{CK} - FKq$,
f 3. def. 85. g unde H ($\sqrt{CE}$) erit mediæ apot. secunda.
10. verum si CK $\perp \sqrt{CK} - FKq$, b erit CF
g 94. 10. apot. sexta, k quare H erit faciens $\mu\nu$ cum μ .
h 6. def. 85. Q. E. D.
10.

k 97. 10.

P R O P. CXII.



Apotome A non est
eadem, quæ ex binis no-
minibus.

a 98. 10.
b 74. 10.
c 1. def. 85.

10. apot. prima. ejus congruens sit DE. b quare BE,
d 37. 10. DE sunt $\rho \perp$. c & BE $\perp$ BC. Vis A esse
e 1. def. 48 bin. ergo BD est bin. 1. ejus nomina sunt BF,
10. FD; sique BE $\perp$ FD; d ergo BF, FD sunt $\rho \perp$
f 12. 10. $\perp$; & BE $\rho \perp$ BC. ergo cum BC $\perp$ BE,
g cor. 16. f erit BE $\perp$ FB. g ergo BE $\perp$ FE. h ergo FE
10. est ρ item quia BE $\perp$ DE, k erit FE $\perp$ DE.
h sch 12. 10. l quare FD est apotome, l adeoque FD est ρ . sed
k 14. 10. ostensa est ρ . quæ repugnant. ergo A male dici-
l 74. 10. tur binonium. Q. E. D.

Nomi.

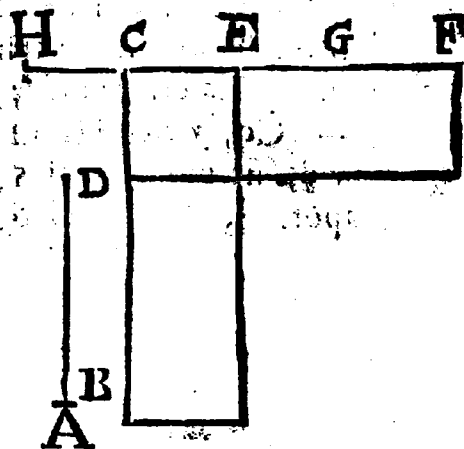
Nomina 13. linearum irrationalium inter se differentium.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cujus 6 species.
3. Ex binis mediis prima.
4. Ex binis mediis secunda.
5. Major.
6. Rationale ac medium potens.
7. Bina media potens.
8. Apotome, cujus etiam 6 species.
9. Mediæ apotome prima.
10. Mediæ apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum rationali medium totum efficiens.

13. Cum medio medium totum efficiens.

Cum latitudinum differentia arguant differentias rectarum, quarum quadrata sunt applicata ad aliquam rationalem, sitque demonstratum in precedentibus, latitudines quæ oriuntur ex applicationibus quadratorum harum 13 linearum inter se differre, perspicue sequitur has 13 lineas inter se differre.

P R O P. CXIII.



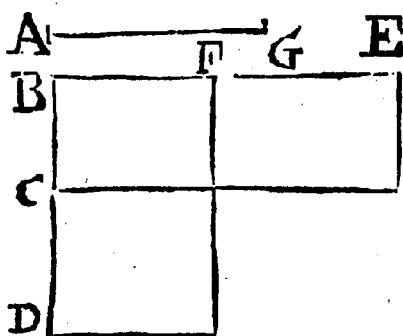
Quadratum rationale A ad eam, quæ ex binis nominibus BC (BD + DC) applicatum, latitudinem facit apotomen EC, cujus nomina EH, CH commensurabilia sunt

nominibus BD, DC ejus, quæ ex binis nominibus

Et in eadem proportionē (EH, BD :: CH, DC;) & adhuc, apotome EC quæ sit, eundem habet ordinem, quem ea BC, quæ ex binis nominibus.

- a cor. 16. 6. Ad DC minus nomen a fac rectang. $DF =$
b 14. 6. $Aq = BE$. quare $BC, CD :: EC, CE$. ergo
dividendo $BD, DC :: FE, EC$. cum igitur BD
c hyp. $EC = DC$. d erit $FE = EC$. sume $EG = EC$;
d 14. 5. fiatque $FG, GE :: EC, CH$. Erunt EH, CH ,
nomina apotomæ EC ; quibus convenient ea,
quæ in theoremate proposita sunt. Nam com-
ponendo $FE, GE. (EC) :: EH, CH$. ergo
e 12. 5. $FH, EH :: EH, CH$ f :: FE, EC f :: $BD,$
f Prima. DC . quare eum BD g $\square DC$; b erit $EH \square$
g hyp. CH ; b & $FHq \square EHq$. ergo, quia $FHq,$
h 10. 10. $EHq :: FH, CH$. b erit $FH \square CH$, l ideoque
k cor. 20. 6. $EC \square CH$. Porro CD g est p' , & $DF (Aq)$
l 16. 10. g est p' ; m ergo FC est $p' \square CD$; quare etiam
m 21. 10. CH est $p' \square CD$. igitur EH, CH sunt p' , ac
n sch. 12. 10 $\square$ ut prius. o ergo E est apotome, cui con-
o 74. 10. gruit CH ; porro EH, CH f :: BD, DC , ideo per-
mutando $EH, BD :: CH, DC$. unde quia EH f
p 10. 10. $\square DC$, p erit $EH \square BD$. quoniam pone BD
q 15. 10. $\square \sqrt{BDq - DCq}$; q erit ideo $BH \square \sqrt{EHq -$
r 12. 10. $CHq}$. item si $BD \square p'$ expos r erit $EH \square ei-$
s 1. def. 48. dem p' ; s hoc est si BC sit bin. 1. erit EC apot.
10. prima. Similiter si $DC \square p'$ expos. r erit CH
t 1. def. 85. $\square$ eidem p' , u hoc est si BC sit bin. 2. x erit
10. EC apot. 2. & si hæc bin. 3. illa erit apot. 3,
u 2. def. 48. &c. Sin $BD \square \sqrt{BDq - DCq}$, y erit $EH \square$
10. $\sqrt{EHq - CHq}$; si igitur BC sit bin. 4, vel 5,
x 1. def. 85. vel 6. erit EC similiter apot. 4, vel 5, vel 6.
10. Q. E. D.
y 15. 10.

PROP. CXIV.

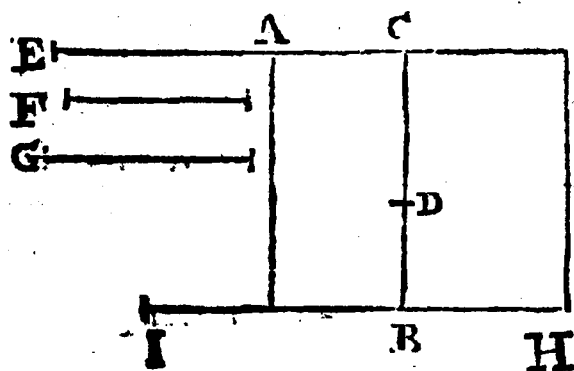


Quadratum rationa-
lis A ad apotomen BC
(BD — DC) applica-
tum, facit latitudinem
BE eam, quæ ex binis
nominibus ; cujus no-
mina BE, GE commen-
surabilia sint apotome

BC nominibus BD, DC, & in eadem proportionem ;
& adhuc, quæ ex binis nominibus fit (BE,) eundem
habet ordinem, quem ipsa apotome BC.

a Fac rectang. $DF = Aq$; & BE, FE *b* :: *a* cor. 16. 6.
 EG, GF Quoniam igitur $DF = Aq = GE$, *b* 12. 6.
c erit $BD, BC :: BE, BF$. ergo per conversio- *c* 14. 6.
 nem rationis $BD, CD :: BE, FE :: EG, GF ::$
d BG, EG . sed BD e $\square$ CD . *d* 19. 5.
 ergo BG $\square$ GF . *e* *hyp.*
 ergo quia BG, GE *g* :: BG, GF , *h* erit *f* 10. 10.
 BG $\square$ GF . *g* ideoque BG $\square$ BF . porro *g* cor. 20. 6.
 BD e est p , & rectang. DF (Aq) e est p . *h* 10. 10.
 ergo BF e est p $\square$ BD . *k* ergo etiam BG e est p $\square$ *k* cor. 16.
 BD . *o* ergo BG, GE sunt p $\square$. *o* quare BE *o* 10.
 est bin. denique igitur quia $BD, CD :: BG,$
 GE ; & permutando $BD, BG :: CD, GE$; fitque *l* 21. 10.
 BD $\square$ BG ; *m* erit CD $\square$ GE . ergo si CB sit *m* 12. 10.
 apot. prima, erit BE bin. 1, &c. ut in anteceden- *n* *sch.* 12. 10.
 ti. ergo, &c. *o* 37. 10.
p 10. 10.

PROP. CXV.



Si spatium AB contineatur sub apotoma AC ($CE - AE$), & ea, quæ ex binis nominibus CB ; cujus nomina CD, DB commensurabilia sint apotoma nominibus CE, AE , & in eadem proportionem ($CE.AE :: CD.DB$;) recta linea F spatium AB potens, est rationalis.

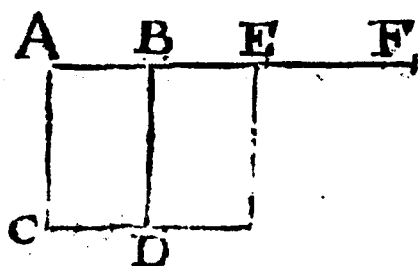
Sit G quævis p ; & fiat rectang. $CH = Gq$.
 a 113. 10. a erit igitur BH ($HI - IB$) apotome; & HI
 $a \perp CD$ $b \perp CE$, & $BI \perp DB$; a atque
 b hyp. $HI.BI :: CD.DB$ $b :: CE, EA$. ergo permu-
 c 19. 5. tando $HI.CE :: BI.EA$. ergo $BH.AC ::$
 d 12. 10. $HI.CE :: BI.EA$. ergo cum $HI d \perp CE$,
 e 10. 10. e erit $BH \perp AC$. f ergo rectang. $HC \perp$
 f 1.6. & 10 BA . Sed HC (Gq) b est p^2 . g ergo BA (Fq)
 10. est p^2 . proinde F est p . Q. E. D.

g sch. 12. 10

Coroll.

Hinc, fieri potest, ut spatium rationale conti-
 neatur sub duabus rectis irrationalibus.

PROP. CXVI.

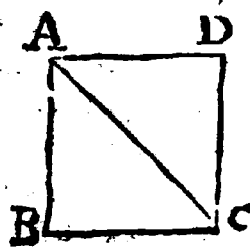


A media AB fi-
 unt infinite irra-
 tionales BE, EF ,
 &c. & nulla alicui
 antecedentium est ea-
 dem.

Sit AC expof. p^2 .
 fit.

p^2 . sitque AD spatium sub AC, AB. & ergo AD a lem. 38
est p^2 . Sume BE $= \sqrt{AD}$. b ergo BE est p , nulli 10.
priorum eadem, nullum enim quadratum alicu- b 11. 10.
jus priorum applicatum ad p^2 , latitudinem efficit
mediam. compleatur rectang. DE; & erit DE p^2 ,
& b proinde EF ($\sqrt{DE}$) erit p ; & nulli prio-
rum eadem. nullum enim priorum quadratum
ad p^2 applicatum, latitudinem efficit ipsam BE,
ergo, &c.

P R O P. CXVII.



*Propositum sit nobis ostendere,
in quadratis figuris BD, diame-
trum AC lateri AB incommen-
surabilem esse.*

Nam ACq. ABq. $a :: 2. 1$ b a 47. 1.
 $::$ non Q. Q. & ergo AC $\square$ b cor. 24. 8.
AB. Q. E. D. c 9. 10.

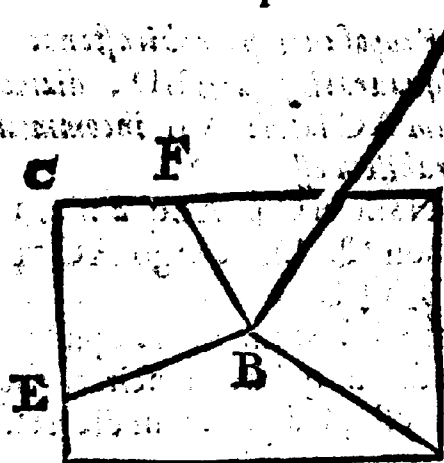
Celebratissimum est hoc theorema apud ve-
teres philosophos, adeo ut qui hoc nesciret, cum
Plato non hominem esse, sed pecudem diceret.

LIB.

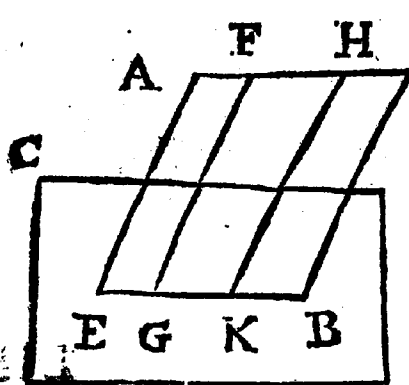
Definitiones.

I. **S**olidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II. Solidi autem extremum est superficies.

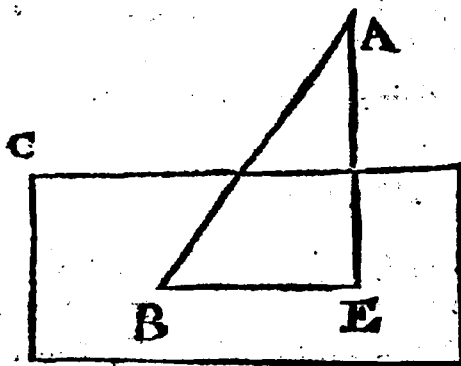


III. Linea recta AB est ad planum CD recta, cum ad rectas omnes lineas BD, BE, BF, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos efficit angulos A B D, D A B E, A B F.



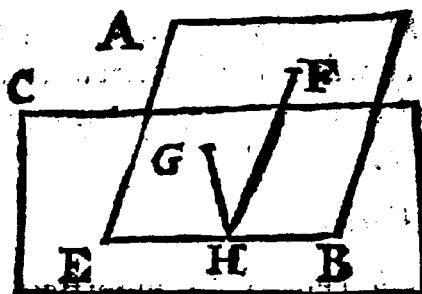
IV. Planum AB ad planum CD rectum est, cum rectæ lineæ FG, HK, quæ comuni planorum sectioni EB ad rectos angulos in uno plano AB ducuntur, alteri plano CD ad rectos sunt angulos.

V. Rectæ



V. Rectæ lineæ AB ad planum CD inclinatio est, cum à sublimi termino A rectæ aliæ lineæ AB ad planum CD deducta fuerit perpendicularis AE;

atque à puncto E, quod perpendicularis AE in ipso plano CD fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum B, quod in eodem est plano, altera recta linea EB fuerit adjuncta: est, inquam, angulus acutus ABE insistente linea AB, & adjuncta EB comprehensus.



VI. Plani AB ad planum CD inclinatio, est angulus acutus FHG rectis lineis FH, GH contentus, quæ in

Dutroque planorum AB, CD ad idem communis sectionis BE punctum H ductæ, rectos cum sectione BE efficiunt angulos FHB, GHB.

VII. Planum ad planum similiter inclinatū esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

IX. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X. Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI. Solidus

XI. Solidus angulus est plurium quam duarum linearum, quæ se mutuo contingunt, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio.

Aliter.

Solidus angulus est, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

XII. Pyramis est figura solida, planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV. Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri cœperat, circumassumpta figura.

Coroll.

Hinc radii omnes à centro ad superficiem sphære inter se sunt æquales.

XV. Axis autem sphære, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

XVI. Centrum sphære est idem quod & semicirculi.

XVII. Diameter autem sphære, est recta quedam linea per centrum ducta, & utrinque à sphære superficie terminata.

XVIII. Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur unde moveri cœperat, circumassumpta figura. Atque si quiescens recta
linea

linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus; si vero minor, amblygonius; si vero major, oxigonius,

XIX. Axis autem conici, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX. Basis vero conici est circulus qui à circumducta recta linea describitur.

XXI. Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur unde coeperat moveri, circumassumpta figura.

XXII. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII. Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

XXIV. Similes conici & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

XXV. Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI. Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII. Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII. Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris & æquiangularibus contenta.

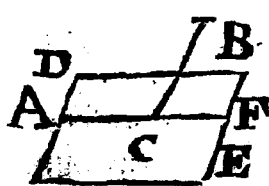
XXIX. Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXX. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso parallelae sunt, contenta.

XXXI. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII. Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

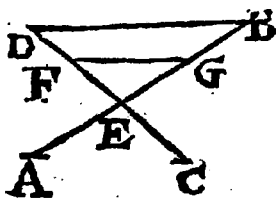
P R O P. I.



Rectæ lineæ pars quædam AC non est in subiecto plano, quædam vero CB in sublimi.

Producatur AC in subiecto plano usque ad F. vis CB esse in directum ipsi AC; ergo duæ rectæ AB, AF habent communem segmentum AC. a Q. F. N.

P R O P. II.

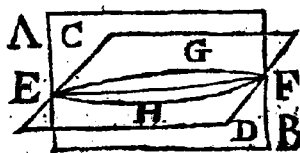


Si duæ rectæ lineæ AB, CD se mutuo secant, in uno sunt plano: atque triangulum omne DEB in uno est plano.

Pota enim trianguli DEB partem EFG esse in uno plano, partem vero FDGB in altero. ergo rectæ ED pars EF est in subiecto plano, pars vero FD in sublimi, a Q. E. A. ergo triangulum EDB in uno est plano; proinde & rectæ ED, EB; a quare & totæ AB, DC in uno plano existunt. Q. E. D.

P R O P.

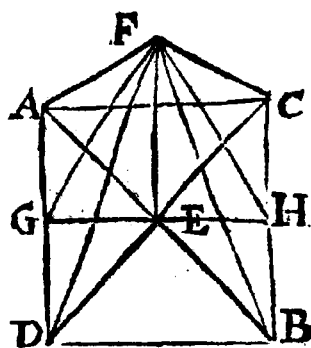
PROP. III.



Si duo plana AB, CD se mutuo secant, communis eorum sectio EF est recta linea.

Si EF communis sectio non est recta linea, & ducatur in plano AB recta a 1. post. 1. EGF, & in plano CD recta EHF. duæ igitur rectæ EGF, EHF claudunt spatium. b Q.E.A. b 14 ax. 1.

PROP. IV.

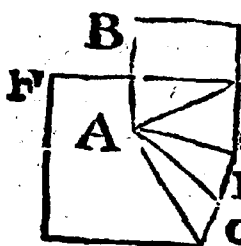


Si recta linea EF rectis duabus lineis AB, CD se mutuo secantibus in communi sectione E ad rectos angulos insistat: illa ducto etiam per ipsas plano ACBD ad angulos rectos erit.

Accipe EA, EC, EB, ED æquales. & junge rectas AC, CB, BD, AD. per E ducatur quævis recta GH; junganturque FA, FC, FD, FB, FG, FH. Quoniam AE = EB; a constr. & DE = EC; & ang. AED = CEB, b 15. 1. erit AD = CB. c pariterque AC = DB. c 4. 1. d ergo AD parall. CB. d & AC parall. DB. e quare ang. GAE = EBH. e & ang. e 29. 1. AGE = EHB. sed & AEF = EBH ergo GE = EH, & g AG = BH. quare ob angulos rectos, g 26. 1. ex hyp. & proinde pares ad E, h bates FA, FC, h 4. 1. FB, FD æquantur. Triangula igitur ADF, FBC sibi mutuo æquilatera sunt, k quare ang. k 8. 1. DAF = CBF. ergo in triangulis AGF, FBH latera FG, FH l æquantur; & proinde etiam l 4. 1. triangula FEG, FEH sibi mutuo æquilatera sunt. m ergo anguli FEG, FEH æquales ac m 8. 1. n propterea recti sunt. Eodem modo FE cum n 10. def. 1. omni-

omnibus in plano ADBC per E ductis rectis lineis rectos angulos constituit, & ideoque eidem plano recta est. Q. E. D.

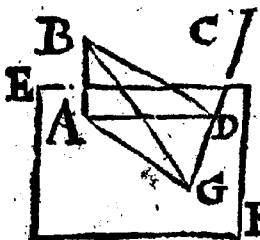
P R O P. V.



Si recta linea AB rectis tribus lineis AC, AD, AE se mutuo tangens in communi sectione ad rectos angulos insistat; illae tres rectae in uno sunt plano.

Nam AC, AD & sunt in uno plano FC. & item AB, AE sunt in uno plano BE. vis AE esse extra planum FC; sit igitur planorum intersectio *b* recta AG. Quoniam igitur BA ex hypoth. perpendicularis est rectis AC, AD, eadem *c* plano FC, & ideoque *d* rectae AG perpendicularis est, ergo (siquidem & AB est in eodem cum AG, AE plano) anguli BAG, BAE recti, & proinde pares sunt, pars & totum. Q. E. A.

P R O P. VI.



Si duae rectae lineae AB, DC eidem plano EF ad rectos sint angulos; parallelae erunt illae rectae lineae AB, DC.

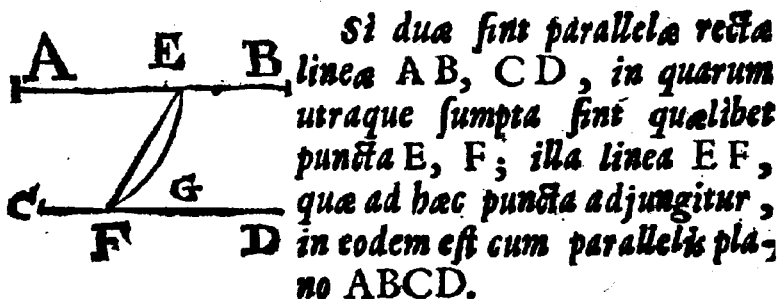
Ducatur AD, cui in plano EF perpendicularis sit DG = AB; junganturque BD, BG, AG. Quia in triangulis BAD, ADG anguli DAB, ADG & recti sunt; atque AB = DG; & AD communis est; erit BD = AG; quare in triangulis AGB, BGD sibi mutuo æquilateris ang. BAG = BDG; quorum BAG rectus cum sit, erit BDG etiam rectus, atqui ang. GDC rectus ponitur; ergo recta GD tribus DA, DB, CD recta est; & quae ideo in uno sunt plano, *f* in quo AB existit; cum

a hyp.
b constr.
c 4. I.
d 8. I.

e 5. II.
f 2. II.

cum igitur AB, & CD sint in uno plano, & anguli interni BAD, CDA recti sint, g erunt AB, g 28. I.
CD parallelæ. Q. E. D.

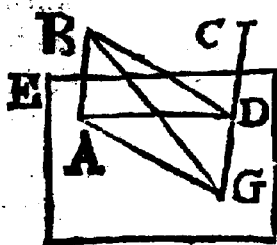
PROP. VII.



Si dua sint parallelæ rectæ lineæ AB, CD, in quarum utraque sumpta sint qualibet puncta E, F; illa lineæ EF, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano ABCD.

Planum in quo AB, CD, secet aliud planum per puncta E, F. si jam EF non est in plano ABCD, illa communis sectio non erit. Sit ergo EGF. a hæc igitur recta est lineæ. duæ ergo rectæ EF, EGF spatium claudunt. b Q. E. A. a 3. II. b 14. ax. I.

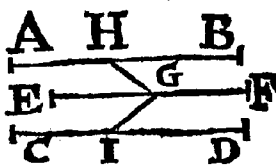
PROP. VIII.



Si dua sint parallelæ rectæ lineæ AB, CD, quarum altera AB ad rectos cuidam plano EF sit angulos; & reliqua CD eidem plano EF ad rectos F angulos erit.

Adscita præparatione & demonstratione sextæ hujus; anguli GDA & GDB recti sunt; a ergo GD recta est plano per AD, DB (b in quo a 4. II. etiam AB, CD existunt.) c ergo GD ipsi CD b 7. II. est perpendicularis; atqui ang. CDA etiam d re- c 3. def. II. ctus est, e ergo CD plano EF recta est. Q. E. D. d 29. I. e 5. II.

P R O P. IX.



Quæ (AB, CD) eidem rectæ lineæ EF sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano, hæc quæ sunt inter se parallelæ.

In plano parallelarum AB, EE duc HG perpendicularem ad EF. item in plano parallelarum EF, CD duc IG perpendicularem ad EF. a ergo EG recta est plano per HG, GI, eidemque plano b rectæ sunt AH, & CI. c ergo AH, & CI parallelæ sunt. Q. E. D.

a 4. II.

b 8. II.

c 6. II.

P R O P. X.



Si duæ rectæ lineæ AB, AC se mutuo tangentes ad duas rectas ED, DF se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano, illæ angulos æquales (BAC, EDF) comprehendunt.

Sint AB, AC, DE, DF æquales inter se, & ducantur AD, BC, EF, BE, CF. Cum AB, DE a sint parallelæ & æquales, b etiam BE, AD parallelæ sunt, & æquales. Eodem modo CF, AD parallelæ sunt, & æquales. c ergo etiam BE, FC sunt parallelæ & æquales. Equantur ergo BC, EF. Cum igitur triangula BAC, EDF sibi mutuo d æquilatera sint, anguli BAC, EDF e æquales erunt. Q. E. D.

a hyp. & constr.

b 33. I.

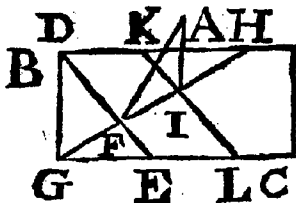
c 2. ax. I.

& 9. II.

d 33. I.

e 8. I.

P R O P. XI.



A dato puncto A in sublimi ad subiectum planum BC perpendicularem rectam lineam AI ducere.

In plano BC duc quamvis DE, ad quam ex A a duc perpendicularem AF, ad eandem per F in plano BC b duc normalem FH. tum ad FH a demitte perpendicularem AI. erit AI recta plano BC.

a 12. I.

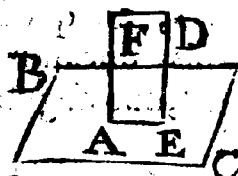
b 12. I.

Nam

Nam per I & duc K L parall. DE. Quia DE ^{c 31. I.}
 d recta est ad AF, & FH, e erit DE recta plano ^{d constr.}
 IFA; adeoque & K L eidem plano f recta est. ^{e 4. II.}
 g ergo ang. K I A rectus est. atqui ang. A I F ^{f 8. II.}
 etiam h rectus est. I ergo A I plano BC recta est. ^{g 3. def. II.}
 Q. E. D. ^{h constr.}

14. II.

P R O P. XII.



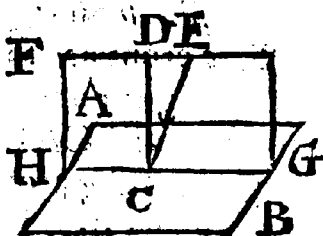
Dato plano BC à puncto A, quod
 in illo datum est, ad rectos angulos
 rectam lineam AF excitare.

A quovis extra planum puncto
 D a duc DE rectam plano BC; & juncta EA b
 duc AF parall. DE. c perspicuum est AF plano
 BC rectam esse. Q. E. F.

a 11. II.
 b 31. I.
 c 8. II.

Præfice perficiuntur hoc, & præcedens pro-
 blema, si duæ normæ ad datum punctum appli-
 centur, ut patet ex 4. II.

P R O P. XIII.

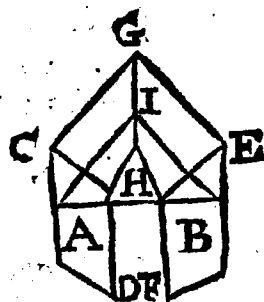


Dato plano AB, à puncto
 D, quod in illo datum est,
 duæ rectæ lineæ C D, C E
 ad rectos angulos non exci-
 tabuntur ab eadem parte.

Nam utraque CD, CE
 plano AB recta esset, eademq; a adeo parallelæ a 6. II.
 forent, quod parallelarum definitioni repugnat.

PROP. XIV.

*Valet hac
conversa.*

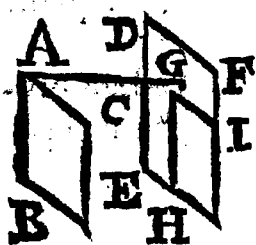


*Ad quæ plana CD, FE, eadem
recta linea AB recta est; illa sunt
parallela.*

*Si nega, plana CD, FE con-
currant, ita ut communis sectio
sit recta GH; sume in hac
quodvis punctum I, ad quod
in propositis planis ducantur*

*a hyp. & rectæ IA, IB. unde in triangulo IAB, duo anguli
3. def. II. IAB, IBA a recti sunt. b Q. E. A.
b 17. I.*

PROP. XV.

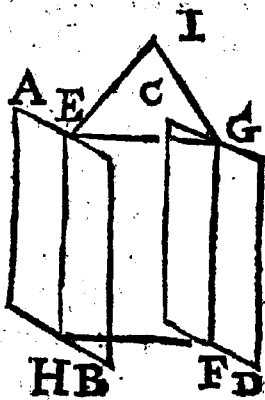


** Si duæ rectæ linea AB, AC se
mutuo tangentes, ad duas rectas
DE, DF se mutuo tangentes sint
parallela, non in eodem consis-
tentes plano; parallela sunt, quæ per
illa dicuntur, plana BAC, EDF.*

*a II. II. Ex A a duc AG rectam plano EF. b Sintque
b 31. I. GH, GI parallelæ ad DE, DF. c erunt hæ pa-
c 9. II. rallelæ etiam ad AB, AC. Cum igitur anguli
d 3. def. II. IGA, HGA d sint recti, e erunt etiam CAG,
e 29. I. BAG recti. f ergo GA recta est plano BC; g arqui
f 4. II. eadem recta est plano EF. h ergo plana BC, EF
g constr. sunt parallela. Q. E. D.
h 14. II.*

PROP.

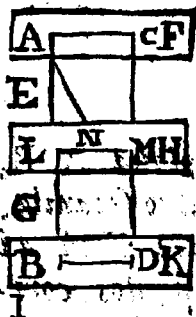
PROP. XVI.



Si duo plana parallela AB, CD, plano quopiam HEIGF secentur, communes illorum sectiones EH, GF sunt parallelae.

Nam si dicantur non esse parallelae, cum sint in eodem plano secanti, convenient alicubi, puta in I. quare cum totae HBI, FGI a sint in planis AB, CD productis, etiam haec convenient, contra hypoth.

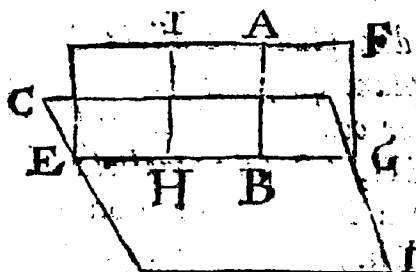
PROP. XVII.



Si dua rectae lineae ALB, CMD parallelis planis EF, GH, IK secantur, in easdem rationes secabuntur (AL. LB :: CM. MD.)

Ducantur in planis EF, IK rectae AC, BD. item AD occurrens plano GH in N; junganturque NL, NM. Plana triangulorum ADC, ADB faciunt sectiones BD, LN; & AC, NM a parallelas. ergo AL. LB b :: AN. ND b :: CM. MD. Q. E. D.

P R O P. XVIII.



Si recta linea AB
plano cuiusdam CD ad
rectos sit angulos; &
omnia, quae per ipsam
AB plana (EF, &c.)
eidem plano CD ad
rectos angulos erunt.

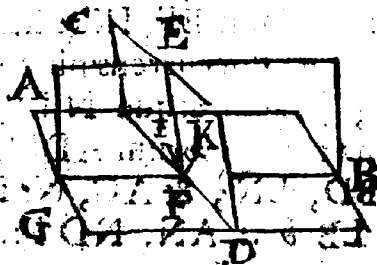
Ductum sit per AB planum aliquod EF, fa-
ciens cum plano CD sectionem EG; & ex
aliquo puncto H, in plano EF adducatur HI pa-
rall. AB. erit HI recta plano CD; pariterque
aliae quaevis ad EG perpendiculares. c etgo pla-
num EF plano CD rectum est; eademque ratio-
ne quaevis alia plana per AB ducta plano EF re-
cta erunt. Q. E. D.

13. I.

8. II.

4. def. II.

P R O P. XIX.

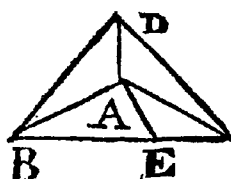


Si duo plana A B,
C D, se mutuo secantia,
plano cuiusdam G H ad
rectos sint angulos, com-
munis etiam illarum se-
ctio EF ad rectos eidem
plano (G H) angulos erit.

Quoniam plana AB, CD ponuntur recta
plano GH, patet ex 4. def. II. quod ex puncto
F in utroque plano A B, C D duci possit per-
pendicularis plano GH; quae a unica erit, &
propterea eorundem planorum communis sectio.
Q. E. D.

13. II.

PROP. XX.

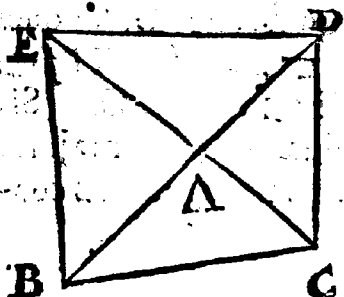


Si solidus angulus ABCD tribus angulis planis BAD, DAC, BAC contineatur; ex his duo quilibet, utut assumpti, tertio sunt majores.

Si tres anguli sunt æquales, patet assertio; si inæquales, maximus esto BAC. ex quo a aufer a 23. I. $BAE = BAD$; & fac $AD = AE$; ducanturque BEC, BD, DC.

Quoniam latus BA commune est, & $AD = AE$ b constr. AE ; & ang. $BAE = BAD$; c erit $BE = BD$. c 4. I. sed $BD + DC < BC$. e ergo $DC < EC$. d 20. I. igitur $AD = AE$; & latus AC commune est, e 5. ax. I. ac $DC < EC$, f erit ang. $CAD < EAC$. g ergo f 25. I. ang. $BAD + CAD < BAC$. Q. E. D. g 4. ax. I.

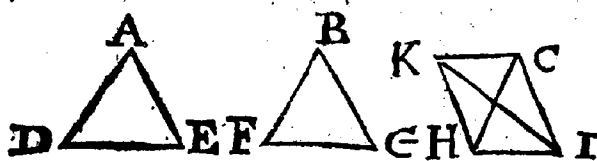
PROP. XXI.



Omni solidus angulus A sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Latera enim solidi anguli A secans planum utcumque faciat figuram multilateram BCDE, & totidem triacula ABC, ACD, ADE, AEB. Omnes angulos polygoni voco X; & summam angulorum ad trigonorum bases voco Y. quare $X + 4 \text{ Rect.} = Y + A$. Quia vero (ex angulis ad a 32. I. B) h est ang. $ABE + ABC < CBE$; idemque verum $sch.$ 32. I. fit de angulis ad C, ad D, ad E. c liquet fore Y b 20. II. $< X$, proinde erit $A < 4 \text{ Rect.}$ Q. E. D. c 5. ax. I.

P R O P. XXII.



Si fuerint tres anguli plani A, B, HCI, quorum duo utlibet assumpti reliquo sint majores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales AD, AE, FB, &c. fieri potest, ut ex rectis lineis DE, FG, HI, æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

a 22. I.

b 23. I.

c 4. I.

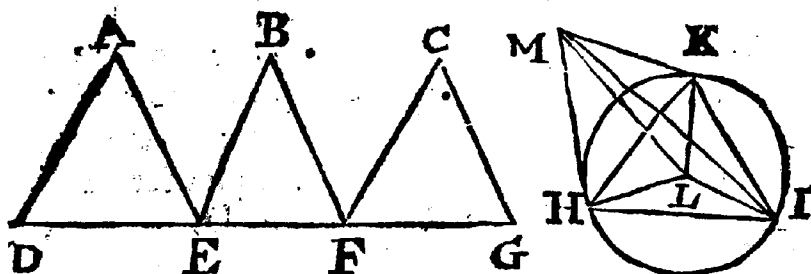
d hyp.

e 24. I.

f 20. I.

Ex iis a constitui potest triangulum, si duæ quælibet reliqua majores existant; sed ita se res habet. Nam b fac ang. HCK=B, & CK=CH, ducanturque HK, IK. c ergo KH=FG. & quia ang. KCI d=A; erit KI=DE. sed KI f=HI+KH (FG;) ergo DE=HI+FG. Simili argumento quævis duæ reliqua majores ostendentur; & proinde ex iis triangulum a constitui potest. Q. E. D.

P R O P. XXIII.



Ex tribus angulis planis A, B, C, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt majores, solidum angulum MHIK constituere. *Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

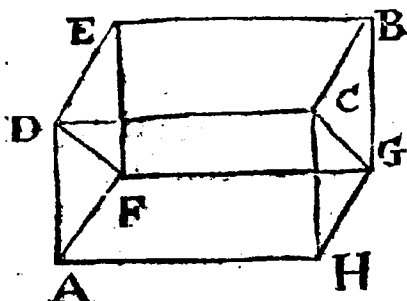
* 21. II.

Fac

Fac AD, AB, BE, BF, CF, CG æquales
inter se. Ex subtenfis DE, EF, FG (hoc est,
ex æqualibus HI, IK, KH) a fac triang. HKI. a 22. 11. &
circa quod b describatur circulus LHKI. * Quo- 22. 11.
niam vero AD $\sqsubset$ HL; c fit A Dq = H Lq + b 5. 4.
LMq. d fitque LM recta plano circuli HKI; & * Vid. Cla-
ducantur HM, KM, IM. Quoniam igitur ang. vium.
HLM e rectus est, f erit MHq = HLq + LMq c scb. 47. 1.
g = ADq. ergo MH = AD. simili argumento d 12. 11.
MK, MI, AD (id est, AE, EB, &c.) æquantur; e 3. def. 11.
ergo cum HM = AD, & MI = AE; & DE b = f 47. 1.
HI, k erit ang. A = HMI; k similiter ang. IMK g constr.
= B. k & ang. HMK = C. Factus est igitur h constr.
angulus solidus ad M ex tribus planis datis. k 8. 1.
Q. E. F. Assumptum est fore A D $\sqsubset$ H L,
Hoc autem constat. Nam si AD = vel $\supset$ HL,
erit ang. A =, b vel $\sqsubset$ HLI. Eodem modo erit a constr.
B =, vel $\sqsubset$ H LK, & C =, vel $\sqsubset$ KLI. quare & 8. 1.
A + B + C * quatuor rectos aut exæquabunt, aut b 21. 11
excedent, contra hypoth. quin potius sit AD $\sqsubset$ * 4. cor. 13.
HL. Q. E. D. I.

P R O P.

PROP. XXIV.



Si solidum AB, parallelis planis continetur, adversa illius plana (AG, DB, &c.) parallelogramma sunt similia & aequalia.

Planum AC secans

a 16. 11.

plana parallela AG, DB, a facit sectiones AH, DC parallelas. Eadem ratione AD, HC parallelas sunt. Ergo ADCH est parallelogrammum.

b 35. def. 1.

Simili argumento reliqua parallelepipedum plana sunt & parallelogramma. Quum igitur AF ad

c 10. 11.

HG, & AD ad HC parallelae sunt, c erit ang.

d 34. 1.

FAD = CHG; ergo ob AF d = HG, & AD d =

e 7. 5.

HC, ac e propterea AF. AD :: HG. HC, trian-

g 6. 6.

gula FAD, GAH g similia sunt & h aequalia; pro-

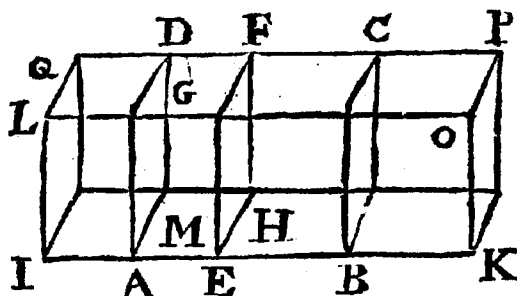
h 4. 1.

inde & parallelogramma AE, HB similia sunt &

k 6. ax. 1.

h aequalia. idemque de reliquis oppositis planis ostendetur, ergo, &c.

PROP. XXV.



Si solidum parallelepipedum ABCD plano EF secetur adversis planis A D, BC parallelo,

erit quemadmodum basis AH ad basim BH, ita solidum AHD ad solidum BHG.

Concipe Ppp. ABCD produci utrinque. accipe AI = AE, & BK = EB; & pone plana IQ, KP planis A D, BC parallela. parallelo-

a 36. 1.

g & grammata IM, AH, a & DL, DG, b & IQ, AD,

1. def. 6.

EF, &c. a similia ac aequalia sunt; c quare Ppp.

b 24. 11.

AQ = AF; atque eadem ratione Ppp. BP =

c 10. def. 11

BF, ergo solida IF, EP solidorum AF, EC a-

que,

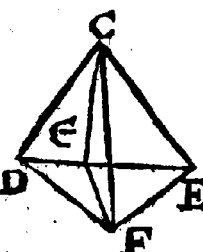
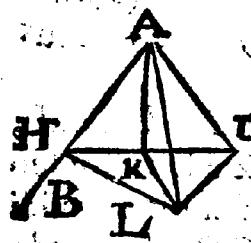
quemultiplicia sunt, ac bases IH, KH basium
AH, BH. Quod si basis IH $\square, =, \triangleright$ KH, d e. d 24. 11. &
rit similiter solidum IF $\square, =, \triangleright$ EP. e proin- 2. def. 11.
de AH. BH :: AF, EC. Q. E. D. e 6. def. 5.

Hæc eadem omni prismati accommodari possunt;
unde

Coroll.

Si prisma quodcunque secetur plano oppositis
planis parallelo, sectio erit figura æqualis, & si-
milis planis oppositis.

PROP. XXVI.

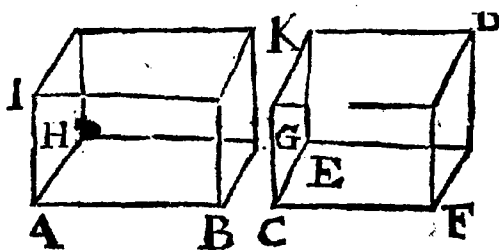


Ad datam re-
ctam lineam AB,
ejusque punctum
A, constituere an-
gulum solidum
AHIL, æqualem
solido angulo dato CDEF.

A puncto quovis F a demitte FG plano DCE a 11. 11;
rectam; ducanturque rectæ DE, FB, EG, GD,
GG. Fac AH=CD, & ang. HAI=DCE. &
AI=CE; atque in plano HAI, fac ang. HAK
=DCG, & AK=CG. Tum erige KL rectam
plano HAI, & sit KL=GF. ducaturque AL
erit angulus solidus AHIL par dato CDEF.
Nam hujus constructio illius constitutionem pe-
nitus æmulatur, ut facile patebit examinanti. er-
go factum.

PROP.

PROP. XXVII.



*A data recta
linea AB, dato
solido parallele-
pipedo CD simili-
le & similiter
Possum paralle-*

lepipedum AK describere

a 26. II.

b 12. 6.

c 22. 5.

Ex angulis planis BAH, HAI, BAI, qui æ-
quales sint ipsis FCE, ECG, FCG, a fac angu-
lum solidum A solido C parem. item b fac FC.
CE :: BA. AH. b ac CE.CG :: AH.AI (c unde
erit ex æquali FC.CG :: BA.AI;) & perficiatur.
Ppp. AK. erit hoc simile dato.

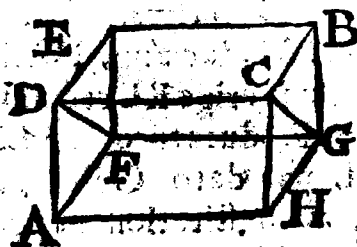
d 1. def. 6.

e 24. II.

f 9. def. II.

Nam per constr. Pgra d BH, FE; d & HI;
EG; & d BI, FG similia sunt, & e horum ideo
opposita illorum oppositis. ergo sex plana solidi
AK similia sunt sex planis solidi CD. f proinde
AK, CD similia solida existunt. Q. E. F.

PROP. XXVIII.



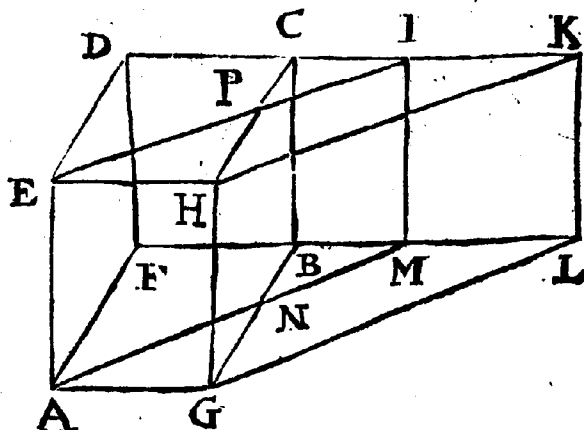
*Si solidum parallelepipe-
dum AB plano FGCD se-
cetur per diagonos DE,
CG ad versus planorum
AE, HB, bisariam secabi-
tur solidum AB ab ipso
plano FGCD.*

a 24. II.

b 34. I.

Nam quia DC, FG a æquales & parallela
sunt, b planum FGCD est pgr. & propter
a pgra AE, HB æqualia, & similia, b etiam tri-
angula AFD, HGC, CGB, DFE æqualia &
similia sunt. Atqui pgra AC; AG ipsis FB, FD
a etiam æqualia & similia sunt. ergo prismatis
FGCDAH omnia plana æqualia sunt, & simili-
a planis omnibus prismatis FGCDEB; & e pro-
inde hoc prisma illi æquatur. Q. E. D.

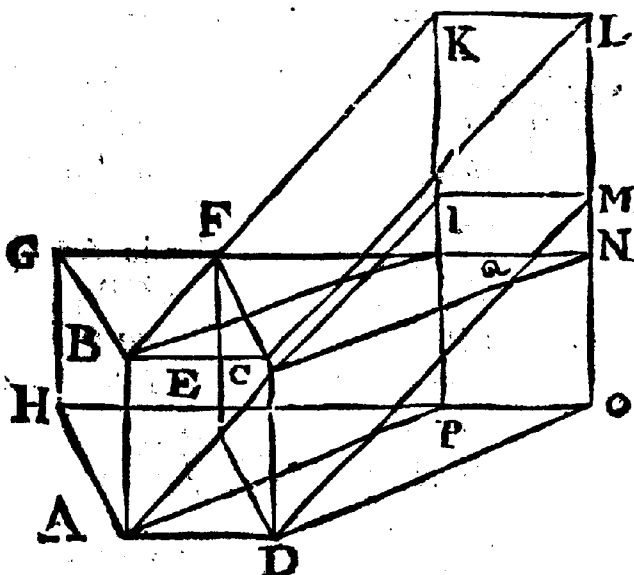
PROP. XXIX.



*Solida paralelepipeda AGHEFBCD, AGHEMLKI super eandem basim AGHE constituta, & * in eadem altitudine; quorum insistentes lineæ AF, AM in iisdem collocantur rectis ter parallelis AG, FL, sunt inter se æqualia.* *Id est, in lela plana

Nam si ex æqualibus prismatis AFMEDI, AGHE, GBLHCK commune auferatur prisma FLKD, & NBMPCI, addaturque utrinque solidum sic intellige AGNEHP, b erit Ppp. AGHEFBCD = in sequent. AGHEMLKI. Q. E. D.

PROP. XXX.



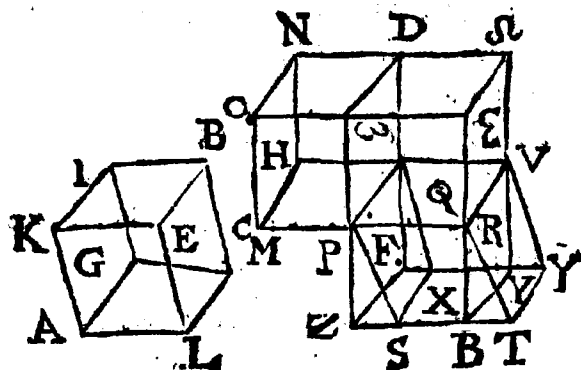
Solida paralelepipeda ADDBCHFEFG, AD-

a 10. def.
11. & 35. 1.
b 3. & 2.
ax. 1.

ADCBIMLK super eandem basim ADCB constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ AH, AI non in iisdem collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia.

- Nam produc rectas HEO, GFN, & LMO, a 34. 1. KIP; & duc AP, DO, BQ, CN. a erunt tam DC, AB, HG, EF, PQ, ON; quam AD, HE, GF, BC, KL, IM, QN, PO æquales inter sese b 29. 11. & parallelæ. b Quare Ppp. ADCBPONQ utri- que Pppo. ADCBHEFG, ADCBIMLK æqua- c 1. 4x. 1. le est; & c proinde hæc ipsa inter se æqualia sunt. Q. E. D.

P R O P. XXXL.



Solida parallelepipeda ALEKGMBI, CPΩOHQDN super æquales bases ALEK,

* Altitudo, CPΩO constituta, & * in eadem altitudine, æ- est perpen- qualia sunt inter se.

dicularis à Habeant primo parallelepipeda AB, CD la- plano basis tera ad bases recta; & ad latus CP productum ad planum a fiat pgr. PR TS æq. & simile pgrō KE LA; oppositum. b adeoque Ppp. PR TS QV YX æq. & sim. a 18. 6. Pppo AB. Producantur OωE, NDδ, ωPZ, b 27. 11. & DQF, ERB, δVγ, TSZ, YXF; & duc Eδ, 10. def. 11. Bγ, ZF.

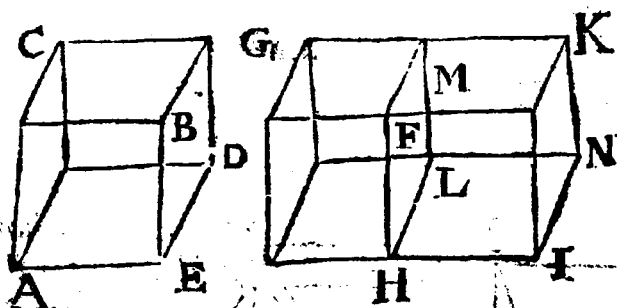
c 30. def. 11 Plana OεδN, CRVH, STYF c parallela d hyp. & sunt inter se; d & pgra ALEK, CPωO,

• 35. 3. PR TS, PRBZ æqualia sunt, Cum igitur Ppp. CD

CD. PV $\delta\omega$ e :: pgr. C ω (PRBZ.) R ω :: Ppp. e 25. 11.
 PRBZ QV γ F. PV $\delta\omega$, ferit Ppp. CD f = f 9. 5.
 PRBZ QV γ Fg = PRVQSTYX b = AB. g 29. 12.
 Q. E. D. h constr.

Sin Pppa AB, CD latera basibus obliqua habeant; super easdem bases, & in eadem altitudine, ponantur parallelepipeda, quorum latera basibus sint recta. k Ea inter se, & obliquis æqualia k 29. 11.
 erunt; m proinde & obliqua AB, CD æquantur. m 1. 2x. 1.
 Q. E. D.

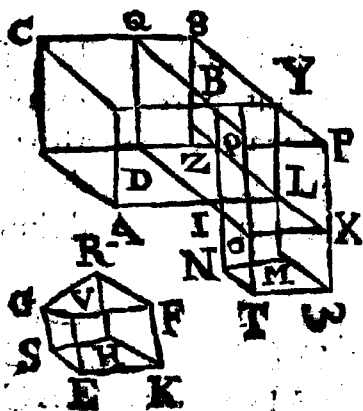
P R O P. XXXII.



Solida parallelepipeda ABCD, EFGH sub eadem altitudine, inter se sunt ut bases AB, EF.

Producta EHI, a fac pgr. FI = AB, & b comple a 45. 12
 Ppp. FINM. Liqueat esse Ppp. FINM. b 31. 5.
 (ABCD.) EFGH a :: FI. (AB) EF. Q. E. D. c 31. 11.
 d 25. 12.

P R O P. XXXIII.



Similia solida parallelepipeda, ABCD, EFGH, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum AI, EK.

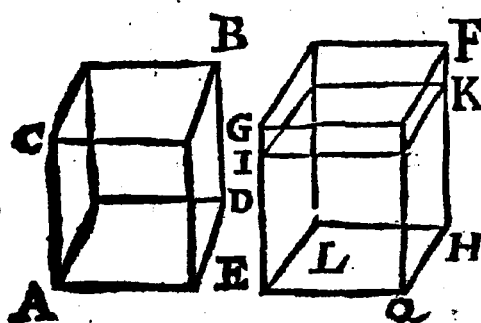
Producantur rectæ AIL, DIO, BIN. & a fiant IL, IO, 3. 1. IN ipsi EK, KH, KF æquales, b adeoque b 47. 11.
 &

c 31. 1. & Ppp. IXMT æq. & sim. Pppo EFGH.
 d hyp. c Perficiantur Ppp. a IXPB, DLYQ. Itaque d
 e 1. 6. erit AI. IL. (EK) :: DI. IO (HK) :: BI. IN.
 f 32. 11. (KF;) hoc est Pgr. AD. DL :: DL. IX ::
 BO. IT; f id est Ppp. ABCD. DLQY ::
 g constr. DLQY. IXBP :: IXBP. IXMT. (g EFGH.)
 h 10. def. 5. b ergo ratio ABCD ad EFGH triplicata est ra-
 k 1. 6. tionis ABCD ad DLQY, k vel AI ad EK.
 Q. E. D.

Coroll.

Hinc, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile similiterque descriptum super secundam.

PROP. XXXIV.



Equalium so-
 lidorum paralle-
 pipedorum ADCB,
 EHGF bases &
 altitudines reci-
 procantur (A D.
 EH :: EG. AC)

Et quorum solido-
 rum parallelepipedorum ADCB, EHGF
 bases & altitudines reciprocantur, illa sunt æ-
 qualia.

Sint primo latera CA, GE ad bases rectæ; si
 jam solidorum altitudines sint pares, etiam
 bases æquales erunt. & res clara est. Sin altitu-
 dines inæquales sint, à majori EG a detrahæ EI
 = AC. & per I b duc planum IK parallelum
 basi EH. itaque

1. Hyp. AD. EH c :: Ppp. ADCB. EHIK
 Ppp. EHGF. EHIK c :: GL. IL c :: GE. IE
 (f AC;) g liquet igitur esse AD. EH :: GE. AC
 Q. E. D.

2. Hyp.

a 31. 1.
 b 31. 1.
 c 32. 11.
 d 17. 5.
 e 1. 6.
 f constr.
 g 11. 5. &
 32. 11.

2. Hyp. ADCB. EHIK $b :: AD$. BH $k :: h$ 32. 11.
EG. EI $l :: GL$. IL $m :: Ppp$. EHGF. EHIK, k hyp.
quare Ppp. ADCB=EHGF. Q. E. D. 11. 6.

Sint deinde latera ad bases obliqua. Erigan- m 32. 11.
tur super illdem basibus, in altitudine eadem, pa- n 9. §.
rallelepipedum recta. Erunt obliqua parallelepi-
peda his æqualia. Quare cum hæc per 1. partem
reciprocent bases & altitudines, etiam illa reci-
procabunt. Q. E. D.

Coroll.

Quæ de parallelepipedis demonstrata sunt Prop.
29, 30, 31, 32, 33, 34. etiam conveniunt prismaticis
triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipedum,
ut patet ex Pr. 28. Igitur,

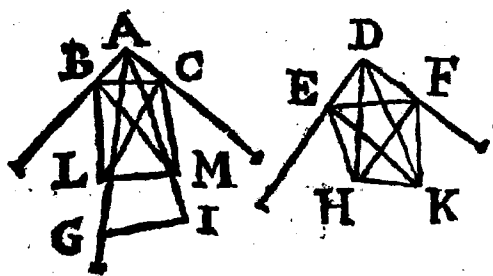
1. Prismata triangularia æque alta sunt ut
bases.

2. Si eandem vel æquales habeant bases, &
eandem altitudinem, æqualia sunt.

3. Si similia fuerint, eorum proportio triplicata
est proportionis homologorum laterum.

4. Si æqualia sunt, reciprocant bases & alti-
tudines, & si reciprocant bases & altitudines, æ-
qualia erunt.

P R O P. XXXV.



Si fuerint duo
plani anguli
BAC, EDF
æquales, quorum
verticibus A, D,
sublimis recta
linea AG, DH

insistant, quæ cum lineis primo positis angulos conti-
neant æquales, utrumque utriusq; (ang. GAB=HDE;
& GAC=HDF.) in sublimibus autem lineis
AG, DH quolibet sumpta fuerint puncta G, H;

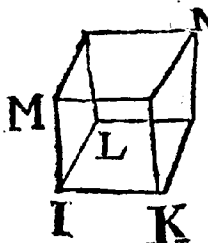
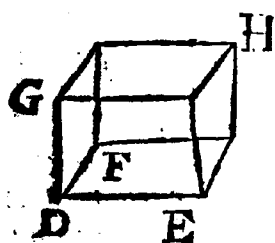
ab his ad plana BAC, EDF, in quibus consistunt anguli primum positi BAC, EDF, ductæ fuerint perpendiculares GI, HK; à punctis vero I, K quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ AI, DK; hæ cum sublimibus AG, DH æquales angulos GAM, HDK comprehendunt.

- Fiant DH, AL æquales, & GI, LM parallelæ; & MC ad AC, MB ad AB, KF ad DF, KE ad DE perpendiculares, ducanturque rectæ
- a 8. 11. BC, LB, LC, atque EF, HF, HE; a estque LM
- b 3. def. 11 recta plano BAC; b quare anguli LMC, LMA, LMB; eademque ratione anguli HKF, HKD, HKE recti sunt. Ergo $ALq\ c = LMq + AMq$
- c 47. 1. $c = LMq + CMq + ACq\ c = LGq + ACq;$
- d 48. 1. d ergo ang. ACL rectus est. Rursus $ALq\ c = LMq + MAq\ c = LMq + BMq + BAq\ c = BLq + BAq.$ d ergo ang. ABL etiam rectus est. Simili discursu anguli DFH, DEH recti sunt, f ergo $AB = DE;$ f & $BL = EH;$ f & $AC = DF;$ & $CL = FH.$ g quare etiam $BC = EF,$ g & ang. $ABC = DEF$ g & ang. $ACB = DFE.$ unde reliqui è rectis anguli CBM,
- k 26. 1. BCM reliquis FEK, EFK æquantur. k ergo $CM = FK,$ l ideoque & $AM = DK.$ ergo si
- l 47. 1. m constr. ex $LAq\ m = HDq.$ auferatur $AMq = DKq,$
- n 47. 1. & n remanet $LMq = HKq.$ quare trigona LAM, HDK sibi mutuo æquilatera sunt. o ergo ang. $LAM = HDK.$ Q. E. D.
- o 8. 1.

Coroll.

Itaque si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales; nempe $LM = HK.$

PROP. XXXVI.

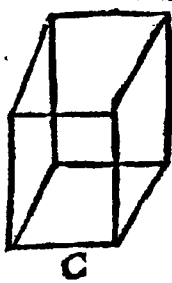
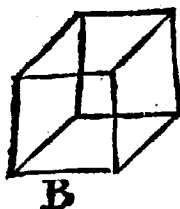
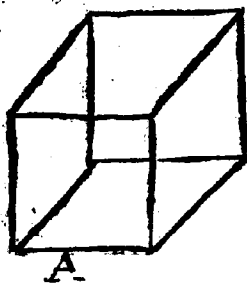


Si tres rectæ li-
nea DE, DG, DE
proportionales fue-
rint; quod ex his
tribus fit solidum
parallelepipedum D

H, æquale est descripto à media linea DG (IL)
solido parallelepipedo IN, quod æquilaterum quidem
fit, æquiangulum vero prædicto DH.

Quoniam DE. IK a :: IL. DF, b erit pgr. LK a hyp)
= FE. & propter angulorum planorum ad D & b 14. 6.
I, ac linearum GD, IM æqualitatem, etiam alti-
tudines parallelepipedorum æquales sunt, ex
coroll. præced. c ergo ipsa inter se æqualia sunt. c 31. 11.
Q. E. D.

PROP. XXXVII.



Si quatuor rectæ lineæ A, B, C, D proportiona-
les fuerint, & solida parallelepipeda A, B, C, D
quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur,
proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda,
quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint
proportionalia (A.B :: C.D.) & ipsa rectæ lineæ
A, B, C, D proportionales erunt.

Nam rationes parallelepipedorum a triplia- a 33. 11.
tæ sunt rationum, quas habent lineæ. ergo si A. B
:: C. D. b erit Ppp. A. Ppp. B :: Ppp. C. Ppp. b sch. 23. 11.
D. & vice versa.

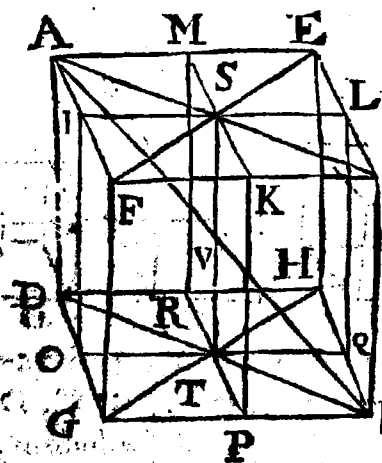
P R O P. XXXVIII.



Si planum AB ad planum AC rectum fuerit, & ab aliquo puncto E eorum, quae sunt in uno planorum (AB) ad alterum planum AC perpendicularis EF ducta fuerit, in planorum communem sectionem AD cadet ducta perpendicularis EF.

- a 12. 1. Si fieri potest, cadat F extra intersectionem
b 4, & 3. AD. In plano AC a ducatur FG perpendicularis
def. 11. ad AD, jungaturque EG. Angulus FGE rectus
c 17. 1. est; & EFG rectus ponitur. ergo in triangulo EFG sunt duo anguli recti. Q. E. D.

P R O P. XXXIX.



Si solidi parallelepipedum AB, eorum quae ex adverso planorum AC, DB latera (AE, FC, AF, EC, & DH, GB, DG, HB) bisariam secta sint; per sectiones autem plana ILQO, PKMR sint extensa; planorum communis sectio ST, & solidi parallelepipedum diameter AB, bisariam se mutuo secabunt.

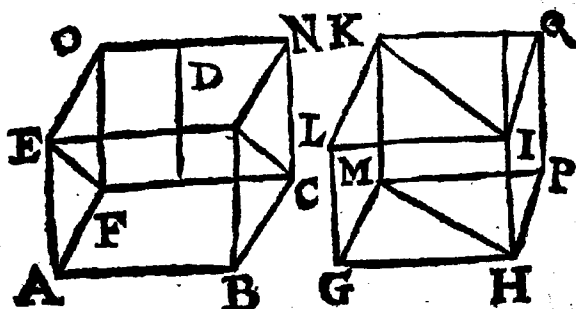
- a 34. 1. Ducantur rectae SA, SC, TD, TB. Propter
b 29. 1. a latera DO, OT lateribus BQ. QT, b angulosque alternos TOD, TQB aequales, c etiam
c 4. 1. bases DT, TB, & anguli DTO, BTQ aequantur, d ergo DTB est recta linea. eodem modo
d sch. 15. 1. f 9. 11. & ASC recta est linea. Porro e tam AD ad FG,
e 34. 1. e quam FG ad CB; f ideoque AD ad CB, g ac
f 9. 11. & AC ad DB parallelae & aequales sunt.
g 33. 1. b quare

b quare AB, & ST in eodem plano ABCD exi- h 7. 11.
stunt. Itaque cum anguli AVS, BVT ad verti-
cem, & alterni ASV, BTV æquentur; *k* & AS *k* 7. ax. 1.
= BT; erit AV = BV, *l* & SV = VT. 126. 1.
Q. E. D.

Coroll.

Hinc, in omni parallelepipedo diametri om-
nes se mutuo bisecant in uno puncto, V.

PROP. XL.



Si fuerint duo prismata ABCFED, GHMLIK
æquali altitudinis, quorum hoc quidem habeat basim
ABCF parallelogrammum, illud vero GHM trian-
gulum; duplum autem fuerit parallelogrammum
ABCF trianguli GHM; æqualia erunt ipsa pris-
mata ABCFED, GHMLIK.

Nam si perficiantur parallelepipeda AN, GQ,
æ erunt hæc æqualia ob *b* basim AC, GP, &
c altitudinum æqualitatem. d ergo etiam prisma-
ta, e horum dimidia, æqualia erunt. Q. E. D.

Schol.

Ex hætenus demonstratis habetur dimensio pris-
matum triangularium, & quadrangulorum, seu
parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in
basim.

Ut si altitudo sit 10 pedum, basis vero pedum
quadratorum 100 (mensurabitur autem basis per
Sch. 35. 1. vel per 41. 1.) multiplica 100 per 10;

proveniunt 1000 pedes cubici pro soliditate prismatis dati.

Vide schol.

35, 1.

Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in basim. Ergo quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in basim ducta, ut patet ex 31. hujus.

Deinde cum totum parallelepipedum producat ex altitudine in totam basim, semissis ejus (hoc est prisma triangulare) producet ex altitudine ducta in dimidiam basim, nempe triangulum.

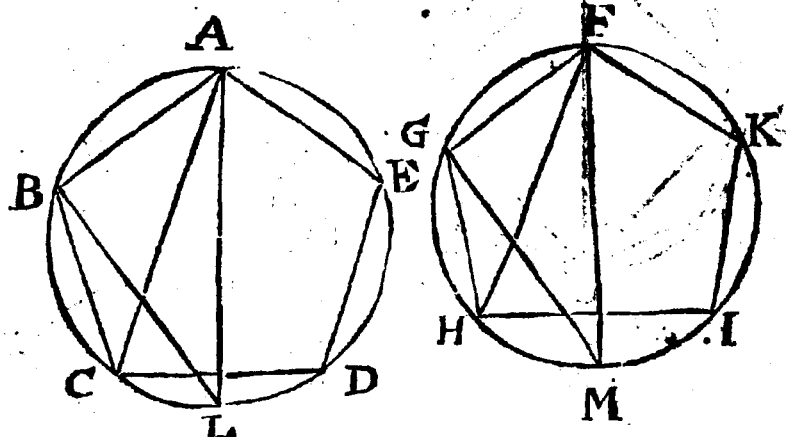
Monitum.

Nota, litterarum quæ designant angulum solidum primam esse semper ad punctum, in quo est angulus; litterarum vero quæ denotant pyramidem, ultimam esse ad verticem pyramidis.

Ex. gr. Angulus solidus ABCD est ad punctum A; pyramidis quoque BCDA vertex est ad punctum A, & basis triangulum BCD.

LIB. XII.

PROP. I.



Quæ sunt in circulis ABD, FGI poly-
gona similia ABCDE, FGHIK,
inter se sunt, ut quadrata à diame-
tris AL, FM.

Ducantur AC, BL, FH, GM.

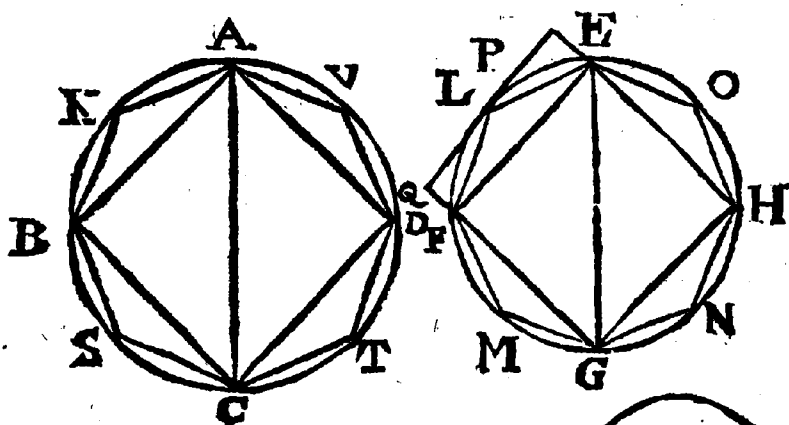
Quoniam *a* ang. ABC = FGH, *a* atque AB. BC *a* 1. def. 6.
 :: FG. GH, *b* erit ang. ACB (*c* ALB) = FHG *b* 6. 6.
 (*c* FMG.) anguli autem ABL, FGM *d* recti, ac *c* 21. 3.
 proinde æquales sunt. *e* ergo triangua ABL, *d* 31. 3.
 FGM æquiangua sunt. *f* quare AB. FG :: AL. *e* 32. 3.
 FM. *g* ergo ABCDE. FGHIK :: ALq. FMq. *f* cor. 4. 6.
g 22. 6.

Coroll.

Hinc (quia AB. FG :: AL. FM :: BC. GH,
 &c.) polygonorum similium circulo inscripto-
 rum *b* ambitus sunt ut diametri.

h 1. 12. &
i 12. 5.

P R O P. II.



Circuli ABT, EFN inter se sunt, quemadmodum quadrata à diametris AC, EG.

Ponatur ACq. EGq :: circ.

ABT. I. Dico I = circ. EFN.

Nam primo, si fieri potest, sit I = circ. EFN, sitque excessus K. Circulo EFN inscribatur quadratum EFGH, a quod dimidium est circumscripti quadrati, adeoque semicirculo majus.

b 30. 3. Biseca arcus EF, FG, GH, HE, & ad puncta bisectionum junge rectas EL, LF, &c. per L

c sch. 27. 3. duc tangentem PQ (c quæ ad EF parallela est,) & produc HEP, GFQ; estque triangulum

d 41. 1. ELF a dimidium parallelogrammi EPQF, adeoque majus dimidio segmenti ELF; pariterque

reliqua triangula ejusmodi reliquorum segmentorum dimidia superant. Et si iterum bisecentur arcus EL, LF, FM, &c. rectæque adjungantur, eodem modo triangula segmentorum semis-

ses excedent. Quare si quadratum EFGH è circulo EFN, & e reliquis segmentis triangula

detrahantur, & hoc fiat continuo, tandem cre-

stabit magnitudo aliqua minor quam K. Eo-

usque perventum sit, nempe ad segmenta EL, LF, FM, &c. minora quam K, simul sum-

pta,

pta: ergo I (f circ. $EFN - K$) $\supset$ polyg. f hyp. & $ELFMGNHO$ (circ. $EFN -$ segm. $EL + LF$ I. ax. &c.) Circulo ABT inscriptum g puta simile po- g 30.3. & lygonum $AKBSCTDV$. itaque quum I. post. I. $AKBSCTDV$. $ELFMGNHO$ $h :: ACq.$ h I. 12. EGq $k ::$ circ. ABT . I. ac polyg. $AKBSCTDV$ k hyp. $l \supset$ circ. ABT . m erit polyg. $ELFMGNHO$ I 9. ax. I. $\supset$ I. sed prius erat $I \supset ELMGNHO$. quæ m 14.5. repugnant.

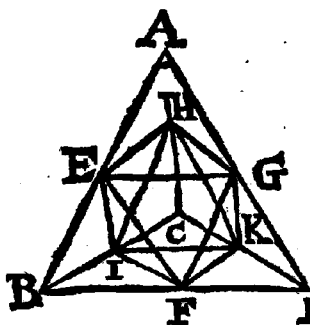
Rursus, si fieri potest, sit $I \sqsubset$ circ. EFN . Quoniam igitur $ACq.$ EGq $n ::$ circ. ABT . I; n hyp. inverſeque I. circ. $ABT :: EGq.$ $ACq.$ pone I. circ. $ABT ::$ circ. EFN . K , o ergo circ. ABT o 14. 5. $\sqsubset K$. patque $EGq.$ $ACq ::$ circ. EFN . K . Quæ p 11. 5. repugnare modo ostensum est.

Ergo concludendum est, quod $I =$ circ. EFN ,
Q. E. D.

Coroll.

Hinc, ut circulus est ad circulum, ita polygo-
num in illo descriptum ad simile polygonum in
hoc descriptum.

PROP. III



Omnis pyramis $ABDC$
triangularem habens basim,
dividitur in duas pyramides
 $AEGH$, $HIKC$ aequales &
similes inter se, triangulares
habentes bases, & similes
toti $ABDC$; & in duo pris-
mata aequalia $BFGDIH$,
 $FGDIHK$; quæ duo prismata majora sunt dimi-
dio totius pyramidis $ABDC$.

Latera pyramidis bisecentur in punctis E , F ,
 G , H , I , K ; junganturque rectæ EF , FG , GE ,
 FI , IE , FK , KG , GH , HE . Quoniam latera
pyra-

a 2, 6.

b 29. I.

c 26. I.

d 15. II.

e 10. def. II

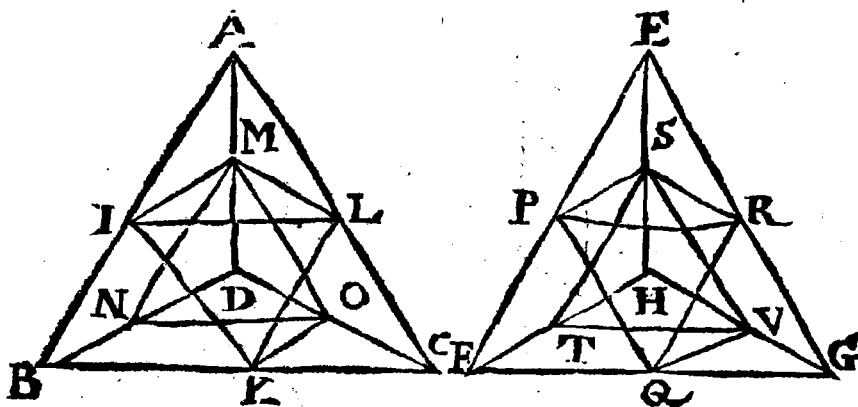
f 2. 4x. I.

g 40, II.

pyramidis proportionaliter secta sunt, & erunt
 HI, AB ; & GF, AB ; & IF, DC ; atque HG ,
 DC , &c. parallelæ; proinde & HI, FG , & GH ,
 FI parallelæ sunt. liquet igitur triangula ABD ,
 AEG , EBF , FDG , HIK b æquiangula esse; &
 quatuor ultima c æquari. eodem modo triangula
 ACB, AHE, EIB, HIC, FGK æquiangula sunt;
 & quatuor postrema inter se æqualia. Similiter
 triangula BFI, FDK, IKC, EGH ; & denuo
 triangula AHG, GDK, HKC, EFI , similia sunt
 & æqualia. Quinetiam triang. HIK ad ADB , &
 EGH ad BDC , & EFI ad ADC , & FGK ad
 ABC d parallelæ sunt. Ex quibus perspicue se-
 quitur primo, pyramides $AEGH, HIKC$ æquales
 esse; totique $ABDC$, & inter se e similes. deinde
 solida $BFGEIH, FGDIHK$ prismata esse, &
 quidem æque alta, nempe sita inter parallelæ
 plana ABD, HIK . verum basis $BFGE$ basis FDG
 f duplex est. g quare dicta prismata æqualia sunt.
 quorum alterum $BFGEIH$ pyramide $BEFI$, hoc
 est, $AEGH$ majus est, totum sua parte; proinde
 duo prismata majora sunt duabus pyramidibus,
 totiusque adeo pyramidis $ABDC$ dimidium ex-
 cedunt. Q. E. D.

PROP

PROP. IV.



Si fuerint duae pyramides ABCD, EFGH ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases ABC, BFG; sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides (Ailm, MNOD; & EPRS, STVH) aequales inter se, & similes toti; & in duo prismata aequalia (IBKLMN, KLCNMO; & PFQRST, QRGTSV;) ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quae ex superiore divisione natae sunt, idque semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quae in una pyramide, prismata ad omnia, quae in altera pyramide prismata, multitudine aequalia.

Nam (adhibendo constructionem praecedentis) BC. KC a :: EG. QG. b ergo triang. ABC est ad simile triang. LKC, ut EFG ad c simile RQG. ergo permutando ABC. EFG d :: LKC. RQG e :: Prism. KLCNMO. QRGTSV (nam haec aequae altae sunt) f :: IBKLMN. PFQRST. g quare triang. ABC. EFG :: Prism. KLCNMO + IBKLMN. Prism. QRGTSV + PFQRST. Q. E. D.

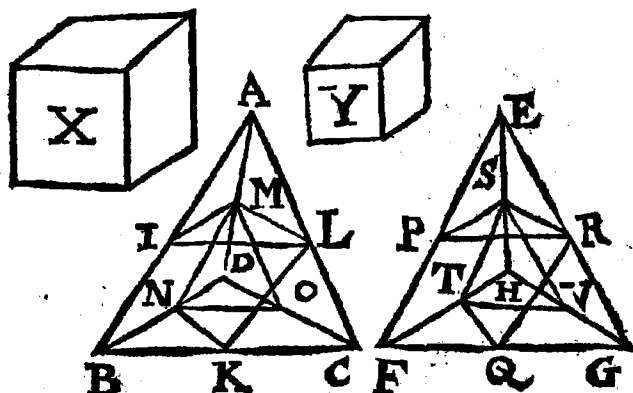
a 15. 5.
b 32. 6.
c 2. 6. &c.
d 16. 5.
e feb. 34. 11
f 7. 5.
g 12. 5.

Sin ulterius simili pacto dividantur pyramides MNOD, Ailm; & EPRS, STVH, erunt quatuor nova prismata hic effecta ad quatuor isthic

h 12. 5.

isthic producta, ut bases MNO & AIL ad bases STV & EPR, hoc est ut LKC ad RQG, vel ut ABC ad EFG. *b* quare omnia prismata pyramidis ABCD ad omnia ipsius EFGH ita se habent, ut basis ABC ad basim EFG. Q.E.D.

P R O P. V.



Sub eadem altitudine existentes pyram ABCD, EFGH, triangulares habentes bases ABC, EFG, inter se sunt ut bases ABC, EFG.

Sit triang. ABC. EFG :: ABCD. X. Dico $X = \text{pyr. EFGH}$. Nam, si possibile est, sit $X \sqsupset \text{EFGH}$; sitque Y excessus. Dividatur pyramis EFGH in prismata & pyramides, & reliquæ pyramides similiter, & donec relictæ pyramides EPRS, STVH minores evadant solido Y. Quum igitur $\text{pyr. EFGH} = X + Y$; liquet reliqua prismata PFQRST, QRGTSV solido X majora esse. Pyramidem ABCD similiter divisam concipe; *b* eritque prism. IBKLMN + KLCNMO. $\text{PFQRST} + \text{QRGTSV} :: \text{ABC. EFG. c} :: \text{pyr. ABCD. X. d}$ ergo $X \sqsubset \text{prism. PFQRST} + \text{QRGTSV}$; quod repugnat prius affirmatis.

Rursus, dic $X \sqsubset \text{pyr. EFGH}$. pone $\text{pyr. EFGH. Y} :: X. \text{pyr. ABCD e} :: \text{EFG. ABC. quia EFGH f} \sqsupset X, g$ erit $Y \sqsupset \text{pyr. ABCD, quod fieri nequit, ex jam dictis. Concludo igitur, quod } X = \text{pyr. EFGH. Q.E.D.}$

P R O P.

a 1. 10.

b 4. 12.

c hyp.

d 14. 5.

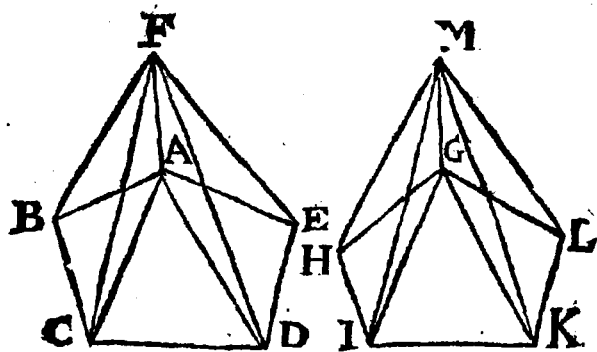
e hyp. &

cor. 4. 5.

f suppos.

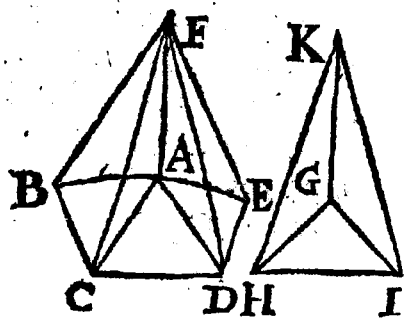
g 14. 5.

PROP. VII



Sub eadem altitudine existentes pyramides ABCDEF, GHIKLM, & polygonas habentes bases ABCDE, GHIKL, inter se sunt ut bases ABCDE, GHIKL.

Duc rectas AC, AD, GI, GK. Est bas. ABC. ACD *a* :: pyr. ABCF. ACDF. *b* ergo composite *a* 5. 12. ABCD. ACD :: pyr. ABCDF. ACDF. *a* atque *b* 18. 5. etiam ACD. ADE :: pyr. ACDF. ADEF. *c* ergo ex æquali ABCD. ADE :: ABCDF. ADEF. *b* ergo componendo ABCDE. ADE :: pyr. *c* 22. 5. ABCDEF. ADEF. porro ADE. GKL *d* :: pyr. *d* 5. 12. ADEF. GKLM; ac, ut prius, atque inverse GKL. GHIKL :: pyr. GKLM. GHIKLM. *c* ergo iterum ex æqualibus, ABCDE. GHIKL :: pyr. ABCDEF. GHIKLM. Q. E. D.

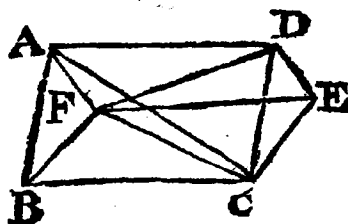


Si bases non habent latera æque multa, demonstratio sic procedet. Bas. ABC. GHI *e* :: pyr. ABCF. GHIK. *e* atque *e* 5. 12. ACD. GHI :: pyr. *f* 24. 5. ACDF. GHIK. *f* ergo

bas. ABCD. GHI :: pyr. ABCDE. GHIK. iam bas. ADE. GHI :: pyr. ADEF. *g* Quinte *f* ergo bas. ABCDE. GHI :: pyr. GHIK. *f* GHIK. ABCDE

PROP.

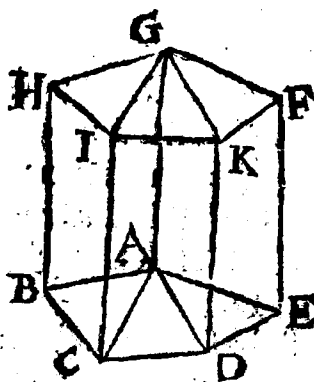
P R O P. VII.



Omne prisma ABCDFE
triangularem habens basim,
dividitur in tres pyramides
ACBF, ACDF, CDFE
æquales inter se, triangula-
res bases habentes.

Ducantur parallelogrammorum diametri
a 34. I. AC, CF, FD. Triang. ACB $\equiv$ ACD. b ergo æ-
b 5. 12. que altæ pyramides ACBF, ACDF æquantur.
eodem modo pyr. DEAC $\equiv$ pyr. DFEC. atq
c I. ax. I. qui ACDF, & DEAC una eademque sunt py-
ramis. ergo tres pyramides ACBF, ACDF,
DFEC, in quas divisum est prisma, inter se æ-
quales sunt. Q. E. D.

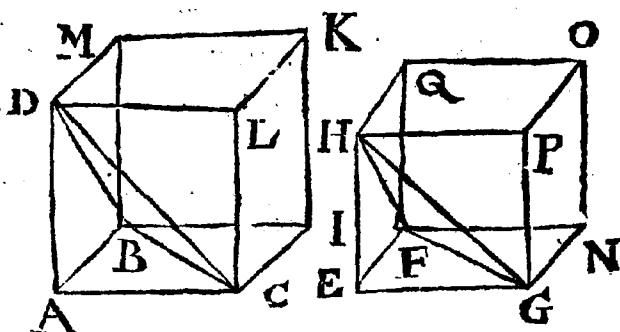
Coroll.



Hinc, quælibet pyramis
tertia est pars prismatis e-
andem cum illa habentis &
basim & altitudinem : sive,
prisma quodlibet triplum est
pyramidis eandem cum ipso
habentis basim & altitudi-
nem.

Nam resolve prisma po-
lygonum ABCDEGHIKF
in trigona prismata, & pyramidem ABCDEH
in trigonas pyramides. a Erunt singulæ partes
prismatis triplæ singularum partium pyramidis.
b I. 5. b proinde totum prisma ABCDEGHIKF totius
pyramidis ABCDEH triplum est. Q. E. D.

PROP. VIII.



Similes pyramides ABCD, EFGH, quæ triangulares habent bases ABC, EFG, in triplicata sunt ratione homologorum laterum AC, EG.

a Perficiantur parallelepipeda ABICDMKL, EFNGHQOP; quæ *b* similia sunt & pyramidum ABCD, EFGH *c* sextupla; *d* ideoque in eadem cum ipsis ratione ad se invicem, *e* hoc est in triplicata homologorum laterum. Q. E. D.

Coroll.

Hinc, etiam similes polygonæ pyramides rationem habent laterum homologorum triplicatam; ut facile probabitur resolvendo has in triangonas pyramides.

PROP. IX.

Vide Schema præced.

Æqualium pyramidum ABCD, EFGH, & triangulares bases ABC, EFG habentium, recipiuntur bases & altitudines; & quarum pyramidum triangulares bases habentium recipiuntur bases & altitudines, illa sunt æquales.

I. Hyp. Perfecta parallelepipeda ABICDMKL, EFNGHQOP æqualium pyramidum ABCD, EFGH (utrumque utriusque) *a* sextupla sunt, ac æqualia ideo inter se. ergo alt. (H.) *a* 28. II. & 7. 12. alt.

b 34. II. alt. (D) $b :: ABC. EFNG$ $c :: ABC. EFG.$
 c 15. 5. Q. E. D.
 d hyp. 2. Hyp. Alt. (H.) alt. (D) $d :: ABC. EFG$ $e ::$
 e 15. 5. $ABIC. EFNG.$ f ergo parallelepipedum $ABIC-$
 f 34. II. $DMKL, EFNGHQOP$ æquantur; g proinde
 g 6. ax. I. & pyramides $ABCD, EFGH,$ horum subsex-
 tuplæ, pares sunt. Q. E. D.

Eadem polygonis pyramidibus conveniunt: nam hæc ad trigonas reduci possunt.

Coroll.

Quæ de pyramidibus demonstrata sunt Prop. 6, 8, 9. etiam conveniunt quibuscunque prismatibus, cum hæc tripla sint pyramidum eandem basim & altitudinem habentium. itaque 1. Prismatum æque altorum eadem est proportio, quæ basium.

2. Similium prismatum proportio triplicata est proportionis laterum homologorum.

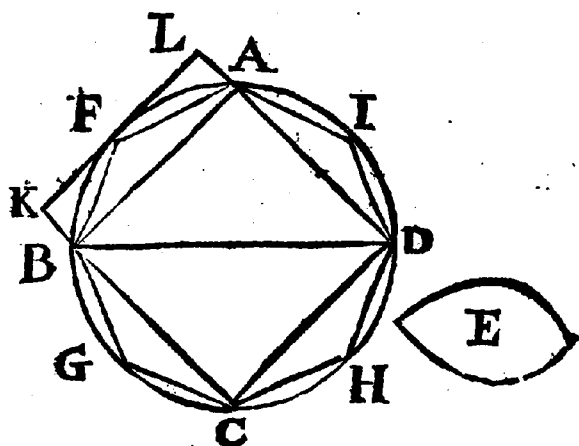
3. Æqualia prismata reciprocant bases & altitudines; & quæ reciprocant, sunt æquales.

Schol.

Ex hæcenus demonstratis elicitur dimensio quorumcunque prismatum & pyramidum.

a Prismatis soliditas producitur ex altitudine in basim ducta; b itaque & pyramidis ex tertia altitudinis parte ducta in basim.

a cor. I. b n-
 fm; & sch.
 40. 12.
 b 7. 12.



Omnis conus tertia pars est cylindri habentis eandem cum ipso basim ABCD, & altitudinem equalem.

Si negas, primo Cylindrus triplum coni superet excessu E. Prisma super quadratum circulo ABCD inscriptum a subduplum est prismatis super quadratum eidem circulo circumscriptum sibi & cylindro æque alti. ergo prisma super quadratum ABCD superat cylindri semissem. eodem modo prisma super basim AFB cylindro æque altum segmenti cylindrici AFB b dimidio majus est. Continuetur bisectio arcuum, & detrahantur prismata, donec segmenta cylindri relicta, nempe ad AF, FB, &c. minora evadant solido E. Itaque cylind. — segment. AF, FB, &c. (prisma ad basim AFBGCHDI) c majus est quam cylind. — B (d triplum coni.) ergo pyramis dicti prismatis e pars tertia (ad eandem basim sita, ejusdemque altitudinis) cono æque alto ad basim ABCD circulum major est, pars toto. Q. E. A.

Vide fig. 2. hujus.

a sch. 7. 4. & cor. 9. 12.

b sch. 27. 3. & cor. 9. 12.

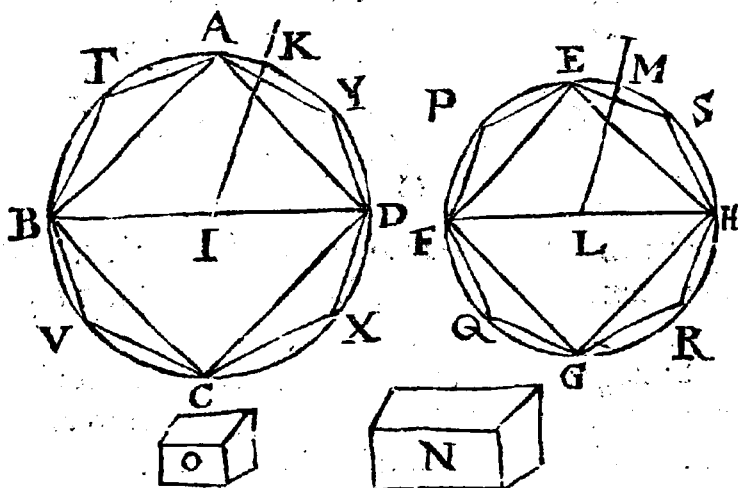
c 5. 4x. 1. d hyp. e cor. 7. 12.

Si conus tertia parte cylindri major dicatur, sit icidem excessus E. Ex cono detrahe pyramides, ut in priori parte prismata ex cylindro, donec restent coni segmenta aliqua, puta ad AF, FB,

f hyp.

FB, BG, &c. minora solido E. ergo con.—E
 ($f\frac{1}{3}$ cylindr.) $\supset$ pyr. AFBGCHDI (con.—
 segment. AF, FB, &c.) ergo prisma pyramidis
 triplum (æque altum scilicet atque ad eandem
 basim) cylindro ad basim ABCD majus est,
 pars toto. Q.E.A. Quare fatendum est, quod
 cylindrus triplo cono æquatur. Q.E.D.

P R O P. XI,



Sub eadem altitudine existentes cylindri, & con
 ABCDK, EFGHM, inter se sunt ut bases ABCD,
 EFGH.

Sit circ. ABCD, circ. EFGH :: con. ABCDK.
 N. Dico $N = \text{con. EFGHM}$.

Nam si fieri potest, sit $N \supset \text{con. EFGHM}$,
 sitque excessus O. Supposita præparatione, &
 argumentatione præcedentis; erit O majus seg-
 mentis conicis EP, PF, FQ, &c. ideoque soli-
 dum $N \supset \text{pyr. EPFQGRHSM}$. a Fiat in cir-
 culo ABCD simile polygonum ATBV CXDY.

Quia pyr. ABVYK. pyr. EFQSM b :: polyg.
 ATBVY. polyg. EPFQS c :: circ. ABCD, circ.
 EFGH d :: con. ABCDK. N. e erit pyram.
 EPFQGRHSM $\supset$ N. contra modo dicta.

Rursum dic $N \supset \text{con. EFGHM}$. pone con.
 EFGHM. O :: N. con. ABCDK f :: circ.
 EFGH. ABCD. g ergo O $\supset \text{con. ABCDK}$,
 quod

quod absurdum est, ex ostensis in priori parte. *f hyp. &*

Itaque potius dic, $ABCD. EFGH :: \text{con. invertendo.}$
 $ABCDK. EFGHM. Q. E. D.$ g 14. 5.

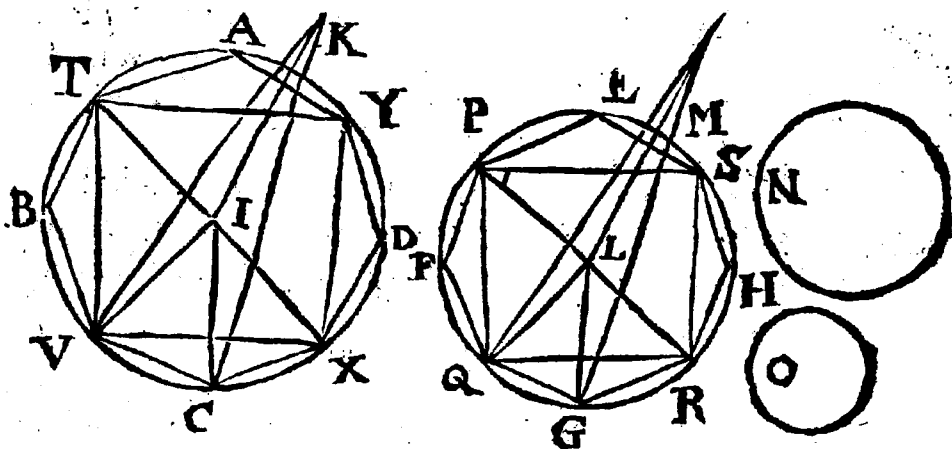
Idem demonstrabitur de cylindris, si conorum & pyramidum loco concipiantur cylindri & prismata. ergo, &c.

S C H O L.

Ex h^{is} habetur dimensio cylindrorum & conorum quorumcunque. Cylindri rectæ soliditas producit^rur ex base circulari (*a* pro cuius dimensione *a* 1. *Prop.* consulendus est Archimedes) ducta in altitudi- *de dinens,*
 nem. *b* igitur & cuiuscunque cylindri. *circ.*

c Itaque coni soliditas producit^rur ex tertia *b* 11. 12.
 parte altitudinis ducta in basim. *c* 10. 12.

P R O P. XII.



Similes coni & cylindri ABCDK, EFGHM in triplicata ratione sunt diametrorum TX, PR, quæ in basibus ABCD, EFGH.

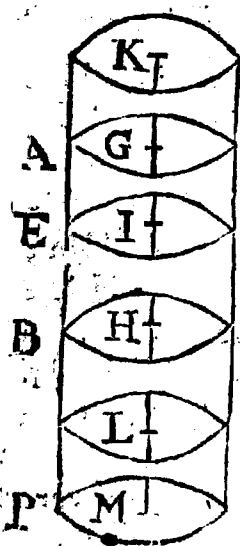
Habeat conus A ad aliquod N rationem triplicatam TX ad PR. dico $N = \text{con. EFGHM}$; Nam si fieri potest, sit $N \supset EFGHM$; sitque excessus O. ergo ut in Prioribus, $N \supset \text{pyr. EPFQGRHSM}$. Sint axes conorum IK, LM, adducanturque rectæ VK, CK, VI, CI; & QM, GM, QL, GL. Quoniam coni similes *a* 24. *def. 11* sunt, *a* est VI. IK :: QL. LM. anguli vero *b* 18. *def. 11* VIK, QLM *b* recti sunt. *c* ergo trigona VIK, *c* 6. 6. QLM,

- d 4. 6. QLM æquiangula sunt; *d* unde VC, VI :: QG.
 QL. item VI. VK :: QL. QM. ergo ex æ-
 e 7. 5. quali VC. VK :: QG. QM. e quinetiam VK.
 CK :: QM. MG. ergo rursus ex æquo VC.
 f 5. 6. CK :: QG. GM. *f* ergo triangula V K C,
 QMG similia sunt; similique argumento reliqua
 g 9. def. 11. hujus pyramidis triangula reliquis illius. *g* quare
 h cor. 8. 12. pyramides ipsæ similes sunt. *h* sunt vero hæ in
 k 4. 6. triplicata ratione VC ad QG, *k* hoc est VI ad
 l 15. 5. QL, *l* vel TX ad PR. *m* ergo pyr. A T B V C.
 m hyp. & XDYK. pyr. EPFQGRHSM :: con. ABCDK.
 n 11. 5. N. *n* unde pyr. EPFQGRHSM $\supset$ N; quod
 n 14. 5. repugnat prius dictis.

Rursus, dic N. $\sqsubset$ con. EFGHM. sit con.
 o Prima & EFGHM. O :: N. con. ABCDK o :: pyr.
 inverse. EPRM. ATCK *p* :: GQ. VC ter :: *q* PR.
 p cor. 8. 12. TX ter. ergo O *r* $\supset$ ABCDK. quod modo
 q 4. 6. repugnare ostensum est. Proinde N = con.
 r 14. 5. EFGHM. Q. E. D.

Quoniam vero quam proportionem habent
 con, eandem quoque obtinent cylindri, eorum
 tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum
 proportionem diametrorum in basibus triplicatâ.

P R O P. XIII.



Si cylindrus ABCD plano
 EF secetur aduersis planis BC,
 AD parallelo; erit ut cy-
 lindrus AEFD ad cylindrum
 EBCF, ita axis GI ad ax-
 em IH.

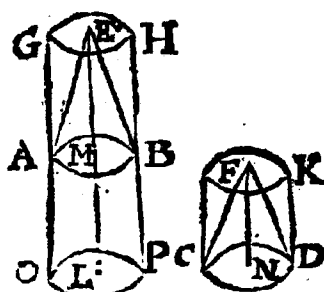
Productio axe, *a* sume
 GK = GI, & HL = IH
 = LM. & concipe per
 puncta K, L, M, plana du-
 ci circulis AD, BC paral-
 lela. *b* ergo cylind. ED =
 cyl. AN. & cylin. EC *b* =
 BO *b* = OP. itaque cylin-
 drus

a 3. 1.

b 11. 12.

drus EN cylindri ED æque multiplex est, ac
axis IK axis IG. pariterque cylindrus FP æque
multiplex est cylindri BF, ac axis IM axis IH.
prout vero $IK = \square, \rhd IM$, & sic cylindr. ^{c 11. 12.}
EN = $\square, \rhd EP$. d ergo cyl. A E F D. cyl. ^{d 6. def. 5.}
EBCF :: GI. IH. Q. E. D.

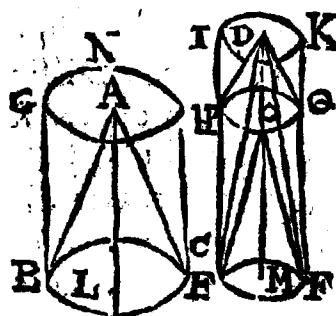
PROP. XIV.



Super aequalibus basibus
AB, CD existentes coni
AEB, CFD, & cylindri
AH, CK, inter se sunt ut al-
titudines ME, NF.

Productis cylindro HA
& axe EM, sume $ML =$
FN; & per punctum L ducatur planum basi
AB parallelum. a erit cyl. $AP = CK$, b atqui a 11. 12.
cylindr. AH. AP. (CK) :: ME. ML. (NF.) b 13. 12.
Q. E. D. Idem de conis cylindrorum subtri-
plis dictum puta. * imo de prismatis & pyra. * Adhibe
indibus. 9. & 7. 12.

PROP. XV.



Æqualium conorum
BAC, EDF, & cylindro-
rum BH, EK, reciprocantur
bases & altitudines (BC.
EF :: MD. LA :) &
quorum conorum, & cylin-
drorum reciprocantur bases
& altitudines, illi sunt
æquales.

Si altitudines pares sint, etiam bases pares
erunt; & res clara est. Sin altitudines sint im- a 14. 12;
pares, aufer $MO = LA$. b constr.

1. Hyp. Estque MD. MO (a LA) b :: cyl. c hyp.
EK (c BH.) EQ d æ circ. BC. EF. Q. E. D. d 11. 12.

ебур.

f14. 12.

g II. 5.

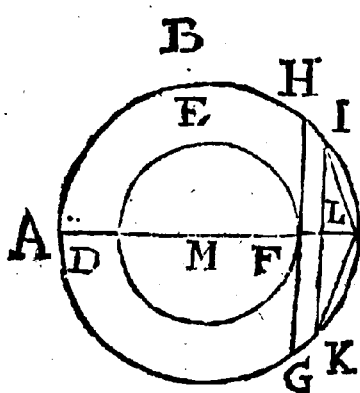
h II. 12.

kg. 5.

2. Hyp. BC. EF $\epsilon ::$ DM. OM (LA) $f ::$
Cyl. EK. EQ $g ::$ BC. EF $b ::$ BH. EQ. k Ergo
cylind. EK=BH. Q. B. D.
Simili argumento utere de conis.

Simili argumento utere de conis.

PROP. XVI.

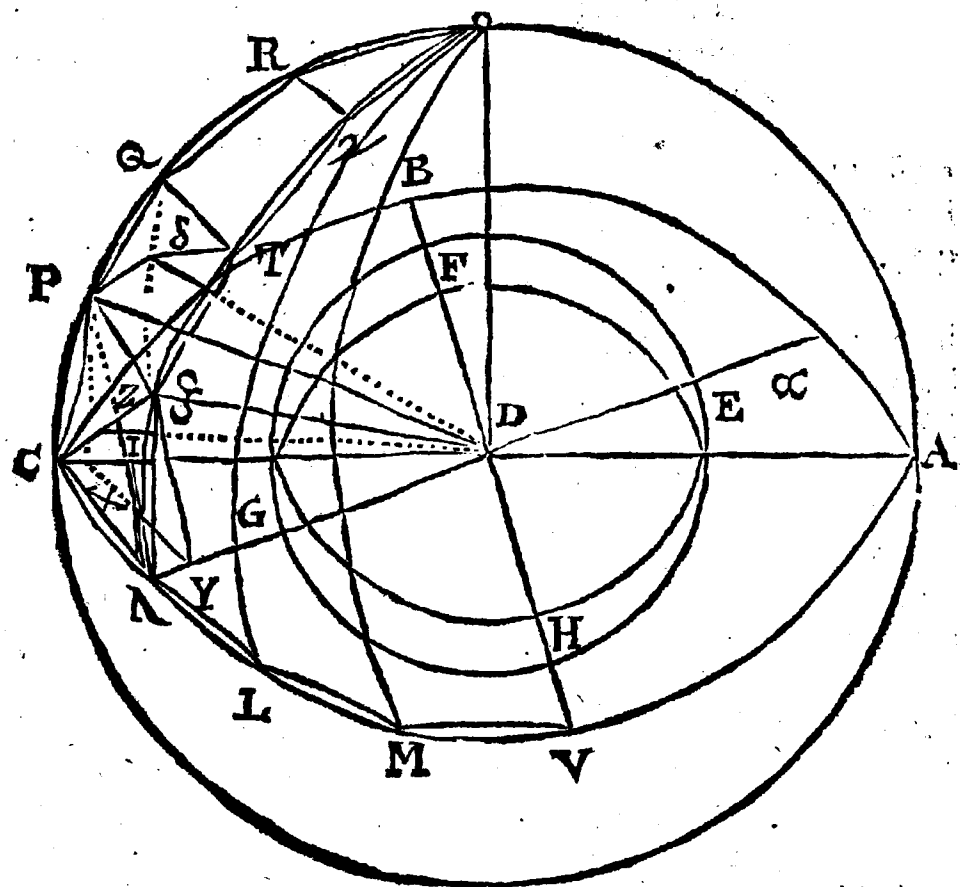


*Duobus circulis
ABCG, DEF circa
idem centrum M exi-
stentibus, in majori cir-
culo ABCG polygo-
num æquilaterum, &
parium laterum inscri-
bere, quod non tan-
gat minorem circulum
DEF.*

Per centrum M extendatur recta AC secans
circulum DEF in F. ex quo erige perpendicu-
larem FH. *a* Biseca semicirculum ABC, ejusque
semissem BC, atque ita continuo, *b* donec ar-
cus IC minor evadat arcu HC. ab I demitte
perpendicularem IL. Liquet arcum IC totum
circulum metiri, numerumque arcuum esse pa-
rem, adeoque subtensam IC latius esse *c* polygo-
ni inscriptibilis, quod circulum DEF minime
continget. Nam HG *d* tangit circulum DEF;
e cui parallela est IK, extraque sita, *f* quare IK
circulum non tangit, multoque magis CI, CK,
& reliqua polygoni latera, longius à centro di-
stantia, circulum DEF non tangunt. Q. E. F.
Coroll. Nota, quod IK non tangit circulum
DEF.

PROP.

PROP. XVII.



Duabus sphaeris ABCV, EFGH circa idem centrum D existentibus, in majori sphaera ABCV solidum polyedrum inscribere, quod non tangat superficiem minoris sphaera EFGH.

Secentur ambae sphaerae plano per centrum faciente circulos EFGH, ABCV. ducanturque diametri AC, BV secantes perpendiculariter. Circulo ABCV inscribatur polygonum æqui- a 16. 11. laterum VMLNC, &c. circulum EFGH minime tangens. ducta diametro Na, erectaque DO recta ad planum ABC. per DO, perque diametros AC, Na erigi concipiantur plana DOC, DON, quæ ad circulum ABCV b 18. 11. erunt, ideoque in superficie sphaerae c quadrantes c cor. 33. 6.

d 4. I. efficient DOC, DON. in quibus *d* aptentur rectæ CP, PQ, QR, RO, NS, ST, Tγ, γO ipsis CN, NL, &c pares, & æque multæ. In reliquis quadrantibus OL, OM, &c. inque tota sphaera eadem constructio fiat. Dico factum.

A punctis P, S ad planum AB CV demitte perpendiculares PX, SY, e quæ in sectiones AC, Na cadent. Quoniam igitur tam s anguli recti PXC, SYN, g quam PCX, SNY, h æqualibus peripheriis insistente, f pares sunt, triangula PCX, SNY h æquiangula sunt. Cum igitur PC k = SN, l etiam PX = SY; l & XC = YN; l 26. I. m quare DX = DY. n ergo DX, XC :: DY. m 3. ax. I. YN. o ergo parallelæ sunt YX, NC. quia verò n 7. 5. PX, SY pares, & cum eodem plano ABCV rectæ, ctiam p parallelæ sunt, q erunt YX, p 6. II. SP etiam pares & parallelæ. r ergo SP, NC q 33. I. inter se parallelæ sunt. ergo s quadrilaterum r 9. II. NCPS, eademque ratione SPQT, TQRG, f 7. II. sed & t triangulum γRO totidem sunt plana. f 12. II. Eodem modo tota sphaera ejusmodi quadrilateris & triangulis repleta ostendetur. quare inscriptum est polyedrum.

u II. II. A centro D u duc DZ rectum plano NCPS; & iunge ZN, ZC, ZS, ZP. Quoniam DN. x 4. 6. NC :: DY. YX; est NC γ YX (SP) pa- y 14. 5. riterque SP ⊂ TQ, & TQ ⊂ γR. Et quia z 3. def. II. anguli DZC, DZN, DZS, DZP, q recti sunt, a 15. def. I. latera vero DC, DN, DS, DP a æqualia, & b 47. I. DZ commune, b erunt ZC, ZN, ZS, ZP æ- c 15. def. I. quales inter se; proinde circa quadrilaterum d constr. NCPS e describi potest circulus, in quo (b e 28. 3. NS, NC, CP d æquales, & NC ⊂ SP) NC f 33. 6. e plusquam quadrantem subtendit. f ergo ang. g 12. 2. NZC ad centrum obtusus est. g ergo NCq ⊂ h 32. I. 2 ZCq (ZCq + ZNq.) Sit NI ad AC nor- k 9. ax. I. malis. ergo cum ang. ADN (b DNC + l 5. I. DCN) sit k obtusus, l erit semissis ejus DCN recti

recti semisse major; proptereaque eo minor est
 reliquus è recto ang. $\angle CNI$. n unde $IN \perp IC$. n 19. 1.
 ergo NCq ($NIq + ICq$) $\circ \supset 2 INq$. itaque $\circ$ 47. 1.
 $IN \perp ZC$. & consequenter $DZ \perp DI$. atqui p 47. 1.
 punctum I est q extra sphæram $EFGH$. ergo q cor. 16.
 punctum Z potiori jure est extra ipsam. adeoque 12.
 planum $NCPS$ (cujus r proximum centro pun- r 47. 1.
 ctum est Z) sphæram $EFGH$ non contingit. Et
 si ad planum $SPQT$ demittatur perpendicularis
 Ds , punctum s , adeoque & planum $SPQT$
 adhuc ulterius à centro elongatur; idemque est
 de reliquis polyedri planis. ergo polyedrum
 $ORQPCN$, &c. majori sphære inscriptum, mi-
 norem non contingit. Q. E. F.

Coroll.

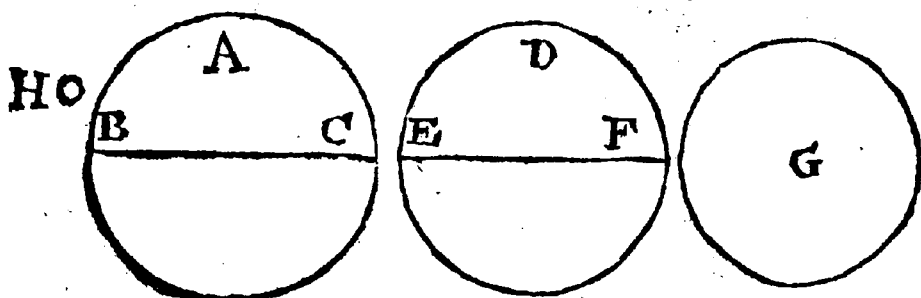
Hinc sequitur, Si in quavis alia sphæra descri-
 batur solidum polyedrum, simile prædicto solido po-
 lyedro, proportionem polyedri in una sphæra ad po-
 lyedrum in altera esse triplicatam ejus quam ha-
 bent sphærarum diametri.

Nam si ex centris sphærarum ad omnes angu-
 los basium dictorum polyedrorum rectæ linæ
 ducantur, distribuentur polyedra in pyramides
 numero æquales & similes, quarum homologa
 latera sunt semidiametri sphærarum; ut constat,
 si intelligatur harum sphærarum minor intra
 majorem circa idem centrum descripta. congru-
 ent enim sibi mutuo linæ rectæ ductæ à centro
 sphære ad basium angulos, ob similitudinem ba-
 sium, ac propterea pyramides efficientur similes.
 Quare cum singulæ pyramides in una sphæra, ad
 singulas pyramides illis similes in altera sphæra
 a habeant proportionem triplicatam laterû ho- a cor. 8. 12.
 mologorum, hoc est, semidiametrorum sphæra-
 rum; sint autem b ut una pyramis ad unam py- b 12. 5,
 ramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum
 polyedrum ex his compositum, ad omnes pyra-
 mides,

c 15. 5.

mides, id est, ad solidum polyedrum ex illis constitutum; habebit quoque polyedrum unius sphaerae ad polyedrum alterius sphaerae proportionem triplicatam semidiametrorum, & atque adeo diametrorum.

P R O P. XVIII.



Sphaera BAC, EDF sunt in triplicata ratione suarum diametrorum BCEF.

a 17. 12.

b cor. 17. 12

c hyp.

d 14. 5.

Sic sphaera BAC ad sphaeram G in triplicata ratione diametri BC ad diametrum EF. Dico $G = EDF$. Nam si fieri potest, sit $G \supset EDF$. & cogita sphaeram G concentricam esse ipsi EDF. Sphaerae EDF & polyedrum sphaeram G non tangens, sphaeraeque BAC simile polyedrum inscribatur. *b* Haec polyedra sunt in triplicata ratione diametrorum BC, EF, & id est, sphaerae BAC ad G. *d* Proinde sphaera G major est polyedro sphaerae EDF inscripto, pars toto.

e hyp. in-

vers.

f 14. 5.

Rursus, si fieri potest, sit sphaera $G \subset EDF$. Sitque ut sphaera EDF ad aliam sphaeram H, ita G ad BAC, & hoc est in triplicata ratione diametri EF ad BC; cum igitur $BAC \not\subset H$, incurrimus absurditatem prioris partis. Quia potius sphaera $G = EDF$. Q. E. D.

Coroll.

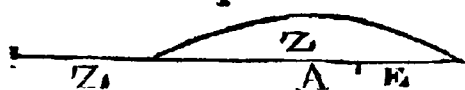
Hinc, ut sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum.

L I B. XIII.

P R O P. I.



Si recta linea z secundum extremam & mediam rationem secetur (z. a :: a. e;) majus segmentum a assumens dimidium totius z, quintuplum potest ejus, quod à dimidia totius z describitur, quadrati.



Dico Q. $a + \frac{1}{2} z$

$z = 5$ Q. $\frac{1}{2} z$. a $a^2 4. 2.$
 hoc est $aa + \frac{1}{4} zz + za = zz + \frac{1}{4} zz$. b $3. 4x. 1.$
 $za = zz$. Nam $ze + za = zz$. & $ze = aa$. c $2. 2.$
 ergo $aa + za = zz$. Q. E. D. d $hyp. \& 16$
 6.

P R O P. II.

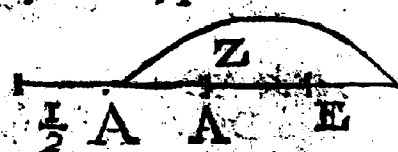
Si recta linea $\frac{1}{2} z + a$ sui ipsius segmenti $\frac{1}{2} z$ quintuplum possit, duplæ prædicti segmenti (z) extrema ac media ratione secta majus segmentum est a, reliqua pars ejus quæ à principio rectæ $\frac{1}{2} z + a$.

Dico z. $a :: a. e$. Nam quia per hyp. * $aa + \frac{1}{4} zz + za = zz + \frac{1}{4} zz$; vel $aa + za = zz$ a $a^2 4. 2.$
 $ze + za$. b $3. 4x. 1.$
 erit $aa = ze$. e quare z. $a :: a. e$. c $17. 6.$
 Q. E. D.

Vide fig. præced.

P R O P. III.

Si recta linea z secundum extremam ac mediam rationem secetur (z. a :: a. e;) minus segmentum e assumens dimidium majoris segmenti a, quintuplum potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti a describitur, quadrati.

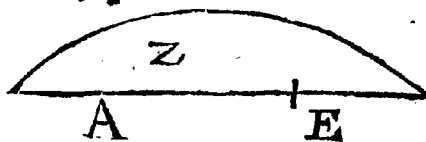


Dico Q. $e + \frac{1}{2} a = a^2 4. 2.$
 5 Q. $\frac{1}{2} a$. a hoc est $ee + \frac{1}{4} aa + ea = aa + \frac{1}{4} aa$. b $3. 4x.$
 b vel $ee + ea = aa$. c $3. 2.$
 Nam $ee + ea = ze = aa$. Q. E. D. d $hyp. \& 17. 6.$

P R O P.

P R O P. IV.

Si recta linea z secundum extremam ac mediam rationem secetur ($z : a :: a : e$;) quod à tota z , quodque à minori segmento e , utraque simul quadrata, tripla sunt ejus, quod à majori segmento a describitur, quadrati.



Dico $zz + ee = 3$
 aa . a vel $aa + ee + 2ae$
 $+ ee = 3aa$. Nam ae
 $+ ee = b = ze = aa$.

d ergo $aa + 2ae + 2ee = 3aa$. Q. E. D.

P R O P. V.



Si recta linea AB secundum extremam & mediam rationem

secetur in C , apponaturque ei AD , aequalis majori segmento AC ; tota recta linea DB secundum extremam ac mediam rationem secatur, & majus segmentum est quæ à principio recta linea AB .

Nam quia $AB : AD :: AC : CB$, invertendoque $AD : AB :: CB : AC$; erit componendo $DB : AB :: AB : AC$. (AD.) Q. E. D.

Schol.

Quod si fuerit $BD : BA :: BA : AD$, erit $BA : AD :: AD : BA - AD$. Nam dividendo est $BD - BA (AD) : BA :: BA - AD : AD$. ergo inverse, $BA : AD :: AD : BA - AD$. Q. E. D.

P R O P. VI.



Si recta linea rationalis AB extrema ac media ratione secetur in C ;

utrumque segmentorum (AC , CB) irrationalis est linea, quæ vocatur apotome.

a 3. I.

b 1. 13.

c 6. 10.

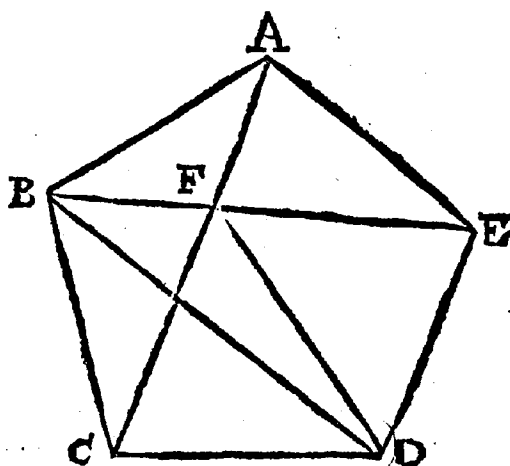
d hyp.

e sch. 12. 10 sint ρ , etiam DC est ρ . Quia vero $5. 1 :: non$

Majori segmento AC a adde $AD = \frac{1}{2} AB$;
 b ergo $DC^2 = 5 DA^2$. c ergo $DC^2 \nmid DA^2$.
 proinde cum AB , e ideoque ejus semissis DA
 sint ρ , etiam DC est ρ . Quia vero $5. 1 :: non$

Q. Q. f est DC $\perp$ DA. g ergo DC=AD, id f 9. 10.
est AC est apotome. Insuper quia ACq b=AB g 74. 10.
x BC, & AB est p, k etiam BC est apotome. h 17. 6.
Q. E. D. k 98. 10.

PROP. VII.



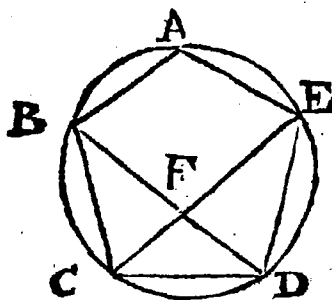
Si pentagoni æquilateri ABCDE tres anguli, sive qui deinceps EAB, ABC, BCD, sive EAB, BCD, CDE qui non deinceps sint, æquales fuerint, æquiangulum erit ipsum pentagonum ABCDE.

Paribus deinceps angulis subtendantur rectæ BE, AC, BD.

Quoniam latera EA, AB, BC, CD, angulique inclusi a æquantur, b erunt bases BE, AC, BD, a hyp. c angulique AEB, ABE, BAC, BCA pares. d qua- b 4. 1.
re BF=FA, & e proinde FC=FE. ergo trian- c 4. & 5. 1.
gula FCD, FED sibi mutuo æquilatera sunt, d 6. 1.
f unde ang. FCD=FED, g proinde ang. AED e 3. ax. 1.
=BCD. Eodem pacto ang. CDE reliquis æqua- f 8. 1.
tur. quare pentagonum æquiangulum est. Q. E. D. g 2. ax. 1.

Sin anguli EAB, BCD, CDE, qui non deinceps, statuuntur pares, h erit ang. AEB=BDC, h 4. 1.
& BE=BD, k ideoque ang. BED=BDE, l totus k 5. 1.
proinde ang. AED=CDE. ergo propter angu- l 2. ax. 1.
los A, E, D deinceps æquales, ut prius, pentago-
num æquiangulum erit. Q. E. D.

PROP. VIII.

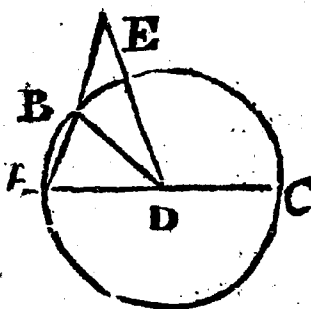


*Si pentagoni æquilateri
& æquianguli ABCDE
duos angulos BCD, CDE,
qui deinceps sunt, subtrahant
rectæ lineæ BD, CE; hæ
extrema ac media ratione
se mutuo secant, & majora
ipsarum segmenta BF, vel
EF æqualia sunt pentagoni lateri BC.*

a 14. 4.
b 28. 3.
c 27. 3.
d 32. 1.
e 33. 6.
f 6. 1.
g 27. 3.
h 4. 6.

Circa pentagonum *a* describe circulum ABD.
b Arcus $ED = BC$. *c* ergo ang. $FCD = FDC$.
d ergo ang. $BFC = 2 FCD$ ($FCD + FDC$).
Atqui arcus BAE *b* $= 2 ED$, proinde ang.
 $BCF = 2 FCD = BFC$. *f* square $BF = BC$.
Q. E. D. Porro quia triangula BCD , FCD
g æquiangula sunt, *h* erit $BD : DC$ (BF) $:: CD$
(BF) FD . pariterque $EC : EF :: EF : FC$.
Q. E. D.

PROP. IX.



*Si hexagoni latus BE, &
decagoni AB, in eodem cir-
culo ABC descriptorum
componantur, tota recta lineæ
AE extrema ac media rati-
one secatur, ($AE : BE :: BE : AB$) & majus ejus segmen-
tum est hexagoni latus BE.*

a hyp. &
27. 3.
b 32. 1.
c 7. 4x. 1.
d 5. 1.
e 1. 4x. 1.
f 4. 6.
g cor. 15. 4.

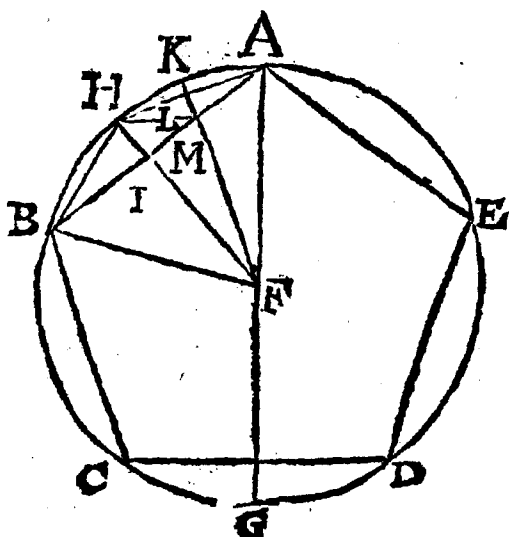
Duc diametrum ABC , & junge rectas DB ,
 DE . Quoniam ang. BDC *a* $= 4 BDA$, estque
ang. BDC *b* $= 2 DBA$ ($DAB + DBA$), erit
 DBA (*b* $BDE + BED$) *c* $= 2 BDA$ *d* $= 2 BDE$.
proinde ang. DBA , vel DAB *e* $= ADE$. Itaque
trigona ADE , ADB æquiangula sunt, *f* square
 $AE : AD$. (*g* BE) $:: AD$. (BE) AB . *Q. E. D.*

Coroll.

Coroll.

Hinc, si latus hexagoni alicujus circuli secetur extrema ac media ratione; majus illius segmentum erit latus decagoni ejusdem circuli. *sch. 5. 13.*

PROP. X.



Si in circulo ABCE pentagonum equilaterum ABCDE describatur; pentagoni latus AB potest & hexagoni latus FB, & decagoni latus AH, in a 28.3. & eodem circulo descriptorum. *3. ax.*

Duc diametrum AG. Biseca arcum AH in K. b hyp. & Et duc FK, FH, FB, BH, HM. *7. ax.*

Semicirc. AG = arc. AC a = AG = AD. c 33. 6. hoc est, arc. CG = GD b = AH = HB. ergo d 20. 3. arc. BCG = 2 BHK; c adeoque ang. BFG = 2 e 1. ax. f. BFK. d sed ang. BFG = 2 BAG. e ergo ang. f 32. 1. BFK = BAG. Trigona igitur BFM, FAB f x. g 4. 6. quiangula sunt. g quare AB. BF :: BF. BM. h 17. 6. b ergo $AB \times BM = BF^2$. Rursus ang. AFK k = k 27. 3. HFK; & FA = FH; m quare AL = LH, m & m 4. 1. anguli FLA, FLH pares, ac proinde recti sunt. n 17. 3. ergo ang. LHM m = LAM n = HBA. Trigo. o 32. 1. na igitur AHB, AMH o x quiangula sunt. p qua. p 4. 6.

q 17. 6. re AB. AH :: AH.AM. q ergo $AB \times AM =$
 r 2. 2. AHq. Quum igitur $ABq = AB \times BM + AB$
 f 2. ax. $\times AM$, ferit $ABq = BFq + AHq$. Q. E. D.

Coroll.

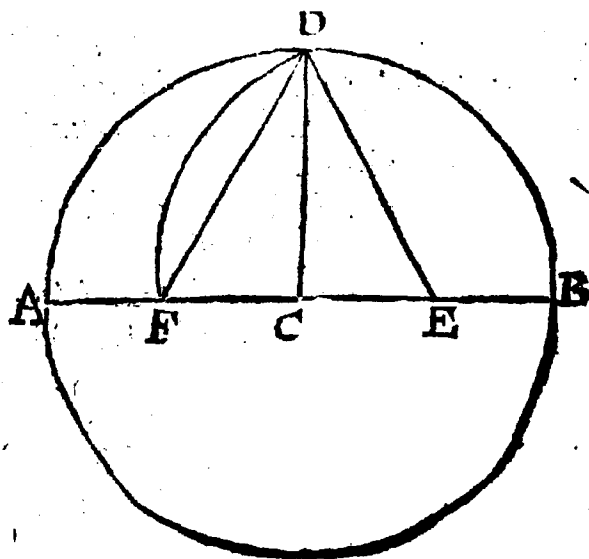
1. Hinc, linea recta (FK) quæ ex centro (F) arcum quempiam (HA) bisecat, etiam rectam (HA) illi arcui subtensam bisecat ad angulos rectos.

2. Diameter circuli (AG) ex angulo quovis (A) pentagoni ducta bisecat & arcum (CD,) quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum (CD) oppositum, idque ad angulos rectos.

Schol.

Hic, ut promissimus, praxim trademus expeditam problematis 11. 4.

Problema.



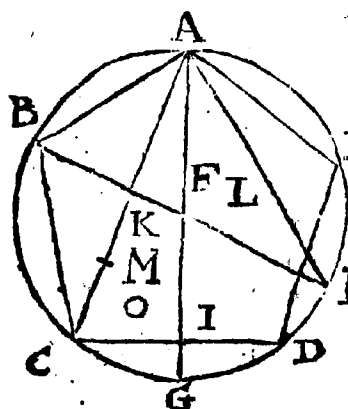
Invenire latus pentagoni circulo ADB inscribendi.

Duc diametrum AB, cui perpendicularem CD

CD ex centro C erige. • Bifeca CB in E. Fac EF = ED. erit DF pentagoni latus.

Nam BF x FC + ECq a = EFq b = EDq a 6. 2.
c = DCq + ECq. d ergo BF x FC = DCq, vel b constr.
BCq. e quare BF. BC :: BC. FC. ergo quum BC c 47. 1.
fit latus hexagoni, f erit FC latus decagoni, d 3. 4x.
proinde DF b = √ DCq + FCq g est latus pen- c 17. 6.
tagoni. Q. E. F. f 9. 13.
g 10. 13.
h 47. 1.

P R O P. XI.



Si in circulo ABCD
rationalem habente dia-
metrum AG, pentagonum
equilaterum ABCDE
describatur; pentagoni
latus AB irrationalis est
H linea, quæ vocatur minor.

Duc diametrum BFH,
rectasque AC, AH; &

* fac FL = $\frac{1}{4}$ radii FH, * 10. 6.

& CM = $\frac{1}{4}$ CA.

Ob angulos AKF, AIC æ rectos, & commu- a cor. 10.
nem CAI, trigona AKF, AIC b æquiangularia 19.
sunt; c ergo CI. FK c :: CA. FA (FB) d :: b 32. 1.
CM. FL. ergo permutando FK, FL :: CI. CM c 4. 6.
d :: CD. CK (2 CM.) e componendo igitur CD d 15. 5.
+ CK. CK :: KL. FL. f proinde Q: CD + CK e 18. 5.
(g 5 CKq.) CKq :: KLq. FLq. ergo KLq f 22. 6.
= 5 FLq. Itaque si BH (p) ponatur 8, erit FH g 1. 13.
4; FL 1. & FLq. 1. BL 5. & BLq 25. KLq 5. e
quibus liquet BL, & KL esse p b 7. h ideoque h 9. 10.
BK esse Apotomen, cujus congruentia KLcum ve- k 74. 10.
ro BLq - KLq = 20, i erit BL i √ BLq - 19. 10.
KLq. * unde BK est apotome quarta. Quid- * 4 def. 85.
nam igitur ABq m = HB x BK, n erit AB minor. 10.
Q. E. D. m cor. 8. 6.
& 17. 6.

AB potentia fit sesquialtera lateris EF ipsius pyramidis EGFI.

Circa AB describe semicirculum ADB. a sitque $AC = 2 CB$. ex puncto C erige perpendicularem CD; & iunge AD, DB. Tum radio $HE = CD$ describe circulum HEFG; cui b inscribe triangulum æquilaterum EFG. b cor. 15. 4. ex H c erige $IH = CA$ rectum plano EFG, c 12. 11, produc IH ad K; d ita ut $IK = AB$, rectasque d 3. 1. ad iunge IE, IF, IG. erit EFGI pyramis expetita.

Nam quia anguli ACD, IHE, IHF, IHG e recti sunt, & CD, HE, HF, HG e pares, e atque e constr. $IH = AC$; ferunt AD, IE, IF, IG æquales f 47. 1. inter se. Quia vero $AC (2 CB.) CB g :: AC q. g 10. 6.$ $CD q.$ erit $AC q = 2 CD q.$ itaque $AD q f = AC q + CD q b = 3 CD q = 3 HE q k = EF q.$ h 2. ax. l ergo AD, EF, IE, IF, IG pares sunt, adeoque k 12. 13. pyramis EFGI est æquilatera. Quod si pun- l 1. ax. 1. tum C super H collocetur, & AC super HI, m 8. ax. 1. rectæ AB, IK m congruent, utpote æquales. quare semicirculus ADB axi AB vel IK circumductus n 15. def. 17. transibit per puncta, E, F, G, * adeoque * 31. def. 11. pyramis EFGI sphaeræ inscripta erit. Q. E. F. o cor. 8. 6. liquet vero esse $BA q. AD q o :: BA. AC p :: 3. 2.$ p constr. Q. E. D.

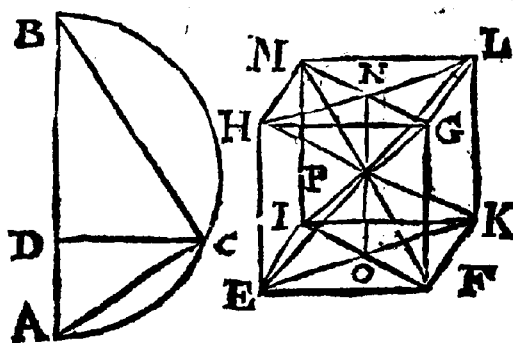
Corollaria.

1. $AB q. HE q :: 9.$ 2. Nam si $AB q$ ponatur 9, erit $AD q (EF q) 6.$ q proinde $HE q$ erit 2. q 12. 13.
3. Si L centrum fuerit, erit $AB. LC :: 6. 1.$
- Nam si AB ponatur 6, erit $AL, 3$; r ideoque $AC r$ constr. 4; quare LC erit 1. Minc
3. $AB. HI :: 6. 4 :: 3. 2.$ unde
4. $AB q. HI q :: 9. 4.$

3. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & æquales EFGDL, & EFGDK, quarum basis communis est quadratum EFGD.

4. Denique, bases octaedri oppositæ, inter se 15. 11. parallelæ sunt.

PROP. XV.



Cubum EF-
GHIKLM con-
stituere, &
sphæra comple-
cti, qua & prio-
res figuras; &
demonstrare,
quod sphæra di-

ameter AB potentia sit tripla lateris EF ipsius cubi.

Super AB describe semicirculum ACB; & a fac AB = 3 DA. ex D erige perpendicularem a 10. 6. DC, & junge BC ac AC. Tum super EF = AC b construe quadratum EFGH, cujus plano rectæ b 46. 1. insistant EL, FK, HM, GL ipsi EF pares, quas connecte rectis IK, KL, LM, IM. Solidum EFGHIKLM cubus est, ut satis constat ex constructione.

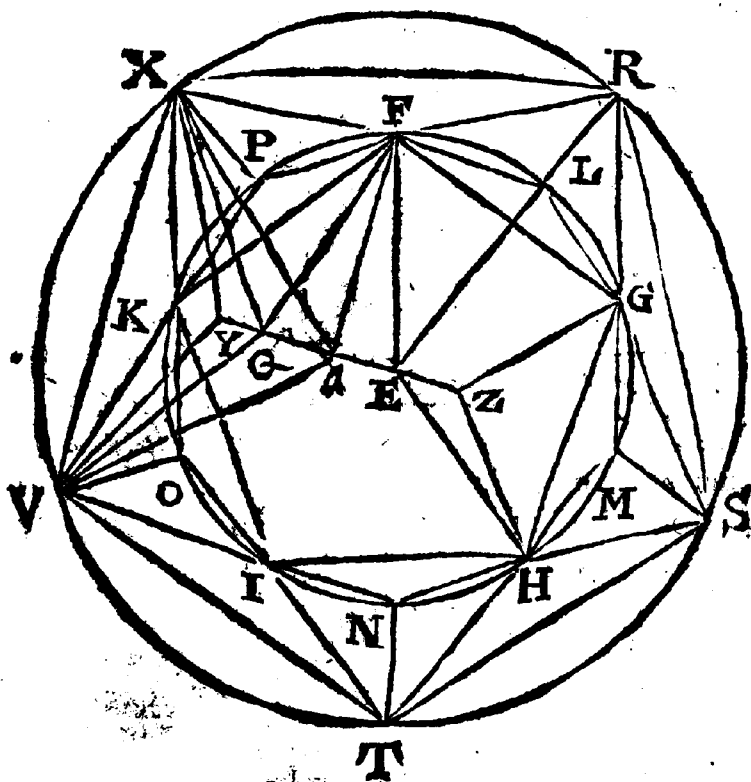
In quadratis oppositis EFKI, HGLM duc diametros EK, FI, HL, MG, per quas ducta plana EKLH, FIMG se interfecent in recta NO. Hæc diametros cubi EL, FM, GI, HK c bisecabit in P, centro cubi. d ergo P centrum erit sphæræ c cor. 39. per puncta cubi angularia transeuntis. Porro 11. ELq = EKq + KLq e = 3 KLq, f vel 3 d 15. def. 1. ACq. atqui ABq. ACq g :: BA. DA f :: 3. 1. & 14. def. g ergo AB = EL. Quare cubum fecimus, &c. 11. Q. B. F.

Coroll.

1. Hinc, Omnes diametri cubi inter se æquales sunt, seseque mutuo in centro sphæræ bisecant. Eademque ratione rectæ quæ quatuorcentrum oppositorum centra conjungunt, bisecantur in eodem centro.

k 47. 1. 2. Diameter sphaeræ potest latus tetraedri, &
 l 13. 13. cubi. nempe $ABqk = l BCq + m ACq$.
 m 15. 13.

P R O P. XVI.



Icosaedrum ZGHIFYV-
 XRST constituere, & sphaera
 completi, qua & antedictas fi-
 guras; & demonstrare, quod
 icosaedri latus FG irrationalis
 est linea, quæ vocatur mi-
 nor.

Super AB diametrum
 sphaeræ describe semicir-
 culum ADB; & a fac AB
 $= s BC$. ex C erige
 normalem CD, & duc
 AD, BD. Ad inter-
 vallum EF = BD descri-
 be circulum EFKNG; A



b cui inscribe pentagonum æquilaterum *EKIHG*. *b* 11. 4.
 Biseca arcus *FG*, *GH*, &c. ac connecte rectas
FL, *LG*, &c. latera nempe decagoni. Tunc *c* e- *c* 12. 11.
 rige *EQ*, *LR*, *MS*, *NT*, *OV*, *PX* ipsi *EF* æqua-
 les, rectasque plano *FKNG*. & connecte *RS*, *ST*,
TV, *VX*, *XR*; item *FX*, *FR*, *GR*, *GS*, *HS*,
HT, *IT*, *IV*, *KV*, *KX*. Denique producta *EQ*,
 sume *QY* = *FL*; & *EZ* = *FL*; rectasque duci
 concipe *ZG*, *ZH*, *ZI*, *ZK*, *ZF*; ac *YV*, *YX*, *YR*,
YS, *YT*. Dico factum.

Nam ob *EQ*, *LR*, *MS*, *NT*, *OV*, *PX* *d* æ- *d* *constr.*
 quales *e* & parallelas, etiam quæ illas jungunt, *e* 6. 11.
EL, *QR*, *EM*, *QS*, *EN*, *QT*, *EO*, *QV*, *EP*,
QX *f* pares & parallelæ sunt. Item ideo *LM* *f* 33. 1.
 (vel *FG*,) *RS*, *MN*, *ST*, &c. æquales sunt in-
 ter se. *g* ergo planum per *EL*, *EM*, &c. plano *g* 15. 11.
 per *QR*, *QS*, &c. æquidistans, *h* & circulus *h* 1. *def.* 3.
QXRSTV è centro *Q*, circulo *EPLMNO* æ-
 qualis est; atque *RSTVX* est pentagonum æqui-
 laterum. Duci vero intellectis *EF*, *EG*, *EH*,
 &c. ac *QX*, *QR*, *QS*, &c. quia *FRq* *k* = *FLq* *k* 47. 1.
 + *LRq*, *l* vel *FRq* *m* = *FGq*, *n* erunt *FR*, *FG*, *l* *constr.*
 adeoque omnes *RS*, *FG*, *FR*, *RG*, *GS*, *GH*, &c. *m* 10. 13.
 æquales inter se. Proinde 10 triangula *RFX*, *n* *sch.* 48. 1.
RFG, *RGS*, &c. æquilatera sunt & æqualia & 1. *ax.*
 Rursus ob ang. *XQY* rectum, erit *XYqp* = *o* *cor.* 14. 11
QXq + *QYq* *p* = *VXq* vel *FGq*. quare *XY*, *p* 47. 2.
VX, hisque similiter *YV*, *YT*, *YS*, *YR*, *ZG*, *ZH*, *q* 10. 13.
 &c. æquantur: Ergo alia decem trigona constitu-
 ta sunt æquilatera, & æqualia, tam sibi mutuo,
 quam decem prioribus; ac proinde factum est
 Icosaedrum.

Porro, bisecta *EQ* in *a*, duc rectas *aF*, *aX*,
aV; & propter *QX* *r* = *QV*, & commune latus *r* 15. *def.* 1.
aQ, angulosque *EQX*, *EQV* rectos; serit *aX* = *s* 4. 1.
aV. similique argumento omnes, *aX*, *aR*, *aS*,
aT, *aV*, *aF*, *aG*, *aH*, *aI*, *aK* æquantur.

- t 9. 13. Quoniam autem $ZQ. QE :: QE. ZE$, erit
u 3. 13. $Zaq u = 5 Ea q x = BQq (EFq) Ea q y = aFq$.
x 4. 2. ergo $Za = aF$. pari pacto $aF = Ya$. ergo
y 47. 1. sphaera, cujus centrum a , radius aF , per 12 puncta
icosaedri angularia transibit.
z 15. 5. Denique, quia $Za.aE :: ZY.QE$, a ideoque
a 22. 6. $Zaq.aBq :: ZYq.QEq$. b erit $ZYq = 5 QEq$,
b 14. 5. vel 5 BDq : atqui $ABq.BDq c :: AB.BC :: 5$.
c cor. 8. 6. 1. d ergo $ZY = AB$. $Q.E.F.$
d 1. ax. 1. Itaque si AB ponatur ρ , e erit $EF = \sqrt{AB \times$
e sch. 12. 10 $BC}$: etiam ρ ; proinde FG pentagoni, idemque
f 11. 13. Icosaedri 5 latus, f est minor. $Q.E.D.$

Coroll.

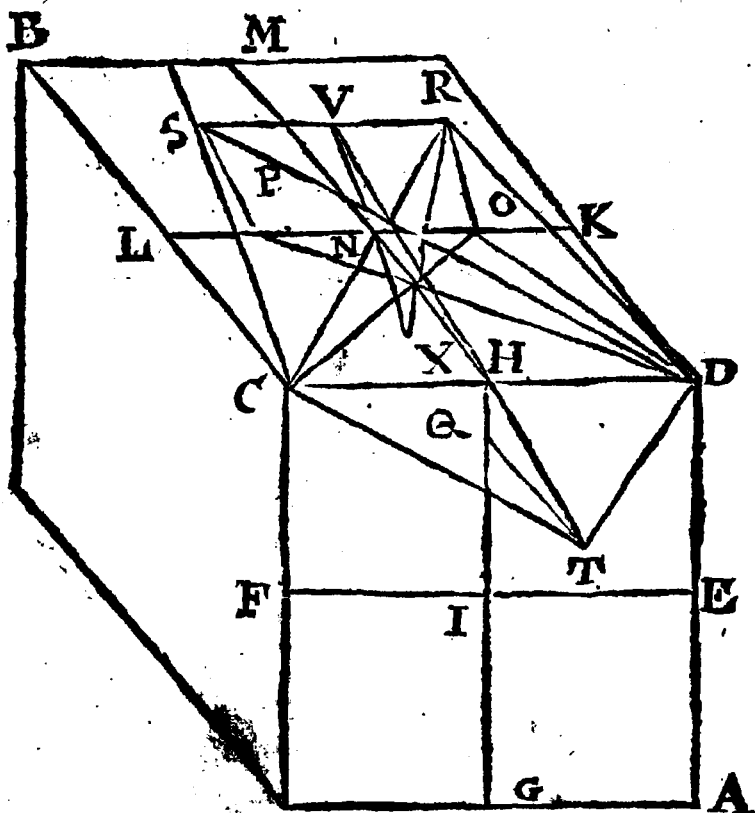
1. Ex dictis inferitur, sphaerae diametrum esse potentia quintuplum semidiametri circuli quinque latera icosaedri ambientis.

2. Item manifestum est, sphaerae diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni circuli ambientis quinque latera icosaedri.

3. Constat denique latera icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI , esse parallela. Nam RX a
b sch. 10. 3. parall. LP . b parall. HI .

PROP.

PROP. XVII.



Dodecaedrum constitucere, & sphaera complecti, qua & praedictas figuras; & demonstrare, quod dodecaedri latus RS irrationalis est linea, quae vocatur apotome.

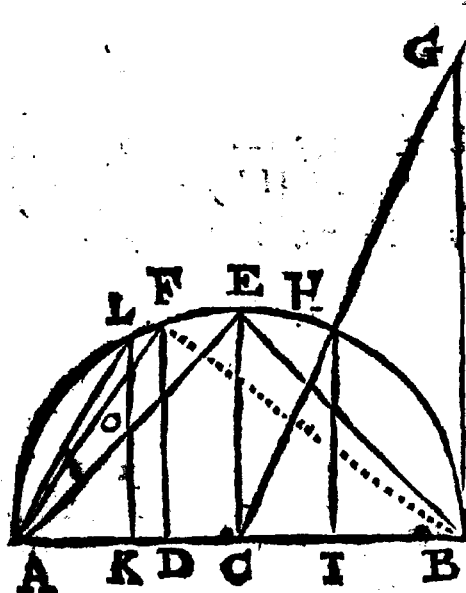
Sit AB cubus datae sphaerae inscriptus, cujus latera omnia bisecentur in punctis E, H, F, G, K, L, &c. rectaeque adjungantur KL, MH, HG, EF. $\text{Fac HI. IQ} :: \text{IQ. QH}$; & sunt a 30.6. NO, NP pares ipsi IQ. Erige OR, PS rectas plano DBC & QT plano AC. sintque OR, PS, QT ipsi IQ, NO, NP aequales. Connexis DR, RS, SC, CT, DT, erit DRSCCT pentagonum Dodecaedri expetiti. Nam duc NV parall. OR, & pertracta NV ad occursum cum cubi centro a 47. 1. X, connecte rectas DX, DO, DP, CR, CP, b 7. 48. 1. HV, HT, RX. Quia $\text{DO} = \text{DKq}$ (b KNq) c 4. 13. + $\text{KOq} = 3 \text{ ONq}$ (3 ORq) d erit DRq d 47. 1. = 4

- e 4. 2. $= 4 \text{ OR}q e = \text{OP}q$, vel $\text{RS}q$. ergo $\text{DR} = \text{RS}$.
 Simili argumento DR , RS , SC , CT , TP pa-
 f *constr.* 9. res sunt. Quia vero $\text{OR} f = g$ & parall. PS ,
 6. 11. g erunt RS , OP , & h consequenter RS , DC eti-
 g 33. 1. am parallelæ; h ergo hæc cum suis conjungenti-
 h 9. 1. bus DR , CS , VH in uno sunt plano. quinetiam
 k 7. 11. quia $\text{HI} \cdot \text{IQ} k :: \text{IQ} (\text{TQ.}) \text{QH} k :: \text{HN}$.
 k *constr.* NV ; & tam TQ , HN , quam QH , $\text{NV} k$ rectæ
 16. 11. eidem plano, l adeoque & parallelæ existunt,
 m 32. 6. m erit T H V recta linea, n ergo Trapezium
 n 1. & 2. 11 DRSC , & triang. DTS in uno sunt plano per
 rectas DC , TV extenso. ergo D T C S R est
 pentagonum, & quidem æquilaterum, ex antedi-
 ctis. Porro, o quia $\text{PK} \cdot \text{KN} :: \text{KN} \cdot \text{NP}$; &
 o 5. 13. $\text{DS}q p = \text{DP}q + \text{PS}q (\text{PN}q) = p \cdot \text{DK}q + \text{PK}q$
 p 47. 1. $+ \text{NP}q$, q erit $\text{DS}q = \text{DK}q + 3 \text{KN}q = 4 \text{DK}q$
 q 1. ax. 2. $(4 \text{DH}q) r = \text{DC}q$. ergo $\text{DS} = \text{DC}$; unde tri-
 & 4. 13. gona DRS , DCT sibi mutuo æquilatera sunt.
 r 4. 2. f ergo ang. $\text{DRS} = \text{DTC}$; & eodem pacto ang.
 f 8. 1. $\text{CSR} = \text{DTC}$. ergo * pentagonum D T C S R
 * 7. 13. etiam æquiangum est. Ad hæc, quia AX , DX ,
 t 15. 13. CX , &c. sunt cubi semidiametri, s erit $\text{XN} =$
 u 1. ax. 1. IH , vel KN , u adeoque $\text{XV} = \text{KP}$. unde ob angu-
 x 29. 1. lum π rectum RVX , z erit $\text{RX}q = \text{XV}q + \text{RV}q$
 z 47. 1. $(\text{NP}q) = \text{KP}q + \text{NP}q a = 3 \text{KN}q b =$
 a 4. 13. $\text{AX}q$, vel $\text{DX}q$, &c. ergo RX , AX , DX , & ea-
 b 15. 13. dem ratione XS , XT , AX æquales sunt inter se.
 Et si eadem methodo, qua constructum est pen-
 tagonum D T C S R , fabricentur 12 similia pen-
 tagona tangencia duodecim cubi latera, ea Do-
 decaedrum constituent; ac per eorum puncta an-
 gularia transiens sphaera, cujus radius AX , vel
 RX , Dadecaedrum complectetur. Q. E. F.
 c *constr.* Denique, quia $\text{KN} \cdot \text{NO} c :: \text{NO} \cdot \text{OK}$, d
 d 15. 5. erit $\text{KL} \cdot \text{OP} :: \text{OP} \cdot \text{OK} + \text{PL}$. Itaque si
 e 15. 13. sphaerae diameter AB ponatur β , erit $\text{KL} c = \sqrt{\beta}$
 f sch. 12. 10 $\text{AB}q f$ etiam β . g unde OP , vel RS latus dode-
 g 6. 13. caedri apotome erit. Q. E. D.

Coroll.

1. Hinc, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, majus segmentum erit latus dodecaedri in eadem sphaera descripti.
2. Si rectae lineae sectae extrema ac media ratione, minus segmentum sit latus dodecaedri, majus segmentum erit latus cubi ejusdem sphaerae.
3. Liqueat etiam latus cubi aequale esse lineae rectae subtendenti angulum pentagoni dodecaedri eadem sphaera comprehensi.

PROP. XVIII.



*Latera quinque figurarum exponere,
& inter se compara-
re.*

Sit AB diam-
ter sphaerae, ac
AEB semicirculus.

fitque AC $a = \frac{1}{2}$ a 10. 1.
AB, & AD $b = \frac{2}{3}$ b 10. 6.

AB. Erige perpen-
diculares CE, DF,
& BG=AB. junge
AF, AE, BE, BF,
CG, ex H demitte

perpendicularem HI, & sumpta CK=GI, ex K
erige perpendicularem KL, & connecte AL.
Denique c fac AF. AO :: AO. OF.

Itaque 3. 2 d :: AB. BD e :: ABq. BFq, latus d *constr.*
Tetraedri, & 2. 1 :: a AB. AC :: ABq. BEq, fla- e *cor.* 8. 6
tus Q *constr.* f 14. 13.

Item 3. $1 d :: AB. ADe :: ABq. AFq, g \text{ latus } g 15. 13!$
 Hexaedri. h constr.

Porro, quia A F A Ob :: A O O F. *k* erit *k cor.* 17.
AO 13.

14. 6. AO latus Dodecaedri. denique BG (2 BC.)
 m 24. 5. BC :: HI. IC. m ergo HI = 2 CI n = KL. ergo
 n constr. HI q = 4 CI q. proinde CH q = p ; CI q. q ergo
 o 4. 2. AB q = 5 KI q. itaque KI, vel HI, est radius cir-
 p 47. 1. culi circumscriptibentis pentagonum icosaedri ; &
 q 15. 5. AK, vel IB, est latus decagoni eidem circulo in-
 r cor. 16. 13 scripti. unde AL ferit latus pentagoni, & idemque
 s 10. 13. Icosaedri latus. Ex quibus liquet BF, BE, AF
 t 16. 13. esse p q. & AL, AO esse p q ; atque BF
 u 1. 6. BE ; & BE AF ; ac AF AO. Quia
 x 4. 4x. 1. AF x OF, x ideoque AF x AO + AF x OF
 y 1. 2. AF x OF, y hoc est AF q = 2 AO q. & e-
 z 17. 6. rit 3 AF q (5 KL q) = 6 AO q. proinde KL
 a 47. 1. AO ; & fortius, AL AO.

Jam vero ut hæc latera numeris exprimamus,
 si AB ponatur $\sqrt{60}$, erit ex jam dictis ad calcu-
 lum exactis, $BF = \sqrt{40}$. & $BE = \sqrt{30}$. & AF
 $= \sqrt{20}$. item $AL = \sqrt{30} - \sqrt{180}$ (nam
 $AK = \sqrt{15} - \sqrt{3}$. & $KL (HI) = \sqrt{12}$.)
 denique $AO = \sqrt{30} - \sqrt{500}$ ($\sqrt{25} -$
 $\sqrt{5}$.)

S C H O L.

Præter jam dictas figuras nullam dari posse figuram solidam regularem (nempe quæ figuris planis ordinatis & aequalibus contineatur) admodum perspicuum est. Nam ad anguli solidi constitutionem requiruntur ad minimum tres anguli plani; a hi- a 21. II. que omnes simul 4 rectis minores esse debent. b Atqui 6 anguli trigoni æquilateri, 4 quadratici, b Vid. schol. & 3 hexagonici, figillatim 4 rectos exæquant; 32. I. quatuor vero pentagonici, 3 heptagonici, 3 octagonici, &c. 4 rectos excedunt. ergo solummodo ex 3, 4, vel 5 triangulis æquilateris, ex 3 quadraticis, vel 3 pentagonis, effici potest angulus solidus. Proinde, præter quinque prædicta, nulla existere possunt corpora regularia.

Ex P. Herigonio.

Proportiones sphaerae, & 5 figurarum regularium eidem inscriptarum.

Sit diameter sphaeræ 2. Erunt

Peripheria circuli majoris, 6 | 28318.

Superficies circuli majoris, 3 | 14159.

Superficies sphaeræ, 12 | 56637.

Soliditas sphaeræ, 4 | 18859.

Latus tetraedri, 1 | 62299.

Latus

Superficies tetraedri, 4 [6188.

Soliditas tetraedri, 0 [15132.

Latus hexaedri, 1 [1547.

Superficies hexaedri, 8.

Soliditas hexaedri, 1 [5396.

Latus octaedri, 1 [41421.

Superficies octaedri, 6 [9282.

Soliditas octaedri, 1 [33333.

Latus dodecaedri, 0 [71364.

Superficies dodecaedri, 10 [51462.

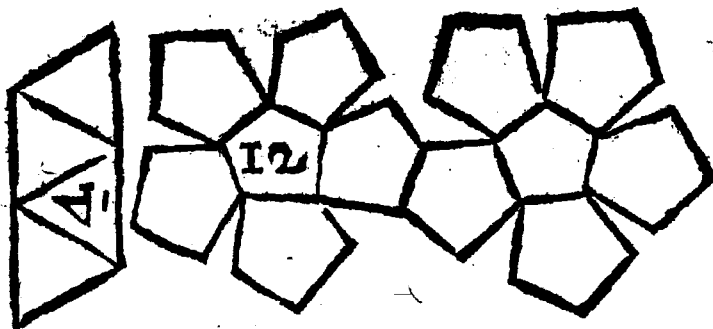
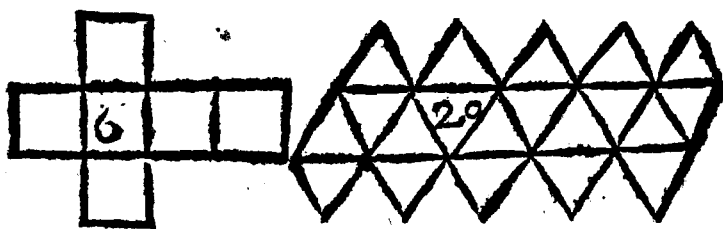
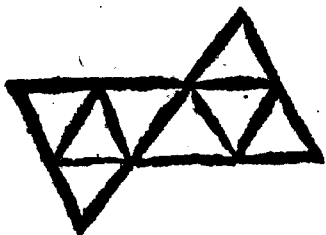
Soliditas dodecaedri, 2 [78516.

Latus Icosaedri, 1 [05146.

Superficies Icosaedri, 9 [51434.

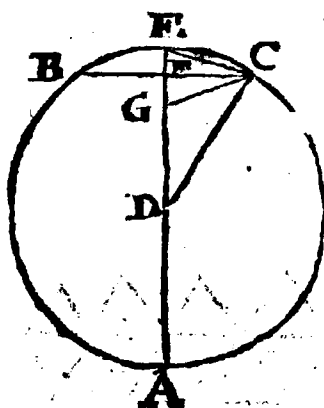
Soliditas Icosaedri, 2 [53615.

Quod si ex charta conficiantur quinque figura
 aquilatera & aquiangula similes his quae sunt in
 subiecta figura, componentur quinque figura solida,
 si rite complicantur.



LIB. XIV.

P R O P. I.



Quia ex D centro circuli cuiuspiam ABC in pentagoni eidem circulo inscripti latus BC ducitur perpendicularis DF, dimidia est utriusque lineae simul, & lateris hexagoni DE, & lateris decagoni EC eidem cir-

culo ABC inscripti.

Sume $FG = FE$, & duc CG . a Estque $CE = CG$. ergo ang. $CGB = CEG = ECD$. ergo ang. $ECG = EDC$ d = $\frac{1}{4} ADC$ e = $\frac{1}{2} CED$ ($\frac{1}{2} ECD$.) proinde ang. $GCD = ECG = EDC$. g quare $DG = GC$ (CE.) ergo $DF = CE$ (DG) + $EF = DE + GB$. Q. E. D.

a 4. 1.
b 5. 1.
c 32. 1.
d hyp. &
33. 6.
e 20. 3.
f 7. ax.
g 6. 1.

P R O P. II.

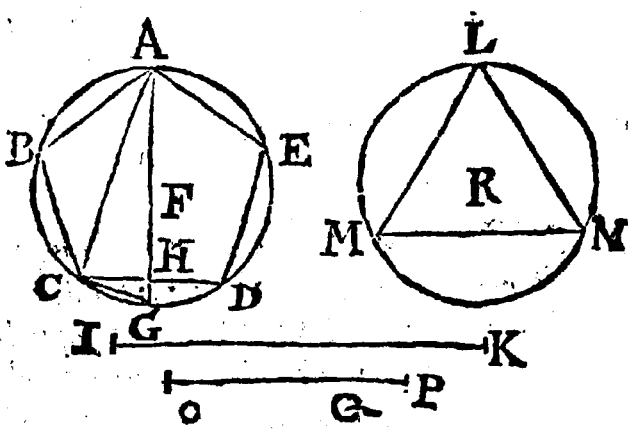
A G B C Si bina recta linea AB
D H E F DE extrema ac media ratione secantur (AB. AG :: AG. GB. & DE. DH :: DH. HE;) ipsa similiter secabuntur, in easdem scilicet proportionibus. (AG. GB :: DH. HE.)

Accipe $BC = BG$ & $EF = EH$. Estque $AB \times BG = AG^2$ quare $AC \times b = 4 ABG$ c 1. ax. 1. + $AG^2 = 5 AG^2$. Similiter erit $DH^2 = d \times 2. 5.$ & $5 DH^2$ ergo $AC. AG :: DE. DH$. componendo igitur $AC + AG. AG :: DE + DH. DH$.

a 17. 6.
b 8. 2.
c 1. ax. 1.
d 22. 5. &
22. 6.

$DH. \text{ hoc est } 2 AB. AG :: 2 DE. DH. \text{ e pro } e 22. 5.$
 $\text{inde } AB. AG :: DE. DH. \text{ unde } f \text{ dividendo } f 17. 5.$
 $AG. GB :: DH. HE. Q. E. D.$

P R O P. III.



Idem circulus ABD comprehendit & Dodecaedri pentagonum ABCDE, & Icosaedri triangulum LMN, eidem sphaera inscriptorum.

Duc diametrum AG, rectasque AC, CG. Sitque IK diameter sphaerae, a & IKq = 5 OPq. b fiatque OP. OQ :: OQ. QP. Quia ACq + CGq c = AGq d = 4 FGq; & ABqe = FGq + CGq. f erit ACq + ABq = 5 FGq. porro, quia CA. AB g :: AB. CA - AB; ac OP. OQ :: OQ. QP. h ideoque CA. OP :: AB. OQ. k erit 3 ACq (l IKq.) 5 OPq (m IKq) :: 3 ABq. 5 OQq. ergo 3 ABq = 5 OQq. Verum ob ML n latus pentagoni circulo inscripti, cujus radius OP, erunt 15 RMq o = 5 MLq p = 5 OPq + 5 OQq = * 3 ACq + 3 ABq q = 15 FGq. r ergo RM = FG. s proinde circ. ABD = circ. LMN. Q. E. D.

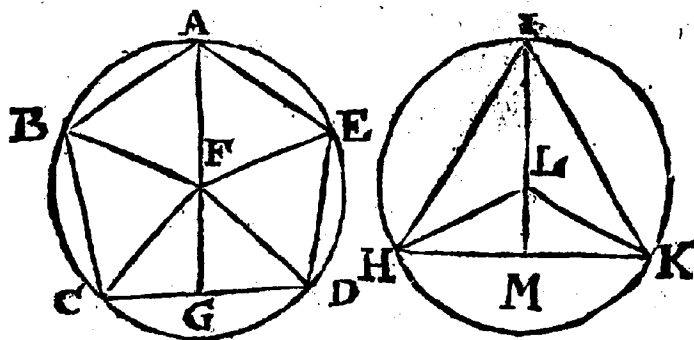
a sch. 47. 1.
 b 30. 6.
 c 47. 1.
 d 4. 2.
 e 10. 13.
 f 2. & 3. 22.
 g 8. 13.
 h 2. 13. &
 i 16. 5.
 k 22. 6. &
 l 4. 5.
 m 15. 13.
 n constr.
 o cor. 16. 13
 p 12. 13.
 q 10. 13.
 r 15. 5, &
 s supra.
 * Prim.
 t 1. 2. 1.
 & sch. 48. 1
 u 1. def. 3.

Y

P R O P.

11. def. 3.

PROP. IV.



Si ex F centro circuli pentagonum dodecaedri ABCDE circumscribens ducatur perpendicularis FG ad pentagoni unum latus CD; erit quod sub dicto latere CD, & perpendiculari FG comprehenditur rectangulum trigies sumptum, icosaedri superfici ei aequale. item,

Si ex centro L circuli triangulum icosaedri HIK circumscribens, perpendicularis LM ducatur ad trianguli unum latus HK; erit quod sub dicto latere HK, & perpendiculari LM comprehenditur rectangulum trigies sumptum, icosaedri superfici ei aequale.

Duc FA, FB, FC, FD, FE. a Erunt triangula CFD, DFE, EFA. AEB, BFC æqualia. atque $CD \times FG$ b = 2 triang. CFD. ergo 30 $CD \times GF$ c = 60 CFD d = 12 pentag. ABCDE e = superf. dodecaedri. Q. E. D.

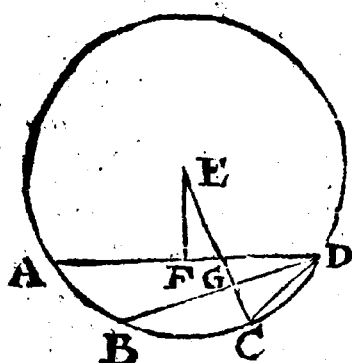
Duc LI, LH, IK. estque $HK \times LM$ f = 2 triang. LHK. ergo 30 $HK \times LM$ g = 60 HLK = 20 HIK h = superf. icosaedri. Q. E. D.

Coroll.

$CD \times FG$. $HK \times LM$ k :: superf. dodecaed. ad superf. icosaedri.

PROP.

PROP. V.



X Superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri in eadem sphaera descripti eandem proportionem habet, quum H latus cubi ad AD latus icosaedri.

H Circulus ABCD a circumscibat tam a 3. 14

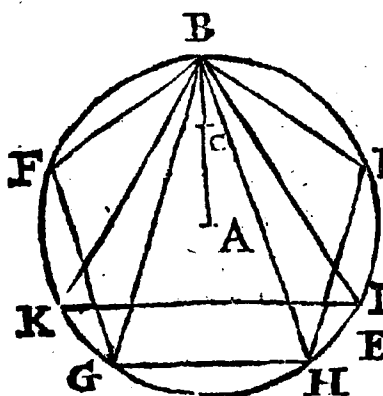
dodecaedri pentagonum, quam icosaedri triangulum; quorum latera BD, AD, ad quae demittantur ex E centro perpendiculares EF, EGC. & connectatur CD.

Quoniam $EC + CD$. $EC b :: EC$. CD . erit b 9. 13
 $EG (c \frac{1}{2} EC + \frac{1}{2} CD.) EF (d \frac{1}{2} EC) e :: EF$. c 1. 14
 $EG - EF (\frac{1}{2} CD.)$ atqui H. $BD f :: BD$. H. d cor. 12
 $BD. g$ ergo H. $BD :: EG. EF$. proinde $H \times EF$ 13
 $= BD \times EG$. quum igitur H. $AD b :: H \times EF$. e 15. 5
 $AD \times EF$. erit H. $AD :: BD \times EG$. f cor. 17. 13
 $::$ l superficies. dodecaedri ad superfic. icosaedri g 2. 14
Q. E. D. h 1. 6
 k 7. 5.
 l cor. 4. 14.

Y 2

PROP.

PROP. VII.



Si recta linea AB
secetur extrema ac me-
dia ratione; erit ut re-
cta BF potens id, quod
à tota AB, & id quod
à majori segmento AC,
ad rectam E, potentem
id quod à tota AB, &
id quod à minori seg-
mento BC; ita latus cu-
bi BG ad latus icosaedri BK eidem sphaera cum cu-
bo inscripti.

Circulo, cujus semidiameter AB, inscribantur
dodecaedri pentagonum BFGHI, & icosaedri
triangulum BKL. & quare BG latus cubi erit ei-
dem sphaerae inscripti. igitur BKq $b = 3$ ABq;
& Eq $c = 3$ ACq. ergo BKq. Eqd :: ABq. ACq
 $c ::$ BGq. BFq. permutando igitur BGq, BKq ::
BFq. Eq funde BG. BK :: BF. E. Q. E. D.

a cor. 17.
13.
b 12. 13.
c 4. 13.
d 15. 5.
e 2. 14.
f 22. 6

PROP. VII.

Dodecaedrum est ad Icosaedrum, ut cubi latus ad
latus Icosaedri, in una eademque sphaera inscripti.

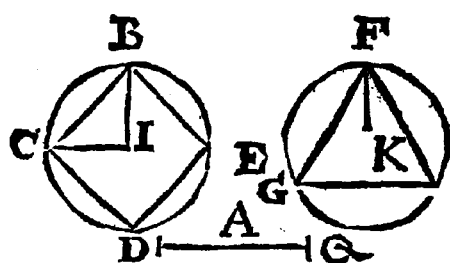
Quoniam & idem circulus comprehendit &
dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum,
b erunt perpendiculares à centro sphaerae ad pla-
na pentagoni & trianguli ductae inter se aequa-
les. itaque si dodecaedrum & icosaedrum intel-
ligantur esse divisa in pyramides, ductis rectis
à centro sphaerae ad omnes angulos, omnium
pyramidum altitudines erunt inter se aequales.
Cum igitur pyramides aequae altae c sint ut bases,
e 5, & 6. 12. & superficies dodecaedri sit aequalis 12 penta-
gonis, superficies vero icosaedri 20 triangulis;
erit

a 3. 14.

b 47. 1.

erit dodecaedrum ad icosaedrum, ut superficies
dodecaedri ad superficiem icosaedri, hoc est, ut d 5. 14.
latus cubi ad latus icosaedri.

PROP. VIII.

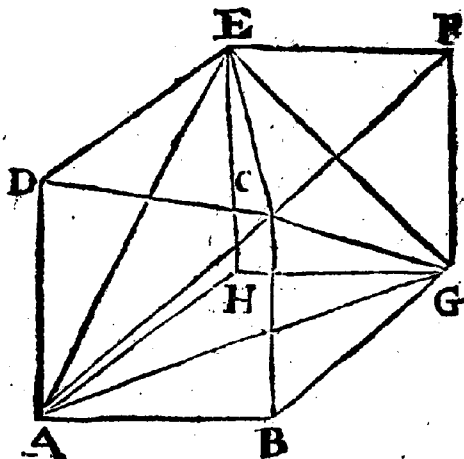


Idem circulus
BCDE compre-
hendit & cubi
quadratum BCDE
& octaedri tri-
angulum FGH,
ejusdem sphaerae.

Sit A diameter sphaerae. Quoniam Aq $\epsilon = 3$ a 15. 13.
BCq $b = 6$ Blq; itemque Aq $\epsilon = 2$ GFq b 47. 1.
 $d = 6$ KFq; erit Bl $=$ KF. ϵ ergo circulus CBED c 14. 13.
 $=$ GFH. Q. E. D. d 12. 13.
 ϵ 2. def. 1.

Y 3

LIB.



IN dato cubo $ABGHDCFE$ pyramidem $AGEC$ describere.

Ab angulo C duc diametros CA, CG, CE ; Easque connecte diametris AG, GE, EA . Hæ om-

a 47. I.

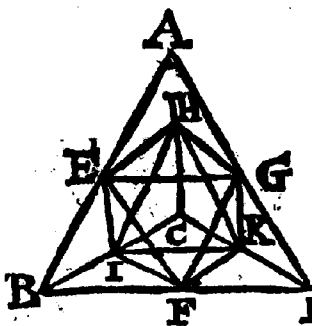
nes inter se æquales sunt, utpote æqualium quadratorum diametri. ergo triangula CAG, CGE, CEA, EAG æquilatera sunt, ac æqualia: proinde $AGEC$ est pyramis, quæ cubi angulis insistit,

b 31. def. II eique idcirco b inscribitur. Q. E. F.

PROP. II.

In data pyramide $ABDC$ octaedrum $EGKIFH$ describere.

a 10. I.



a Biseca latera pyramidis in punctis E, I, F, K, G, H ; quæ connecte 12 rectis $EF, FG, GE, &c.$ Hæ omnes

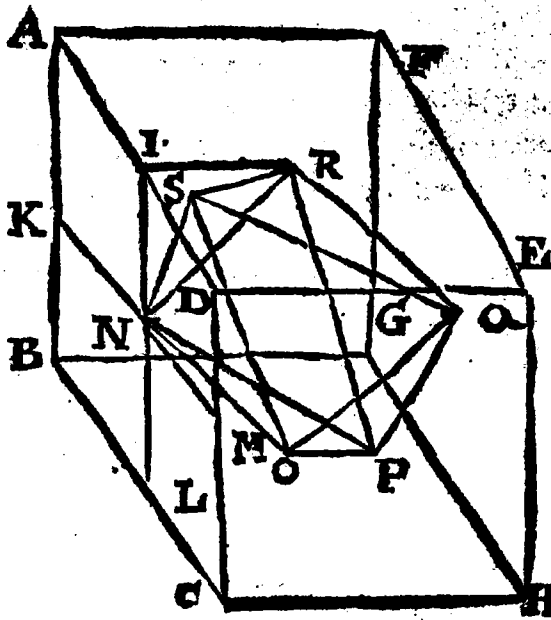
b 4. I.

b æquales sunt inter se. proinde 8 triangula $EHI, IHK, &c.$ æquilatera

c 27. def. II sunt & æqualia, adeoq; constituunt c octaedrum d 31. def. II d in data pyramide descriptum. Q. E. F.

PROP.

PROP. III.

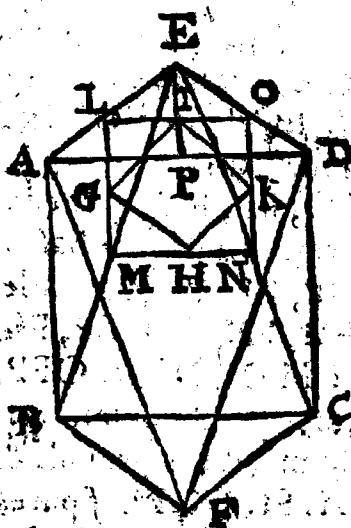


In dato cubo $CHGBDEFA$ octaedrum^m $NPQSOR$ describere.

Connecte quadratorum * centra N, P, Q, S , * 8. 4.
 O, R, I 2 rectis NP, PQ, QS , &c. quæ a æqualia a 4. 1.
 sunt inter se, ideoque 8 triangula efficiunt æqui-
 latera & æqualia. proinde b inscriptum est cubo b 31. & 27.
 b Octaedrum $NPQSOR$. Q. E. F. def. 11.

PROP. IV.

In dato octaedro $ABCDEF$ cubum inscribere.



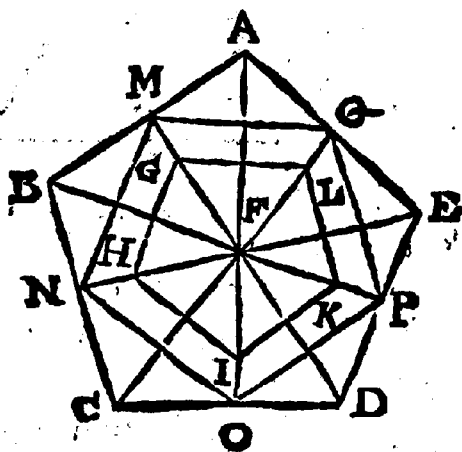
Latera pyramidis EA ;
 BCD , cujus basis quadra-
 tum $ABCD$, bisecentur
 rectis LM, MN, NO, OL ;
 quæ a æquales sunt & b a 4. 1.
 parallelæ lateribus qua- b 2. 6.
 drati $ABCD$ c ergo qua- c 29. def. 13.
 drilaterum $LMNO$ est
 quadratum.

Eodem modo, si latera
 quadrati $LMNO$ bise-
 centur

centur in punctis G, H, K, I, & connectantur GH, HK, KI, IG, erit GHKI quadratum. Quod si eadem arte in reliquis 5 pyramidibus octaedri centra triangulorum rectis conjungantur, describentur quadrata similia & æqualia quadrato GHKI. quare sex hujusmodi quadrata cubum constituent, qui quidem intra octaedrum descriptus erit, *d* cum octo ejus anguli tangant octo octaedri bases in earum centris. Q. E. F.

d 31. def. 11

PROP. V.



In dato Icosaedro Dodecaedrum inscribere.

Sit ABCDEF pyramis Icosaedri, cujus basis pentagonum ABCDE; centra autem triangulorum G, H, I, K, L; quæ connectantur rectis GH, HI, IK, KL, LG. Erit GHIKL pentagonum dodecaedri inscribendi.

Nam rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, per centra triangulorum transeuntes, *a* bisecant bases. *b* ergo rectæ MN, NO, OP, PQ, QM æquales sunt inter se. quoniam etiam FM, FN, FO, FP, FQ pares sunt. *d* ergo anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM æquantur. pentagonum igitur GHIKL æquilangulum est; *e* proinde & æquilaterum, cum FG, FH, FI, FK, FL pares sint. Quod si eadem arte in reliquis undecim

* 9. 4.

a cor. 3. 3.

b 4. 1.

c 4. 1.

d 8. 1.

e 4. 1.

f 12. 13.

pyra

pyramidibus icosaedri, centra triangulorum rectis lineis connectantur, describentur pentagona æqualia & similia pentagono $GHIKL$. quæ obrem 12 hujusmodi pentagona dodecaedrum constituent; quod quidem in icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli dodecaedri in centris viginti basium icosaedri consistant. Quapropter in dato icosaedro dodecaedrum descripsimus. Q. E. F.

F I N I S.



E

U

M

EUCLIDIS DATA

succincte demonstrata;

Una cum Emendationibus quibusdam & Additionibus
ad ELEMENTA

EUCLIDIS

nuper opera.

Opera

Mri. IS. BARRROW, *Cantabrigiensis,*
Coll. Trin. Soc.



L O N D I N I,

Excudebat J. Redmayne, 1678.

Ornatissimo viro

D. JACOBO STOCK,

Amico suo & patrono singulari.



*N*Ec publica, nec tui nominis luce dignum censeo hunc paucorum dierum partum pusillum & prematurum. Qui quidem quod se mundo, quodque Tibi, spectandum obulerit, duplici nomine arrogantia speciem incurrit. Sed utrinque parata est excusatio qualiscunque. Nam amico obtemperatum oportuit jubenti mitterem hunc libellum Euclidais (qua cognatione proxima attingit) Elementis subjungendum. In eum quicquid est in publicum aut peccati aut meriti protinus rejicio, facti cujus author fuit, rationem redditurum. In te autem delictum quod maxime aggravat, idem potenter extenuat, Tibi tantum debere. Nam cum iis, qui Divis ipsis sacrificia, ac modica magnis Regibus donaria offerre non dubitant, satius esse credo, etiam pro immensis beneficiis parum, quam nihil rependere. Sufficiat igitur regessisse, me Tibi multis magnisque nominibus obstrictum fore; vices, quas potero maximas, referre debere; ultra vota & grates nihil posse; illa privatum, has publice persolutas praecllere; quibus

bus agendis, quam jamdiu spe & studio au-
cupor, occasionem nondum comparere; præ-
stare hanc oblatamprehendere, quamvis
exilem, quam elapsam nequicquam pæni-
tentia prosequi. Esto igitur hac oblatio pi-
gnus quoddam & præludium futura am-
pioris, in qua meritorum in me Tuorum
historia uberior ac distinctior commemo-
randa occurreret. Quæ simpliciter agnoscere,
non aut fuisse describere, aut digne predica-
re, præsentis est instituti. Ac revera jam
brevis sum ἐκὼν ἀέκοντι καὶ θυμῷ, necessitate
potius coactus, quam inductus consilio. Nam
me vela ventis turgentia alio avocant; ac
vereor ne hac pene currenti calamo exe-
quentem, quæ hac ad te perferet, amica ma-
nus, importuna patientia præstoletur. Quid
superest igitur, nisi ut te domi studiis ac re-
bus honestis animum intendentem salutarî
præsentia tutetur, cum exorem venerandi
ac ἀππότης nominis; quem tanta beneficen-
tia benignum remuneratorem jugibus votis
exopto; idemque me extemplo super Tyr-
rhenos, Ionios, Ægeosque fluctus longin-
quam profectionem suscepturû comitetur.
Obtestor autem, ne tenuis opella patrociniû
respuat, quod ultro impertire dignatus es

Tibi devinctissimo

& obloquentissimo,

I. B.

E U-

Definitiones.

I.  Ita magnitudine dicuntur spatia, lineæ, anguli, quibus æqualia possumus invenire.

II. Ratio dari dicitur, cui possumus eandem invenire.

III. Rectilineæ figuræ specie dari dicuntur, quarum & singuli anguli dati sunt, & laterum rationes ad invicem datæ sunt.

Hinc, datæ sunt specie figuræ, quibus similes inveniri possunt.

IV. Positione dari dicuntur puncta, lineæ, angulique, quæ eundem situm semper obtinent.

V. Circulus magnitudine dari dicitur, cujus ea quæ ex centro datur magnitudine.

VI. Positione & magnitudine dari dicitur circulus, cujus datur centrum positione, & ea quæ ex centro magnitudine.

VII. Circuli segmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus dati sunt magnitudine anguli & segmentorum bases.

VIII. Positione & magnitudine dari dicuntur circuli segmenta, in quibus anguli magnitudine dati sunt, & segmentorum bases positione & magnitudine.

IX. Magnitudo magnitudine major est data, quando ablata data, reliqua eidem æqualis est.

X. Magnitudo magnitudine minor est data, quando adjuncta data, tota eidem æqualis est.

Ut si A data sit, erit $A + B$ data. At $B - A$ data.

XI. Magnitudo magnitudine major est data quam in ratione, quando ablata data, reliqua ad eandem habet rationem datam.

XII. Magnitudo magnitudine minor est data quam in ratione, quando adjuncta data tota ad eandem rationem habet datam.

Ut si A data sit, & $\frac{B}{C}$ detur, erit $A+B \equiv C$, data q. in r. sin $A+B$ detur, erit $B \equiv C$ data q. in r.

PROP. I.

- A. B. *Datarum magnitudinum A, B,*
a. b. *ad invicem datur ratio.*

Nam quia A datur, & inven- *byp.
ri potest aliqua $a \equiv A$. Eodem jure sume $b \equiv B$. a 1. def.
b estque $a : b :: A : B$. c quare ratio A data est. b sch. 7. §
Q. E. D. $\frac{a}{b}$ c 2. def.

PROP. II.

- A. B. *Si data magnitudo A ad aliam*
a. b. *aliquam B habeat rationem datam,*
datur etiam hac alia magnitudo.

Nam ob A datam, a sume $a \equiv A$; ac ob $\frac{A}{B}$ *byp.
*datam, b sit $a \equiv A$. ergo $b \equiv B$, a quare B datur. a 1. def. d.
Q. E. D. $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{B}$ b 2. def. d.
c 9. 5.

PROP. III.

- A. B. *Si quotlibet datæ magnitudines*
a. b. *A, B componentur, etiam ea $A+B$*
quæ ex his componitur, data erit.

Nam a cape $a \equiv A$, & $b \equiv B$; b estque $a+b$ a 1. def.
 $\equiv A+B$. a quare $A+B$ datur. Q. E. D. b 2. ax. 1.

PROP. IV.

- A. B. *Si à data magnitudine A aufera-*
a. b. *tur data magnitudo B, etiam reli-*
qua $A-B$ dabitur.

a Sint enim $a \equiv A$, & $b \equiv B$. ergo $A-B \equiv$ a 1. def. d.
 $a-b$. a proinde $A-B$ datur. Q. E. D. b 3. ax. 1.

PROP.

P R O P. V.

A. B. Si magnitudo A ad sui-ipsam alt.
 C. D. quam partem B habeat rationem
 datam, etiam ad reliquam $A-B$
 habebit rationem datam.

a hyp. Nam, quia $\frac{A}{B}$ a data est, b fit $A, B :: C, D$.
 b 2. def. d. c ergo $A, A-B :: C, C-D$. b proinde $\frac{A}{A-B}$
 c cor. 9. 5. datur. Q. E. D.

P R O P. VI.

A. B. Si componantur due magnitudi-
 C. D. nes A, B, habentes ad invicem ratio-
 nem datam, etiam quæ ex his com-
 ponitur magnitudo $A+B$, habebit ad utramque A
 & B rationem datam.

a 2. def. d. Nam a fit $A, B :: C, D$. b ergo $A+B$.
 b 18. 5. $B :: C+D$. D. c quare $A+B$ datur. Similiter
 c 2. def. d. $B+A$ datur. Q. E. D. $\frac{A+B}{B}$

P R O P. VII.

A. B. Si data magnitudo $A+B$ data
 ratione secetur, utrumque segmen-
 torum A, & B datum est.

* hyp. Nam ob $\frac{A}{B}$ * datam, a erit $A+B$ data. b ergo
 a 6. dat. $\frac{A}{A+B}$
 b 2. dat. A datur. Eodem modo B datur. Q. E. D.

P R O P. VIII.

A. C. B. Quæ A, B ad idem C rationem
 D. E. F. habent datam, habebunt ad invicem
 rationem datam.

a 1. def. d. Nam a fit $A, C :: D, E$, a & $C, B :: E, F$.
 quare ex æquali $A, B :: D, F$. a ergo $\frac{A}{B}$ datur,
 Q. E. D.

Coroll.

Rationes ex datis rationibus compositæ, datæ
 sunt. Ut $\frac{A}{B}$ fit ex $\frac{A}{C}$, & $\frac{C}{B}$ datis.

P R O P.

PROP. IX.

A. B. C. Si dua, pluresve magnitudines
D. E. F. A, B, C ad invicem habeant rationem datam, habeant autem illa magnitudines A, B, C ad alias quasdam D, E, F rationes datas, etsi non easdem; illa aliae magnitudines D, E, F etiam ad invicem habent rationes datas.

Nam ratio $\frac{D}{E}$ a fit ex b datis $\frac{D}{A}, \frac{A}{B}, \frac{B}{E}$; c ergo $\frac{D}{E}$ datur. Eadem de causa datur $\frac{E}{F}$. Q. E. D. a 20. def. 5. b hyp. c cor. 8. dat.

PROP. X.

A. B. C. Si magnitudo magnitudine major fuerit data, quam in ratione; & simul utraque illa eadem major erit data quam in ratione. Sin autem simul utraq; magnitudo eadem magnitudine major fuerit data, quam in ratione; & reliqua illa eadem major erit data quam in ratione; aut reliqua data est cum consequente, ad quam habet altera magnitudo rationem datam.

1. Sint A, & B datæ. a erit $\frac{B+C}{C}$ data. b ergo a 6. dat. b 11. def d.

A + $\frac{B+C}{C}$ data q. in r. Q. E. D.

2, Sint A, & $\frac{B+C}{C}$ datæ: c ergo B datur. c 17. 5.

proinde A + B $\frac{B+C}{C}$ data q. in r. Q. E. D.

3. Sint A + B, & C datæ. d Liqueat B dari. d 5. dat. Q. E. D. $\frac{B+C}{C}$ $\frac{B+C}{C}$

PROP. XI.

A. B. C. Si magnitudo magnitudine major sit data quam in ratione, eadem simul utraque major erit data quam in ratione. Et si eadem simul utraque major sit data quam in ratione, eadem reliqua magnitudine major erit data quam in ratione.

a 6. dat.

b 11. def. d.

c 5. dat.

1. A, & $\frac{B}{C}$ dantur. a ergo $\frac{B}{B+C}$ datur. proindeb $A+B \vdash B+C$ data q. in r. Q. E. D.2. A, & $\frac{B}{B+C}$ dantur. c ergo $\frac{B}{C}$ datur. proindeb $A+B \vdash C$ data q. in r. Q. E. D.

P R O P. XII.

A. B. C. Si fuerint tres magnitudines
 A, B, C, & prima cum secunda
 (A+B) data sit, secunda quoque cum tertia
 (B+C) data sit; aut prima A tertia C aequalis
 est, aut altera altera major data.

a 4. ax. i.

b 4. dat.

Nam si A+B, & B+C pares sint, b liquet
 A & C æquali; sin istæ impares fuerint, b liquet
 excessum A—C, vel C—A dari. Q. E. D.

P R O P. XIII.

D, A+B, C. Si fuerint tres magnitudines
 D, A+B, C, & earum prima
 D ad secundam A+B habeat
 rationem datam; secunda autem A+B tertia C
 major sit data quam in ratione; prima quoque D
 major erit tertia C data quam in ratione.

a 2. def. d.

b 19. 5.

c 2. dat.

d 2. def. d.

e 8. dat.

f 11. def. d.

Sint A, & $\frac{B}{C}$ æ $\frac{D}{A+B}$ datæ; a fitque A+B.D :: A. E b :: B. D — B. ergo c E, d & $\frac{B}{D-B}$

& (ob $\frac{B}{C}$ datam, e $\frac{C}{D-E}$ dantur. f quare D(E+
 D—E) $\vdash$ C data q. in r. Q. E. D.

P R O P. XIV.

A. C. Si duas magnitudines A & C
 B. D. ad invicem habeant rationem da-
 tam, utrique autem illarum adji-
 citur data magnitudo B & D;
 tota A+B, C+D, aut habent rationem datam,
 aut altera A+B altera C+D major erit data
 quam in ratione.

Nam

Nam si $A, C :: B, D$ a 13. 5.
 ob $\frac{A}{C}$ datam, c liquet $\frac{A+B}{C+D}$ dari. b hyp.
 Saltem d fit $A, C :: E, D$ a 1: $A+E, C+D$. d 2. def. d;
 Ergo c $\frac{A+E}{C+D}$, ac e E, f ideoque $B-E$ dantur. c 2. dat.
 g proinde $A+B (A+E: +B-E) \sqsubset C+D$ f 4. dat.
 +D data q. in r. Q. E. D. g 11. def. d.

P R O P. XV.

A. C. Si dua magnitudines A & C
 B. D. habeant ad invicem rationem da-
 tam, & ab utraque harum aufe-
 E. sur data magnitudo B & D; re-
 liqua magnitudines A-B, C-D ad invicem ha-
 bebunt aut rationem datam, aut altera A-B, altera
 C-D major erit data quam in ratione.

Nam si $A, C :: B, D$ a 1: $A-B, C-D$. a 19. 5.
 ob $\frac{A}{C}$ datam, c liquet $\frac{A-B}{C-D}$ dari. b hyp.
 Saltem d fit $A, C :: E, D$ a 1: $A-E, C-D$. d 2. def. 2;
 Ergo c $\frac{A-E}{C-D}$, & e B, ac f ideo $E-B$ dantur. c 2. dat.
 g proinde $A-B (A-E: +E-B) \sqsubset C-D$ f 4. dat.
 data q. in r. Q. E. D. g 11. def. d.

P R O P. XVI.

B. C. Si dua magnitudines B, C ha-
 A. D. beant rationem datam, & ab una
 B. quodam illarum C auferatur data
 magnitudo D, alteri autem B ad-
 jiciatur data magnitudo A; tota A+B residua
 C-D major erit data quam in ratione.

Sit enim $G, B :: D, E$ b 1: $C-D, B-E$. c 2. def. d;
 go c $\frac{C-D}{B-E}$, & d E, ac e ideo $E+A$ dantur. b 19. 5.
 inde $B+A (E+A: +B-E) \sqsubset C-D$ c 2. def. d;
 q. in r. Q. E. D. d 2. dat.
 e 3. dat.

P R O P. XVII.

A+B. D+E. Si fuerint tres magnitudi-
 C. nes A+B, C, D+E; &
 prima quidem A+B secun-
 da C major sit data quam in ratione, tertia quoque
 D+E eadem secunda C major sit data quam in
 ratione; prima A+B ad tertiam D+E aut ratio-
 nem habebit datam, aut altera altera major erit da-
 ta quam in ratione.

a hyp. Nam ob A, D, & $\frac{B}{C}$, $\frac{E}{C}$ a datas, b erit $\frac{B}{E}$
 b 8. dat. data. ergo per 14. hujus.

P R O P. XVIII.

A+C. E. G. Si fuerint tres magni-
 B+D. F. H. tudines, atque ex his una
 utraque reliquarum major
 sit data quam in ratione; reliqua dua aut datam
 rationem habebunt ad invicem, aut altera altera
 major erit data quam in ratione.

Datae sint A, B, $\frac{C}{E}$, $\frac{D}{F}$, ac sit A+C=B+D.

a 2. def. d. Sitque C. Ca :: A G b :: C+A.E+G, itemque
 b 12 5. D. F a :: B. H b :: D+B. F+H. c ergo
 c 2. def. d. C+A d hoc est B+D, c & B+D, ac e idcirco
 d 7. 5. $\frac{E+G}{F+H}$, $\frac{E+G}{F+H}$, $\frac{F+H}{F+H}$
 e 8. 5. E+G quin & G ac H f dantur. ergo per 15.
 f 2. dat. F+H; (hujus.

P R O P. XIX.

A+B. E. Si fuerint tres magnitudines, &
 C+D. F. prima quidem magnitudo secunda
 magnitudinis major sit data quam
 in ratione; sit quoque secunda major tertia data
 quam in ratione; prima magnitudo tertia magnitu-
 dine major erit data quam in ratione.

Sint A, C, & C+D, D datae; dico A+B
 $\frac{C+D}{B}$ $\frac{E}{F}$

E data q. in r.

Nam

Nam sit $C+D. B a :: C. F b :: D. B-F$, er. a 2. def. d.
 go $c C \& d F$, ac e ideo $F+A$, & $c D$ f ideoque b 19. 5.
 $\overline{F}$ $\overline{B-F}$ c 2. def. d.

E dantur. g proinde $A+B (F+A : +B-F)$ d 2. dat.
 $\overline{B-F}$ e 3. dat.
 $\square E$ data q. in r. Q. E. D. f 8. dat.
 g 11. def. d.

P R O P. XX.

A. C. E. Si data fuerint duae magnitu-
 B. D. dines A, C; & auferantur ab ipsis
 magnitudines B, D habentes ad
 invicem rationem datam; residuae magnitudines A-
 B, C-D aut habebunt ad invicem rationem datam,
 aut altera A-B altera C-D major erit data
 quam in ratione.

Nam si $A. C :: B. D a :: A-B. C-D$; b li. a 19. 5.
 quet A-B dari, b 2. def. d.

$\overline{C-D}$

Saltem sit $D. B b :: C. E a :: C-D. E-B$. c 2. dat.
 ergo b $\frac{C}{E}$ & c E, ac d propterea A-E, b itemque d 4. dat.
 $C-D$ datae sunt, c ergo $A-B (A-E : +E$ e 11. def. d.

$\overline{E-B}$
 $-B) \square C-D$ data q. in r. Q. E. D.

P R O P. XXI.

A. C. E. Si data fuerint duae magnitudi-
 B. D. nes A, C; & adjiciantur ipsis aliae
 magnitudines B, D habentes ad
 invicem rationem datam, totae $A+B, C+D$ aut ha-
 bebunt ad invicem rationem datam, aut altera $A+B$
 altera $C+D$ major erit data quam in ratione.

Nam si $B. D :: AC a :: A+B. C+D$, b li. a 12. 5.
 quet $A+B$ dari, b 2. def. d.

$\overline{C-D}$

Saltem sit $B. D b :: E. C a :: B+E. D+C$.
 ergo c B, d ideoque $A-E$, & b $B+E$ dantur. c 2. dat.
 $\overline{D+C}$ d 4. dat.

e 11. def.

e ergo $A + B (B + E :: + A - E) \vdash C + D$ data q. in r. Q. E. D.

P R O P. XXII.

A. C. Si dua magnitudines A, B ad aliam
B. aliquam magnitudinem C habeant rationem datam, & simul utraque A + B ad eandem C habebit rationem datam.

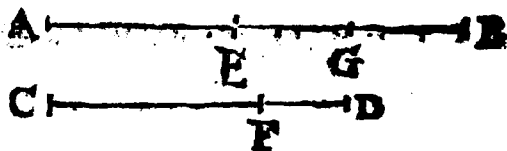
Nam ob $\frac{A}{C} \text{ } \frac{B}{C}$ datas, b erit $\frac{A}{B}$ data. c quare
A + B b ideoque A + B data est. Q. E. D.

a hyp.

b 8. d.

c 6. d.

P R O P. XXIII.



Si totum AB ad totum CD habeat rationem datam, habeant autem & partes AE, EB ad partes CF, FD rationes datas (etsi non easdem;) habebunt omnia ad omnia rationes datas.

Nam sit AE. CF a :: AG. CD b :: GE. FD.

a ergo $\frac{GE}{FD}$ datur. quare (ob $\frac{EB}{FD}$ e datam) d erit $\frac{GE}{EB}$ ac ideo $\frac{EB}{GB}$ data. ergo quum c $\frac{AB}{CD}$ & a $\frac{AG}{CD}$ d ideoque $\frac{AB}{AG}$ ac proinde e $\frac{AB}{GB}$ dentur, d erit $\frac{EB}{AB}$ data. Quare e $\frac{AB}{AE}$ & d $\frac{AB}{EB}$ & e $\frac{EB}{CF}$ dantur. Q. E. D.

a def. d.

b 19. 5.

c hyp.

d 8. dat.

e 5. dat.

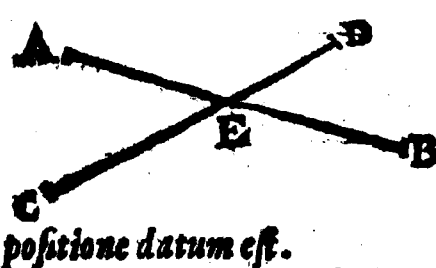
P R O P. XXIV.

A ————— Si tres rectae lineae, A, B, C,
B ————— proportionales fuerint; prima
C ————— autem A ad tertiam C habet
rationem datam, & ad secundam B habebit ratio-
nem datam.

Nam

Nam A. C :: Aq. Bq. $\frac{Aq}{Bq}$ data est. a cor. 29. 6.
b 2. def. 4.
c 1. 2.
proinde $\frac{A}{B}$ e datur. Q. E. D

P R O P. XXV.



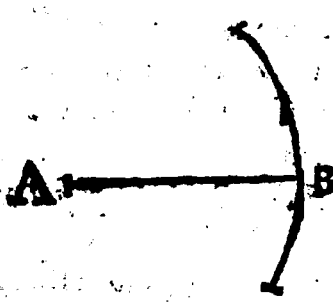
Si dua recta linea,
A B, C D positione
data se mutuo secu-
erint, punctum E, in
quo se invicem secant,
positione datum est.

a Nam hae lineae alibi quam in E, nequaquam se
mutuo, sese intersecare nequeunt.

Schol.

a Idem patet de quibuscunque lineis positione
datis, seque in unico puncto intersecantibus: ut
de circuli arcu, & recta, &c.

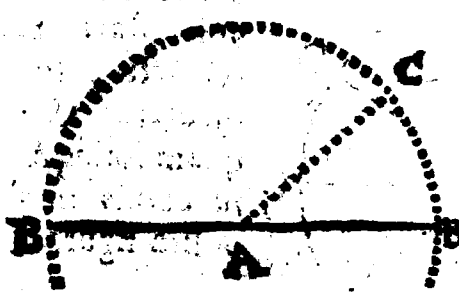
P R O P. XXVI.



Si recta linea A B ex-
tremities A, B, positione
data sint, recta AB positio-
ne & magnitudine data est.

Positione quidem, a quia a 14 ex.
inter eosdem terminos u-
nica recta duci potest: &
magnitudine, b quia si centro A per B ducatur b 1. def. 4.
circulus, huius omnes radii ipsi AB aequantur.

P R O P. XXVII.



Si recta linea
A B positione &
magnitudine da-
ta, data fuerit u-
na extremitas A;
& altera extre-
mitas B data erit.

Nam

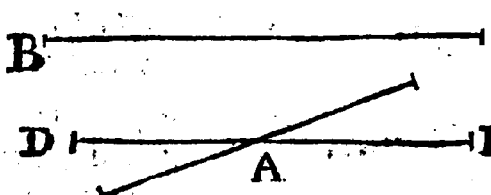
a 1. def. d.
b 3. post.
c 2. post.
d cor. 25.

Nam si centro A, spatio $ACa = ABb$ duca-
tur circulus, qui data recta c occurrat in B, d erit
extremitas B data.

Schol.

Vides partes puncti B determinandas esse.

P R O P. XXVIII.

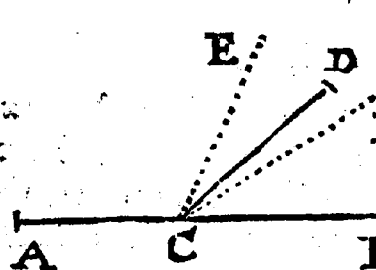
 Si per datum
punctum A con-
tra datam posi-
tione rectam BC
agatur recta li-
nea DE, acta recta DE positione data est.

a 4. def. d.
b 30. I.
c 34. def. I.

Nam a dic alteram per A ad BC fore paralle-
lam. Hæc idcirco ad DE b parallela erit. c Quod
repugnat.

Nota, Vocabulum contra in hoc libro paral-
lelismum significare.

P R O P. XXIX.

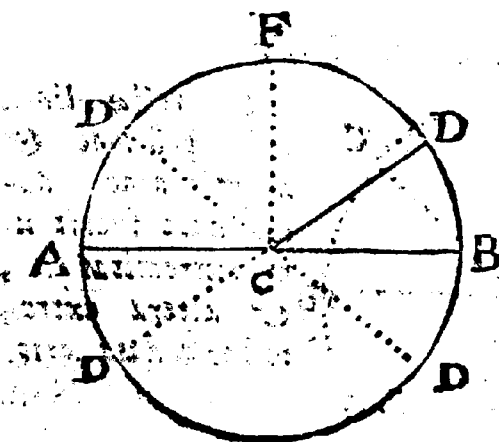
 Si ad positione da-
tam rectam AB, da-
tumque in ea punctum
C, agatur recta linea
CD, qua faciat angu-
lum DCB datum; a-
cta recta CD positione
data erit.

Si ad positione da-
tam rectam AB, da-
tumque in ea punctum
C, agatur recta linea
CD, qua faciat angu-
lum DCB datum; a-
cta recta CD positione
data erit.

a 4. def. d.
b 9. ax. I.

Nam quævis alia CE angulum b efficiet
majorem, vel minorem dato BCD.

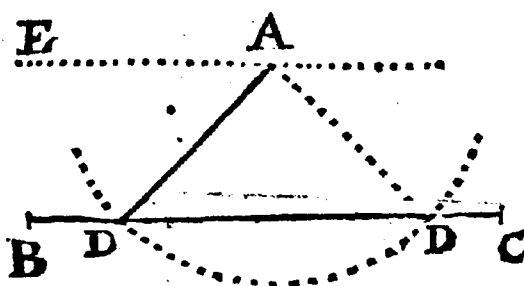
Schol.



Determinari
debet situs an-
guli dati tam
respectu perpen-
dicularis CF,
quam ipsius AB,
ut cernis in ap-
posita figura.

P R O P.

P R O P. XXX.



Si à dato
puncto A in da-
tam positione
rectam BC a-
gatur recta li-
nea AD, quæ
faciat angulum
ADC datum,

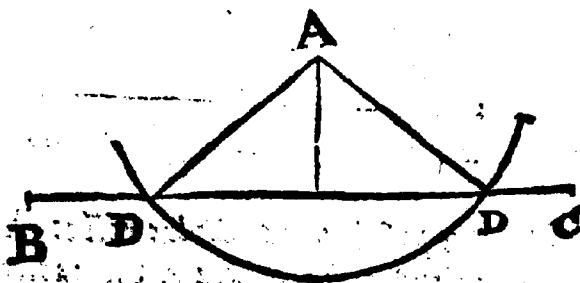
acta linea AD positione data est.

Nam per A duc AE ad BC parallelam. a 28. dat.
Hæc positione datur. Item ang. DAE par dato b 1. def. d.
alterno ADC. b datus est. c ergo recta AD posi- c 29 dat.
tione data est. Q. E. D.

Schol.

Hinc praxim discimus à dato puncto ducendi
rectam, quæ cum data positione recta datum an-
gulum efficit.

P R O P. XXXI.

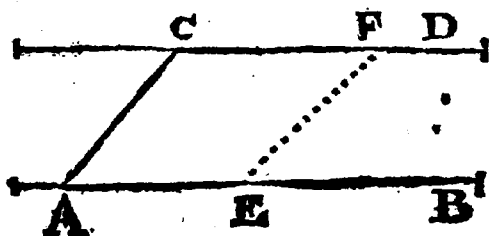


Si à dato puncto A in datam positione rectam
BC data magnitudine recta AD ducatur, positione
quoque data erit.

Nam puncta D, per quæ transit circulus cen- a 1. def. d.
tro A, a spatio AD descriptus, b data sunt. c ergo b sch. 25. d.
AD positione data est. Q. E. D. c 26. d.

P R O P.

P R O P. XXXII.



Si in data positionē parallelas rectas AB, CD agatur recta linea AC, quae faciat angulos datos BAC, ACD, aucta recta AC magnitudine data est.

Nam ad E (quodvis punctum in AB) fac ang. BEF = a BAC. liquet rectas EF, AC b parallelas, & c pares fore, d quare AC data est. Q. E. D.

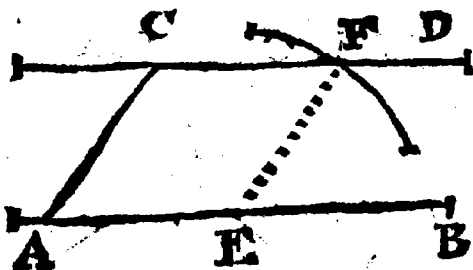
a 1. def. d.

b 29. I.

c 34. I.

d 2. def. d.

P R O P. XXXIII.



Si in data positionē parallelas rectas AB, CD agatur magnitudine data recta AC, faciet angulos BAC, ACD datos.

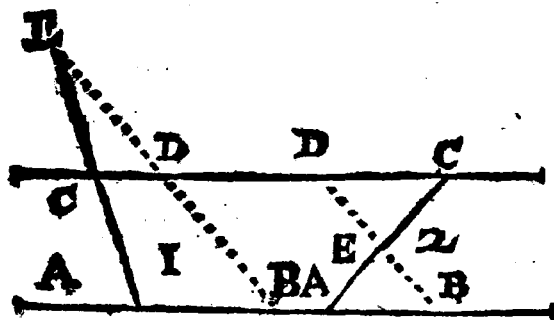
Nam ex quovis puncto E in AB, spatio EF a = AC describe circulum occurrentem rectae CD in F. b Liquet EF, & AC parallelas esse posse. c ergo.

a 1. def. d.

b 34. I.

c 29. I.

P R O P. XXXIV.



Si in data positione parallelas rectas AB, CD
à dato puncto E agatur recta linea ECA, secabitur
data ratione.

Nam ab E duc rectam EB utcumque paralle-
lis occurrentem in D, & B, a liquet esse EC.CA a 2. 6.
:: ED. DB. b quare $\frac{EC}{CA}$ datur. Q. E. D. b 2. def. d.

P R O P. XXXV.

Si à dato puncto E in datam positione rectam AB
agatur recta linea EA, faceturque data ratione; a-
gatur autem per punctum sectionis C contra datam
positione rectam AB recta linea CD; acta linea
CD positione data est.

Recta enim EB ducta ab E utcumque in AB,
a locatur sic ut ED.DB :: EC. CA. ob punctum a 10. 6.
D datum, b erit CD positione data. Q. E. D. b 28. dat.

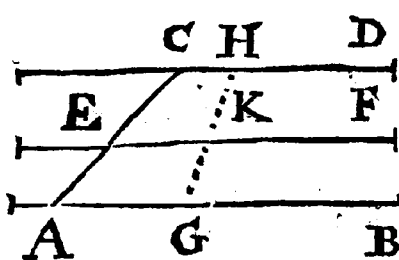
P R O P. XXXVI.

Si à dato puncto E in datam positione rectam li-
neam AB agatur recta linea EA; adjiciatur autem
ipsi aliqua recta EC, qua ad illam (EA) habeas
rationem datam; per extremitatem autem C adjecta
linea EC agatur contra datam positione rectam AB
recta linea CD; acta linea CD positione data est.

Demonstratio parum differt à præcedenti.
Vide fig. 2.

P R O P.

P R O P. XXXVII.



Si in datas positione
parallelas rectas AB,
CD, agatur recta li-
nea AC, & secetur
ratione data; agatur
autem per sectionis
punctum E contra da-

tas positione rectas AB, CD linea recta EF; acta
recta EF positione data est.

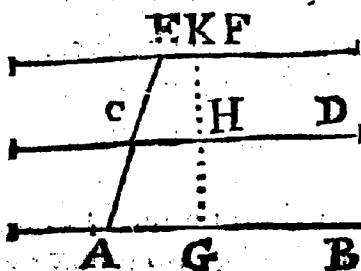
a 2. def. d

b 28. dat.

& sch. 2. 6.

Nam duc rectam GH utcumque occurrentem
parallelis. Hæc a secta sit in K ita ut GK. KH ::
AB. EC. b Punctum K parallelæ (EF) situm
determinat. Q. E. F.

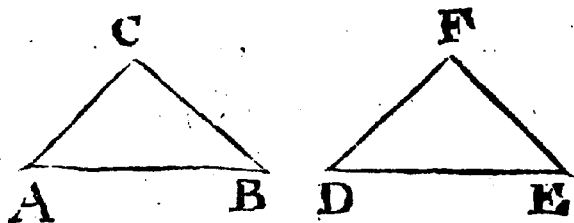
P R O P. XXXVIII.



Si in datas positione re-
ctas parallelas AB, CD
agatur recta linea AC;
adjiciatur autem ipsi qua-
dam recta CE, qua ad
actam AE habeat ratio-
nem datam; per extremi-
tatem autem E adjecta CB agatur contra datas po-
sitione parallelas AB, CD recta linea EF; acta re-
cta linea EF est data positione.

Demonstratio per similes est præcedenti. Cer-
ne & compara figuras.

P R O P. XXXIX.



Si trianguli ABC singula latera AB, BC, AC magnitudine data sint, triangulum ABC specie datum est.

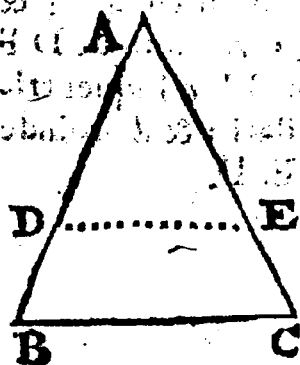
Nam a fac triang. DEF ipsi ABC æquilate. a 22. 1.
rum. Hoc eidem b æquiangulum erit. c ergo ABC b 5. 6.
specie datum est. Q. E. D. c 3. def. d.

P R O P. XL.

Si trianguli ABC singuli anguli, A, B, C magnitudine dati sint, triangulum ABC specie datum est.

Nam ad quamvis DE a fac triang. DEF ipsi a 23. 1.
ABC æquiangulum. b Hoc eidem simile erit. b 4. 6.
c proinde trigonum ABC specie datum est. c 3. def. d.
Q. E. D.

P R O P. XLI.



Si triangulum ABC unum angulum A datum habeat; circa datum autem angulum A duo latera AB, AC ad invicem habeant rationem datam; triangulum ABC specie datum est.

Nam in uno latere dati anguli sume quampiam AD; & a sit AB. AC :: a 1 def. d.
AD. AE. & duc DE. b Liqueat trigonum ADE b 6. 6.
ipsi ABC simile fore. c Quare ABC specie c 3. def. d.
datum est. Q. E. D.

P R O P.

P R O P. XLII.

Si trianguli ABC latera ad invicem habeant rationem datam, triangulum ABC specie datum est.

a 12.6.

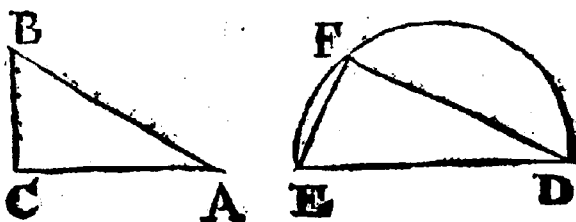
b 5.6.

c 3.def.d.

Nam a fac $AB, BC :: DE, EF$. a & $BC, CA :: EF, FD$. b Liqueat trigonum DEF trigono ABC assimilari. c quare ABC specie datum est. Q. E. D.

Vide fig. 39.

P R O P. XLIII.



Si triangulo rectanguli ACB circa unum acutiorum angulorum A latera AB, AC ad invicem rationem habeant datam, triangulum ACB specie datum est.

a 12.9.

b 1.4.

c 32.1.&

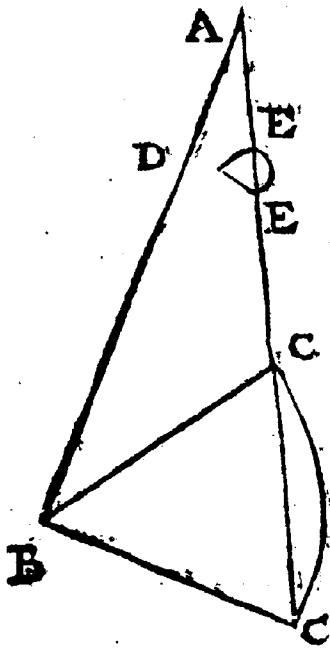
4.6.

q 3.def.d.

Nam esto DEF semicirculus utcumque; & a fac $AB, AC :: DE, DF$. inventamque DF b adapta in semicirculo; & duc EF. c Liqueat triang. DEF ipsi ACB assimilari; & d proinde ipsum ACB specie dari. Q. E. D.

P R O P.

PROP. XLIV.



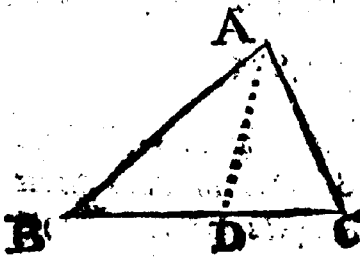
Si triangulum ABC habeat unum angulum A datum; circa alium autem angulum ABC latera AB , BC ad invicem habeant rationem datam; triangulum ABC specie datum est.

Nam in crure dati anguli sume quamlibet AD . & a fac AB . $BC :: AD$. DE , centro D spatio DE describe circulum, qui secet alterum dati anguli latus in E . b Eritque triang. ADE ipsi ABC simile. c quare datur specie triang. b 7. 6.

ABC . Q. E. D.

c 3. def. 8.

PROP. XLV.



Si triangulum BAC unum angulum BAC datum habeat; circa datum autem angulum BAC latera simul utraque tanquam unum $(BA + AC)$ ad reliquum latus (BC)

rationem habeant datam; triangulum BAC specie datum est.

Datum angulum BAC a bisecet recta AD . a 9. b ergo BA . $AC :: BD$. DC . & componendo b 3. 6. $BA + AC$. $AC :: BC$. DC . permutando igitur $BA + AC$. $BC :: AC$. DC . ergo ob $BA + AC$

c datum; d erit $\frac{AC}{DC}$ datum item ang. DAC sub- c hyp. d 2. def. 8. duplus

c 2. dat.
f 44. dat.
g 49. dat.

duplus dati B A C e datur. f ergo ang. C datur.
g proinde trigonum ABC specie datum est.

Coroll.

Hinc in triangulo, datis uno latere AB, uno angulo B A C, & ratione aggregati laterum ad basim (R ad S;) datur triangulum. Nam datum angulum biseca, & fac R. S :: AB. BD. & centro B spatio B D duc circulum occurrentem rectæ bisecanti in D; & produc BDC. habes triangulum.

P R O P. XLVI.

Si triangulum B A C unum angulum C datum habeat: circa alium autem angulum BAC latera simul utraque tanquam unum (BA + AC) habeant ad reliquum (B C) rationem datam; triangulum BAC specie datum est.

a hyp.

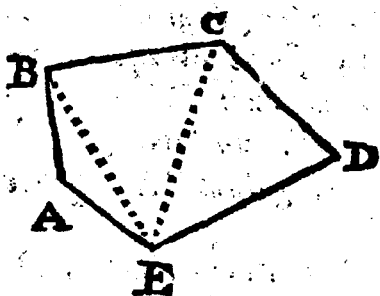
Nam bisecto angulo BAC, erit (ut in præcedenti) $\frac{AC}{DE}$ data. item ang. C a datus est. ergo ang. D A C, b proinde & duplus B A C datur: c quare triang. BAC specie datur. Q. E. D.

b 2. dat.

c 40. dat.

Deducetur ab hac corollarium simile præcedenti.

P R O P. XLVII.



Data specie recti linea ABCDE in data specie triangula BAE, CDE BCE dividuntur.

Nam ob ang. B, & BA a dat. b erit triang. $\overline{AE}$ BAE specie datum. Simili discursu tri-

a hyp. G

3. def. d

b 41. dat.

c 3. def. d.

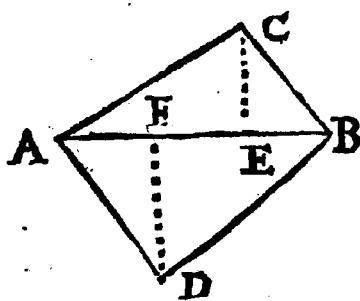
d 4. dat.

e 40. dat.

ang. CDE specie datur. c quare ang. DCE datur est; Hunc deme ex dato BCD, d estque reliquum BCE datus. Similiter ang. CBE datur. e ergo triang. BCE etiam specie datum est. Q. E. D.

P R O P.

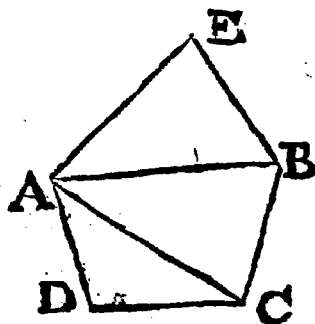
PROP. XLVIII



Si ab eadem recta AB describantur triangu-
la ACB, ADB data specie,
habebunt ad invicem rati-
onem datam.

Duc enim perpendi-
culares CE, DF. Liquet
angulos trianguli rectanguli CEB, a proinde & a 40. d.
dari. ergo (quum $\frac{AB}{CB}$ b data sit) c erit b hyp.
 $\frac{CE}{CB}$ data. Simili discursu datur $\frac{DF}{AB}$; c quare $\frac{CE}{DF}$, c 8. d.
d hoc est triang. $\frac{ACB}{ADB}$ datur. Q. E. D. d sch, 1.6.

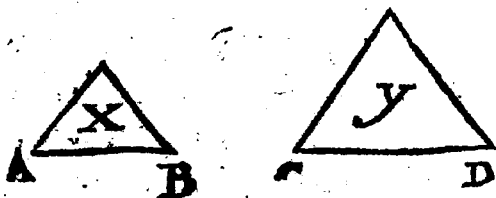
PROP. XLIX.



Si ab eadem recta linea AB
duo rectilinea qualibet BA
ABCD, AEB data specie de-
scribantur, habebunt ad invi-
cem rationem datam.

Nam rectilineum ABCD
resolvatur in triangu-
la. a 47. d. hęc specie data sunt. ergo ob b 48. d.
communem basim AC, b ra- c 6. d.
tio ADC ad ACB & e proinde totius ABCD ad d 8. d.
ACB datur. b item ratio AEB ad ACB. d proin-
de & ABCD ad AEB datur. Q. E. D.

PROP. L.



Si dua recta
linea AB CD
ad invicem ba-
beant rationem
datam: & ab

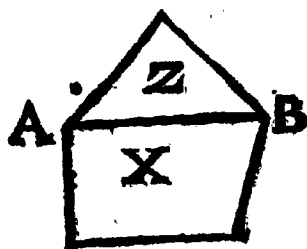
illis similia, si-
militerque descripta rectilinea X, Y habebunt ad
invicem rationem datam.

A a

Nam

a 11. 6. Nam sit AB. CD :: a CD. G. d liquet AB ad
 b 8. d. G, e hoc est X ad Y dari. Q. E. D.
 c cor. 20. 6.

P R O P. LI.



Si dua recta
 linea AB, CD
 habeant ad in-
 vicem ratio-
 nem datam; &
 ab illis rectiti-
 nea quacunque

X, Y specie data describantur; habebunt ad invi-
 cem rationem datam.

a 18. 6. Nam a fac Z simile ipsi Y. Ac ob b Z, c & Z
 b 49. d. $\frac{X}{Y}$
 c 50. d. datas, d liquet X dari. Q. E. D.
 d 8. d. $\frac{X}{Y}$

P R O P. LII.

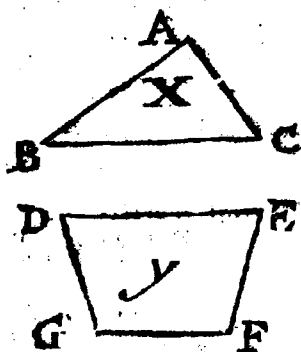


Si à data magnitudine recta
 AB figura X specie data descri-
 batur, descripta figura X magni-
 tudine data est.

a 3. & 1.
 def. d.
 b 49. d.
 c 2. d.

Nam ABq a datur specie, &
 magnitudine; & b ABq datur. c ergo X datur.
 $\frac{X}{X}$

P R O P. LIII.



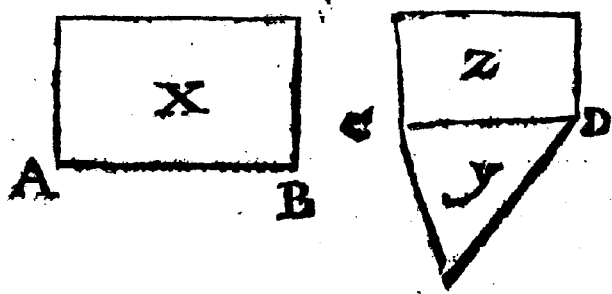
Si dua figura X, Y specie
 data fuerint; & unum latum
 unius BC ad unum latum alte-
 rim DE habuerit rationem da-
 tam; reliqua quoque latera AB
 ad reliqua FG habebunt ratio-
 nem datam.

Nam

Nam $\left\{ \begin{array}{l} a \overline{AB} \\ b \overline{BC} \\ a \overline{DE} \\ \overline{EF} \\ c \overline{FG} \end{array} \right.$ dantur. &c. ergo per 8. dat.

a 3. def. d.
b hyp.

PROP. LIV.



Si dua figura X, Y specie datae ad invicem habuerint rationem datam, etiam latera (AB, CD, &c.) habebunt ad invicem rationem datam.

Nam ad CD a fiat Z ipsi X similis. b Hæc specie datur. c ergo Y datur. Proinde ob Y d datam, e datur X. f ergo AB datur. ergo per præcedentē.

a 18. 6.
b 3. def. d.
c 49. dat.
d hyp.
e 8. dat.
f cor. 20. 6.
& 24. dat.

PROP. LV.



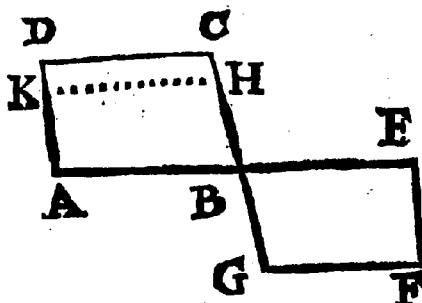
Si spatium X magnitudinis & specie datum fuerit, ejus latera (AB, &c.) magnitudine data erunt.

Nam ad quamvis CD a fac Y simile ipsi X. b hoc specie & magnitudine datur. c ergo Y datur. d quare CD datur. e ergo AB data est.

a 18. 6.
b 1. dat.
c 54. dat.
d 2. dat.

Q. E. D.

P R O P. LVI.



*Si duo aquian-
gula parallelogram-
ma AC, BF habue-
rint ad invicem ra-
tionem datam, est
ut primi latus AB
ad secundi latus BE,
ita reliquum secundi*

*latus BG ad eam BH, ad quam alterum primi
latus BC habet rationem datam, quam habet paral-
lelogrammum AC ad parallelogrammum BF.*

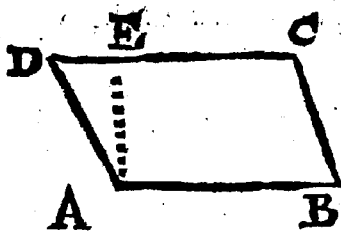
*Nam duc HK parall. AB. Liquet esse BC:
BH a :: AC. AH b :: AC. BF. Q. E. D.*

a 1. 6.

b 14. 6.

c 7. 5.

P R O P. LVII.



*Si datum spatium AC
ad datam rectam AB
applicatum fuerit, in
angulo BAD dato, da-
tur applicationis altitudo
AD.*

a 11. 1.

b 1. 6.

c 35. 1.

d 1. c 2.

dat.

e 28. c 25.

dat.

*a Erige perpendicularem AE. estque AB.AE
b :: ABq. AB x AE c :: ABq. pgr. AC. d ergo
AE datur. quare per E duc parallelam DC, e
hæc abscondet quæsitam AD. Q. E. F.*

P R O P. LVIII.

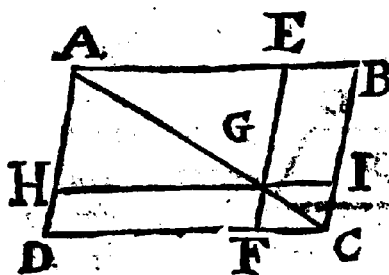
*Si datum ad datam rectam applicetur, deficiens
data specie figura, latitudines defectum data sunt.
Non differt à vigesima octava sextæ.*

P R O P. LIX.

*Si datum ad datam rectam applicetur, excedens
data specie figura, latitudines excessum data sunt.
Eadem est cum vigesima nona sextæ.*

P R O P.

PROP. LX.



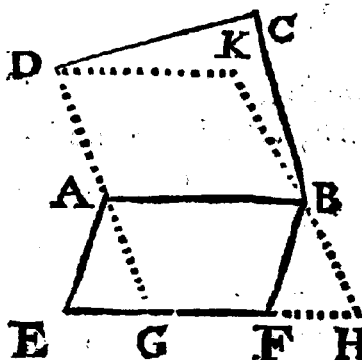
Si datum specie paral-
lelogrammum (H, E, vel
DB) dato gnomone HCB
augeatur, vel minuatur;
latitudines gnomonis
HD, EB datae sunt.

1. Hyp. Liqueat totum

DB tam a magnitudine, quam b specie dari, c a 3. d.
proinde & latitudines AB, AD; e quibus aufer d b 24. 6.
datas AE, AH, e manent EB, HD datæ. Q. E. D. c 55. d.

2. Hyp. Liqueat HE b specie, & a magn. c dari, d hyp.
e quare & latera AE, AH; hæc deme ex d datis e 4. d.
AB, AD: e remanent EB, HD datæ. Q. E. D.

PROP. LXI.



Si ad datæ specie figu-
ra ABCD unum latu-
s AB applicetur parallelo-
grammum spatium AF
in angulo BAE dato; ba-
beat autem data figura
AC ad parallelogram-
mum AF rationem da-
tam; parallelogrammum
AF specie datum est.

Ad DAG protractam duc (per B) paralle-
lam, cui occurrant EFH, & DK parall. AB.

Ac ob $\frac{AD}{AS}$, & ang. BAD a dat. a liquet pgr. a 3. def. d.

AK specie dari. b ergo $\frac{AK}{AC}$ & c proinde $\frac{AK}{AF}$ b 49. d.

d vel $\frac{AK}{AH}$, e hoc est $\frac{AD}{AG}$ dantur. e ergo $\frac{AB}{AG}$ da- c 8. d.

tur. Item ob angulos E, & GAE f notos, g da- d 35. I.

tur $\frac{AE}{AG}$, e ergo $\frac{AB}{AE}$ datur. b unde pgr. AF specie e 1. 6.

datur. Q. E. D. f hyp. G 4. d.

P R O P. LXII.



Si dua re-
cta AB, CD
ad invicem ha-
beant rationem
datam; & ab

una quidem data specie figura X descripta sit, ab
altera autem spatium parallelogrammum Y in an-
gulo dato; habeat autem figura X ad parallelo-
grammum Y rationem datam; parallelogrammum
Y specie datum est.

a 50. dat.

b 8. dat.

c hyp.

d 61. dat.

e 3. def. d.

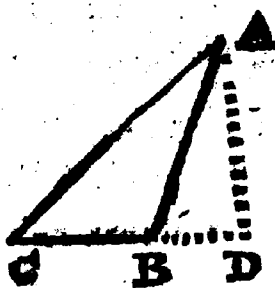
Nam ad AB sit pgr. Z simile ipsi Y. a Hujus
ratio ad Y, & b proinde ad X datur. c ejusque an-
guli dantur. d ergo Z specie datur. e proinde &
Y. Q. E. D.

P R O P. LXIII.

Si triangulum specie datum sit, quod ab unoquoq;
lateralum describitur quadratum, ad triangulum ha-
bebit rationem datam.

Sequitur ex 49. hujus.

P R O P. LXIV.



Si triangulum ABC angu-
lum obtusum ABC datum
habeat; illud spatium, quo
latus AC obtusum angulum
subtendens magis potest quam
latera AB, CB obtusum
angulum ABC ambiens,
ad triangulum ABC habebit

rationem datam.

a 4. dat.

b 49. dat.

c 1. 5.

d 8. dat.

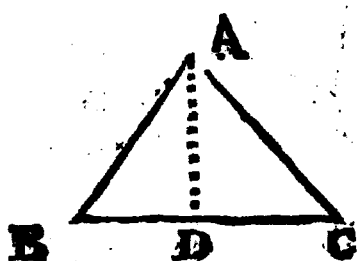
Nam demittatur AD perpendicularis produ-
cta CBD. atque ob angulos a ABD, & D da-
tos, b datur BD, c hoc est BD x CB. d ergo

AD

AD x CB

2 $\overline{BD} \times \overline{CB}$, hoc est, e $\overline{ACq} - \overline{ABq} - \overline{CBq}$ datur. e 12. 2.
 $\frac{1}{2} \overline{AD} \times \overline{CB}$ f triang. $\overline{ABC}$ f 41. 1.
 Q. E. D.

P R O P. LXV.



*Si triangulum ACB
 angulum acutum C datum
 habeat; illud spatium, quo
 latus AB angulum C sub-
 tendens minus potest, quam
 latera AC, CB angulum
 acutum C ambiens, ha-
 bebit ad triangulum ACB rationem datam.*

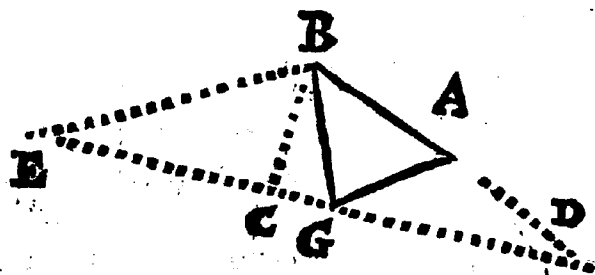
Nam duc perpendicularem AD. Datur a $\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, a 40. d.
 b hoc est $\overline{CD} \times \overline{BC}$, e ergo 2 $\overline{CD} \times \overline{BC}$, hoc b 1. 6.
 $\overline{AD} \times \overline{BC}$ $\frac{1}{2} \overline{AD} \times \overline{BC}$ c 8. d.
 est d $\overline{ACq} + \overline{BCq} - \overline{ABq}$ datur. Q. E. D. d 13. 1.
 e triang. $\overline{ACB}$ e 41. 1.

P R O P. LXVI.

*Si triangulum ACB habuerit angulum C datum;
 quod sub rectis AC, CB datum angulum C com-
 prehendentibus, continetur rectangulum, habebit ad
 triangulum ACB rationem datam.*

Nam in figura precedenti, est a $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$, b hoc a 40. d.
 est, $\overline{AC} \times \overline{BE}$, c hoc est $\overline{AC} \times \overline{BC}$ data, d ergo b 1. 6.
 $\overline{AD} \times \overline{BE}$ 2 triang. $\overline{ACB}$ c 41. 1.
 $\overline{AC} \times \overline{BC}$ datur. Q. E. D. d 8. d.
 triang. $\overline{ACB}$.

P R O P. LXVII.

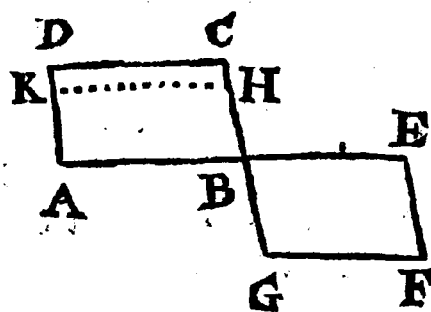


Si triangulum ABG habuerit datum angulum BAG; illud spatium, quo duo datum angulum BAG comprehendunt latera tanquam una recta BA + AG, plus possunt, quam quadratum à reliquo latere BG, ad triangulum ABG habebit rationem datam.

Produc BA ita ut AD = AG. per B duc BE parall. AG; cui occurrat DGE. denique duc normalem BC.

- a 5. 1. Liqueat ang. D a = AGD b = E. c quare BE =
b 29. 1. BD, ideoque EC = CD. e ergo EG x GD +
c 6. 1. CGq = CDq. proinde BDq f (CDq + BCq)
d cor. 3. 3. g = EG x GD + CGq + BCq = EG x GD * +
e 5. 2. BGq. Jam ob angulos AGD, & D b subduplos
f 47. 1. dati BAG, liquet k AD, ideoq; ADq dari. Cum
g 2. ex. 1. $\frac{DG}{DGq}$
* 47. 1. igitur BA x AD. ADq l :: BA. AD m :: EG.
h 32. 1. GD :: l EG x GD. GDq, & permutando BA x AD.
k 40. d. EG x GD :: ADq. GDq; n erit BA x AD; o hoc
l i. 6. $\frac{EG \times GD}{EG \times GD}$
m 2. 6. est BA x AG data. p Atqui BA x AG datur; q er-
n 2. def. d. $\frac{EG \times GD}{\text{triang. AGB}}$
o constr. go EG x GD datur, Q. E. D.
p 66. d. $\frac{EG \times GD}{\text{triang. AGB}}$
q 8. d.

PROP. LXVIII.

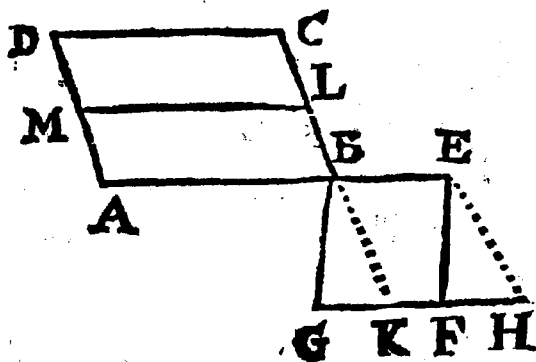


Si duo parallelogramma aquiangula AC, BF habeant ad invicem rationem datam, & unum latum AB ad unum latum BE habeat rationem datam; & reliquum la-

tus BC ad reliquum latum BG habebit rationem datam.

Nam fit $AB : BE :: BG : BH$. a ergo $\frac{BG}{BH}$ da- a 2. def. d.
tur. b item $\frac{BC}{BH}$ datur. c ergo $\frac{BC}{BG}$ datur. b 56. d.
c 8. d.

PROP. LXIX.



Si duo parallelogramma AC, BF datos angulos habeant, & ad invicem rationem datam; habeat autem & unum latum AB ad unum latum BE rationem datam; & reliquum latum BC ad reliquum latum BG habebit rationem datam.

Latera AB, BE jaceant in directum. produc CBK, ac GFH ad occursum cum EH parall. CK.

Ob a ang. KBE (ABC) & pgr. a $\frac{AC}{BF}$, vel a hyp

AC

b 35. i.
c 68. d.
d hyp. &
4. d.
e 40. d.
f 8. d.

$\frac{AC}{BH}$ & $\frac{AB}{BE}$ datas, c liquet $\frac{KB}{BC}$ dari. item ob ang.
G, & GBK d datos, e datur $\frac{KB}{BG}$. f quare $\frac{BC}{BG}$ datur.
Q. E. D.

PROP. LXX.

Si duorum parallelogrammorum (AC, BH, vel BF) circa aequales angulos (ABC, KBE) aut circa inaequales quidem (ABC, GBE) datos tamen, latera (AB, BE, & BC, BK, & BC, BG) ad invicem habeant rationem datam; & ipsa parallelogramma (AC, BH, & AC, BF) habebunt ad invicem rationem datam.

Nam (in fig. præced.) fit $AB.BE :: KB.BL$ & duc LM parall. BA.

a hyp.
b constr.
c 8. d.
d 1. 6.
e 14. 6.
f hyp. &
4. d.
g 40. d.
h 35. i.

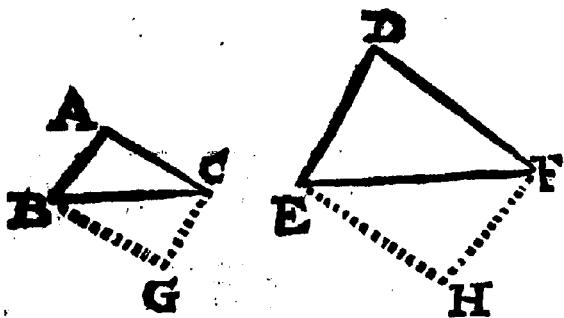
Primo, Quia a AB b id est KB a ac KB datae
 $\frac{BE}{BL}$, $\frac{BL}{AL}$, $\frac{CB}{BH}$
sunt, c erit CB, d hoc est AC e vel pgr. AC data.

Q. E. D.

Secundo, Ob angulos G, & GBK f datos, g datur BK; item h CB data est. & ergo CB da-
 $\frac{BG}{BG}$, $\frac{BG}{BK}$
tur. proinde, ut prius, $\frac{AC}{BH}$, hoc est pgr. $\frac{AC}{BF}$ da-
tur. Q. E. D.

PROP.

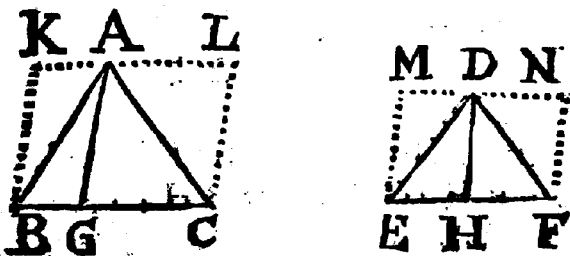
PROP. LXXI.



Si duorum triangulorum ABC, DEF, circa æ-
quales angulos, aut circa inæquales quidem, datos
tamen (A, & D) latera AB, DE, & AC, DF ad
invicem habeant rationem datam, & ipsa triangu-
la ABC, DEF habebunt ad invicem rationem datam.

Nam compleantur pgra. AG, DH, & hæc da- a 70. d.
tam habent rationem, b proinde & trigona b 15. 5.
ABC, DEF illorum c subdupla. Q. E. D. c 34. 1.

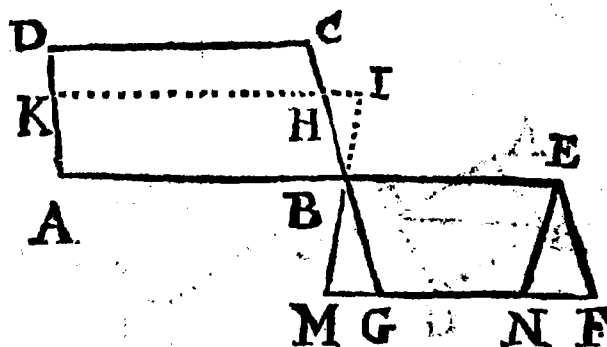
PROP. LXXII.



Si duorum triangulorum ABC, DEF & bases
BC, EF fuerint in ratione data, & æque ab angulis
ad bases (AG, DH,) qua faciant ang. AGC,
DHF æquales, aut inæquales quidem, sed tamen da-
tos, habeant ad invicem rationem datam; & ipsa
triangula ABC, DEF habebunt ad invicem ratio-
nem datam.

Nam duc BK ad AG, ac EM ad DH paralle-
las, & comple pgra. CK, FM. Hæc se habent juxta
go. hujus; quare triangula eorum * subdupla * 34. 1.
ABC, DEF rationem habent datam. Q. E. D.

PROP.



Si duorum parallelogrammorum (AC, BF, vel AC, BN) circa aequales angulos, aut circa inaequales quidem, sed tamen datos, latera ad invicem ita se habeant, ut sit quemadmodum primi latus AB ad secundi latus BE, ita reliquum secundi latus (BG, vel BM) ad aliam aliquam rectam (BH, vel BI;) habeat autem & reliquum primi latus BC ad eandem rectam (BH vel BI) rationem datam; & ipsa parallelogramma (AC, BF, vel AC, BN) habebunt ad invicem rationem datam.

Nam 1. Hyp. liquet α CB bid est AC da-
BH AH, BF

a hyp

b2, 6J

c 14.6.

a hyp & 4.
dat.

b 40.dat.

c 8. dat.

935.13

ri. Q. E. D.

2. Hyp. Duce parallelam IHK. & Liqueat angulos I B H (G B M) & B H I (A B H) dari. Ergo BH datur. item CB & data est. & proinde

$\overline{BI}$ $\overline{BI}$
 CB, hoc est pgr. AC d vel AC datur. Q. E. D.
 $\overline{BH}$ $\overline{BF}$ $\overline{BN}$,

PROP. LXXIV.

Si duo parallelogramma datam rationem habeant, aut in aequalibus angulis (ut AC, BF) aut inaequalibus quidem, sed tamen datis (ut AC, BN,) erit ut primi latus AB ad secundi latus BE, ita alterum secundi latus (BG, vel BM) ad eam (BH, vel BI) ad quam reliquum primi latus BC rationem habet datam.

Namer

Nam in fig. præcedentis, 1. Hyp. a Liqueat a 56. *das.*
 $\frac{CB}{BH}$ dari. Q. E. D.

2. Hyp. ut in præcedenti, datur BI, ac ex hyp:

$\overline{BH}$

AC item AB.BE :: a * MB.BI b :: GB. BH. * *hyp.*

$\overline{BF}(\overline{BN})$

b 46.

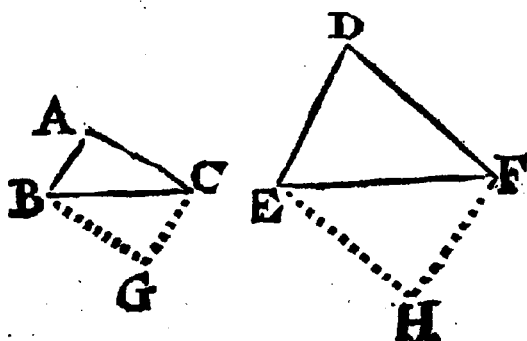
a quare CB etiam datur. e ergo CB data est. c 8. *das.*

$\overline{BH}$

$\overline{BI}$

Q. E. D.

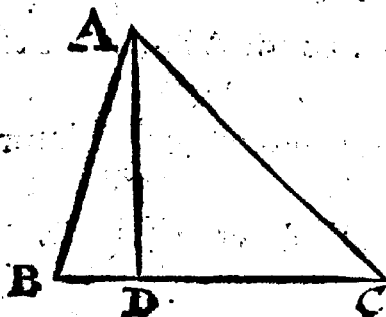
P R O P. LXXV.



Si duo triangula ABC, DEF ad invicem habeant rationem datam, aut in angulis(A, D) æqualibus, aut inæqualibus quidem sed tamen datis, erit ut primi latus AB ad secundi latus DE, ita alterum secundi latus DF ad eam rectam, ad quam reliquum primi latus AC habet rationem datam.

Nam compleantur pgr. AG, DH. Ergo per præcedentem.

P R O P. LXXVI.

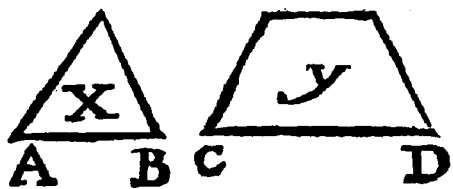


Si à trianguli ABC specie dati vertice A linea perpendicularis AD agatur ad basim BC, acta linea AD ad basim BC habebit rationum datam.

Nam

* hyp. & 3. Nam ob angulos, *B, & ADB datos, *a* datur
 def. d. $\frac{AB}{AD}$ *a* item $\frac{AB}{BC}$ datur. *b* Ergo $\frac{AD}{BC}$ datur. Q. E. D.
a 40. dat.
b 8. dat.

P R O P. LXXVII.

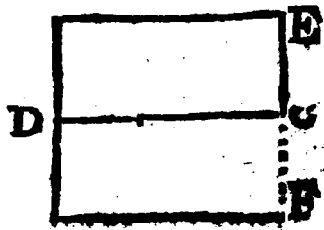
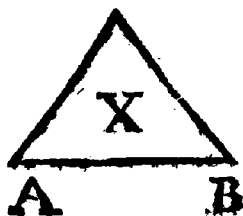


Si data figura specie X, Y ad invicem habeant rationem datam, & quodlibet latus unius AB

ad quodlibet alterius latus CD habebit rationem datam.

a 49. dat. Nam *a* ABq, & *b* Y, ac *c* proinde ABq datur;
b hyp. $\bar{X}$ $\bar{X}$ $\bar{Y}$
c 8. dat. item CDq datur. *c* ergo ABq, ac ideo AB datur. $\bar{Y}$ $\bar{CDq}$ $\bar{CD}$
 tur. Q. E. D.

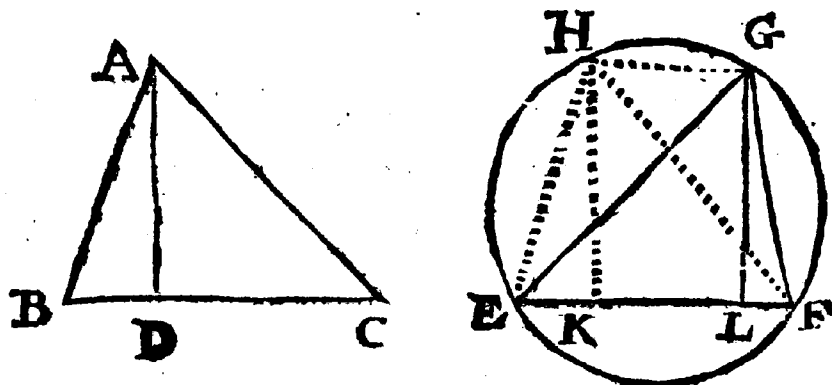
P R O P. LXXVIII.



Si data figura specie X ad aliquod rectangulum DCE habeat rationem datam; habeat autem & unum latus AB ad unum latus DC rationem datam; rectangulum DCE specie datum est.

a 8. dat. 3. Sit DC. AB :: AB. CF. *a* ergo $\frac{DC}{CF}$ datur;
b 49. dat. Item ob *b* X, & *c* X datas. *a* erit ABq, *d* hoc est
c hyp. $\bar{ABq}$ $\bar{DCB}$ $\bar{DCE}$
d 17. 6. DC x CF, vel *c* GF data. proinde *e* DC datur.
e 1. 6. $\bar{DCxCE}$ $\bar{CE}$ $\bar{CE}$
f 3. def. d. quare rectangulum DCE specie datur. Q. E. D.

P R O P. LXXIX.



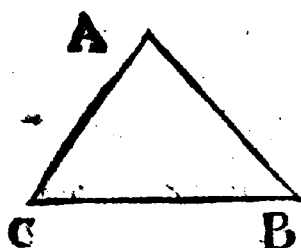
Si duo triangula ABC, GEF unum angulum BAC uni angulo EGF æqualem habeant; ab æqualibus autem angulis BAC, EGF ad bases BC, EF perpendiculares agantur AD, GL; sitque ut primi trianguli basis ad perpendicularem, ita & alterius trianguli basis ad perpendicularem (BC.AD::EF.GL;) illa triangula ABC, EGF æquiangulara sunt.

Circa triang. GEF describe circulum. Fac ang. FEH = B. Conecte HF, HG; & demitte perpendicularem HK.

Liquet triangula ABC, HEF, & ABD, HEK, a 4. 6. ac ACD, HFK æquiangulara fore. Proinde EK. b 24. 9. KH::BD. DA. a & FK. KH::CD. DA. c hyp. b quare EF. KH::BC. DA::e EF. LG. d 9. 5. d quare KH = LG. e ergo HG parall. KL. fun- e 33. 1. de ang. BGH = GEF. g ergo arcus EH, FG, f 29. 1. b ideoque anguli EFH, GEF æquantur. h Item g 26. 3. ang. EHF = EGF. l ergo trigona EHF, EGF; h 27. 3. m proinde & trigona EGF, ABC sibi mutuo æ- k 21. 3. quiangulara sunt. Q. E. D.

1 32. 2.
m 21. 6.

PROP. LXXX.



*Si triangulum ABC unum
angulum A datum habuerit;
quod autem sub lateribus AB,
AC datum angulum compre-
hendentibus continetur rectan-
gulum, habeat ad quadratum
reliqui lateris BC rationem
datum; triangulum ABC specie datum est.*

Nam Q: $AC + AB : \rightarrow CBq$ vocetur X.
a ergo $\frac{X}{\text{triang. } ABC}$; b & $\frac{AC \times AB}{\text{triang. } ABC}$; & c propterea
c 67. d. $\frac{X}{\text{triang. } ABC}$ data est. d item $AC \times AB$ datur. e ergo
b 66. d. $\frac{AC \times AB}{\text{triang. } ABC}$
c 8 d. $\frac{CBq}{\text{triang. } ABC}$
d hyp. $\frac{AC \times AB}{\text{triang. } ABC}$
e 6. d. $\frac{X}{\text{triang. } ABC}$ e ideoque $\frac{X + CBq}{\text{triang. } ABC}$, f hoc est Q: $\frac{AC + AB}{\text{triang. } ABC}$
f hyp. $\frac{CBq}{\text{triang. } ABC}$
g 46. d. datur. g proinde triang. ABC specie datur. Q. E. D.

PROP. LXXXI.

A. D. *Si tres recte proportionales*
B. E. *A, B, C tribus rectis proportio-*
C. F. *nalibus D, E, F extremis*
A, D, & C, F habuerint in
ratione data; medias quoque B, E habebunt in ra-
tione data. Et si extrema A ad extremam D, & me-
dia B ad mediam E habeat rationem datam; & re-
liqua C ad reliquam F habebit rationem datam.

Nam primo, ob $\frac{A}{D}$ & $\frac{C}{F}$ datas, a datur $\frac{AC}{DF}$;
a 70. d. $\frac{AC}{DF}$
b hoc est, $\frac{Bq}{Eq}$ ergo $\frac{B}{E}$ datur. Q. E. D.
b 17. 6. $\frac{Bq}{Eq}$
c hyp. Secundo, ob $\frac{Bq}{Eq}$, b hoc est $\frac{AC}{DF}$ datam, & c $\frac{A}{D}$
d 68. d. datam, d datur $\frac{C}{F}$. Q. E. D.

P R O P. LXXXII.

A. B :: D. E.

B. C :: E. F.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint (A.B :: D. E) erit ut prima A ad eam C, ad quam secunda B rationem habet datam, ita tertia D ad eam F, ad quam quarta E rationem habet datam.

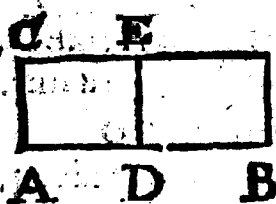
Nam quia B. C :: a E. F. & a $\frac{B}{C}$ data est; be. a hyp. rit $\frac{E}{F}$ data. atqui ex æquali A. C :: D. F. er. b 2. def. d. go, &c.

P R O P. LXXXIII.

A. B. C. D. Si quatuor rectæ A, B, C, D
F. E. ita ad invicem se habeant, ut
tribus ex iis, quibuscunque
sumptis A, B, C, & quarta ipsis proportionali ac-
cepta E, ad quam reliqua D ex quatuor rectis pro-
portionem habet datam; erit ut quarta D ad tertiam
C, ita secunda B ad eam F, ad quam habet prima A
rationem datam.

Nam A E a = B C b = D F. & datur b $\frac{D}{E}$ a 16.6
& hoc est $\frac{AD}{AE}$, d vel $\frac{AD}{DF}$, e vel $\frac{A}{F}$. ergo, &c. b hyp. c 1. 6. d 7. 5.

P R O P. LXXXIV.



Si dua rectæ AB, AC da-
tum spatium comprehendant in
angulo A dato; sit autem altera
A B altera A C major data
DB, etiam unaquaque ipsarum
AB, AC data erit.

Nam comple quadratum A E. a Hoc specie b hyp.
datum est. b item pgr. CB, & recta DB dantur. c 59. dat.
ergo A C, vel AD, & tota d proinde AB datur. q 3. dat.
Q. E. D.

B b

P R O P.

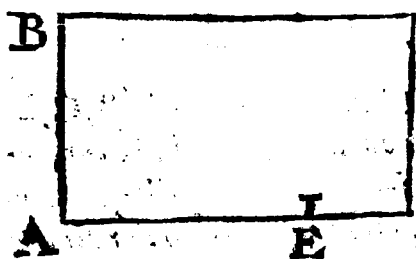
P R O P. LXXXV.

Si duæ rectæ BD, DE datum spatium comprehendant in angulo BDE dato, sit autem simul utraq; (BD+DE) data; & earum quoque unaquaque BD, & DE data erit.

Nam sume DA=DE, & comple quad. DC. Hoc specie datur; item pgr. BE, & recta BA a dantur. b ergo AD (DE) & reliqua DB dantur. Q. E. D.

a hyp.
b 58. d.
c 4. d.

P R O P. LXXXVI.



Si duæ rectæ AB, AD datum spatium BD comprehendant in angulo dato; quadratum autem unius AD quadrato alterius

AB majus sit dato quam in ratione (nempe ut sit ADxAE datum, & * reliqui ADxED ad ABq ratio data;) & utraque ipsarum AB, AD data erit.

* 2. 2.

a hyp.
b 1. d.
c 69. d.
d 51. d.
e hyp.
f 8. d.
g 6. d.
h 8. 2.
k 54. d.
l 6. d.
m 8. d.
n 1. 6.
o 2. d.
p 55. d.
q 57. d.

Nam ob BD, & DAxAE a data, b datur BD. c ergo AB d ideoque ABq datur. e item

$\overline{DA} \times \overline{AE}$ $\overline{AE}$ $\overline{ABq}$
ABq datur. f ergo AEq ideoque AEq
 $\overline{AD} \times \overline{ED}$, $\overline{AD} \times \overline{ED}$, $4 \overline{AD} \times \overline{ED}$,
g & AEq b hoc est AEq datur.

$4 \overline{AD} \times \overline{ED} + \overline{AEq}$ $Q: \overline{AD} + \overline{ED}$
k ergo AE & componendo AE * ideoq;
 $\overline{AD} \times \overline{ED}$; $2 \overline{AD}$,

AE m hoc est AEq datur. denique igitur ob
 $\overline{AD}$, $\overline{AD} \times \overline{AE}$
e datum ADxAE, n erit AEq data. o ergo AE,
& p proinde AD, ac AB datæ sunt. Q. E. D.

P R O P LXXXVII.

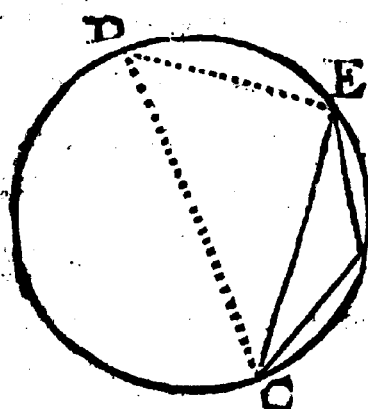
Si dua recta AB, AD datum spatium comprehendant in angulo dato, quadratum autem unius AD quadrato alterius AB majus sit dato ($AD \times AE$;) earum utraque AB, AD data erit.

Nam ob $BA \times AE$ a datum, b erit AE ideoque

a 2. d.
b 69. d.
c hyp. 6.
1. 2.
d 8. & 6. d.
e 8. 2.
d 6. d.
e 1. 6.
f hyp.
g 2. d.
h 55. d.
k 57. d.

$\overline{ED}$, $\overline{AB}$,
AEq c hoc est AEq. d ac idcirco AEq
 $\overline{ABq}$, $\overline{AD} \times \overline{ED}$, $\overline{AEq} + 4 \overline{AD} \times \overline{ED}$,
e hoc est AEq ac proinde AE & d com-
 $\overline{QAD} + \overline{ED}$, $\overline{AD} + \overline{ED}$,
ponendo AE e ac ideo AE e hoc est AEq
 $\overline{2AD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD} \times \overline{AE}$
data. ergo ob $AD \times AE$ f datum, dantur g AEq,
& h AE, ac k ideo AD, ac AB. Q. E. D.

P R O P LXXXVIII.



Si in circulum CFED magnitudine datum acta sit recta linea CE, quae segmentum auferat, quod datum angulum F comprehendat; acta recta linea CE magnitudine data est.

Nam ducatur diameter CD; & connecatur ED. Ac ob ang. F a datum, b erit ang. D (c reliquis e rectis) datus. item rectus CED datus. c quare $\frac{CE}{CD}$ datur. ergo ob d datam CD, e erit CE data, Q. E. D.

a hyp.
b 4. d.
c 40. d.
d hyp. & 5.
def. d.
e 2. d.

PROP. LXXXIX.

Si in datum magnitudine circulum CFED data magnitudine recta CE adla fuerit, auferet segmentum quod angulum (CFE) datum comprehendet.

Nam (in fig. præcedentis) quia $\frac{CE}{CD}$, & ang. CED dantur, & erit ang. D datus. b ergo ang. F c (1 Re&. — D) datus erit. Q. E. D.

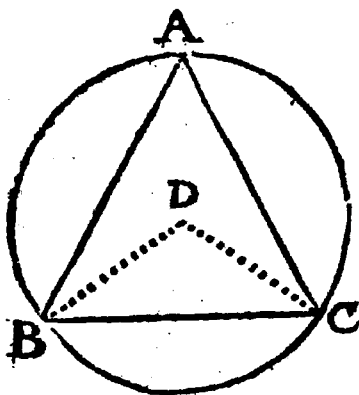
243. dat.

b 4. dat.

§ 22.3.

PROP. XC.

Si in circuli positione
dati circumferentia BAC
datum fuerit punctum B ,
ab eo autem puncto B ad
circumferentiam circuli
inflexa fuerit recta BAC
quæ datum angulum A
efficiat; inflexa recta al-
tera extremitas C data
erit

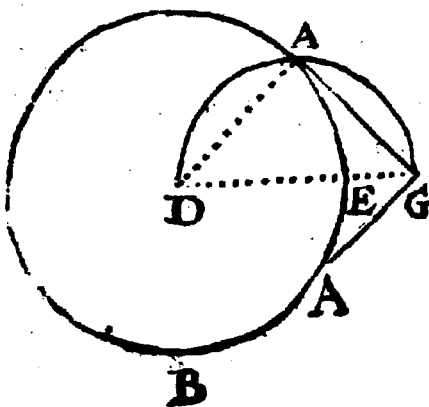


Ad α centrum D duc BD, & CD; h datufque
est ang. D dati A c duplus. quare ob B D d da-
tam, e erit DC data. f ergo punctum C datum
est. Q. E. D.

Si ang. A obtusus fuerit ; sume reliquum è 2
rectis acutum ; ejus subsidio punctum C inve-
nies, juxta dicta.

P R O P. XCI.

*Si à dato puncto G
acta fuerit recta
G A, quæ datum
positione circulum
B E A contingat;
acta linea G A po-
sitione & magnitu-
dine data est.*

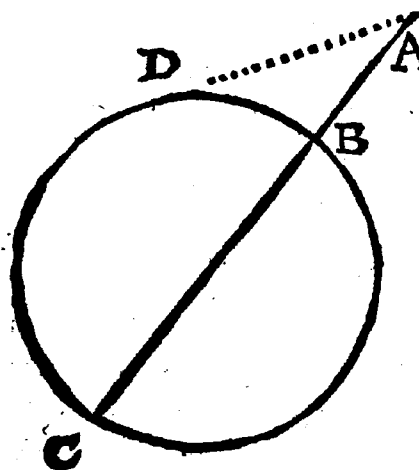


Nam & centrum punctum G

G connectat recta DG. super qua descriptus sit semicirculus D A G circulo priori occurrens in a 31. 3.
A. Ob ang. DAG a rectum, GA circulum b tan. b cor. 16. 3.
git. c ergo G A situ & magnitudine datur. c 26. dat.
Q. E. D.

Hinc modus dicitur à dato puncto tangen-
tem ducendi, eo nonnunquam expeditior qui ha-
betur ad 17. 3.

P R O P. XCII.

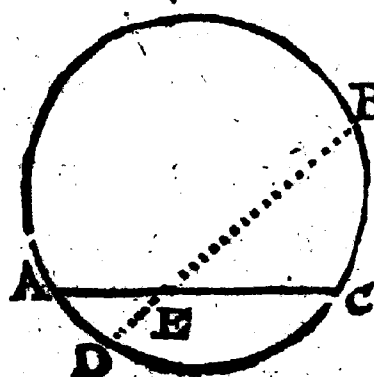


Si extra circulum
positione datum BCD
accipiat aliquod pun-
ctum A, à dato autem
puncto A in circulum
producatur quadam
recta AC; datum
est id quod sub acta
linea AC, & ea AB,
que inter punctum A
& convexam periphe-
riam B comprehenditur

rectangulum CAB.

a Nam duc tangentem A D, b eritque ADq a 91. dat.
(hoc est CA x AB) datum. Q. E. D. b 36. 3.

P R O P. XCIII.



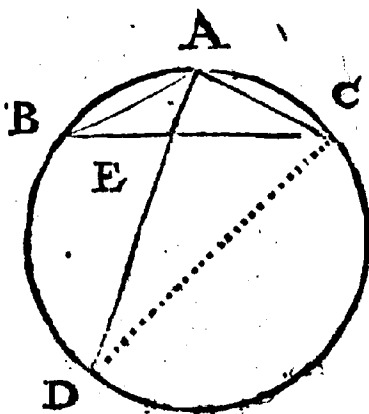
Si intra datum positio-
ne circulum A B C D
sumatur aliquod punctum
E; per punctum autem
E agatur in circu-
lum aliqua recta A E C;
quod sub segmentis A E,
E C acta recta linea
comprehenditur rectan-
gulum, datum est.

Nam

a 35. I.
b 1, def. d.

Nam per E duc rectam DEB utcumque occurr
rentem circulo in B, & D. estque rectang. DEB
= a AEC. b ergo AEC datur. Q. B. D.

PROP. XCIV.



*Si in circulum BA-
CD magnitudinis da-
tum agatur recta linea
BC, quæ segmentum
auferat, quod angulum
BAC datum compre-
hendat; angulus au-
tem BAC, qui in seg-
mento consistit, bifa-
riam secetur; simul*

utraq; rectarum BA , AC quæ angulum datum BAC comprehendunt, ad lineam AD , quæ angulum bifariam secat, habebit rationem datam: & quod sub simul utrisque BA , AC , quæ datum angulum BAC comprehendunt, rectis; & inferno abscissa (ED) ab ea AD ; quæ angulum BAC in circumferentia datum bifariam secat, rectangulum datum erit.

a 88 dat.
* 1. dat.
b 3. 6.
c 12. 5.
* 4. 6.
d 2. def. d.

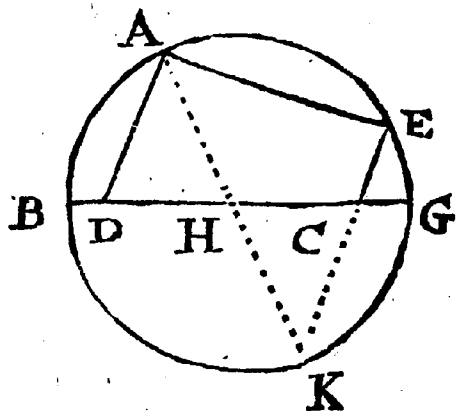
Duc CD; & primo ob angulos BAC, CAD
 datos, & dantur subtensa BC, CD, * ideoque ^{CB}_{DC}
 datur. Cum igitur CA. AB :: b CE. EB, & per-
 mutando CA. CE :: AB. EB :: (CA + AB.
 CB ::) * AD. DC. (Nam * ob ang. BAE
 = CAD; & D = B; trigona ABE, ADC si-
 milia sunt) ac rursus permutando CA + AB.
 AD :: CB. DC. d erit CA + AB data.
 Q. E. D.

e 21. 3:
I 4. 6.
c prima.
d 16 6.
c 52. dat.
f 1. def d.

Secundo, obtriangula AEB, DEC e similia;
 be it CD, DE :: AB. BE e :: CA + AB. CB
 d ergo CA + AB in DE = CD in CB. atqui
 CD x CB e datur. f ergo CA + AB in DE da-
 tum est. Q. E. D.

P R O P.

PROP. XCV.



Si in circult
BAG positione dati
diametro B G sa-
matur datum pun-
ctum D; à puncto
autem D in circu-
lum producat
quædam recta DA,
& agatur à secti-
one A ad rectos an-

Nam connectatur AK. *a* estque AK (ob angulum E, vel DAE rectum) diameter. ergo intersectio H est centrum. *b* ergo DH datur. Atqui ob KH. HA *c* :: CH. HD, *d* est CH = HD. *e* ergo CH datur. *f* ergo punctum C datur. Q. E. D. *g* ergo KC x CE, hoc est *d* AD x CE datur. Q. E. D.

a 31.3.

b 26. d.

C 4. 6.

dg. 5.

e 1. def. d.

f 27. d.

893. das,

F I N I S.